

DEUTSCHES ELEKTRONEN-SYNCHROTRON  
(DESY)

Hamburg-Gr. Flottbek 1, Flottbeker Drift 56

DESY-Bibliothek

Desy-Notiz A 2.66

Hamburg, den 4. Juli 1960

M 8-Dr.Br/VW

vorbereitende Untersuchungen zur langsamen Strahlauslenkung

- Teil II -

<u>Inhalt</u>	<u>Seite</u>
I. Erzeugung einer Betatronresonanz mit linearen Linsen	
1) Grundsätzliches zur Methode	2
2) Adiabatisches Einschalten der Linsen	6
3) Plötzliches Einschalten der Linsen	
a) Stabiler Bereich	8
b) Instabiler Bereich	12
4) Übersicht über numerische Daten und Vergleich mit anderen Methoden (Teil I, Desy-Notiz A 2.55)	14
II. Zur Erzeugung einer Resonanz mit nichtlinearen Feldern	17

## I. Erzeugung einer Betatronresonanz mit linearen Linsen

### 1) Grundsätzliches zur Methode

Durch das Einschalten linearer Linsen kann der Arbeitspunkt der Maschine in der Nähe einer oder auf eine Betatronresonanz gelegt werden. Die Amplituden der Betatronschwingungen wachsen dann zu großen Werten an, und die Teilchen können, sofern das Anwachsen bevorzugt an definierten Stellen der Maschine geschieht und sofern ihre Schrittweite  $\Delta r$  pro Umlauf groß genug ist, in einen Auslenkmagneten (Magnet mit dünner Stromschiene) gelangen, der sich am Rande der Vakuumkammer befindet und die Teilchen nach außen lenkt. Es kommen nur halbzahlige Resonanzen in Frage (also  $Q_r = 6,5$ ), da bei ganzzahligen Resonanzen die Lage des Gleichgewichtskreises instabil wird.

Damit das Anwachsen der Amplituden in Abhängigkeit von Ort und Zeit möglichst gut kontrollierbar ist, muß die eingeführte Störung die Periodizität der Maschine stark stören, und zwar so, daß keine neuen Unterperioden auftreten. Bei einer ideal periodisch gestörten Maschine tritt nämlich für ganz- und halbzahliges  $Q$  kein Anwachsen der Betatronamplituden auf, da die Umlaufmatrix die positive oder negative Einheitsmatrix wird und die Amplitudenfunktion endlich bleibt. Lediglich die stets in der Maschine und in der periodischen Störung vorhandenen Gradientenfehler führen dann dazu, daß die Maschine streng gesehen nicht periodisch ist und daß die Amplituden anwachsen. Da aber nicht bekannt ist, wo diese Fehler sich befinden, kann in diesem Falle der örtliche Verlauf des Amplitudenanstiegs nicht vorher gesagt werden.

Am weitesten entfernt von einer Unterperiode befindet man sich, wenn man die Maschine mit nur einer oder mit zwei dicht benachbarten Linsen stört. Die Verschiebung  $\Delta Q$  der Betatronwellenzahl  $Q$

ist bei Störung durch eine Linse und bei kleinem  $\Delta Q$  gegeben durch\*)

$$\Delta Q_r = \frac{1}{4\pi} \beta_r \cdot S \quad \text{für die radiale Komponente und}$$

$$\Delta Q_z = -\frac{1}{4\pi} \beta_z \cdot S \quad \text{für die vertikale Komponente.}$$

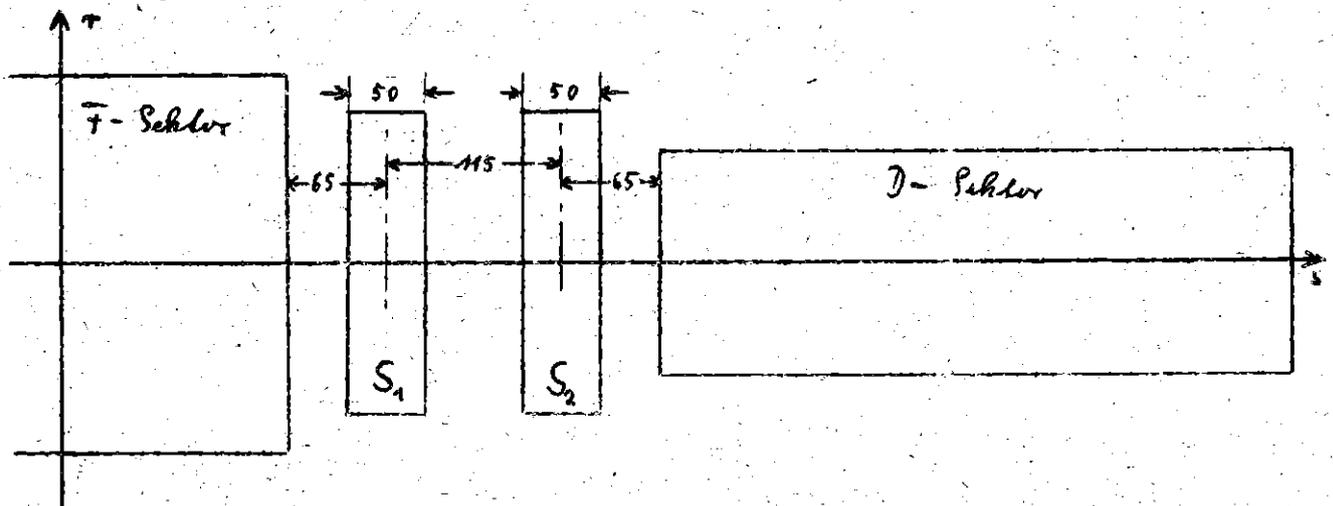
$\beta_r$  und  $\beta_z$  sind die radiale und vertikale Amplitudenfunktion der ungestörten Maschine am Ort der Linse,  $S = l \frac{e}{p} \frac{\partial B}{\partial r}$  ist die Stärke der Linse ( $S < 0$  fokussierend in  $r$ ,  $S > 0$  defokussierend). Soll  $\Delta Q_z = 0$  gelten, so muß man mindestens zwei Linsen verwenden mit den Linsenstärken  $S_1$  und  $S_2$ , wobei die eine Linse an einer Stelle mit möglichst großem  $\beta_r$  und kleinem  $\beta_z$  stehen muß, die andere an einer Stelle mit möglichst kleinem  $\beta_r$  und großem  $\beta_z$ .

Die genauen Beziehungen zwischen den Linsenstärken und den veränderten Betatronwellenzahlen  $Q_r^*$  und  $Q_z^*$  erhält man aus den Spuren der Ulaufmatrizen  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  für die radiale und vertikale Komponente:

$$T_r = a_r + b_r = 2 \cos 2\pi Q_r^* \quad (1)$$

$$T_z = a_z + b_z = 2 \cos 2\pi Q_z^* .$$

Bei der in der folgenden Figur skizzierten Lage der beiden Linsen



\*) E.D. Courant und H.S. Snyder: Annals of Physics, 3(1958), 1-48.

ergeben sich für die Spuren die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} T_r &= 12,48 S_1 + 8,23 S_2 + 11,58 S_1 S_2 \\ T_z &= -8,23 S_1 - 12,48 S_2 + 11,58 S_1 S_2 \end{aligned} \quad (1a)$$

mit  $S_{1,2}$  in  $10^{-2} \text{cm}^{-1}$ . Für  $Q_z^* = Q_z = 6,25$  ist  $T_z = 0$ , und für ein vorgegebenes  $Q_z^*$  lassen sich aus (1a) die notwendigen Linsenstärken ausrechnen. In Bild 1 sind  $S_1$  und  $S_2$  gegen  $T_r$  bei festem  $T_z = 0$  aufgetragen. Die beieinander liegenden Kurvenäste sowie entgegengesetzte Vorzeichen für  $S_1$  und  $S_2$  gehören jeweils zusammen. Halbzahliges  $Q_r$  ( $T_r = -2$ ) wird also einmal erreicht für  $S_1 = -0,21 \cdot 10^{-2} \text{cm}^{-1}$  und  $S_2 = 0,12 \cdot 10^{-2} \text{cm}^{-1}$  oder für  $S_1 = 0,48 \cdot 10^{-2} \text{cm}^{-1}$  und  $S_2 = -0,59 \cdot 10^{-2} \text{cm}^{-1}$ . Sowohl mit fokussierender als auch mit defokussierender Linse  $S_1$  gelangt man zum halbzahligen Ende des stabilen Bereiches ( $T_r = -2$ ), es ist dagegen nicht möglich, bei Festhaltung von  $Q_z$  an das ganzzahlige Ende ( $T_r = +2$ ) zu kommen.

Die Teilchenbahnen in der ungestörten Maschine lassen sich darstellen durch  $r = A \sqrt{\beta(s)} \cos(\phi(s) + B)$  mit der Amplitudenfunktion  $\beta(s)$  und der Phasenfunktion  $\phi(s) = \int_{s_0}^s \frac{1}{\beta(\tau)} d\tau$ . A und B sind Anfangskonstanten des betrachteten Teilchens. Die Bahnen in der gestörten Maschine lassen sich in analoger Weise darstellen durch

$$r = C \sqrt{\xi(s)} \cos[\psi(s) + D] \quad (2)$$

mit einer Amplitudenfunktion  $\xi(s)$  der gestörten Maschine und  $\psi(s) = \int_{s_0}^s \frac{1}{\xi(\tau)} d\tau$ . C und D sind für dieselben Anfangswerte  $r(s_0)$  und  $r'(s_0)$  im allgemeinen von A und B verschieden.

Die Amplitudenfunktion  $\xi(s)$  der gestörten Maschine ist von besonderem Interesse, weil  $\sqrt{\xi(s)}$  die Strahlenvelope darstellt.  $\xi(s)$  kann aus der Umlaufmatrix der gestörten Maschine berechnet werden, für die gilt:

$$M(s \rightarrow s+L) = \begin{pmatrix} a(s) & b(s) \\ c(s) & d(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \chi + \eta(s) \sin \chi & \xi(s) \sin \chi \\ -\frac{1 + \eta^2(s)}{\xi(s)} \sin \chi & \cos \chi - \eta(s) \sin \chi \end{pmatrix} \quad (3)$$

mit  $\eta(s) = -\frac{1}{2} \xi'(s)$  und  $\chi = \int_s^{s+L} \frac{1}{\xi(\tau)} d\tau = 2\pi Q^*$ .

Demnach gilt

$$\xi(s) = \frac{b(s)}{\sin \chi} \quad (4a)$$

Hat man die Matrix M von einem Punkt  $s_0$  aus berechnet, so kann man sie leicht für den entsprechenden Punkt  $s_m$  der m-ten vorangehenden ungestörten Maschinenperiode nach der Gleichung

$$M_m = U^{-m} M U^m$$

berechnen, wenn U die Transformationsmatrix für eine ungestörte Maschinenperiode ist. Für die Amplitudenfunktion in Punkt  $s_m$  ergibt sich damit die Beziehung

$$\xi(s_m) = \frac{B_0}{2 \sin \chi} \left\{ E + F \cos\left(\frac{4\pi Q}{N} m\right) + G \sin\left(\frac{4\pi Q}{N} m\right) \right\} \quad (4b)$$

mit den Konstanten

$$E = \frac{b}{\beta_0} + d_0 \left\{ \frac{d_0}{\beta_0} b - \frac{\beta_0}{d_0} c - a + f \right\}$$

$$F = \frac{b}{\beta_0} - d_0 \left\{ \frac{d_0}{\beta_0} b - \frac{\beta_0}{d_0} c - a + f \right\}$$

$$G = a - d - \frac{2d_0}{\beta_0} b$$

$N$  ist die Zahl der Maschinenperioden auf dem ganzen Umfang,  $\beta_0 = \beta(s_0)$ ,  $d_0 = -\frac{1}{2} \beta'(s_0)$ .

In Bild 2 ist die nach Gleichung (4b) für die oben skizzierte Anordnung und für  $Q_T^* = 6,44$  ( $Q_Z^* = 6,25$ ) berechnete Amplitudenfunktion wiedergegeben.

Der Übergang eines Teilchens, dessen Bahn in der ungestörten Maschine durch die Anfangskonstanten  $A$  und  $B$  gegeben ist, zu einer durch Gleichung (2) beschriebenen Bahn mit den Konstanten  $C$  und  $D$  in der gestörten Maschine, hängt ab von der Art des Einschaltens der Störung. Die beiden leicht zu übersehenden Grenzfälle sind adiabatisches und plötzliches Einschalten.

## 2) Adiabatisches Einschalten der Linsen

Die gestörte Maschine wird durch die Diff.-Gleichung

$$\ddot{r} + k(s) [1 + \kappa(s, k)] r = 0$$

dargestellt, worin  $\chi(s, k)$  die Störung darstellt und eine langsam veränderliche Funktion der Umlaufzahl  $k$  ist. Adiabatisches Einschalten soll bedeuten, daß man für die Dauer eines Umlaufes mit genügender Genauigkeit  $\chi(s, k)$  durch einen festen, jedoch von  $s$  abhängigen Wert ersetzen kann, daß man also für die Dauer eines Umlaufes eine Lösung  $r = C \sqrt{\xi(s)} \cos(\psi(s) + D)$  mit über einen Umlauf von der Zeit unabhängiger Funktion  $\xi(s)$  angeben kann. Die Bedingung für das adiabatische Verhalten kann auch so formuliert werden, daß  $\Delta\xi/\xi \ll 1$  für jede Stelle der Maschine gelten muß, wenn  $\Delta\xi$  die Änderung der Amplitudenfunktion an einem festen Ort in der Zeit eines Umlaufes ist. Dann läßt sich mit Hilfe der obigen Diff.-Gleichung zeigen, daß die Bahn desjenigen Teilchens, das vor Einschalten der Störung durch  $r = A \sqrt{\beta(s)} \cos(\phi + B)$  dargestellt wird, während des Anstiegs der Störung und nach Erreichen des Endwertes durch

$$r(s, k) = A \sqrt{\xi(s, k)} \cos(\psi(s, k) + \sum_{v=0}^k \chi(v) + B) \quad (5)$$

mit der momentanen Amplitudenfunktion  $\xi(s, k)$  und  $\psi(s, k) =$

$$\int_{s_0}^s \frac{1}{\xi(\tau, k)} d\tau, \quad \chi(k) = \int_{s_0}^{s_0+L} \frac{1}{\xi(\tau, k)} d\tau$$

dargestellt ist. Die Anfangsbedingungen  $A$  und  $B$  ändern sich also nicht.

Die Bewegung der Teilchen an einem festen Ort der Maschine läßt sich gut in der Phasenebene  $(r, r')$  verfolgen (Bild 3). Der Einfachheit halber betrachten wir einen Ort, an dem  $\alpha = 0$  und  $\eta = 0$  ist, die konzentrischen Phasenellipsen also eine Hauptlage besitzen (in der Mitte der Maschinensektoren ist dies auch nach Einführung der Störung noch erfüllt; siehe Bild 2 und 4). Ein bestimmtes Teilchen (A, B) bewegt sich vor Einschalten der Störung von Umlauf zu Umlauf betrachtet an dieser Stelle auf der Ellipse 1, deren

Achsen  $A\sqrt{\beta}$  und  $A/\sqrt{\beta}$  sind. Diese Ellipse verändert sich bei adiabatischem Einschalten der Störung stetig in der Weise, daß ihr Flächeninhalt  $\pi A^2$  konstant bleibt, die Achsen sich aber gemäß  $A\sqrt{\xi(k)}$  und  $A/\sqrt{\xi(k)}$  verlängern bzw. verkürzen (Ellipsen 2 und 3). Im Resonanzfall ( $Q_r^* = 6,5$ ), der theoretisch erst nach unendlich langer Zeit erreicht werden kann, artet die Ellipse zu einem unendlich langen Strich längs der  $x$ -Achse aus; die Amplituden der Schwingungen sind dann unendlich groß geworden. Sind  $\alpha$  und  $\eta \neq 0$ , so sind die Ellipsen gegenüber den Achsen verdreht, und im Resonanzfall gehen sie in eine Gerade durch den Koordinatenanfangspunkt mit der Steigung  $(1 + d)/b$  über.

In Bild 4 sind die Strahlenveloppen für verschiedene  $Q_r^*$  bei festem  $Q_z^* = 6,25$  und bei einer maximalen Anfangsamplitude von  $A_{\max} \sqrt{\beta_{\max}} = 1,3$  cm eingetragen (Nr. der Sektoren siehe Bild 2). Bild 5 gibt die Abhängigkeit der maximalen Amplitude (Mitte des F-Sektors  $m = 11$ ) von der Stärke der Linse  $S_1$  und  $S_2$  wieder, die durch die Bedingung  $\Delta Q_z = 0$  gekoppelt sind.

### 3) Plötzliches Einschalten der Linsen

Während man bei adiabatischem Hochfahren der Störung höchstens bis an die Grenzen des stabilen Bereiches ( $-2 \leq T_r \leq 2$ ) kommt, kann man bei plötzlichem Einschalten der Störung den Arbeitspunkt der Maschine für eine gewisse Zeit auch in den instabilen Bereich ( $T_r < -2$ ) legen.

#### a) Stabiler Bereich

Die Teilchenbahnen lassen sich mit Gleichung (2) darstellen, worin  $\xi(s)$  wieder die durch Gleichung (4b) gegebene Amplitudenfunktion ist. Die Konstanten C und D erhalten jedoch andere Werte als im

adiabatischen Fall. Zum Zeitpunkt des Einschaltens gilt sowohl die alte Darstellung  $r = A\sqrt{\beta} \cos(\phi + B)$  als auch die neue nach Gleichung (2). Durch Gleichsetzung von  $r$  und  $r'$  aus beiden Gleichungen erhält man für jeden Punkt der Maschine und damit für jedes Teilchen zwei Gleichungen zur Bestimmung von  $C$  und  $D$ .  $C$  und  $D$  hängen danach außer von  $A$  und  $B$  auch von  $\beta$ ,  $\alpha$ ,  $\xi$  und  $\eta$  an dem Ort der Maschine ab, an dem sich das Teilchen zum Zeitpunkt des Einschaltens befindet. Einfach wird die Umrechnung in einem Punkt  $s_0$  der Maschine, in dem wieder  $\alpha_0 = \eta_0 = 0$  ist. Dort ergibt sich

$$C = A \sqrt{\frac{\xi_0'}{\beta_0}} \sqrt{\sin^2 B + \frac{\beta_0^2}{\xi_0^2} \cos^2 B} \quad (6)$$

$$\lg D = \frac{\beta_0}{\xi_0} \lg B$$

wenn man  $\phi$  und  $\psi$ , die stets nur bis auf eine Konstante bestimmt sind, in dem betrachteten Maschinenpunkt Null setzt. Die maximale Amplitude kann also um den Faktor  $\sqrt{\xi_0'/\beta_0}$  (bzw.  $\sqrt{\beta_0/\xi_0}$ , wenn  $\xi_0 < \beta_0$ ) größer sein als im adiabatischen Fall, wenn man die Maschine auf die gleiche Betatronwellenzahl  $Q_F^*$  bringt. Die Größe  $A_{\max} \sqrt{\xi'}$  stellt bei plötzlichem Einschalten demnach nicht die Strahlenvelope dar.

Eine einfache Darstellung der Teilchenbewegungen an einem festen Ort der Maschine erhält man wieder in der Phasenebene (Bild 6). In der ungestörten Maschine bewegen sich die Teilchen auf zur Ellipse 1) konzentrischen Ellipsen. Nach Einschalten der Störung auf einen Wert von  $6,25 < Q_F < 6,5$  bewegen sich die Teilchen auf Ellipsen, die zu der durch die neue Amplitudenfunktion gegebenen Ellipse 2) konzentrisch sind, und zwar jedes auf derjenigen, die durch seinen Ort in der Phasenebene zur Zeit des Einschaltens hindurchgeht. Schaltet man auf Resonanz ( $Q_F = 6,5$ ), so entartet die Ellipsenschar zu einer Schar von parallelen Geraden 3), auf denen die Teilchen sich bewegen. Die Ellipse 4) zeigt, wo sich die Teilchen in diesem Fall nach einer Zeit  $t$  befinden, wenn sie sich zur Zeit  $t = 0$  in der Ellipse 1)

befanden. Die Pfeile in den Ellipsen 4) geben die Bewegungsrichtung der Teilchen an. Für die Geschwindigkeit der Teilchen in der r-Komponente, d. h. für die Schrittweite  $\Delta r$  pro Umlauf, erhält man bei der Hauptlage der Ellipsen (Bild 6a) aus den Gleichungen (2), (4b) und (6) nahe der Resonanz, wenn  $\cos 2\pi Q^*$  eins gesetzt werden kann,

$$\Delta r = j r' \quad (7)$$

mit der Konstanten  $j = \frac{\beta_v}{2} \left\{ E + F \cos \left( \frac{4\pi Q_m}{N} \right) + G \sin \left( \frac{4\pi Q_m}{N} \right) \right\}$  (siehe Gleichung 4b), die für  $\cos 2\pi Q^*$  nahe eins nur noch vom Ort in der Maschine und nicht mehr von  $Q^*$  abhängt. Die Geschwindigkeit der Teilchen in der r-Richtung in den Ellipsen 2) und 3) in Bild 6a ist also ihrer momentanen Ordinate  $r'$  proportional. Im Falle der Resonanz bzw. nahe der Resonanz ist  $r'$  und damit die Geschwindigkeit konstant, d. h. die Amplituden nehmen linear mit der Umlaufzahl zu. Die Schrittweite der einzelnen Teilchen bei festem  $r$  ist nach Gleichung (7) proportional  $r'$ ; sie hängt demnach ab von der Anfangsphase  $B$  und ist proportional zu der Anfangsamplitude  $A$ .

Die Teilchenbahnen nach plötzlichem Einschalten einer lokalen Störung durch Linsen lassen sich auch ohne Berechnung der neuen Amplitudenfunktion  $\xi$  darstellen. Durch  $k$ -fache Anwendung der Umlaufmatrix  $M$  der gestörten Maschine von einem Punkt  $s_0$  aus und der Übertragungsmatrix  $V$  ( $s_0 \rightarrow s$ ) der ungestörten Maschine von  $s_0$  nach einem beliebigem Punkt  $s$ , wenn sich zwischen  $s_0$  und  $s$  keine Störung befindet, erhält man

$$\begin{pmatrix} r(s, k) \\ r'(s, k) \end{pmatrix} = V(s_0 \rightarrow s) \cdot M(s \rightarrow s + kL)^k \cdot \begin{pmatrix} r_0(s_0, 0) \\ r'_0(s_0, 0) \end{pmatrix} \quad (8)$$

Hieraus ergibt sich die Darstellung

$$r(s, k) = A \sqrt{\beta(s)} \left\{ \cos k\chi \cos[\phi(s) + B] + \frac{\sin k\chi}{\sin \chi} f(s) \right\} \quad (9)$$

mit der von  $k$  unabhängigen Funktion

$$f(s) = (\cos \chi + d) \cos[\phi(s) + B] - \frac{b}{\beta_0} \cos \phi(s) \sin B$$

$$= \frac{\beta_0}{b} (1 - 2d \cos \chi + d^2) \sin \phi(s) \cos B$$
(9a)

In  $f(s)$  ist vorausgesetzt, daß an der Stelle  $s_0$   $\alpha = \alpha_0 = 0$  ist, was keine wesentliche Einschränkung bedeutet.

Die Darstellung (9) hat den Vorteil, daß sie auch auf der Resonanz noch brauchbar ist, was bei der Darstellung (2) nicht der Fall ist. (9) geht im halbzahligen Resonanzfall und in der Nähe der Resonanz außerhalb der Schwebungsmaxima über in

$$r(s, k) = A \sqrt{\beta(s)} \left\{ \cos[\phi(s) + B] - k f(s) \right\} (-1)^k$$
(10)

Hiermit ist gezeigt, daß der oben bei einer Hauptlage der Ellipse gefundene lineare Amplitudenanstieg in jedem Punkt der Maschine stattfindet, mit Ausnahme einiger diskreter Punkte, in denen für bestimmte Teilchen  $f(s) = 0$  werden kann.

Die Steigung der Bewegungsgeraden in der Phasenebene (Bild 6) ergibt sich zu

$$\frac{r'_k}{r_k} = \frac{1 + d}{b}$$

Die Bahnen derjenigen Teilchen, die im Zeitpunkt Null auf der Geraden  $r'_0 = \frac{1 + d}{b} r_0$  sich befinden, sind die einzigen geschlossenen Bahnen. Für diese Phasen wird  $f(s)$  ebenfalls Null. Wird exakt auf Resonanz eingestellt, so behalten diese Teilchen ihren Ort in der

Phasenebene bei, was auch aus den Bildern (6a) und (6b) ersichtlich ist.

b) Instabiler Bereich

Der instabile Bereich jenseits einer halbzahligen Resonanz ist gekennzeichnet durch  $T_r < -2$ . Setzt man  $\xi = -i\zeta$ ,  $\eta = -i\sigma$  und  $\chi = \pi + i\mu$ , so erhält man die Umlaufmatrix für  $-\cos \mu = a + d < -2$

$$M(s \rightarrow s + L) = \begin{pmatrix} \cos \mu + \sigma \sin \mu & \xi \sin \mu \\ \frac{1 - \sigma^2}{\xi} \sin \mu & \cos \mu - \sigma \sin \mu \end{pmatrix} \quad (11)$$

Für den k-fachen Umlauf wird

$$M^k = (-1)^k \begin{pmatrix} \cos k\mu + \sigma \sin k\mu & \xi \sin k\mu \\ \frac{1 - \sigma^2}{\xi} \sin k\mu & \cos k\mu - \sigma \sin k\mu \end{pmatrix} \quad (11a)$$

Die Funktion  $\xi$  ist wieder durch Gleichung (4b) gegeben, wenn man  $\sin \chi$  durch  $-\sin \mu$  ersetzt. Für  $\sigma$  gilt analog  $\sigma = -\frac{1}{2}\xi'$ . Nach der Gleichung (8) läßt sich eine der Gleichung (9) analoge Gleichung für die Teilchenbahnen aufstellen:

$$r(s, h) = A \sqrt{A(s)} \left\{ \cos k\mu \cos[\phi(s) + B] + \frac{\sin k\mu}{\sin \mu} g(s) \right\} (-1)^k \quad (12)$$

$$\text{mit } g(s) = (\cos \mu + d) \cos[\phi(s) - B] - \frac{L}{A_0} \cos \phi(s) \sin B \\ - \frac{L}{b} (1 + 2d \cos \mu + d^2) \sin \phi(s) \cos B \quad (12a)$$

und  $d_0 = 0$ .

Auf der Resonanz und für genügend kleine  $k/\mu$  geht Gleichung (12) wieder in einen linearen Anstieg über

$$r(s, h) = A \sqrt{\beta(s)} \left\{ \cos[\phi(s) + \beta] + h g(s) \right\} (-1)^k.$$

Für genügend große  $k/\mu$  wird dagegen aus (12)

$$r(s, h) = A \sqrt{\beta(s)} \frac{e^{k\mu}}{2} \left\{ \cos \phi(s) + \frac{g(s)}{\sin \mu} \right\} (-1)^k. \quad (13)$$

Der Amplitudenanstieg verläuft exponentiell, die Schrittweite pro Umlauf ist  $|\Delta r| = \mu r$ , bei festem  $r$  also unabhängig von den Anfangsbedingungen der Teilchen.

In der Phasenebene verläuft die Bewegung an einem festen Ort der Maschine auf einer doppelten Schar von konzentrischen Hyperbeln. Diese besitzen wieder eine Hauptlage, wenn  $G = 0$  ist (Bild 7a) oder sind gedreht, wenn  $G \neq 0$  ist (Bild 7b). Bei der Hauptlage gilt wieder für die Schrittweite pro Umlauf

$$|\Delta r| = \mu r'.$$

Die Teilchen, die sich zur Zeit des Einschaltens auf der  $r$ -Achse befinden, bleiben nun nicht in Ruhe, wie es beim stabilen Bereich der Fall war, sondern bewegen sich in  $r'$ -Richtung auf der durch ihren Ort hindurchgehenden Hyperbel. Die Achsen der Hyperbeln sind in der  $r'$ -Richtung  $\frac{A}{\sqrt{\beta}}$  und in der  $r$ -Richtung  $\frac{A}{\sqrt{\beta}}$ . Jedes Teilchen der Ausgangsellipse bewegt sich auf derjenigen Hyperbel, die durch seinen Ausgangspunkt in der Phasenebene hindurchgeht. Durch jeden Punkt mit Ausnahme des Koordinaten-Anfangspunktes geht genau eine Hyperbel. Die Teilchen auf den Asymptoten, die bei der Hauptlage der Hyperbel die Steigung  $\frac{1}{\mu}$  haben, wandern auf den Asymptoten

und besitzen auch für kleine  $k$  bereits einen exponentiellen Amplitudenanstieg.

4) Übersicht über numerische Daten und Vergleich mit anderen Methoden (Teil I, Desy-Notiz A 2.55)

Ein plötzliches Verlegen des Arbeitspunktes  $Q_r$  auf einen Punkt nahe der Resonanz im stabilen Bereich oder auf die Resonanz ist für die Auslenkung ungünstig, da dann die Schrittweite der Teilchen am Ejektor proportional ihrer Anfangsamplitude ist und von ihrer Anfangsphase abhängt und damit über einen großen Bereich von Null aus streut. Die Mindestschrittweite am Ejektor muß etwa 0,5 mm pro Umlauf betragen; man würde also wegen des linearen Amplitudenanstiegs auf höchstens 100  $\mu$ sec Pulsdauer kommen (50 mm Entfernung zwischen Sollkreis und Ejektor), wobei der Verlust an Teilchen noch beträchtlich wäre. Auch bei adiabatischem Einschalten ist es nicht möglich, die Schrittweiten für Teilchen mit zu kleinem  $A$  am Ejektor zu erhöhen, da das plötzliche Einschalten den schnellsten Amplitudenanstieg liefert. Außerdem müßten bei adiabatischem Einschalten die Linsen über einen Bereich hinweg gesteuert werden, der nur einige  $\frac{0}{00}$  der Resonanzstärke breit ist und nahe bei der Resonanz liegt (siehe Bild 4). Es ist deshalb zweckmäßiger, den Arbeitspunkt plötzlich in den instabilen Bereich nahe der Resonanz zu legen, da dort der Amplitudenanstieg exponentiell verläuft und die Schrittweite für alle Teilchen, von denen mit besonders großer Anfangsamplitude abgesehen, am Ort des Ejektors gleich ist.

Nach Gleichung (13) ist die Schrittweite pro Umlauf  $\Delta r = \sqrt{ur}$ . Das ergibt für  $\Delta r = 1$  mm und  $r = 50$  mm ein  $\mu = 0.02$ . Die Teilchen mit einer Anfangsamplitude von  $r_0 \approx 0.1$  mm würden dann nach  $k = 310$

Umläufen eine Amplitude von 50 mm erreicht haben und ausgelenkt werden. Da nur noch ca. 1 % aller Teilchen eine kleinere Amplitude haben, ist nach 300 Umläufen praktisch das Ende des Pulses erreicht (die Pulsform ist ungefähr eine Boltzmann-Verteilung, der Puls läuft in einen langen dünnen Schwanz aus). Aus  $\mu = 0,02$  ergibt sich für die Spur der Umlaufmatrix  $T_r = -2,0004$ . Die zugehörigen Linsenstärken sind etwa wie auf der Resonanz  $S_1 = -0,21 \text{ cm}^{-1}$  und  $S_2 = \frac{\Delta S_1}{S_1} = 0,12 \cdot 10^{-2} \text{ cm}^{-1}$ . Einer Schwankung der Linsenstärke von  $\frac{\Delta S_1}{S_1} = \pm 0,1 \text{ } \text{‰}$  entspricht ein  $\frac{\Delta h}{h} = \pm 25 \text{ } \text{‰}$  und damit einer Schwankung der Ejektionszeit um  $\pm 20 \text{ } \text{‰}$ , d. h. es wird eine starke, kaum zu erfüllende Forderung an die Reproduzierbarkeit der Linsenstärke gestellt.

Für die ausgelenkten Elektronen ergibt sich bei einer Dicke des stromführenden Ejektorbleches von 0,5 mm und einer inneren Breite des Ejektors von 6 mm, wenn der Ejektor sich im 0-Sektor vor oder hinter dem F-Sektor  $m = 11$  (siehe Bild 2) befindet, ein Verlust von 40 %. Hierbei ist berücksichtigt, daß die Amplituden nach dem Einschalten zunächst linear ansteigen. Der Amplitudenanstieg in benachbarten F-Sektoren ( $m = 9; 13$ ) verläuft langsamer als im Sektor  $m = 11$ , da die Schrittweite nach Gleichung (7) der Funktion  $\eta$  proportional ist. Diese Funktion ändert sich über die Resonanz hinweg ins instabile Gebiet hinein (von  $T_r = -1,84$  bis  $T_r = -2,004$ ) kaum und hat also etwa den Verlauf der noch mit  $\sin \chi$  zu multiplizierenden Funktion  $\xi$  in Bild 2. Es besteht also keine Gefahr, daß die Teilchen anderswo gegen die Vakuumkammer stoßen, wenn der Gleichgewichtskreis nicht ungünstig verbogen ist.

Die Winkeldivergenz des Strahls am Ejektor ist durch die Breite der Hyperbelschar in der  $r'$ -Richtung am Ort  $r$  und  $s$  des Ejektors gegeben. Sie beträgt etwa  $\Delta r' = \pm 0,2 \text{ mrad}$ .

Die Energiebreite beträgt bei auf  $\pm 1 \text{ } \text{‰}$  während eines Pulses konstantem Maschinenfeld  $\Delta p/p = \pm 1 \text{ } \text{‰}$ , da die Breite des phasenstabilen Bereiches am Ende der Beschleunigung vernachlässigbar klein ist

Die erforderlichen Linsenstärken von  $S_1 = -0,21 \text{ cm}^{-1}$  bzw.  $S_2 = 0,12 \cdot 10^{-2} \text{ cm}^{-1}$  ergeben bei einer Linsenlänge von 50 cm für 6 GeV-Elektronen einen Feldstärkegradienten von  $\frac{\partial B_z}{\partial r} = -840 \text{ Gauß/cm}$  bzw.  $\frac{\partial B_z}{\partial r} = 480 \text{ Gauß/cm}$ . Die Gleichstromleistung dieser Linsen (Anforderung an die Gleichstromquelle bei Speisung über Thyratrons) beträgt ca. 50 kW. Plötzliches Einschalten der Linsen bedeutet, daß die Einschaltzeit klein sein muß gegen die Ejektionszeit für Teilchen kleiner Anfangsamplitude; sie sollte etwa  $10^{-5} \text{ sec}$  betragen. Hierbei dürften auch irgendwelche Subresonanzen, die zwischen 6,25 und 6,5 liegen, noch nicht zur Geltung kommen, da dieser Bereich infolge der starken Änderung des Q-Wertes von Umlauf zu Umlauf nicht durchlaufen, sondern übersprungen wird.

Die folgende Tabelle stellt die Ergebnisse den früher bei anderen Ejektionsmethoden gewonnenen Ergebnissen (Desy-Notiz A 2.55) gegenüber. Die angegebene Energiedivergenz berücksichtigt nicht die Schwankung von Puls zu Puls, die infolge der Schwankungen des Maschinenfeldes auftritt. Der angegebene Energiebedarf umfaßt alle erforderlichen Ejektionsmagnete einschließlich einer Korrekturlinse zur Kompensation des Streufeldes der Maschine.

Methode	Strahlgs.-Verlust	closed orbit Beule	closed orbit Beule+transv. HF-Feld	Betatron-Resonanz $Q_r \rightarrow 6.5$
Pulslänge	1000 /usec	45 /usec	100 /usec	300 /usec
an Ejektor $\left( \begin{array}{l} \Delta r [\text{cm}] \\ \Delta r' [\text{mrad}] \end{array} \right.$	$\begin{array}{l} 0.6 \\ \pm 2.5 \end{array}$	$\begin{array}{l} 0.6 \\ \pm 1.5 \end{array}$	$\begin{array}{l} 0.6 \\ \pm 1.5 \end{array}$	$\begin{array}{l} 0.6 \\ \pm 0.2 \end{array}$
$\Delta p/p$	$\pm 8 \text{ ‰}$	$\pm 1 \text{ ‰}$	$\pm 1 \text{ ‰}$	$\pm 1 \text{ ‰}$
Ausbeute	$\begin{array}{l} 6 \text{ GeV: } 70 \% \\ 4 \text{ GeV: } 10 \% \end{array}$	70 %	70 %	60 %
Energie pro Puls [KWsec]	1.5	2.6	1.7	2.6

Zusammenfassend sind außer der begrenzten Pulsdauer die wesentlichen Nachteile der Betatronresonanz-Methode mit linearen Linsen: Schlechte Reproduzierbarkeit der Pulsdauer; ungünstige Form des Pulses (ungefähr Boltzmann-Verteilung).

## II. Zur Erzeugung einer Resonanz mit nichtlinearen Feldern

Bei allen bisher untersuchten Ejektionsmethoden, mit Ausnahme der Strahlungsverlust-Methode, ist eine merkliche Verlängerung der Pulsdauer über die angegebenen Grenzen hinaus nicht möglich. Dies scheidet grundsätzlich daran, daß der Ejektionsmechanismus, ein von  $r$  unabhängiges Feld oder von  $r$  unabhängiger Feldgradient, stets auf den vollen Strahl einwirkt und nicht die einzelnen Teilchen entsprechend ihren Unterschieden in den Synchrotron- oder Betatronschwingungsamplituden beeinflusst, wie man es bei der Strahlungsverlust-Methode durch Hinausschieben aus der stabilen Phase machen kann.

Man muß also ein in  $r$  nichtlineares Feld benutzen, um stärker amplitudenabhängige Effekte zu bekommen. Der stärkste Effekt hierbei ist die Abhängigkeit der Betatronwellenzahl  $Q$  von der Amplitude der Schwingungen bzw. von der Lage des Gleichgewichtskreises. Das nichtlineare Feld muß so geartet sein, daß es den Strahl in seiner Normalbreite und -lage nicht beeinflusst. Durch einen besonderen Mechanismus müssen die Teilchen nach und nach in den Einfluß des nichtlinearen Feldes gebracht werden. Der Ejektionsmechanismus zerfällt also in zwei Teile, nämlich in den Abwanderungsmechanismus für die Teilchen und den Resonanzmechanismus.

Der Abwanderungsmechanismus für die Teilchen kann nach den folgenden Verfahren arbeiten:

- a) Durch zeitlich ansteigendes transversales HF-Rauschen werden statistisch die Betatronschwingungen der Teilchen erhöht. Bei Erreichen einer bestimmten Amplitude (ca. 4 cm) tritt die Resonanz im nichtlinearen Feld ein. Da der Strahl infolge des transversalen HF-Rauschens sich auf dem ganzen Umfang aufweitet, besteht die Gefahr, daß überall Teilchen verloren gehen. Dies

könnte durch eine zusätzliche closed-orbit-Beule (siehe Desy-Notiz A 2.55) am Ort des Ejektors verhindert werden. Die Pulsdauer ergibt sich aus dem zeitlichen Anstieg der statistisch erzeugten Betatronschwingungen, das heißt aus der Stärke des HF-Rauschens, und kann beliebig eingestellt werden.

- b) Durch eine zeitlich ansteigende closed-orbit-Beule werden die Teilchen nach und nach in das nichtlineare Feld geschoben. Die Teilchen mit großer Betatronamplitude werden zuerst vom Feld erfaßt und ausgelenkt. Die Pulsdauer ist gegeben durch den zeitlichen Anstieg der Beule und kann beliebig eingestellt werden.
- c) Die Beschleunigungs-HF wird abgeschaltet und die Teilchen werden durch das  $\frac{\partial B}{\partial t}$  der Maschine in das nichtlineare Feld geschoben, wobei die Teilchen mit großer Betatronamplitude zuerst in das Feld gelangen und ausgelenkt werden. Die Pulslänge ist durch die Breite des Strahls (ca. 2 cm) und durch das  $\frac{\partial B}{\partial t}$  vor dem Maximum der Feldkurve auf maximal ca. 500  $\mu$ sec begrenzt.
- d) Die Teilchen werden gemäß ihrer Verteilung über die Synchrotron-schwingungsamplituden nach und nach aus der stabilen Phase geschoben (entweder durch programmierte Verkleinerung des stabilen Bereiches oder durch longitudinales Rauschen) und werden durch das  $\frac{\partial B}{\partial t}$  der Maschine in das nichtlineare Feld gebracht. Damit die Energieunterschiede im Strahl nicht größer werden als  $\frac{\Delta p}{p} = \pm 0,5 \%$ , ist die maximal erreichbare Pulslänge auf ca. 600  $\mu$ sec (bei einem Strahldurchmesser in radialer Richtung von ca. 2 cm) begrenzt.

Da die Verfahren c) und d) die Pulslänge von vornherein wieder begrenzen (erwünscht wäre eine Pulslänge von mindestens 1 msec), sollen sie zunächst aus den weiteren Betrachtungen ausgeschieden werden. Von den restlichen Verfahren ist a) aufwendiger als b), da es außer closed-orbit-Verbiegern einen HF-Rausch-Generator benötigt. Die weiteren Untersuchungen sollen sich daher auf das Verfahren b) beschränken.

Die gesamte bei b) am Ort des nichtlinearen Feldes auftretende closed-orbit-Verbiegung  $\hat{r}$  läßt sich leicht berechnen. Sie setzt sich aus zwei Anteilen  $\hat{r}_1$  und  $\hat{r}_2$  zusammen. Der Anteil  $\hat{r}_1$  entsteht durch das von  $r$  unabhängige, zeitlich ansteigende Feld  $B_1(t)$  des closed-orbit-Verbiegers und ist proportional  $B_1(t)$ . Ohne Einschränkung der allgemeinen Gültigkeit kann das Feld  $B_1(t)$  zur Vereinfachung der Darstellung am Ort des nichtlinearen Feldes  $B_2$  gelegen gedacht sein. Der Anteil  $\hat{r}_2$  entsteht durch das von  $r$  abhängige, aber zeitlich konstante nichtlineare Feld  $B_2(r)$ , in das der Strahl durch das Feld  $B_1(t)$  hineingeschoben wird, und ist proportional dem Feld  $B_2$  am Ort der neuen Lage des closed-orbit mit derselben Proportionalitätskonstanten wie bei  $\hat{r}_1$ . Für die gesamte Verschiebung gilt also

$$\hat{r} = C [B_1(t) + B_2(\hat{r})]$$

Im speziellen Beispiel eines kubischen Feldanstiegs  $B_2 = Kr^3$  erhält man, wenn man  $\hat{r}$  als Funktion von  $B_1$  darstellt, die in Bild 8 wiedergegebenen kubischen Parabeln, und zwar Kurve 1) für  $K > 0$  und Kurve 2) für  $K < 0$  (die Konstante  $C$  wurde eins gesetzt). Das Bild enthält außerdem die closed-orbit-Abwanderung  $\hat{r} = B_1$ , wenn kein nichtlineares Feld vorhanden wäre, und das nichtlineare Feld  $B_2 = Kr^3$ ,  $K > 0$ . Wenn  $\frac{\partial B_2}{\partial r} < 0$  ( $K < 0$ ) ist, wandert der closed-orbit mit ansteigendem Feld  $B_1$  zu positivem  $r$  ab, jedoch langsamer als im Fall ohne nichtlineares Feld. Die beiden Anteile  $\hat{r}_1$  und  $\hat{r}_2$  wirken einander entgegen. Das nichtlineare Feld mit  $\frac{\partial B_2}{\partial r} < 0$  bewirkt darüberhinaus, daß die Betastrahlwellenzahl  $Q$  von 6,25 in Richtung auf 6,5 verschoben wird. In dem anderen Fall mit  $\frac{\partial B_2}{\partial r} > 0$  ( $K > 0$ ) wandert der closed-orbit zunächst schneller ab, als wenn das nichtlineare Feld nicht vorhanden wäre, die beiden Anteile  $\hat{r}_1$  und  $\hat{r}_2$  wirken gleichsinnig. Wegen  $\frac{\partial B_2}{\partial r} > 0$  wird außerdem  $Q$  in Richtung auf 6,0 verschoben. In den Maxima der Kurve 1) ( $B_1$  als Funktion von  $\hat{r}$ ) ist  $\frac{\partial B_2}{\partial r} = \frac{\partial B_1}{\partial r}$ . Die Gerade  $B_1 = C\hat{r}$  ( $C = 1$ ) stellt aber genau den Feldverlauf der linearen Linse dar, welche die Resonanz  $Q = 6,0$  erzeugt, da dann durch jedes  $r$  eine geschlossene Bahn geht. Dies bedeutet, daß in den Maxima der Kurve 1)

die Resonanz  $Q = 5,0$  erreicht wird und daß der closed-orbit im Bild 8 parallel zur  $\hat{A}$ -Achse ohne weitere Veränderung von  $B_1$  abwandert. Für die Ejektion ist nur die Kurve 2) brauchbar, d. h. das nichtlineare Feld muß ein  $\frac{\partial B}{\partial r} < 0$  besitzen. Obige Aussagen lassen sich leicht auf alle Potenzen des Feldanstiegs erweitern.

Für den Resonanzmechanismus gibt es zwei Möglichkeiten:

- 1) Betatronresonanz auf  $Q_r = 6,5$  ( $T_r = -2$ ).
- 2) HF-Resonanz auf einem beliebigem  $Q_r$  im stabilen Bereich, jedoch ungleich dem  $Q_r$  der ungestörten Maschine. Für die Frequenz der HF besteht die Bedingung  $\nu = (n \pm Q_r) \cdot f$  mit ganzzahligem  $n$  (siehe Desy-Notiz A 2.52).

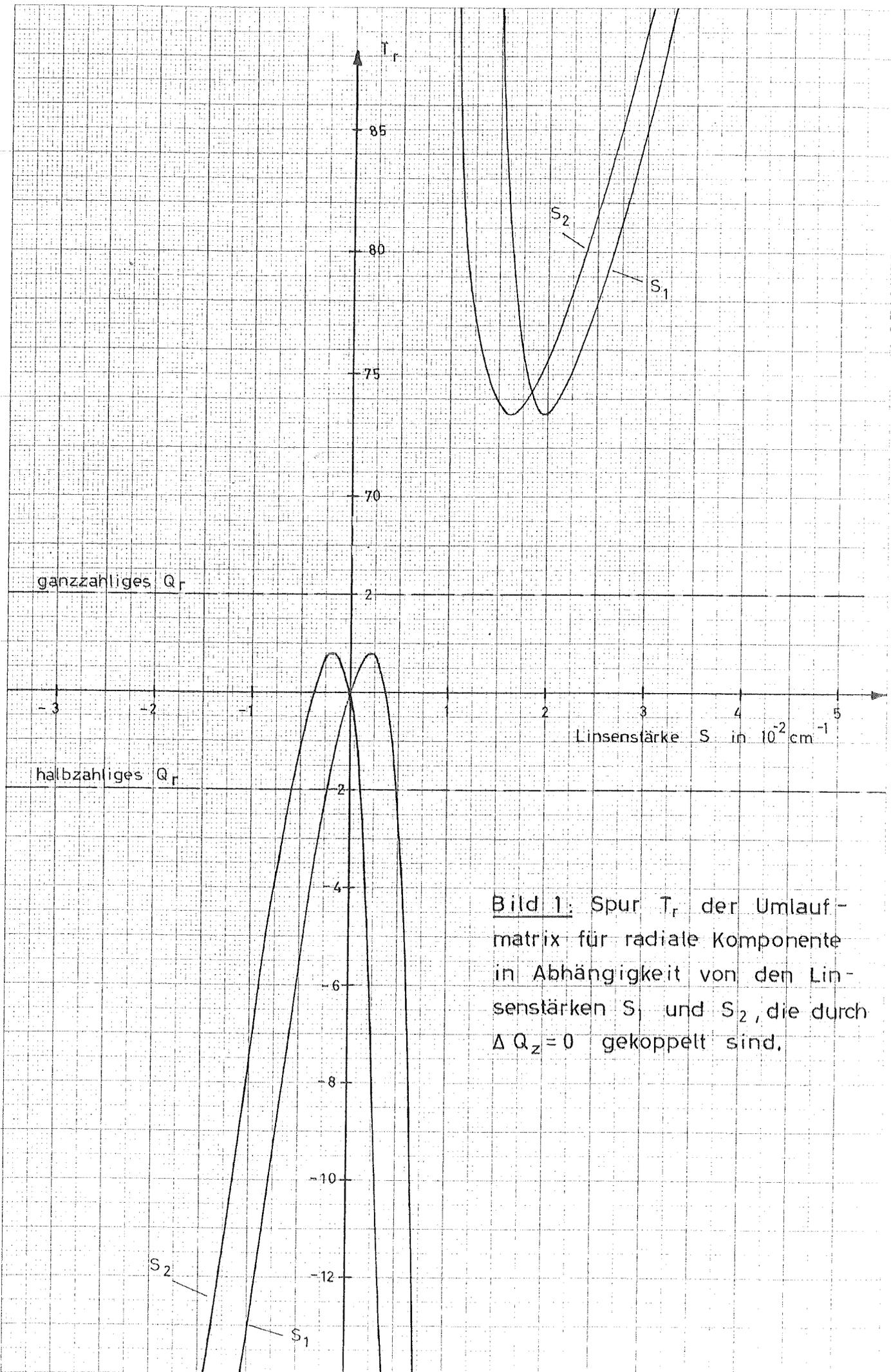
Die zweite Möglichkeit benötigt zusätzlich gegenüber der ersten ein transversales HF-Feld. Außerdem entsteht bei ihr höchstens ein linearer Amplitudenanstieg gegenüber einem möglichen exponentiellen Anstieg bei 1). Schließlich ist es unter 2) möglich, daß die Amplituden infolge Überschreitens des vorgegebenen  $Q_r$ -wertes für die Resonanz wieder absinken, was bei 1) nicht möglich ist, da dort mit größer werdendem  $|\frac{\partial B}{\partial r}|$  die Maschine nicht wieder stabil wird. Es ist deshalb der Möglichkeit 1) den Vorzug zu geben.

Bei der numerischen Berechnung der Teilchenbahnen sollte von realisierbaren nicht-linearen Feldern ausgegangen werden. An dieses Feld werden die folgenden Anforderungen gestellt: Im Bereich der Ruhelage des Strahls am Ende der Beschleunigung muß das Feld praktisch Null sein. Am Anfang der Beschleunigung, solange der Strahl sich noch nicht zusammengezogen hat, muß das Feld überhaupt Null sein. Im Abstand ca.  $r = 4$  cm vom Sollkreis muß es den für die Resonanz erforderlichen Gradienten besitzen, das sind etwa nach den obigen Ausführungen über die Verwendung linearer Linsen 800 Gauß/cm bei einer

Länge des Feldes von 50 cm. Das Feld muß also von Null bei  $r = 1$  cm aus sehr steil ansteigen. Einen sehr steilen Feldanstieg hat man über eine schmale und hohe Stromschiene hinweg (Bild 8, Kurve a). Durchbricht man diese Schiene in der Mittelebene, um die Teilchen frei hindurchgehen zu lassen, so fällt der Gradient etwas ab (Kurve b), ist aber noch ausreichend groß. Überlagert man diesem Feld z.B. das Feld der Kurve c), welches das äußere Streufeld eines D-Sektors ist, so erhält man den in Kurve d) wiedergegebenen Verlauf, der den Anforderungen etwa genügen dürfte.

Um eine gleichzeitige Resonanz in der z-Richtung zu vermeiden, wäre es zweckmäßig, mit symmetrisch aufgestellten linearen Linsen vorher das  $Q_x$  unter Festhaltung von  $Q_z = 6,25$  auf einen Wert nahe 6,5, etwa auf 6,42, adiabatisch zu verschieben. Der nun erforderliche Gradient des nichtlinearen Feldes ist wesentlich kleiner als im obigen Fall (ca. 10-20 %, siehe Bild 5) und kann die z-Richtung nur unwesentlich beeinflussen. Damit wären gleichzeitig die Anforderungen an das nichtlineare Feld geringer als wenn man mit Hilfe eines weiteren nichtlinearen Feldes versuchen würde, die z-Richtung zu kompensieren.

F. Brasse



**Bild 1:** Spur  $T_r$  der Umlaufmatrix für radiale Komponente in Abhängigkeit von den Linsenstärken  $S_1$  und  $S_2$ , die durch  $\Delta Q_z = 0$  gekoppelt sind.

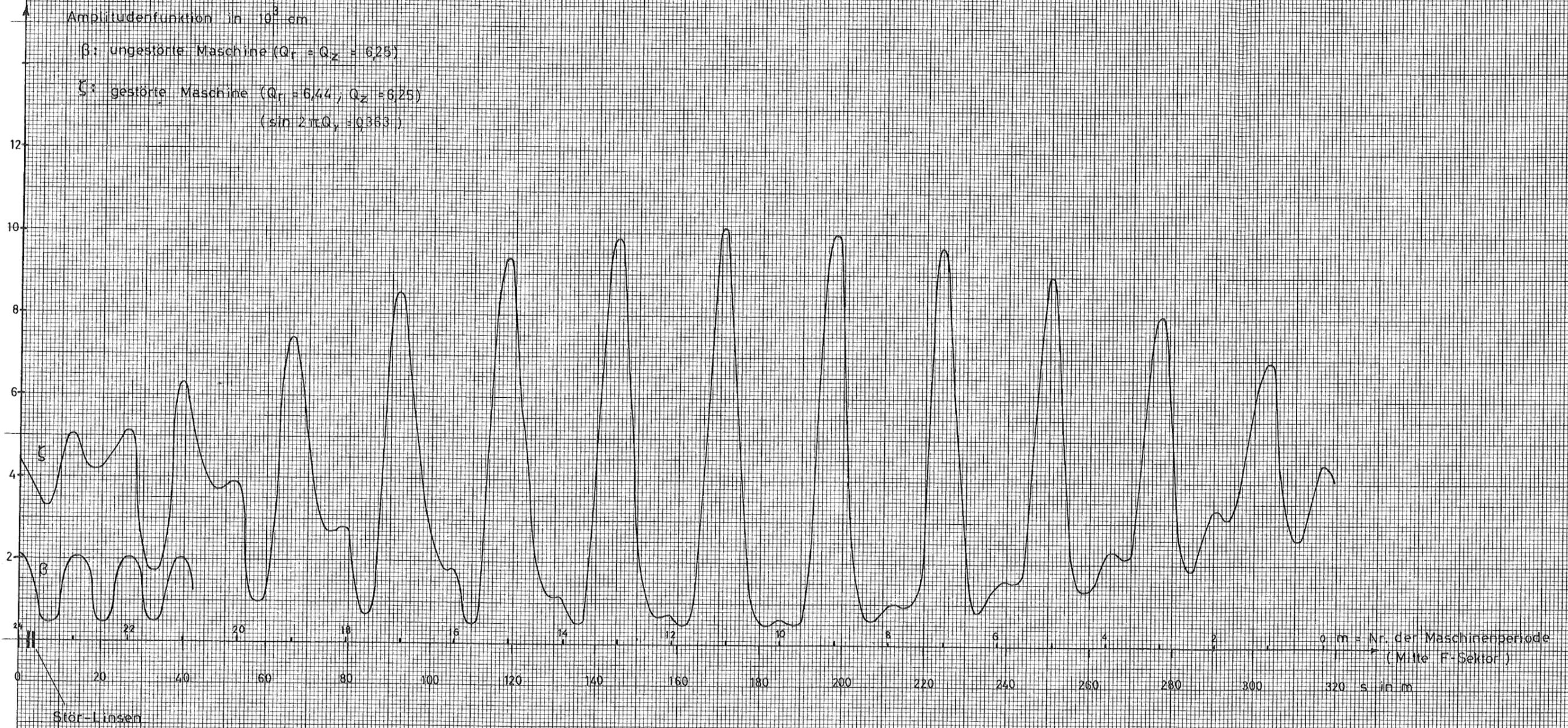


Bild 2: Amplitudenfunktion  $\beta$  der ungestörten und  $\zeta$  der gestörten Maschine

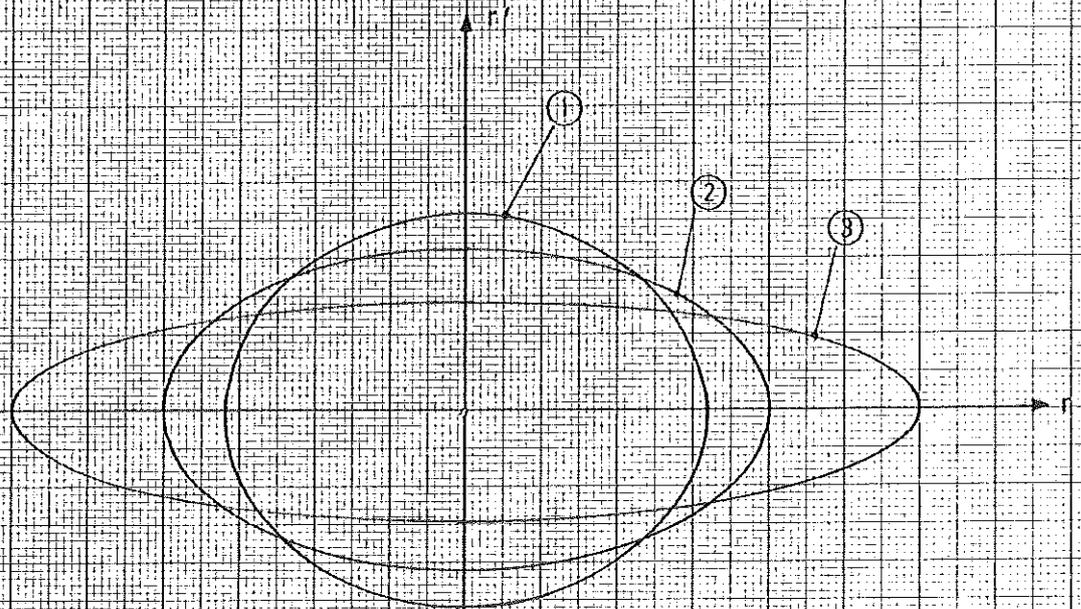


Bild 3: Veränderung der Phasenellipse an einem festen Ort  
 der Maschine bei adiabatischem Einschalten der  
 Störung. ① ungestörte Maschine, ② und ③ in  
 Richtung auf  $Q_r = 65$  gestörte Maschine. Flächen-  
 inhalt der Ellipsen einander gleich.

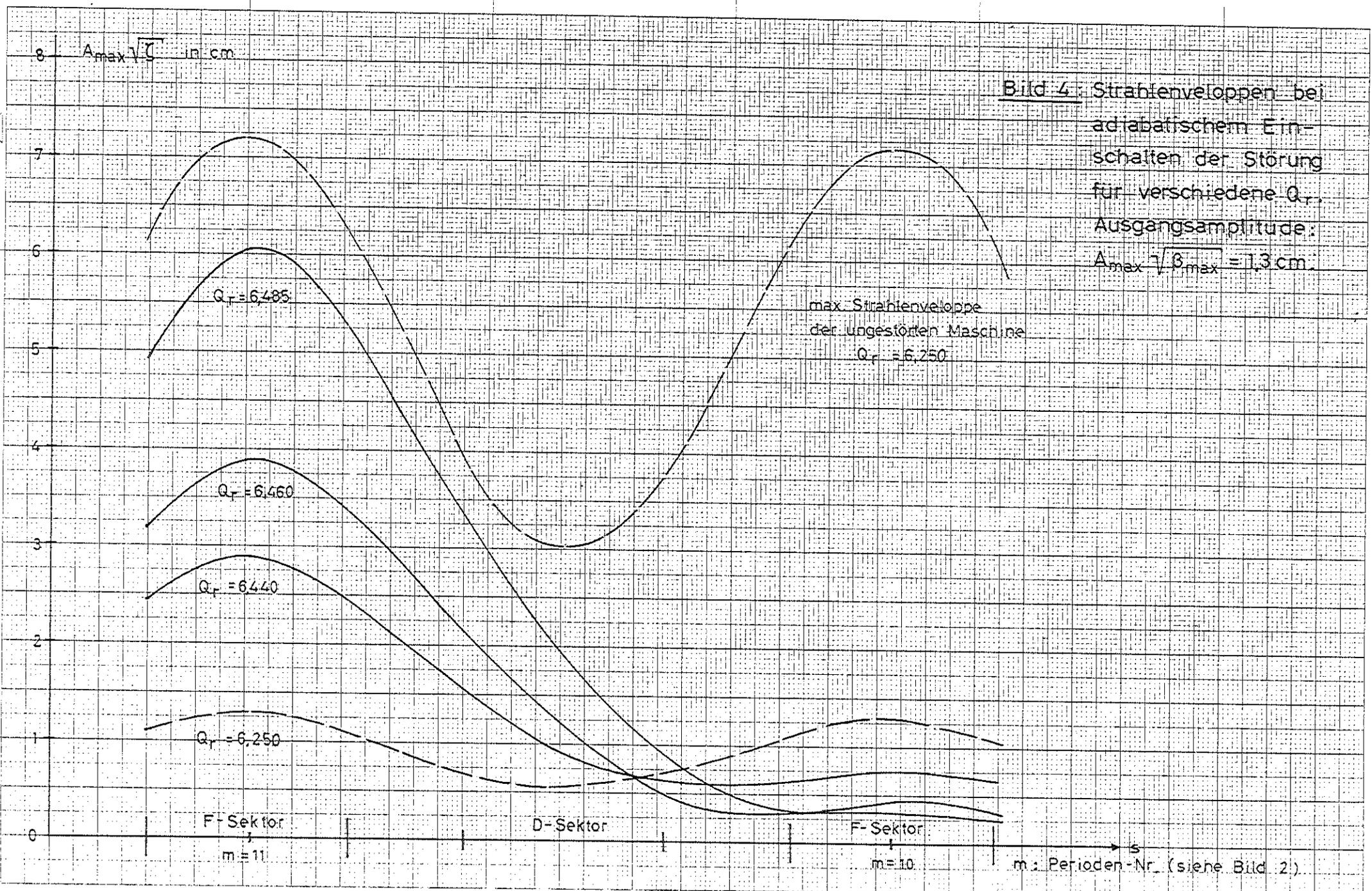


Bild 4: Strahlenveloppen bei adiabatischem Einschalten der Störung für verschiedene  $Q_r$ . Ausgangsamplitude:  $A_{\max} \sqrt{\beta_{\max}} = 1,3 \text{ cm}$ .

max. Strahlenveloppe der ungestörten Maschine  $Q_r = 6,250$

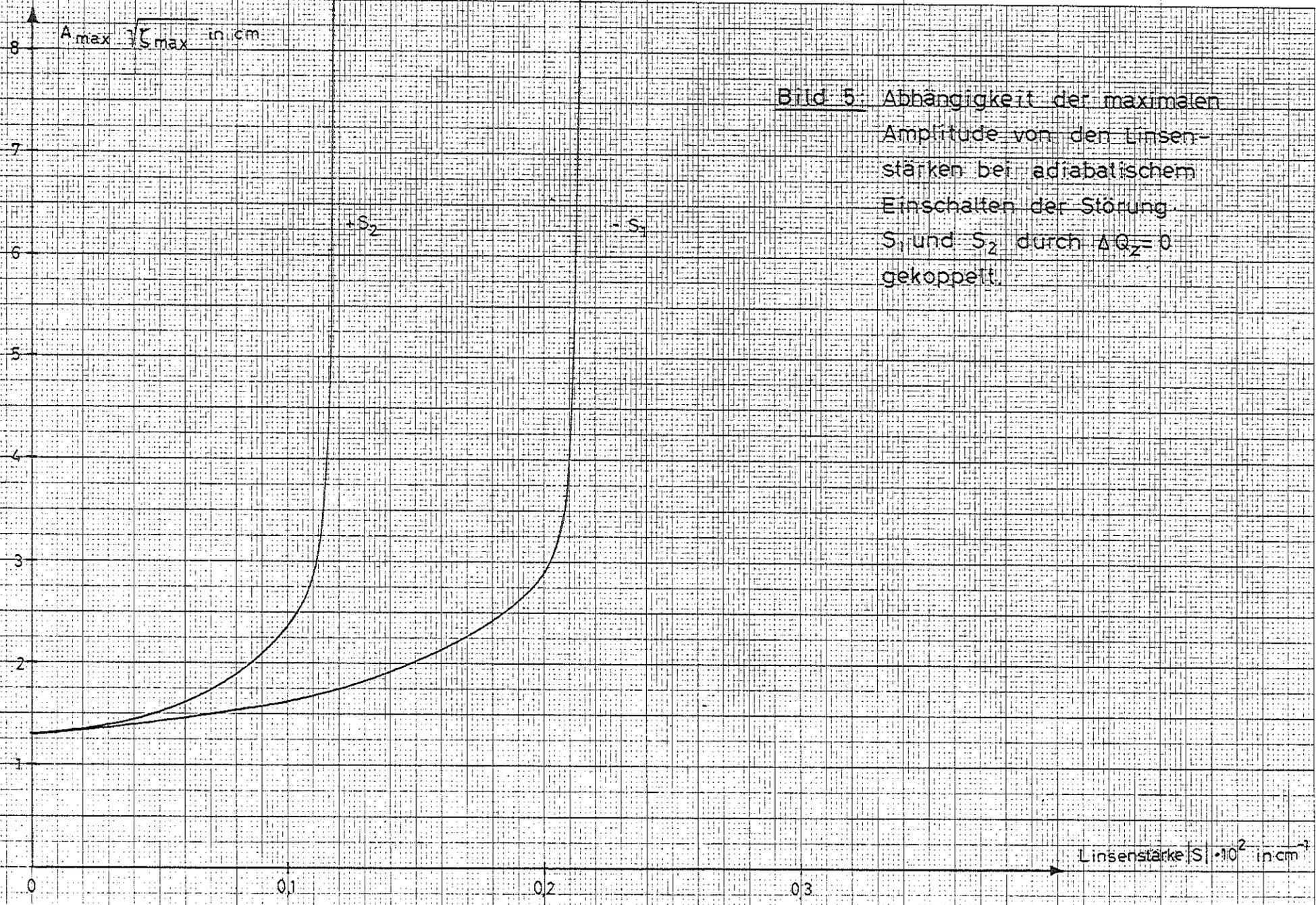
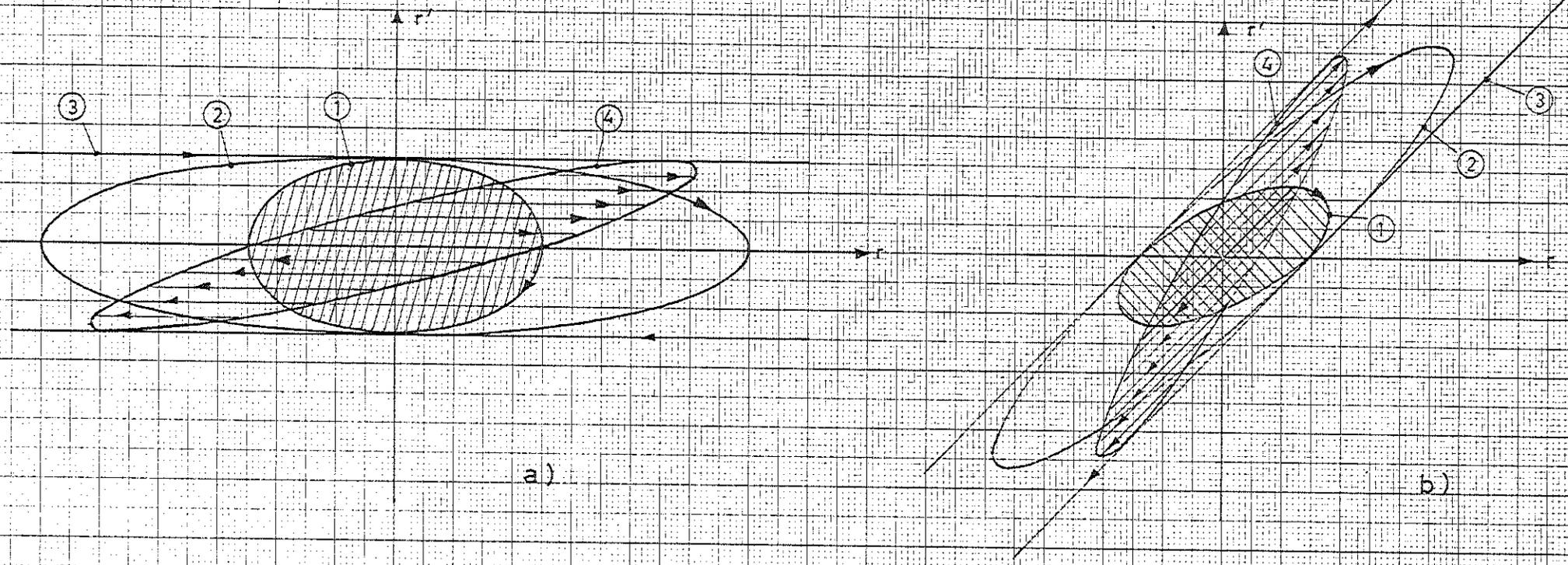
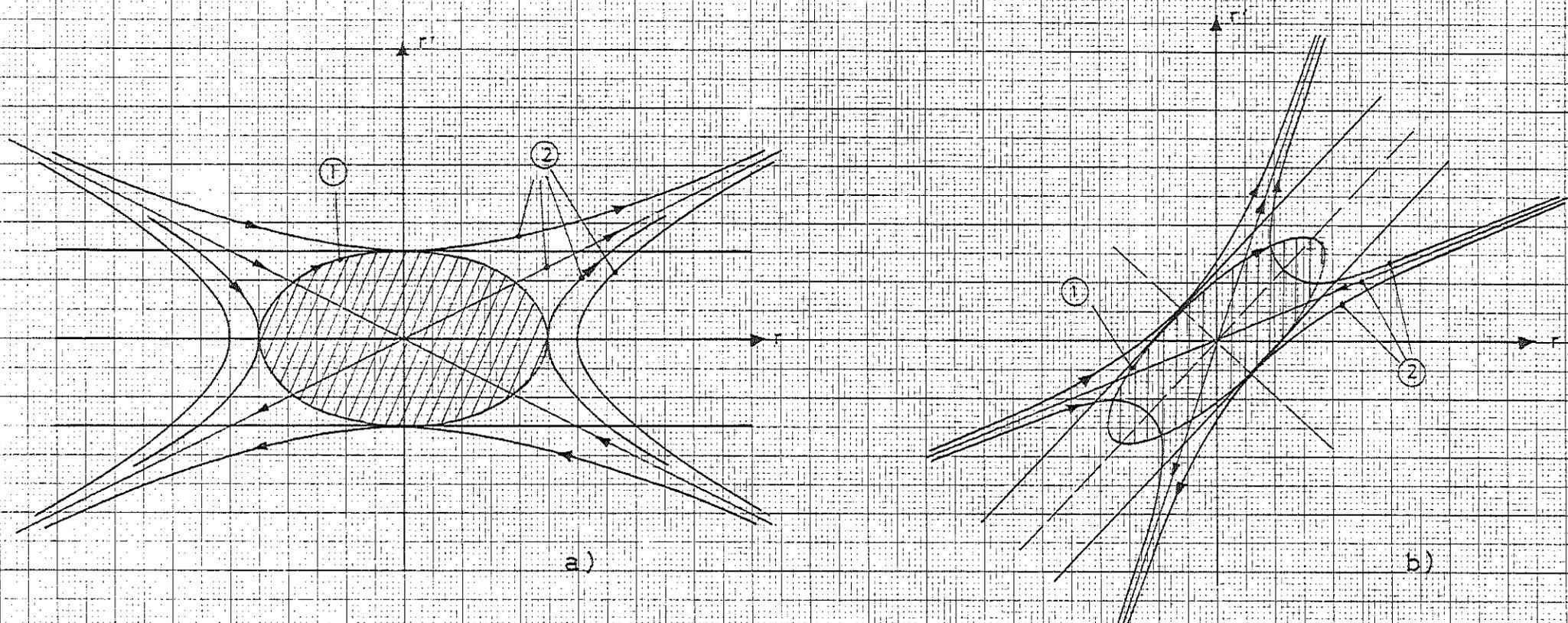


Bild 5: Abhängigkeit der maximalen Amplitude von den Linsenstärken bei adiabatischem Einschalten der Störung  $S_1$  und  $S_2$  durch  $\Delta Q_Z = 0$  gekoppelt.



**Bild 6:** Veränderung der Phasenellipse bei plötzlichem Einschalten der Störung in den stabilen Bereich, a) an einem Ort, an dem die Ableitung der Amplitudenfunktion Null bleibt, b) an einem allgemeinen Ort der Maschine.

- ① = Ausgangsellipse, ② = gestörte Maschine  $-2 < T_r < 0$ , ③ = gestörte Maschine  $T_r = -2$  (Resonanz),
  - ④ = Einhüllende der Teilchen nach einer Zeit  $t$  des Einschaltens auf  $T_r = -2$ .
- Ellipsen ① und ④ haben gleichen Flächeninhalt.



**Bild 7:** Veränderung der Phasenellipse bei plötzlichem Einschalten der Störung in den instabilen Bereich, a) an einem Ort, an dem die Ableitung der Amplitudenfunktion Null bleibt, b) an einem allgemeinen Ort der Maschine.

① = Ausgangsellipse, ② = doppelte Schar von Hyperbeln mit gleichem Achsenverhältnis als Teilchenbahnen bei Störung der Maschine gemäß  $T_r < -2$ .

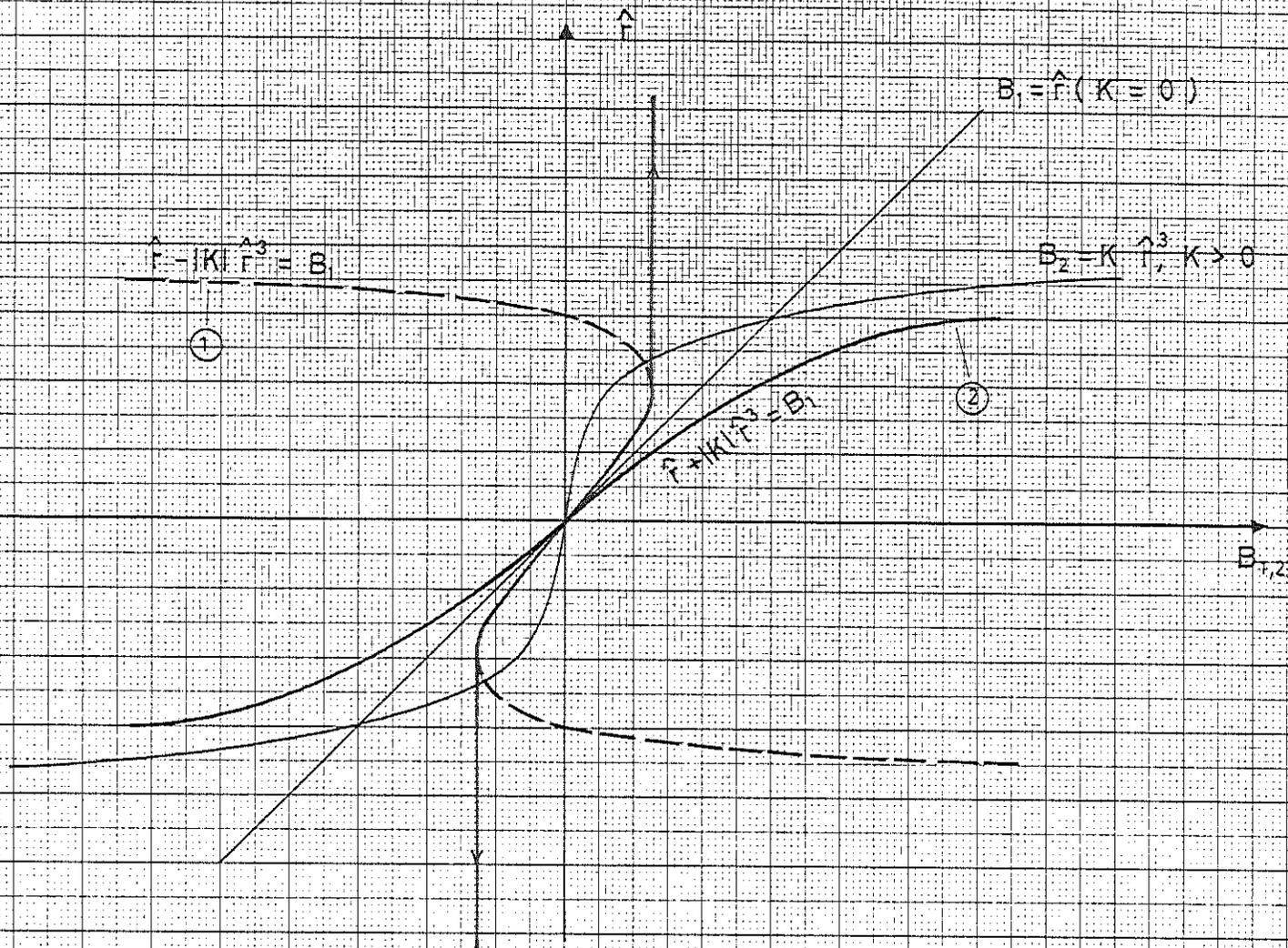


Bild 8: Abwanderung des closed orbit durch ein von  $r$  unabhängiges Feld  $B_1(t)$  und ein nichtlineares Feld  $B_2(r) = K r^3$ .

SEIKO  
A 3 297 x 420 mm

B in willkürlicher Einheit

2

1

-10 -8 -6 -4 -2 0 2 4 6 8 10 12 14 16  
r (cm)

Bild 9: Erzeugung eines nichtlinearen Feldes (d) mit großem Gradienten und kleinem Streufeld durch Überlagerung des äußeren Streufeldes (c) eines D-Sektor-Magneten mit dem Feld (b) einer in der Sollkreisebene durchbrochenen Stromschiene. Kurve (a) = Feld einer nicht durchbrochenen Stromschiene. Höhe der Stromschiene 12 cm, Höhe des Durchbruchs 0,6 cm.