

D E U T S C H E S   E L E K T R O N E N - S Y N C H R O T R O N  
(DESY)

Hamburg-Gr. Flottbek 1, Flottbeker Drift 56

DESY-Bibliothek

Desy-Notiz A 2.77

Hamburg, den 3. Juli 1961

M 1-Dr. Ri/VM

Korrektur des Feldgradienten durch pole-face-windings

I. Einleitung

Bekanntlich führen die Remanenzerscheinungen des Eisenkerns eines Synchrotronmagneten bei kleinen Feldern zu wesentlichen Abweichungen des Feldindex  $n$  vom Sollwert  $n_0$ . Diese Abweichungen werden üblicherweise mit Hilfe stromdurchflossener Drahtwindungen auf der Magnetkontur, sog. "pole-face-windings", korrigiert. Dabei hat man es in der Hand, durch Wahl geeigneter Stromstärken den gemessenen  $n$ -Verlauf durch den von den einzelnen Drähten erzeugten Feldindex näherungsweise zu kompensieren. Das Ziel der vorliegenden Arbeit soll sein, den von den Drahtwindungen induzierten Feldgradienten, der natürlich von der Form der Magneto­berfläche abhängt, speziell für den DESY-Magneten zu berechnen und bei Vorgabe der Lage der Drähte auf der Kontur diejenigen Stromstärken zu bestimmen, die eine möglichst gute Korrektur des Feldindex ermöglichen.

## II. Berechnung des Feldgradienten der pole-face-windings

Zur Beschreibung des Feldes und des Feldindex der "pole-face-windings" führen wir zunächst ein x-y-Koordinatensystem ein, das seinen Ursprung im Mittelpunkt des von den Magnetpolen erzeugten Quadrupolfeldes hat und dessen x-Achse im F-Sektor parallel, im D-Sektor antiparallel zum Maschinenradius verläuft (1), während die y-Achse in die zur Bahnebene senkrechte Richtung weist. Die Drahtwindungen selbst sollen auf beiden Polen in gleicher Weise angeordnet sein, so daß jedem "Strompunkt"  $(x_c, y_c)$  auf der oberen Kontur ein Strompunkt  $(x_c, -y_c)$  des unteren Poles entspricht. Außerdem setzen wir voraus, daß gegenüberliegende Strompunkte  $(x_c, y_c)$  und  $(x_c, -y_c)$  den gleichen Strom führen. Dann bleibt die Mittelebene  $y = 0$  nach wie vor Potentialfläche, und die Wirkung der Drahtwindungen des unteren Poles kann durch einen Eisenspiegel auf der x-Achse ersetzt werden. Zur Vereinfachung der Rechnung ist es zweckmäßig, wenn wir uns auch auf der y-Achse einen Eisenspiegel angebracht denken. Die an dieser Achse gespiegelten Strompunkte liegen vom Sollkreis der Elektronen weit entfernt. Ihr Beitrag zum Feldindex kann daher in dem den Elektronen zur Verfügung stehenden Gebiet vernachlässigt werden, so daß wir dort praktisch das gleiche, jedoch leichter zu berechnende Feld wie ohne diesen Spiegel bekommen.

Wir untersuchen zunächst den Fall einer einzigen Drahtwindung mit der Stromstärke  $J$  und berechnen das von dieser Windung in der Mittelebene  $y = 0$  erzeugte Feld  $\delta \mathcal{L}(x, 0)$ . Auf Grund der Linearität der Maxwell-Gleichungen ergibt sich dann das von mehreren Drähten herrührende Feld durch lineare Superposition der Felder  $\delta \mathcal{L}_v(x, 0)$  der einzelnen Drähte. Ist dieses Gesamtfeld  $\sum_v \delta \mathcal{L}_v(x, 0)$  bekannt, so finden wir schließlich den zugehörigen Feldindex zu

$$\frac{\delta n(x)}{n_0} = \sum_v \frac{\frac{\partial}{\partial x} \delta B_v(x,0)}{\frac{\partial}{\partial x} B_0(x,0)} = \sum_v \frac{\frac{\partial}{\partial x} \delta B_v(x,0)}{\frac{4n}{c} \frac{1}{x_s \cdot y_s} j_{qzs}} \quad (1)$$

( $B_0, n_0$  = Feld und Feldindex der idealen Maschine)

mit

$$B_0(x,0) = \frac{x}{x_s} \cdot B_s \quad (\text{Quadrupolfeld})$$

$$B_s = \frac{4n}{c} \frac{1}{y_s} \cdot j_{qzs}$$

Den Ausgangspunkt zur Berechnung des von dem Strompunkt ( $x_0, y_0$ ) erzeugten Feldes  $\delta \mathcal{L}$  bilden die Maxwell-Gleichungen

$$\oint_L [\delta \mathcal{L}, d\mathbf{f}]_3 \equiv \oint_L (\delta B_x \cdot dy - \delta B_y \cdot dx) = 0 \quad (2)$$

$$\oint_L (\delta \mathcal{L}, d\mathbf{f}) \equiv \oint_L (\delta B_x \cdot dx + \delta B_y \cdot dy) = \quad (3)$$

$$= \begin{cases} \frac{4n}{c} j & , \text{ wenn der Strompunkt im Innern von } L \text{ liegt,} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und die Randbedingung

$$\delta \mathcal{L} \perp \text{ x-Achse, y-Achse, Magnetkontur,} \quad (4)$$

die zusammen das Feld bereits eindeutig beschreiben.

Zur Lösung dieser Gleichungen ist es zweckmäßig, als Hilfsfunktion zunächst das Vektorpotential  $\mathcal{A} = (0, 0, A)$  einzuführen. Dann schreiben sich (2) und (3) in der Form

$$\begin{cases} \delta B_x = \frac{\partial H}{\partial y}, \\ \delta B_y = -\frac{\partial H}{\partial x}, \end{cases} \quad (5)$$

$$\Delta H = -\frac{4\pi}{c} \cdot j \cdot \delta(x - x_c) \delta(y - y_c), \quad (6)$$

wobei der Strom  $j$  positiv oder negativ gezählt wird, je nachdem x- und y-Achse und Stromrichtung ein Rechts- oder ein Linkssystem bilden.

Aus (6) ist ersichtlich, daß das Vektorpotential  $A = A(x, y)$  eine harmonische Funktion darstellt und somit als Realteil einer analytischen Funktion  $f(z)$  mit

$$z = x + iy$$

gedeutet werden kann:

$$f(z) = H(x, y) + i \cdot \varphi(x, y), \quad (7)$$

die in allen stromfreien Punkten regulär ist, im Strompunkte  $z_0 = x_0 + i \cdot y_0$  jedoch eine singuläre Stelle besitzt (siehe rechte Seite von (6) sowie Gl. (10)). Der Imaginärteil  $\psi(x, y)$  von  $f(z)$  erweist sich dabei nach den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen als Potential von  $\delta \mathcal{L}$  :

$$\begin{cases} \delta B_x = \frac{\partial H}{\partial y} = - \frac{\partial \varphi}{\partial x} , \\ \delta B_y = - \frac{\partial H}{\partial x} = - \frac{\partial \varphi}{\partial y} . \end{cases} \quad (8)$$

Notwendig und hinreichend für die Gültigkeit der Gl. (4) ist nunmehr die Forderung

$$J_m f(z) \equiv \psi(x, y) = \text{konst. für } \begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \\ \text{Magnetkontur,} \end{cases} \quad (9)$$

während die Maxwell-Gleichungen (2) und (3) zusammengefaßt werden in der Formel

$$\oint_{\mathcal{L}} f'(z) dz = \begin{cases} -i \frac{4\pi}{c} J, & \text{wenn der Strompunkt im} \\ & \text{Innern von } \mathcal{L} \text{ liegt,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (10)$$

Damit ist offenbar gezeigt, daß die Gleichungen (2) bis (4) gelöst werden können durch Aufsuchen einer analytischen Funktion  $f(z)$ , deren Imaginärteil auf der  $x$ - und  $y$ -Achse und der Magnetkontur konstant ist (Gl. (9)) und deren Ableitung  $f'(z)$  im Strompunkte  $z_0$  eine singuläre Stelle mit dem Residuum  $-\frac{I}{c}$  besitzt (Gl. (10)).

Um  $f(z)$  zu finden, machen wir von der konformen Abbildung Gebrauch, indem wir neben der  $z$ -Ebene eine  $\lambda$ -Ebene einführen durch die Transformation (2)

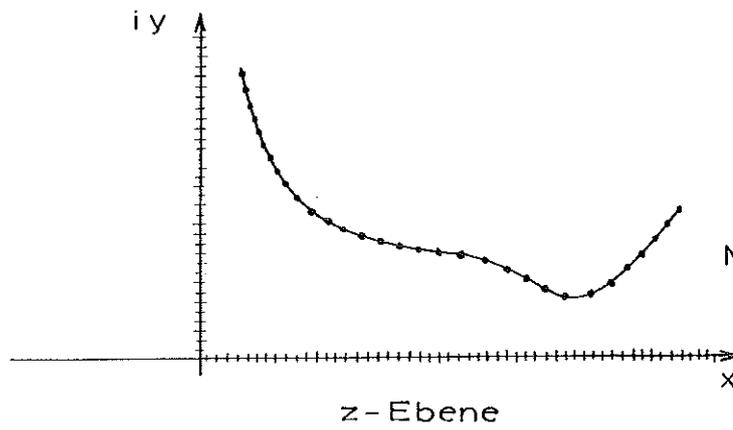
$$\lambda = \zeta^{\frac{\pi}{\varphi_s}},$$

$$w = \frac{y_s}{\varphi_s} \cdot \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{d\zeta}{\zeta \cdot \beta(\zeta)}, \quad (\zeta_0 \text{ reell, } > 0)$$

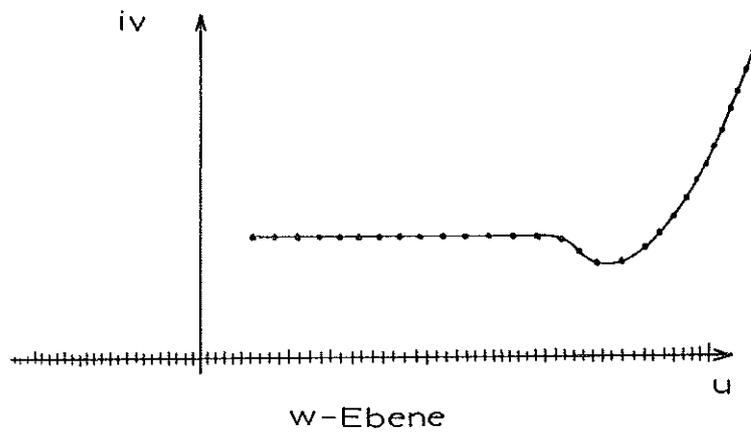
$$\text{mit } \beta(\zeta) = \frac{1 + \zeta}{(1 + \zeta/\alpha)(1 + \zeta/\gamma)}, \quad (11)$$

$$w = \frac{z^2}{2X_s},$$

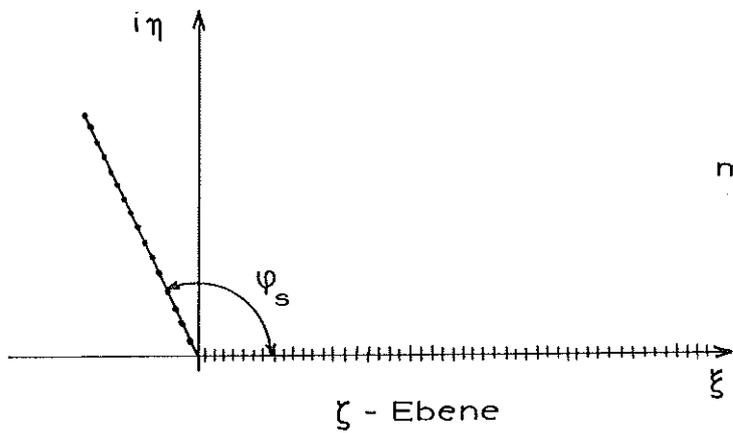
bei welcher das von der Magnetkontur und der positiven  $x$ - und  $y$ -Achse begrenzte Gebiet der  $z$ -Ebene in die obere  $\lambda$ -Ebene übergeht derart, daß die Magnetkontur auf die negative und die  $x$ - und  $y$ -Achse auf die positive reelle  $\lambda$ -Achse abgebildet wird (siehe Fig. 1).



Magnet-Kontur



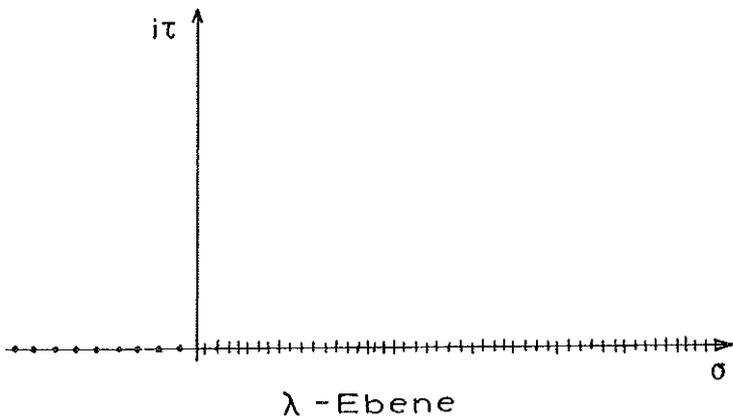
$$w = \frac{z^2}{2x_s}$$



$$w = \frac{y_s}{\varphi_s} \cdot \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{d\zeta}{\zeta \beta(\zeta)}$$

$$\text{mit } \beta(\zeta) = \frac{(1+\zeta)^{2-\frac{\pi}{\varphi_s}}}{(1+\zeta/\alpha)(1+\zeta/\gamma)}$$

( $\alpha, \gamma, \zeta$ . reell,  $> 0$ )



$$\lambda = \zeta^{\frac{\pi}{\varphi_s}}$$

Fig. 1

Setzen wir nun

$$f(z) = g[\lambda(z)], \quad (12)$$

so wird die transformierte Funktion  $g(\lambda)$  durch ähnliche Eigenschaften definiert wie die "Feldfunktion"  $f(z)$ . Jedoch nehmen die Definitionsgleichungen von  $g(\lambda)$  eine wesentlich einfachere Form an, und zwar erhalten wir anstelle von (9)

$$\Im g(\lambda) = \text{konst. auf der reellen } \lambda\text{-Achse,} \quad (13)$$

während sich für das Umlaufintegral über die Ableitung  $g'(\lambda)$  auf einem beliebigen geschlossenen, positiv orientierten Weg  $\Gamma_\lambda$  in der oberen  $\lambda$ -Ebene wieder die Formel

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma_\lambda} g'(\lambda) d\lambda &= \oint_{\Gamma_z} \frac{dg[\lambda(z)]}{dz} \frac{dz}{d\lambda} \cdot d\lambda \\ &= \oint_{\Gamma_z} f'(z) dz \quad (14) \\ &= \begin{cases} -i \cdot \frac{4n}{c} j, & \text{wenn } z \text{ im Innern von} \\ & \Gamma_z \text{ liegt} \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \\ &= \begin{cases} -i \cdot \frac{4n}{c} j, & \text{wenn } \lambda(z_c) \text{ im Innern} \\ & \text{von } \Gamma_\lambda \text{ liegt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

ergibt, die genau der Gl. (10) entspricht. (Da  $z(\lambda)$  in dem abgeschlossenen, von  $\Gamma_\lambda$  umrandeten Gebiet regulär ist und  $z'(\lambda)$  dort  $\neq 0$ , so umfährt man, wie aus der Funktionentheorie bekannt,

die durch  $z(\lambda)$  abgebildete geschlossene, doppelpunktfreie Kurve  $\mathcal{L}_z$  ebenfalls in positiver Richtung, und das Innengebiet von  $\mathcal{L}_\lambda$  geht über in den von  $\mathcal{L}_z$  begrenzten Teil der  $z$ -Ebene.)

Eine analytische Funktion, deren Imaginärteil auf der reellen Achse konstant ist (Gl. (13)) und deren Ableitung im Punkte  $\lambda(z_c)$  eine singuläre Stelle mit dem Residuum  $-\frac{2}{c} \gamma$  besitzt (Gl. (14)), kann aber leicht berechnet werden. Sie ist die "Feldfunktion" eines stromdurchflossenen Drahtes, der vor einem ebenen Eisenspiegel aufgespannt ist, und lautet

$$g(\lambda) = -\frac{2}{c} \gamma \cdot \ln [(\lambda - \lambda_c)(\lambda - \lambda_c^*)] \quad (15)$$

Man bestätigt durch direktes Einsetzen, daß (15) die Gleichungen (13) und (14) erfüllt.

Mit  $g(\lambda)$  ist uns jetzt nach Gl. (12) über die in (11) angegebenen Transformationsformeln auch die Feldfunktion  $f(z)$  der Drahtwindung in der  $z$ -Ebene bekannt, und wir sind damit in der Lage, das von dem Drahte erzeugte Magnetfeld  $\delta \mathcal{H}$  und den zugehörigen Feldindex zu bestimmen. Für das Feld  $\delta \mathcal{H}$  erhalten zunächst nach Gl. (8)

$$\begin{aligned} \delta B_x - i \cdot \delta B_y &= \frac{\partial H}{\partial y} + i \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ &= \frac{\partial f}{\partial y} \\ &= i \cdot f'(z) \\ &= i \cdot \frac{dg(\lambda)}{d\lambda} \cdot \frac{d\lambda}{dz} \end{aligned}$$

und weiterhin unter Verwendung von (11) und (15)

$$\begin{aligned} \delta B_x(x, y) - i \cdot \delta B_y(x, y) &= \\ &= -i \cdot \frac{2}{c} j \cdot \left\{ \frac{1}{\lambda(z) - \lambda_c} + \frac{1}{\lambda(z) - \lambda_c^*} \right\} \times \quad (16) \\ &\quad \times \frac{\pi}{x_s \cdot y_s} \cdot \beta[\zeta(z)] \cdot \lambda(z) \cdot z \end{aligned}$$

Diese Gleichung gibt das Magnetfeld  $\delta \mathcal{H} = (\delta B_x, \delta B_y)$  in der ganzen Ebene an. Da wir uns nur für das Feld  $\delta \mathcal{H}(x, 0)$  auf der x-Achse interessieren, setzen wir in (16) speziell  $z = x$ . Dann entsteht durch Trennung von Real- und Imaginärteil der rechten Seite, wenn wir noch bedenken, daß für einen Strompunkt auf der Magnetkontur  $\lambda_c = \lambda_c^*$  gilt:

$$\begin{aligned} \delta B_x(x, 0) &= 0, \\ \delta B_y(x, 0) &= \frac{4\pi}{c} j \cdot \frac{x}{x_s \cdot y_s} \cdot \beta[\zeta(x)] \cdot \frac{1}{1 - \frac{\lambda(z_c)}{\lambda(x)}} \quad (17) \end{aligned}$$

Schließlich errechnet sich der von der Drahtwindung hervorgerufene Feldindex nach (1) unter Berücksichtigung von (11) zu

$$\begin{aligned} \frac{\delta n(x)}{n_0} &= L_c \cdot \frac{\beta[\zeta(x)]}{1 - \frac{\lambda(z_c)}{\lambda(x)}} \left\{ 1 + \right. \\ &+ \varphi_s \cdot \frac{x^2}{x_s \cdot y_s} \cdot \beta[\zeta(x)] \cdot \zeta(x) \cdot \left( \frac{2 - \frac{\omega}{\pi}}{1 + \zeta(x)} - \right. \\ &\left. \left. - \frac{1}{\zeta(x) + \alpha} - \frac{1}{\zeta(x) + \beta} - \frac{\frac{\pi}{\varphi_s} \cdot \frac{1}{\zeta(x)} \cdot \frac{\lambda(z_c)}{\lambda(x)}}{1 - \frac{\lambda(z_c)}{\lambda(x)}} \right) \right\} \quad (18) \end{aligned}$$

mit

$$L_c = \frac{J}{J_{ges}}$$

Eine graphische Darstellung von  $\frac{\delta n}{n_0}$  für einen Strompunkt im F- und im D-Sektor findet sich in Fig. 2 und 3.

Die Verallgemeinerung der letzten Gleichung auf den Fall mehrerer Strompunkte  $z_{cv}$  ( $v = 1, 2, \dots, r$ ) durch lineare Superposition der Beträge der einzelnen Drahtwindungen führt auf

$$\frac{\delta n(x)}{n_0} = \sum_{v=1}^r H_v(x) \cdot L_{cv} \quad (19a)$$

mit

$$H_v(x) = \frac{\beta[z(x)]}{1 - \frac{\lambda(z_{cv})}{\lambda(x)}} \left\{ 1 + \right. \\ \left. + \varphi_s \cdot \frac{x^2}{x_s \cdot y_s} \cdot \beta[z(x)] \cdot z(x) \times \right. \\ \left. \times \left( \frac{2 - \frac{\omega}{\pi}}{1 + z(x)} - \frac{1}{z(x) + \alpha} - \frac{1}{z(x) + \beta} - \frac{\frac{\pi}{\varphi_s} \cdot \frac{1}{z(x)} \cdot \frac{\lambda(z_{cv})}{\lambda(x)}}{1 - \frac{\lambda(z_{cv})}{\lambda(x)}} \right) \right\}, \quad (19b)$$

$$L_{cv} = \frac{J_v}{J_{ges}}$$

Fig. 2

$\delta n(x)$  für den Strompunkt  
 $n_0$

$x_0 = 443,5 \text{ mm}$

im D-Sektor

$\delta n(x)$   
 $n_0$

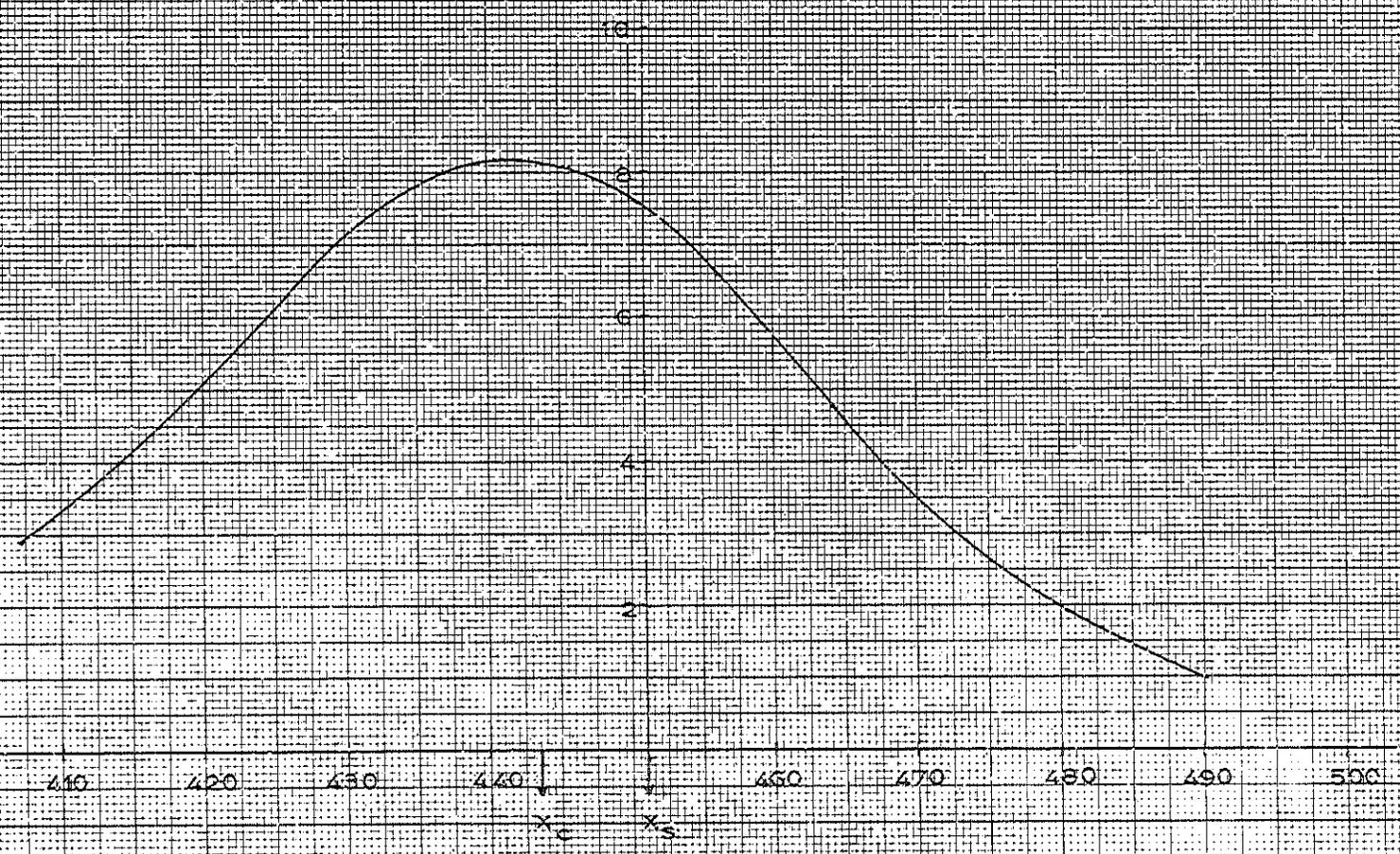
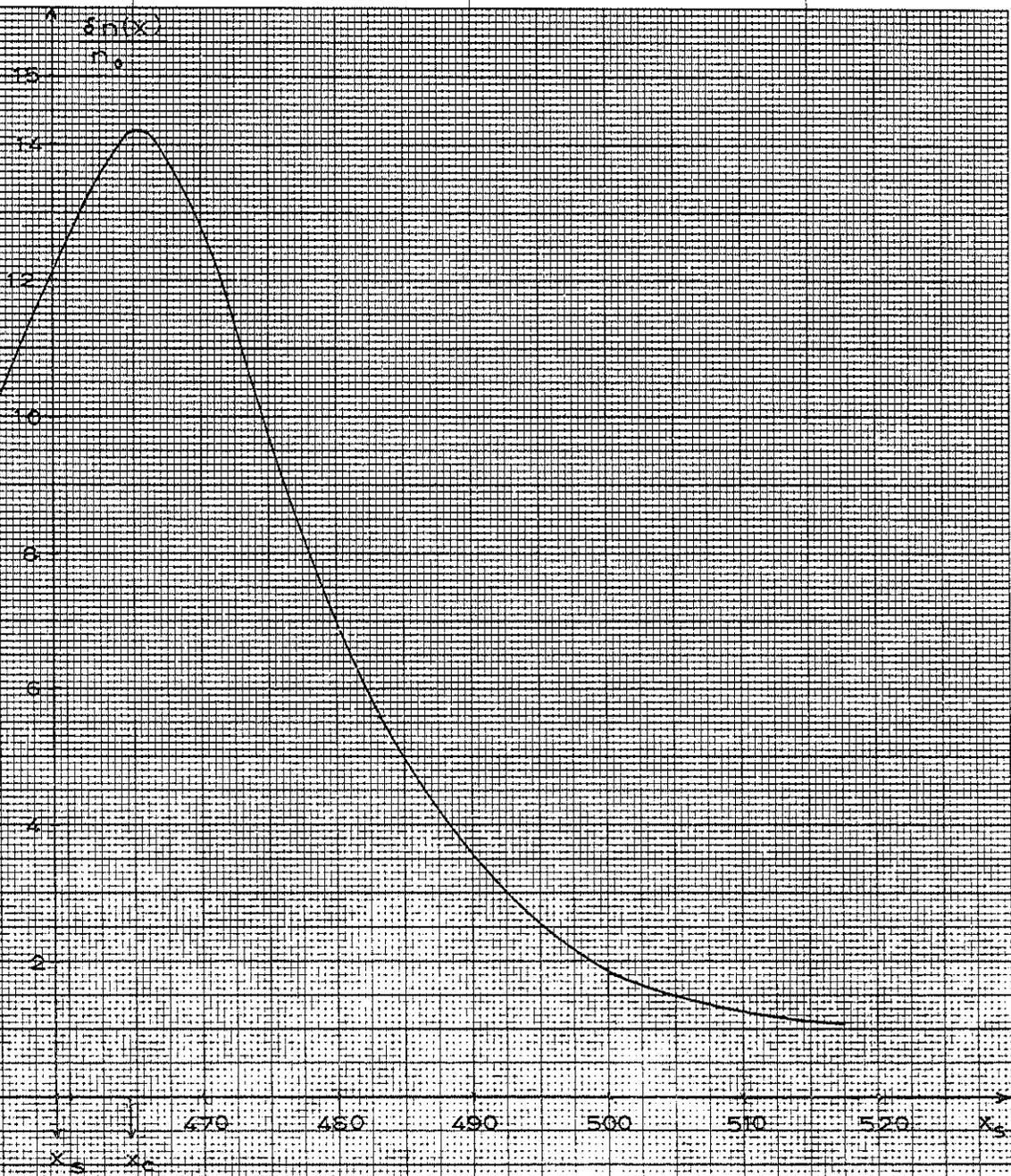


Fig. 3

$\delta n(x)$  für den Strompunkt  
 $n_0$   
 $x_c = 464,6 \text{ mm}$   
im F-Sektor



### III. Korrektur des Feldgradienten $n$

In Kap. II wurde der Feldgradient der pole-face-windings bei vorgegebener Stromverteilung  $L_{cv}$  berechnet. Jetzt soll die Frage untersucht werden, wie die Stromverteilung  $L_{cv}$  gewählt werden muß, um Fehler im Gradienten des Führungsfeldes weitgehend durch den von den Drahtwindungen erzeugten Feldindex  $\delta n$  zu korrigieren.

Sei die Abweichung

$$\Delta n = n - n_0$$

des Feldindex  $n$  vom Sollwert  $n_0$  in den Aufpunkten  $x_1, x_2, \dots, x_s$  bekannt. Dann lautet die Bedingung für eine optimale Korrektur

$$\sum_{\mu=1}^s \left( \frac{\delta n(x_\mu)}{n_0} + \frac{\Delta n(x_\mu)}{n_0} \right)^2 g(x_\mu) = \text{Min.} \quad (20a)$$

oder unter Verwendung von (19a)

$$\sum_{\mu=1}^s \left( \sum_{v=1}^r H_v(x_\mu) \cdot L_{cv} + \frac{\Delta n(x_\mu)}{n_0} \right)^2 g(x_\mu) = \text{Min.}, \quad (20b)$$

wobei  $g(x_\mu)$  Gewichtungsfaktoren bedeuten, durch die die maximale Elektronendichte am Sollkreis berücksichtigt werden kann. Gl. (20) führt auf ein Gleichungssystem für die  $L_{cv}$ :

$$\begin{aligned} \sum_{v=1}^r L_{cv} \cdot \sum_{\mu=1}^s H_v(x_\mu) H_n(x_\mu) g(x_\mu) &= \\ &= - \sum_{\mu=1}^s \frac{\Delta n(x_\mu)}{n_0} H_n(x_\mu) g(x_\mu), \end{aligned} \quad (21)$$

das sich zu

$$\sum_{v=1}^r L_{cv} \cdot H_v(x_\mu) = - \frac{\Delta n(x_\mu)}{n_0} \quad (22)$$

vereinfacht, wenn man ebenso viele Aufpunkte wie Strompunkte wählt ( $r = s$ ). Beide Systeme sind nach  $L_{cv}$  auflösbar. Mit den Bezeichnungen

$$\begin{array}{l|l} C_1 = \left( C_{nv}^{(1)} \right) & C_2 = \left( C_{nv}^{(2)} \right) \\ C_{nv}^{(1)} = \sum_{\mu=1}^s H_v(x_\mu) H_n(x_\mu) g(x_\mu) & C_{nv}^{(2)} = H_v(x_n) \\ b_n^{(1)} = - \sum_{\mu=1}^s \frac{\Delta n(x_\mu)}{n_0} H_n(x_\mu) g(x_\mu) & b_n^{(2)} = - \frac{\Delta n(x_n)}{n_0} \\ \text{für } r \neq s & \text{für } r = s \end{array} \quad (23)$$

schreibt sich die Umkehrung von (21) und (22)

$$L_c = C^{-1} \cdot b, \quad (24)$$

wenn

$$L_c = \begin{pmatrix} L_{c1} \\ \vdots \\ L_{cr} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_r \end{pmatrix}$$

gesetzt wird. Ist jetzt die inverse Matrix  $C^{-1}$  bekannt, so können bei Vorgabe von  $\Delta n ( X_\mu )$  in den Aufpunkten  $X_\mu$  diejenigen Ströme  $I_{c,v}$ , die eine möglichst gute Annäherung des resultierenden Feldindex  $n + \delta n$  an den Sollwert  $n_0$  bewirken, durch einfache Matrixmultiplikation berechnet werden.

G. Ripken

LITERATUR:

W. Hardt: Über die Gestaltung des DESY-Magneten  
Desy-Bericht A 1.5

(1): Seite 5

(2): Abschnitt 1.3 und 1.8

Herrn Dr. W. Hardt danke ich für nützliche Diskussionen und  
Hinweise, Herrn K. F. Holzhausen für die Durchführung der  
numerischen Rechnungen auf der IBM 650.