

D E U T S C H E S E L E K T R O N E N - S Y N C H R O T R O N
(DESY)

Hamburg-Gr. Flottbek 1, Flottbeker Drift 56

DESY-Bibliothek

Desy-Notiz A 2.78

Hamburg, den 1. August 1961
M 1-Dr. Lu/VM

ZUR BERECHNUNG DES POLSCHUHPROFILS BEI MAGNETISCHEN
QUADRUPELLINSEN

Es wird die Form der Stromspulen berechnet, die in einer magnetischen Linse ein exaktes Quadrupolfeld erzeugen. Weiterhin wird eine Methode angegeben, nach der das zur Erzeugung eines möglichst guten Quadrupolfeldes erforderliche Polschuhprofil berechnet werden kann, wenn eine bestimmte Spulenform vorgegeben ist.

1. Die "klassische" Quadrupollinse

Als magnetisches Quadrupolfeld bezeichnen wir ein Feld mit den Komponenten

$$(1) \quad B_x = -B_0 y, \quad B_y = -B_0 x, \quad B_z = 0.$$

Ein solches Feld läßt sich näherungsweise erzeugen durch die in Fig. 1 dargestellte "klassische" Quadrupollinse.

Bei dieser Linse gelten die Gl. (1) nur im Gebiet $\sqrt{x^2 + y^2} = r < 0,8 r_0$ in guter Näherung, wobei gute Näherung eine Konstanz des Feldgradienten $\frac{\partial B_x}{\partial y} = \frac{\partial B_y}{\partial x} = -B_0$ bis auf Fehler von 1 % bedeutet. In der Nähe der Polschuhe und der Stromspulen sind die Fehler sehr groß.

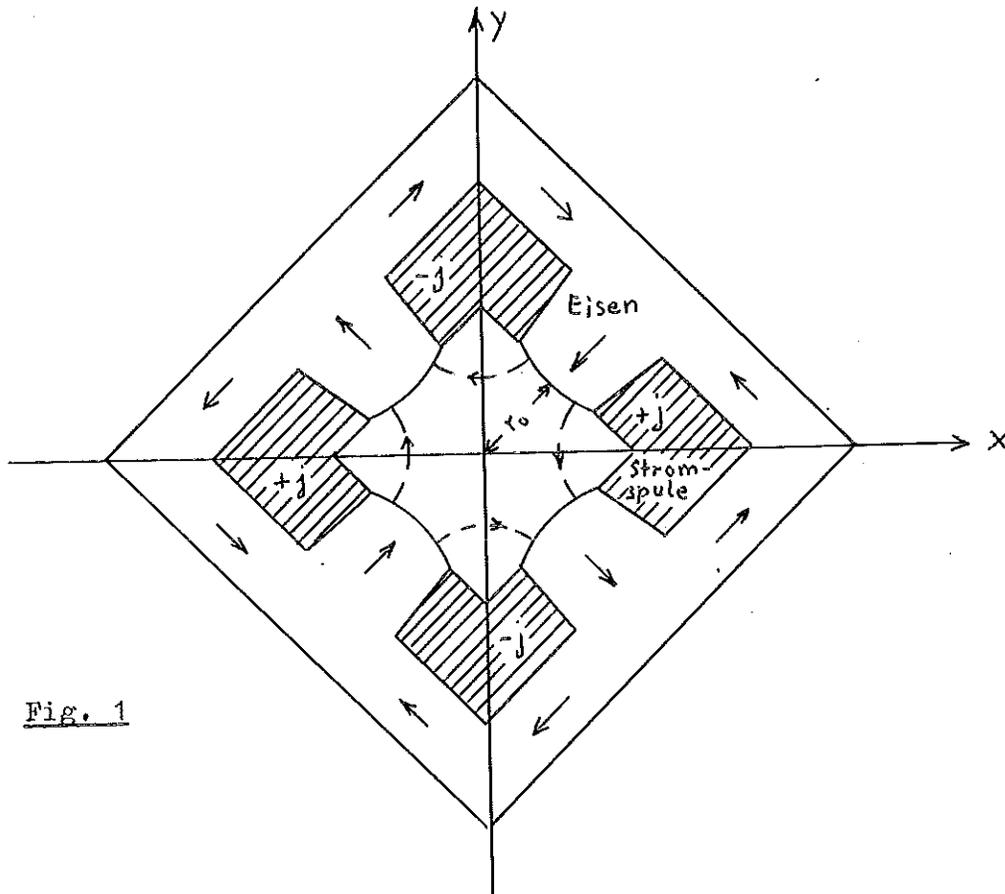


Fig. 1

Die Fehler rühren her

- 1.) von der Form der Stromspulen. Die Form der Stromspulen ist unwesentlich, wenn sich die Stromspulen in genügend großer Entfernung von der Linsenöffnung befinden. Aus Intensitätsgründen möchte man aber die Stromspulen möglichst dicht an die Apertur legen. Dann ist zur Erzeugung eines exakten Quadrupolfeldes eine bestimmte Form der Stromspulen notwendig. Meistens läßt sich die vorgeschriebene Spulenform aber nicht ausführen. Wenn die Spulen z.B. aus quadratischen Kupferstäben aufgebaut werden sollen (bei größeren Linsen sind Kupferstäbe von ca. 1 cm^2 Querschnitt mit Kühlwasserbohrung üblich), so ist es zweckmäßig, den Spulen eine Rechteckform zu geben.
- 2.) vom Profil der Polschuhe. Am Quadrupolfeld muß das Eisenprofil eine Hyperbel $xy = r_0^2/2$ sein. Da aber die Stromspulen doch schon Fehler liefern, wählt man statt der Hyperbel oft ein für die Herstellung der Polschuhe einfacheres Profil, z.B. einen Kreis oder einen Kreis mit angestückelten Geraden. Die dabei noch freien Parameter (Radius des Kreises, $r = 1,15 r_0$ ¹⁾, Anstückelungspunkt der Geraden²⁾) wählt man so, daß die von den Stromspulen herrührenden Fehler so gut wie möglich korrigiert werden.
- 3.) treten Fehler durch die magnetische Sättigung des Eisens bei zu großen Stromdichten in den Spulen und Abbildungsfehler der Linse infolge der Streufelder an den Linsenenden (bei $z = \pm \frac{l}{2}$, $l = \text{Länge der Linse}$) auf.

Theoretische Untersuchungen über die klassische Quadrupol-
linse, insbesondere Berechnungen der für ein möglichst
gutes Quadrupolfeld erforderlichen Polschuhkontur
liegen nicht vor. Meistens werden die Linsen nach
Messungen an einem Analogmodell (elektrolytischer Trog,
stainless steel model) gebaut. Bei größeren Serien wird
das Polschuhprofil eines Prototyps durch Shims korri-
giert und danach die Serie gebaut.

-
- 1) Dayton, Shoemaker und Mozley, Rev. Sc. Instr. 25,
485 (1954). Study of a Quadrupole Magnet.
 - 2) CERN, PS/Int. EA 60-5. Magnetic Measurements on
the Beam Transport Quadrupoles for the CERN PS.

2. Berechnung der Stromspulenform

a) Quadratische Linsenöffnung

Die magnetische Induktion \mathcal{L} ergibt sich in bekannter Weise aus einem Vektorpotential \mathcal{A} durch

$$(2) \quad \mathcal{L} = \text{rot } \mathcal{A}, \quad \Delta \mathcal{A} = - \mu_0 \mathbf{j},$$

wobei $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$ die Induktionskonstante und \mathbf{j} die Stromdichte bedeutet. (Wir benutzen das MKSA-System). Hat \mathbf{j} nur eine z-Komponente, so gilt dies auch von \mathcal{A} :

$$(3) \quad A_x = A_y = 0, \quad A_z = A(x,y); \quad B_x = \frac{\partial A}{\partial y}, \quad B_y = -\frac{\partial A}{\partial x}, \quad B_z = 0.$$

Im Gebiet $-a \leq x \leq a, -a \leq y \leq a$ soll ein exaktes Quadrupolfeld erzeugt werden. Wir fragen nach der Form der dazu erforderlichen Stromspulen. Zur Berechnung der Spulenform benutzen wir eine von M. H. Blewett angegebene Methode ³⁾.

Wir setzen $\mu_{\text{Luft}} = \mu_{\text{Kupfer}} = 1$. Die Permeabilität des Eisens nehmen wir als unendlich groß an. Dann gilt: An Grenzflächen zwischen Luft und Kupfer sind B_x und B_y stetig. Auf der Eisenoberfläche steht das \mathcal{L} -Feld senkrecht. (Aus dem Berechnungsgesetz für die magnetischen Feldlinien $\text{tg } \alpha: \text{tg } \alpha_{\text{Eisen}} = \mu : \mu_{\text{Eisen}}$ folgt für $\mu_{\text{Eisen}} \rightarrow \infty \rightarrow 0$.)

3) BNL Report MHB-8, An Analytical Method for Designing Multipole Magnets.

Die Blewett'sche Methode besteht aus den folgenden drei Schritten:

- 1) Man denke sich in der ganzen xy -Ebene das Quadrupolfeld (1) erzeugt. Da die Feldstärke mit dem Abstand vom Nullpunkt zunimmt, sind zur tatsächlichen Erzeugung des Feldes (1) unendlich starke Ströme im Unendlichen notwendig.
- 2) Man addiere zu (1) ein (überall stetiges) Feld mit $B_x = B_y = 0$ im Gebiet $-a \leq x \leq a$, $-a \leq y \leq a$ und $\Delta A = -\mu_0 j(x,y)$ wobei $j(x,y)$ die in Fig. 2 angegebene Stromdichteverteilung ist.

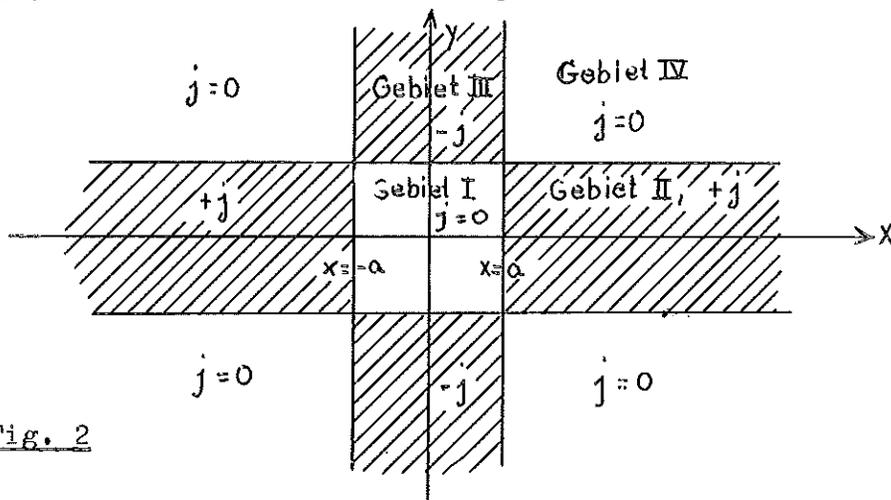


Fig. 2

Ein solches Feld ist (aus Symmetriegründen kann man sich auf den 1. Quadranten beschränken)

$$\begin{aligned}
 \text{Gebiet I} & : A = 0, \Delta A = 0, B_x = B_y = 0 \\
 \text{Gebiet II} & : A = -\frac{\mu_0 j}{2} (x-a)^2, \Delta A = -\mu_0 j, B_x = 0, \\
 & B_y = \mu_0 j (x-a) \\
 \text{Gebiet III} & : A = +\frac{\mu_0 j}{2} (y-a)^2, \Delta A = +\mu_0 j, B_x = \mu_0 j (y-a) \\
 & B_y = 0 \\
 \text{Gebiet IV} & : A = \frac{\mu_0 j}{2} \{(y-a)^2 - (x-a)^2\}, \Delta A = 0, \\
 & B_x = \mu_0 j (y-a), B_y = \mu_0 j (x-a).
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

- 3) Man berechne die Orthogonalschar zu den Feldlinien. Dabei ergibt sich eine Schar von geschlossenen Kurven. Im Außengebiet einer dieser Kurven denke man sich die Stromverteilung und die Felder weggeschnitten. Da das \mathcal{L} -Feld senkrecht auf der Kurve steht, kann man im Außengebiet der Kurve Eisen anbringen, ohne das Feld im Inneren abzuändern. Das Eisen dient dann, wie bei der klassischen Quadrupollinse in Fig. 1 angedeutet, zur Führung des Induktionsflusses im Außenraum. Die Eisenstärke ist so zu wählen, daß die Flußdichte im Eisen den Sättigungswert nicht überschreitet.

Bedeutet dM das Bogenelement einer Kurve der Orthogonalschar, so ist $(\mathcal{L} dM) = B_x dx + B_y dy = 0$. Die Orthogonalschar ist also Lösung der Differentialgleichung $y' = -\frac{B_x}{B_y}$. Wir suchen die Kurve durch den Punkt $x = a, y = b \leq a$. Aus Symmetriegründen beschränken wir uns auf den 1. Oktanten $0 \leq x < \infty, y \leq x$.

Für $b < a$ verläuft die Kurve durch das Gebiet I⁴⁾. Da in I ein exaktes Quadrupolfeld herrscht, ist die Orthogonalkurve eine Nyperbel:

$$(5) \quad y = \frac{ab}{x}.$$

Im Gebiet II setzen wir zur Abkürzung

$$(6) \quad \frac{I_0^u j}{B_0} = p, \quad 0 < p < \infty.$$

4) In der Blewett'schen Arbeit tangiert das Eisenprofil die Linsenöffnung. Der Vorschlag, Profilkurven zu wählen, die durch die Apertur laufen, stammt von K. G. Steffen; er geht von der im folgenden Abschnitt behandelten Panofsky-Linse aus und schneidet diese mit durch die Apertur laufenden Hyperbeln ab. Als Spulenrand wählt er die sich aus Gl. (8) für $p = 2$ ergebenden Geraden; s. Fig. 6 und 5b. Vergl. hierzu auch H. Hultschig, Desy-Notiz A.2.73: Zur Entwicklung der Quadrupollinsen.

Die Differentialgleichung lautet dann

$$(7) \quad y' = - \frac{B_x}{B_y} = - \frac{y}{(1-p)x + pa} ;$$

ihre Lösung ist

$$(8) \quad \begin{cases} y = b \left\{ \frac{(1-p)x + pa}{a} \right\}^{\frac{1}{p-1}} & \text{für } p \neq 1 \\ y = b e^{-\frac{x-a}{a}} & \text{für } p = 1. \end{cases}$$

In Fig. 3 sind die Kurven (8) in Abhängigkeit vom Parameter p angegeben. Für $p > 1$ schneiden die Kurven die x -Achse bei $x = \frac{pa}{p-1}$. Der Punkt $x = \frac{pa}{p-1}$, $y = 0$ ist singulärer Punkt der Diffgl. (7); das heißt es ist hier $B_x = B_y = 0$, und die Tangentenrichtung ist unbestimmt. In unserem Fall ist der singuläre Punkt ein Knotenpunkt; alle Lösungen der Diffgl. münden in ihn ein, u. z. in jeder Richtung genau eine Lösungskurve. (Vergl. hierzu auch die Konturkurven im 1. Quadranten der Panofsky-Linse in Fig. 6).

Für $p \leq 1$ gibt es keinen Schnittpunkt mit der x -Achse; die Kurven gehen mit $x \rightarrow \infty$ nur noch asymptotisch gegen die x -Achse. Da die Kurven stärker als $\frac{1}{x}$ gegen Null gehen, ist auch für $p \leq 1$ die Spulenfläche endlich.

Zur Berechnung der Spulenfläche F bilden wir $\oint (\mathcal{L} dW) = \mu_0 j F$ (s. Fig. 4). Längs der x -Achse und auf der Eisenkontur ist $(\mathcal{L} dW) = 0$, so daß

$$\oint (\mathcal{L} dW) = \int_0^{\infty} B_y(a, y) dy = B_0 ab,$$

$$(9) \quad F = \frac{B_0 ab}{\mu_0 j} = \frac{ab}{p} \quad \text{wird.}$$

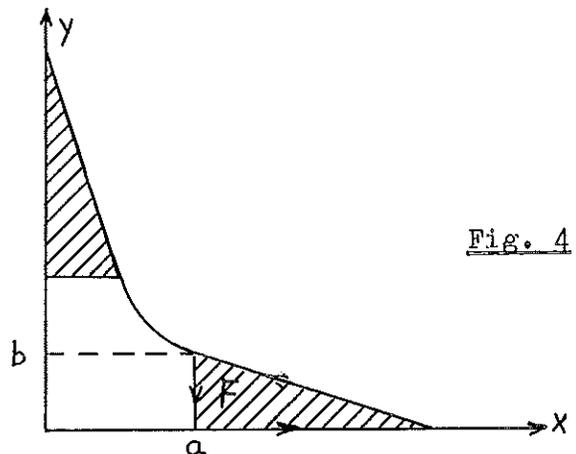


Fig. 4

Die zur Deckung der Ohmschen Verluste in den Stromspulen erforderliche Leistung ist

$$(10) \quad L = 8 j^2 F^2 \frac{l \xi}{F} = 8 a b l \varrho \left(\frac{B_0}{\mu_0} \right)^2 p,$$

wobei l die Länge der Linse und $\xi = 1,9 \cdot 10^{-8} \Omega \text{ m}$ der spez. elektrische Widerstand des Kupfers bei 40° C ist. Für $p \rightarrow 0$ geht $L \rightarrow 0$ und $F \rightarrow \infty$. Die Eisenkontur geht dann auch im Gebiet II gegen die Hyperbeln $y = \pm \frac{ab}{x}$. Für den anderen Grenzfall $p \rightarrow \infty$ geht $L \rightarrow \infty$ und $F \rightarrow 0$; die Spule entartet zu einem Flächenstrom auf $x = a$, $-b \leq y \leq b$.

Bei den für $p \leq 1$ ins Unendliche verlaufende Stromspulen kann man in genügend großer Entfernung von der Linsenöffnung von der exakten Spulenform abweichen und die noch fehlende Spulenfläche z. B. als Rechteck an die exakte Spule anfügen; das Feld in der Linsenöffnung wird dabei praktisch nicht geändert.

In Fig. 5 sind Quadrupollinsen mit $\frac{a}{b} = 4$ für $p = 1, 2$ und 3 dargestellt. Für $p = 1$ ist die Exponentialfunktion bei $x = 1,5 a$ durch ein Rechteck fortgesetzt. Die angegebenen Zahlenwerte für Leistung und Stromdichte gelten für $a = 20 \text{ cm}$, $b = 5 \text{ cm}$, $l = 1 \text{ m}$ und $B_0 = 4,85 \frac{\text{Vs}}{\text{m}^3}$ (die bei $x = a$, $y = b$ ins Eisen gehende Induktion ist dann gleich $B_0 \sqrt{a^2 + b^2} = 1 \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} = 10 \text{ k (auss)}$).

Die im Gebiet II ins Eisen gehende Induktion ist

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = B_0 \sqrt{b^2 \left[\frac{(1-p)x + pa}{a} \right]^2 \frac{2}{p-1} + \left[(1-p)x + pa \right]^2}.$$

Für $p > 1$ nimmt B mit wachsendem x monoton ab und wird im singulären Punkt $(\frac{pa}{p-1}, 0)$ gleich Null. Für $p < 1$ geht mit $x \rightarrow \infty$ auch $B \rightarrow \infty$.

b) Die Panofsky-Linse

Die gleichen Rechnungen lassen sich für eine rechteckige Linsenöffnung $-a \leq x \leq a$, $-b \leq y \leq b$ durchführen. Die Gl. (4) sind entsprechend abzuändern; der vom 2. Schritt der Blewett-Methode herrührende Anteil wird jetzt

$$\text{Gebiet III: } B_x = \mu_0 j (y-b), \quad B_y = 0$$

$$\text{Gebiet IV: } B_x = \mu_0 j (y-b), \quad B_y = \mu_0 j (x-a).$$

Wir erwähnen einen Spezialfall, bei dem die Eisenkontur nicht wie bisher nur durch die Gebiete I, II und III, sondern auch durch das Gebiet IV verläuft. Dieser Spezialfall hat wegen seiner einfachen Spulenform als Panofsky-Linse⁵⁾ praktische Bedeutung erlangt.

Bei der Panofsky-Linse besteht die Eisenkontur aus den Geraden $x = \pm ka$ und $y = \pm kb$ mit $k > 1$. Wenn $x = ka$ und $y = kb$ senkrecht auf dem \mathcal{L} -Feld stehen sollen, so muß

5) Hand und Panofsky, Rev. Sc. Instr. 30, 927 (1959).
Magnetic Quadrupole with Rectangular Aperture.

in II und IV: $B_y(ka, y) = -B_0 ka + \sqrt{u_0} j(ka-a) = 0$

in III und IV: $B_x(x, kb) = -B_0 kb + \sqrt{u_0} j(kb-b) = 0,$

das heißt $p = \frac{\sqrt{u_0} j}{B_0} = \frac{k}{k-1}$ sein. Die Parameter $k > 1$ oder $1 < p < \infty$ sind zunächst beliebig. Sie werden so gewählt, daß die Leistung der Linse minimal wird. Es ist (mit den Bezeichnungen von Gl. (10))

$$L = 8 j^2 F^2 \cdot \frac{1 \zeta}{F} = 8 \text{abl} \zeta j^2 (k-1) = 8 \text{abl} \zeta \left(\frac{B_0}{\sqrt{u_0}} \right)^2 \frac{p^2}{p-1} .$$

Die Forderung $\frac{dL}{dp} = 0$ liefert $p = 2, k = 2$. Die minimalisierte Panofsky-Linse ist in Fig. 6 dargestellt. Im 1. Quadranten sind weitere mögliche Konturkurven eingezeichnet; dabei liefert die Gerade bei halber Leistung dasselbe Feld im Rechteck, allerdings auf Kosten einer schwieriger zu realisierenden Spulenform.

Der Nachteil der Panofsky-Linse ist ihr hoher Leistungsbedarf. Der Grund hierfür sind die Felder in den Gebieten IV, die zusätzlich erzeugt werden. Während man bei klassischen Linsen durch Vergrößerung der Stromspulen die Leistung kleiner machen kann, gilt dies bei der Panofsky-Linse nur bis $k = 2$. Ein weiteres Vergrößern der Spulen ist dann sinnlos, weil der größte Teil der Leistung in die nicht nutzbaren Gebiete IV geht.

c) Ellipsenförmige Linsenöffnung

In der Blewett'schen Arbeit werden die Stromspulen für eine kreisförmige Linsenöffnung berechnet. Die Methode ist immer anwendbar, wenn sich die Linsenbegrenzung in einem geeignet gewählten Koordinatensystem u, v durch $u = u_0 = \text{const.}$ darstellen läßt. Als Beispiel führen wir die Rechnung für eine ellipsenförmige Linsenöffnung durch.

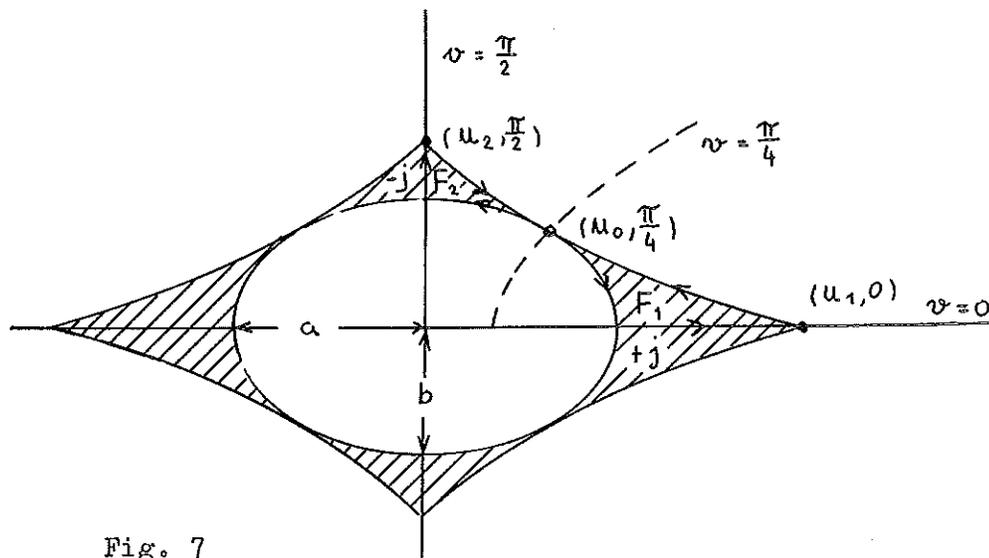


Fig. 7

Wir führen Koordinaten des elliptischen Zylinders ein:

$$\begin{aligned} x &= c \cosh u \cos v & 0 \leq u < \infty \\ y &= c \sinh u \sin v & 0 \leq v \leq 2\pi. \end{aligned}$$

$u = u_0 = \text{const.}$ gibt die Ellipse

$$\frac{x^2}{c^2 \cosh^2 u_0} + \frac{y^2}{c^2 \sinh^2 u_0} = 1$$

mit den Halbachsen $a = c \cosh u_0$ und $b = c \sinh u_0$.

Sind a und b gegeben, so ist $u_0 = \text{Ar tgh } \frac{b}{a}$ und $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. $v = v_0 = \text{const.}$ gibt die Hyperbel

$$\frac{x^2}{c^2 \cos^2 v_0} - \frac{y^2}{c^2 \sin^2 v_0} = 1.$$

Das Bogenelement ist

$$(11) \quad ds^2 = \frac{c^2}{2} (\cosh 2u - \cos 2v) (du^2 + dv^2);$$

und es ist

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta A = \frac{2}{c^2 (\cosh 2u - \cos 2v)} \left(\frac{\partial^2 A}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial v^2} \right), \\ B_u = \frac{\sqrt{2} \frac{\partial A}{\partial v}}{c \sqrt{\cosh 2u - \cos 2v}}, \quad B_v = - \frac{\sqrt{2} \frac{\partial A}{\partial u}}{c \sqrt{\cosh 2u - \cos 2v}}. \end{array} \right.$$

Der Übergang zum Kreis erfolgt durch $c \rightarrow 0$, $u \rightarrow \infty$, derart, daß $c \cosh u = c \sinh u = \frac{c}{2} e^u = r$ und $v = \vartheta$ wird. Es ist dann $u = \ln r$ und $du = \frac{dr}{r}$.

Aus Symmetriegründen brauchen wir nur das Intervall $0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}$ zu betrachten (s. Fig. 7). Das Quadrupolfeld ergibt sich aus dem zum Feld (1) gehörenden Vektorpotential:

$$(13) \quad \begin{aligned} A_1 &= \frac{B_0}{2} (x^2 - y^2) = \frac{B_0 c^2}{2} (\cosh^2 u \cos^2 v - \sinh^2 u \sin^2 v) \\ &= \frac{B_0 c^2}{4} (1 + \cosh 2u \cos 2v). \end{aligned}$$

Dem Quadrupolfeld ist ein Feld zu überlagern, das für $u \leq u_0$ gleich Null ist. Für $u > u_0$ soll

$$\Delta A_2 = \frac{2}{c^2 (\cosh 2u - \cos 2v)} \left(\frac{\partial^2 A_2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 A_2}{\partial v^2} \right)$$

$$= \begin{cases} - \mu_0 j & \text{für } 0 \leq v \leq \frac{\pi}{4} \\ + \mu_0 j & \text{für } \frac{\pi}{4} < v \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

sein. Eine Lösung ist

$$A_2 = \frac{1}{8} \mu_0 j c^2 (\cosh 2u + \cos 2v).$$

Mit diesem A_2 sind allerdings die Forderungen

$$(14) \quad \left(\frac{\partial A_2}{\partial u} \right)_{u=u_0} = \left(\frac{\partial A_2}{\partial v} \right)_{u=u_0} = 0$$

(Stetigkeit von B_u und B_v bei $u = u_0$) noch nicht erfüllt. Wir müssen also noch eine Lösung der Gl. $\Delta A = 0$ addieren, derart, daß die Gl. (14) gelten. Die partikulären Lösungen der Gl. $\Delta A = 0$ sind

$$A_k = e^{\frac{\pi}{4} k (u \pm i v)} \text{ und } A_0 = (a_1 u + a_2)(b_1 v + b_2).$$

Zur Erfüllung der Forderungen (14) machen wir den Ansatz

$$A_2 = + \frac{1}{8} /u_0 j c^2 \left\{ \cosh 2u + \cos 2v + \right. \\ \left. (ae^{2u} + be^{-2u}) \cos 2v + cu \right\} .$$

Hiermit wird

$$\frac{\partial A_2}{\partial u} = + \frac{1}{8} /u_0 j c^2 \left\{ 2 \sinh 2u + 2(ae^{2u} - be^{-2u}) \cos 2v + c \right\}$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial v} = + \frac{1}{8} /u_0 j c^2 \left\{ -2 \sin 2v - 2(ae^{2u} + be^{-2u}) \sin 2v \right\} .$$

Die Gl. (14) sind erfüllt, wenn wir

$$a = - \frac{1}{2} e^{-2u_0}, \quad b = - \frac{1}{2} e^{2u_0}, \quad c = - 2 \sinh 2u_0$$

setzen, so daß

$$(15) \quad A_2 = + \frac{1}{8} /u_0 j c^2 \left\{ \cosh 2u + \cos 2v - \right. \\ \left. \cosh 2(u - u_0) \cos 2v - 2u \sinh 2u_0 \right\}$$

wird.

Addition der Potentiale (13) und (15) und Bildung der Feldstärken nach Gl. (12) ergibt

$$(16) \left\{ \begin{aligned} B_u &= - \frac{c \sin 2v}{\sqrt{2(\cosh 2u - \cos 2v)}} \left\{ B_0 \cosh 2u \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \mu_0 j (1 - \cosh 2(u-u_0)) \right\} \\ B_v &= - \frac{c}{\sqrt{2(\cosh 2u - \cos 2v)}} \left\{ B_0 \sinh 2u \cos 2v \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \mu_0 j (\sinh 2u - \sinh 2u_0 - \sinh 2(u-u_0) \cos 2v) \right\} \end{aligned} \right.$$

Für $u = u_0$ verschwindet der von der Stromdichte herrührende Anteil, so daß das Feld auf der Ellipse stetig ist. Für $u > u_0$, $v = \frac{\pi}{4}$, das heißt auf der Hyperbel $x^2 - y^2 = \frac{c^2}{2}$, berühren sich die Stromdichtegebiete mit $\pm j$, und B_u und B_v sind unstetig. Die Eisenkontur darf also nicht durch einen Punkt mit $u > u_0$, $v = \frac{\pi}{4}$ gehen; dies bedeutet, daß es kein Analogon zur Panofsky-Linse gibt.

Die Spulenform ergibt sich aus $(\mathcal{L} dk) =$

$$\frac{c}{\sqrt{2}} \sqrt{\cosh 2u - \cos 2v} (B_u du + B_v dv) = 0,$$

das heißt $\frac{du}{dv} = - \frac{B_v}{B_u}$. Die Diffgl. lautet

$$(17) \quad \frac{du}{dv} = \frac{\sinh 2u \cos 2v + \frac{\mu}{2} \left\{ \sinh 2u - \sinh 2u_0 - \sinh 2(u-u_0) \cos 2v \right\}}{\sin 2v \left\{ \cosh 2u + \frac{\mu}{2} (1 - \cosh 2(u-u_0)) \right\}}$$

Wählt man als Anfangspunkt für die Integration den Punkt $(u_0, \frac{\pi}{4})$, so hat wegen $B_v(u_0, \frac{\pi}{4}) = 0$ die Eisenkontur dieselbe Tangentenrichtung wie die Ellipse, so daß die Kontur nicht durch das Innere der Ellipse verläuft. Die Integration von Gl. (17) (numerisch, nach dem Runge-Kutta-Verfahren) liefert Stromspulen von der in Fig. 7 angegebenen Form.

Der Übergang zu einem Kreis mit dem Radius r_0 bedeutet $\frac{b}{a} = \tanh u_0 \rightarrow 1$, $u_0 \rightarrow \infty$. Wenn wir für $u > u_0$, $u - u_0$ endlich, die bei Gl. (12) angegebenen Formeln benutzen, so geht Gl. (17) über in

$$(18) \quad \frac{dr}{d\vartheta} = -r \frac{\cos 2\vartheta + \frac{p}{2} \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right)}{\sin 2\vartheta}.$$

Dies ist die von H. M. Blewett in 3) angegebene Diffgl. für die Stromspulen einer Quadrupollinse mit kreisförmiger Öffnung.

Wenn die Stromspulen, wie in Fig. 7 angegeben, bei $(u_1, 0)$ und $(u_2, \frac{\pi}{2})$ Spitzen haben, so sind diese Punkte singuläre Punkte der Diffgl. (17); sie lassen sich aus $B_u = B_v = 0$ bestimmen. Die Forderungen $B_v(u_1, 0) = B_v(u_2, \frac{\pi}{2}) = 0$ führen nach einigen Umformungen auf

$$\cos u_1 - p \sinh u_0 \sinh (u_1 - u_0) = 0$$

$$\sinh u_2 - p \cosh u_0 \sinh (u_2 - u_0) = 0.$$

d) Synchrotronmagnete

Mit AG-Synchrotronmagneten werden Ausschnitte aus Quadrupolfeldern erzeugt; für DESY ist dies im D-Sektor der in Fig. 8 angegebene Ausschnitt $a \leq x \leq b$ ⁶⁾.

Wir berechnen die Form der Stromspulen, die im Intervall $a \leq x \leq b$ ein exaktes Quadrupolfeld erzeugen. Für $x \geq b$ gilt die Gl. (8); mit den Bezeichnungen von Fig. 8 ist

$$(19a) \quad y = \beta \left\{ \frac{(1-p)x + pb}{b} \right\}^{\frac{1}{p-1}} \quad \text{für } p \neq 1$$

$$y = \beta e^{-\frac{x-b}{b}} \quad \text{für } p = 1.$$

Für $x \leq a$, Stromdichte $= j$, ist

$$A_2 = \frac{\mu_0 j}{2} (x-a)^2, \quad \Delta A_2 = \mu_0 j, \quad B_{2x} = 0, \quad B_{2y} = -\mu_0 j (x-a).$$

Die Diffgl. lautet

$$y' = - \frac{y}{(1+p)x - pa};$$

die Lösung durch (a, α) ist

$$(19b) \quad y = \alpha \left\{ \frac{(1+p)x - pa}{a} \right\}^{-\frac{1}{p+1}}$$

6) s. W. Hardt, DESY-Bericht A 1.5
Über die Gestaltung des DESY-Magneten.

Außerdem steht wegen $B_y \left(\frac{pa}{p+1}; y \right) = 0$ die Gerade

$$(19c) \quad x = \frac{pa}{p+1}$$

senkrecht auf dem \mathcal{L} -Feld.

Für $p = 2$ ergibt sich die in Fig. 8 dargestellte Spulenform. Die Leistung ist (bei Gleichstrombetrieb)

$$(20) \quad L = 4 x_s y_s l g \left(\frac{B_0}{\mu_0} \right)^2 p .$$

Mit $B_0 = 1,88 \text{ Vs/m}^3$ (die Induktion bei $(x_s, 0)$ wird dann gleich $0,85 \text{ Vs/m}^2 = 8,5 \text{ kGauss}$) und $l = 1 \text{ m}$ ergibt sich

$$L = 3,4 p \text{ kW} \quad \text{und} \quad j = 1,5 p \text{ A/mm}^2 .$$

In Fig. 9 sind die Stromspulen des in Fig. 8 für $p = 2$ angegebenen Magneten abgeändert, u. z. sind sie aus Rechtecken aufgebaut. Zu einer Abänderung der linken Spule kommt man, wenn man für $y > \alpha = 5,0111$ die Stromdichte $= j$ durch

$$A_3 = - \frac{\mu_0 j}{2} (y-\alpha)^2, \quad \Delta A_3 = - \mu_0 j, \quad B_{3x} = - \mu_0 j (y-\alpha),$$

$$B_{3y} = 0$$

wegkompensiert und vom Punkt $(a, \alpha) = (39,6; 5,0111)$ ausgehend die neue Eisenkontur berechnet. Aus

$$y' = - \frac{(1 + p) y - p\alpha}{(1 + p) x - pa}$$

ergibt sich als neue Kontur die Hyperbel

$$(21) \quad ((1 + p) x - pa) ((1 + p) y - p\alpha) = a\alpha,$$

während die Gerade $x = \frac{pa}{p + 1}$ ungeändert bleibt.

Wir schneiden die Hyperbel (21) bei $x = 34,6$ ab. Im Intervall $26,4 \leq x \leq 34$, ist die noch fehlende Spulenfläche (= 1/3 der Gesamtfläche) als Rechteck angefügt.

Die rechte Spule hat ebenfalls T-Form. Die Berechnung der Eisenkontur im Intervall $50,6 \leq x \leq 56,6$ wird im folgenden Abschnitt 3 behandelt.

In entsprechender Weise läßt sich die Spulenform für andere Ausschnitte aus Quadrupolfeldern berechnen. Als Beispiel geben wir die Spulen für den zwischen den Hyperbeln $y^2 - x^2 = c_1^2$ und $y^2 - x^2 = c_2^2$ und den Geraden $y = \pm a x + b$ liegenden Ausschnitt an⁷⁾. (s. Fig. 10; Drehung des bisherigen Koordinatensystems um 45° .)

Im 1. Quadranten ist

$$A_1 = B_0 xy, \Delta A_1 = 0, B_{1x} = B_0 x, B_{1y} = -B_0 y.$$

Für $y > -ax + b$ ist

$$A_2 = -\frac{u_0 j}{1+a} \left(\frac{a^2}{2} x^2 + \frac{1}{2} y^2 + axy - abx - by \right), \Delta A_2 = -u_0 j,$$

$$B_{2x} = -\frac{u_0 j}{1+a} (y+ax - b), \quad B_{2y} = \frac{u_0 ja}{1+a} (y+ax - b).$$

Das Feld \mathcal{L}_2 verschwindet auf der Geraden $y = -ax + b$. Für $y < -ax + b$ ist $A_2 = B_{2x} = B_{2y} = 0$. Zwischen den Geraden steht das \mathcal{L} -Feld auf den Hyperbeln $y^2 - x^2 = \text{const.}$ senkrecht. Als Diffgl. für den Spulenrand ergibt sich

7) Nach mündlicher Mitteilung von Herrn K. G. Steffen wird mit einem derartigen Synchrotronmagneten die Strahlungs-entdämpfung der radialen Betatronsoschwingungen, die bei Magneten des in Fig. 8 angegebenen Typs auftritt, beseitigt.

$$(22) \quad y' = \frac{(1-pa+a^2)x - py + pb}{-pa^2x + (1-pa+a^2)y + pab}, \quad 0 < p = \frac{u_0 j}{B_0} < \infty.$$

Der singuläre Punkt (x_0, y_0) der Diffgl. (22), in dem die Spitze der Stromspule liegt, ist

$$x_0 = -\frac{pb}{1 - 2pa + a^2}, \quad y_0 = ax_0.$$

Für $\infty > p > \frac{1+a^2}{2a}$ liegt der singuläre Punkt im Intervall $\frac{b}{2a} < x_0 < \infty$. Für $p < \frac{1+a^2}{2a}$ liegt er im Unendlichen; die Stromspulen erstrecken sich bis ins Unendliche.

Die Diffgl. (22) läßt sich allgemein integrieren; allerdings ist die Lösung nur im Spezialfall $1 - pa + a^2 = 0$, $p = \frac{1+a^2}{a}$, übersichtlich:

$$y = b + (y_1 - b) \left(\frac{ax - b}{ax_1 - b} \right)^{\frac{1}{a^2}}.$$

Für $a = 1$, $p = 2$ liefert dies die schon aus Gl. (8) bekannten Geraden. Im allgemeinen Fall wird die Diffgl. (22) am einfachsten numerisch integriert.

In Fig. 10 sind zwei Spulen für verschiedene p angegeben. Die Spulen haben an der Apertur annähernd Rechteckform, so daß man sie ohne größere Fehler durch Rechtecke gleichen Flächeninhalts ersetzen kann.

3. Berechnung des Polschuhprofils bei vorgegebener Spulenform

Die bisher angegebenen Spulenformen waren berechnet unter der Voraussetzung, daß unmittelbar an der Spule das Eisen beginnt. Wir machen uns jetzt von dieser Voraussetzung frei und lassen zwischen Stromspule und Eisen einen Luftspalt zu.

Wir bringen zunächst ein Beispiel. Im Gebiet II der Fig. 2 ist der Spulenrand bzw. die Eisenkontur gegeben durch Gl. (8). Wir ändern den Spulenrand ab. Hierzu überlagern wir über die vom 1.) und 2.) Schritt der Blewett-Methode herrührenden Felder \mathcal{L}_1 und \mathcal{L}_2

- 3.) das Feld eines Kreiszyinders mit der Stromdichte $-j$. Der Mittelpunkt des Kreises sei (x_0, y_0) , und der Kreis gehe durch den Punkt (a, b) s. Fig. 11. Innerhalb des Kreises ergibt sich für $x > a$ aus 2.) und 3.) die Gesamtstromdichte Null.
- 4.) das Feld eines Drahtes, der im Kreismittelpunkt (x_0, y_0) liegt. Der Strom im Draht sei gleich dem Gesamtstrom im Kreiszyinder, fließe aber in umgekehrter Richtung.

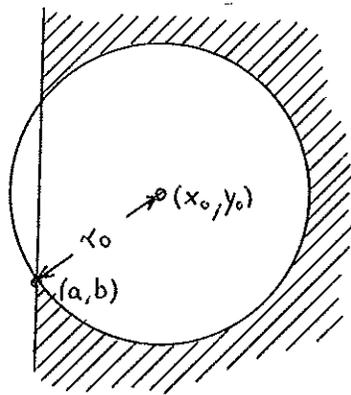


Fig. 11

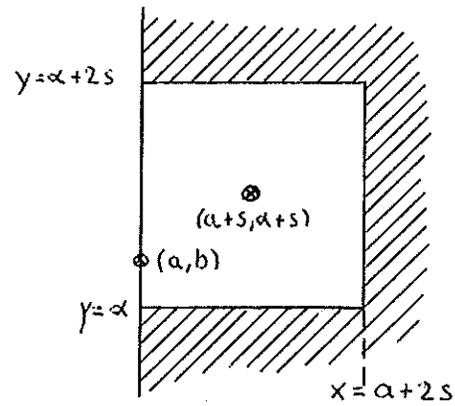


Fig. 14

Außerhalb des Kreises kompensieren sich die Felder \mathcal{L}_3 und \mathcal{L}_4 , so daß hier weiterhin die Gl. (5) und (8) gelten. Innerhalb des Kreises ist die durch (a, b) gehende Eisenkontur neu zu berechnen. Dabei muß der im Kreismittelpunkt liegende Draht vom Eisen weggeschnitten werden. Außerdem darf die Induktion auf der Eisenkontur den Sättigungswert nicht überschreiten; dies bedeutet, daß die Kontur nicht in die Nähe des Kreismittelpunktes laufen darf.

In Polarkoordinaten ist (mit dem Kreismittelpunkt als Nullpunkt)

$$A = A_3 + A_4 = \frac{u_{oj}}{4} \left(r^2 - 2 r_o^2 \ln \frac{r}{r_o} \right),$$

$$B_r = 0, B_\vartheta = - \frac{u_{oj}}{2} \left(r - \frac{r_o^2}{r} \right).$$

In den bisherigen kartesischen Koordinaten wird also

$$A = A_3 + A_4 =$$

$$\frac{u_{oj}}{4} \left\{ (x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 - r_o^2 \ln \frac{(x-x_o)^2 + (y-y_o)^2}{r_o^2} \right\}.$$

Bildet man hieraus die Feldstärken und überlagert alle Felder, so ergibt sich für die Eisenkontur im Innern des Kreises die Diffgl.

$$(23) \quad y' = - \frac{y - \frac{p}{2}(y-y_0) \left\{ 1 - \frac{r_0^2}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \right\}}{x - p(x-a) + \frac{p}{2}(x-x_0) \left\{ 1 - \frac{r_0^2}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \right\}}$$

In den Fig. 12 und 13 sind die durch $(a, b) = (20; 5)$ gehenden Konturkurven $y(x)$ für $x_0 = 22$, $y_0 = 5,76$, $r_0 = 2,14$ (die unterhalb der Geraden $y = 5$ liegende Kreisfläche ist dann gleich 4 cm^2 , das heißt gleich der Fläche des Rechtecks $20 \leq x \leq 24$, $4 \leq y \leq 5$) und $p = 2$ bzw. $p = 1$ angegeben. Die Eisenkontur liegt über der durch Gl. (8) gegebenen Kurve und auch über der Hyperbel $y = \frac{ab}{x} = \frac{100}{x}$.

Nach dem eben angegebenen Verfahren kann die Eisenkontur näherungsweise berechnet werden, wenn eine bestimmte Spulenform vorgegeben ist. Wir wählen eine Spule von Rechteckform oder von der schon in Fig. 9 angegebenen T-Form. Entsprechend dem obigen Beispiel ist (s. Fig. 14)

- 3.) durch einen Leiter von quadratischem Querschnitt die Stromdichte im Gebiet $a \leq x \leq a + 2 \text{ s}$, $\alpha \leq y \leq \alpha + 2 \text{ s}$ zu kompensieren,
- 4.) durch eine im Mittelpunkt des Quadrates liegende Multipolentwicklung das von dem quadratischen Leiter im Außenraum erzeugte Feld zum Verschwinden zu bringen. Dies ist bei der hier angegebenen Methode nicht mehr streng, sondern nur noch näherungsweise möglich.

Sodann wird die durch den Punkt (a, b) gehende Eisenkontur $y(x)$ berechnet. Dabei darf die Eisenkontur in $a \leq x \leq a + 2s$ nicht in die Stromspule laufen, das heißt es muß $y(x) > \alpha$ sein. Außerdem darf das Eisenprofil nicht in die Nähe des Quadratmittelpunktes laufen.

In genügend großer Entfernung von der Linsenöffnung kann man von der berechneten Eisenkontur abweichen und die an der Gesamtfläche (9) noch fehlende Spulenfläche als Rechteck (Querbalken des T) anfügen; dabei sitzt das Eisen wieder unmittelbar auf der Spule⁸⁾.

Wenn man den Nullpunkt des Koordinatensystems in den Mittelpunkt des Quadrates legt, so lautet die Diffgl. für die Eisenkontur

$$(24) \quad y' = - \frac{-B_0(y+\alpha+s) + B_{3x} + B_{4x}}{-B_0(x+a+s) + \mu_0 j(x+s) + B_{3y} + B_{4y}}$$

Wir berechnen die Felder \mathcal{L}_3 und \mathcal{L}_4 . \mathcal{L}_3 ergibt sich aus

$$\Delta A_3 = \begin{cases} \mu_0 j & \text{im Quadrat } -s \leq x \leq s, -s \leq y \leq s \\ 0 & \text{außerhalb.} \end{cases}$$

8) Das Profil in $a \leq x \leq a + 2s$ entspricht den von H. Hultschig, Desy-Notiz A 2.76, Zur Entwicklung der Quadrupollinsen II, in Fig. 3c vorgeschlagenen Korrekturnasen.

Mit der Greenschen Funktion $\frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2}$ wird

$$A_3 = \frac{\Delta u_0 j}{2\pi} \int_{-s}^s \int_{-s}^s \ln \sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2} du dv .$$

Mit $z = x + iy$, $w = u + iv$ ergibt sich

$$A_3 = \frac{\Delta u_0 j}{2\pi} \operatorname{Re} \int_{-s}^s \int_{-s}^s \ln (z-w) du dv$$

$$= - \frac{\Delta u_0 j}{4\pi} \operatorname{Re} i (z-w)^2 \left\{ \ln (z-w) - \frac{3}{2} \right\} \left| \begin{array}{l} u = s \\ -s \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} v = s \\ -s \end{array} \right.$$

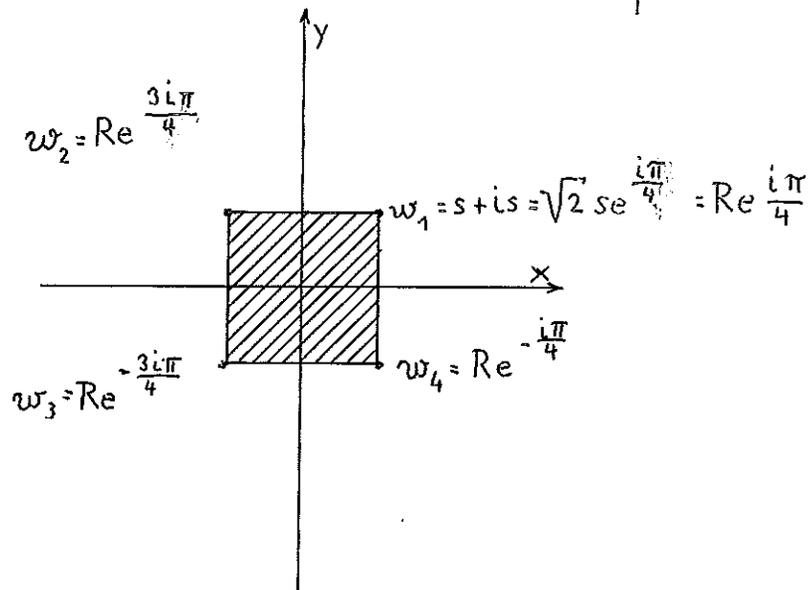


Fig. 15

Mit den Bezeichnungen von Fig. 15 wird

$$\operatorname{Re} i \sum_{k=1}^4 (-1)^k (z-w_k)^2 = 0 \text{ und}$$

$$(25) \quad A_3 = \frac{u_{0j}}{4\pi} \operatorname{Re} i \sum_{k=1}^4 (-1)^k (z-w_k)^2 \ln (z-w_k) .$$

Wegen $A_3 = \operatorname{Re} i f(z)$, wobei $f(z)$ eine analytische Funktion ist, wird $\Delta A_3 = 0$, so daß Gl. (25) zunächst nur außerhalb des Quadrates gilt.

Die Felder sind

$$(26) \quad \left\{ \begin{array}{l} B_{3x} = - \frac{u_{0j}}{2\pi} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (-1)^k (z-w_k) \ln (z-w_k) \\ B_{3y} = - \frac{u_{0j}}{2\pi} \operatorname{Re} i \sum_{k=1}^4 (-1)^k (z-w_k) \ln (z-w_k) . \end{array} \right.$$

Die Bildung des Realteils ergibt

$$(27a) \quad B_{3y} = - \frac{\mu_0 j}{2\pi} \left\{ \frac{1}{2} (y+s) \ln \frac{(y+s)^2 + (x+s)^2}{(y+s)^2 + (x-s)^2} - \frac{1}{2} (y-s) \ln \frac{(y-s)^2 + (x+s)^2}{(y-s)^2 + (x-s)^2} \right. \\ \left. + (x+s) \left\{ \operatorname{arctg} \frac{y+s}{x+s} - \operatorname{arctg} \frac{y-s}{x+s} \right\} - (x-s) \left\{ \operatorname{arctg} \frac{y+s}{x-s} - \operatorname{arctg} \frac{y-s}{x-s} \right\} \right\}.$$

Für B_{3x} erhält man aus (26) einen entsprechenden Ausdruck, bei dem ebenfalls $\operatorname{arctg} \frac{y+s}{x+s}$ auftritt. Wir benutzen statt dessen

$$(27b) \quad B_{3x} = + \frac{\mu_0 j}{2\pi} \left\{ \frac{1}{2} (x+s) \ln \frac{(x+s)^2 + (y+s)^2}{(x+s)^2 + (y-s)^2} - \frac{1}{2} (x-s) \ln \frac{(x-s)^2 + (y+s)^2}{(x-s)^2 + (y-s)^2} \right. \\ \left. + (y+s) \left\{ \operatorname{arctg} \frac{x+s}{y+s} - \operatorname{arctg} \frac{x-s}{y+s} \right\} - (y-s) \left\{ \operatorname{arctg} \frac{x+s}{y-s} - \operatorname{arctg} \frac{x-s}{y-s} \right\} \right\}.$$

Dies ergibt sich aus (27a), wenn man x und y vertauscht und das Vorzeichen von j umkehrt; Spiegelung an der Geraden $y = x$ ändert nämlich nur das Vorzeichen von j . Die Gl. (27a, b) gelten auch im Inneren des Quadrates. Zum Beweis bilde man

$$\Delta A_3 = \frac{\partial B_{3x}}{\partial y} - \frac{\partial B_{3y}}{\partial x} = \begin{cases} \mu_0 j & \text{innerhalb des Quadrates} \\ 0 & \text{außerhalb.} \end{cases}$$

Für die $\operatorname{arctg} \frac{y+s}{x+s}$ und $\operatorname{arctg} \frac{x+s}{y+s}$ ist immer der Hauptwert zu nehmen:

$$-\frac{\pi}{2} \leq \operatorname{arctg} \dots \leq \frac{\pi}{2}.$$

Beim Feld \mathcal{L}_4 machen wir für die Multipolentwicklung den Ansatz

$$(28) \quad A_4 = - \frac{u_{0j} R^2}{\pi} \left\{ a_0 \ln \frac{r}{R} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{4n} \left(\frac{R}{r}\right)^{4n} \cos 4n \vartheta \right\}.$$

Mit Ausnahme des Nullpunktes ist $\Delta A_4 = 0$. Aus (28) ergibt sich

$$(29) \quad B_{\vartheta} (r, 0) = - \frac{\partial A_4}{\partial r} \Big|_{\vartheta=0} = \frac{u_{0j} R^2}{\pi r} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{R}{r}\right)^{4n}.$$

Die a_n erhält man durch Koeffizientenvergleich mit Gl. (26). Mit der für $|z| > |w_k| = R$ geltenden Entwicklung

$$\ln (z - w_k) = \ln z - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{w_k}{z}\right)^n$$

wird

$$B_{\vartheta y} = - \frac{u_{0j}}{2\pi} \operatorname{Re} i \sum_{k=1}^4 (-1)^k w_k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \left(\frac{w_k}{z}\right)^n.$$

Auf der x-Achse, $z = x$, ergibt sich mit $w_k = R e^{i\vartheta_k}$ und den ϑ_k von Fig. 15

$$B_{3y}(x, 0) = - \frac{u_{0j} R^2}{\pi x} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{R}{x}\right)^{4n}$$

mit

$$(30) \quad a_n = \frac{(-1)^n}{(2n+1)(4n+1)},$$

so daß

$$(31) \quad A_4 = - \frac{u_{0j} R^2}{\pi} \left\{ \ln \frac{r}{R} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{4n} \left(\frac{R}{r}\right)^{4n} \cos 4n \vartheta \right\}$$

wird. Die Entwicklung (31) konvergiert nur für $r > R$ und liefert hier das Feld $-\mathcal{L}_3$. Wir wollen sie auch für $r < R$ verwenden. Die Konvergenzschwierigkeiten vermeiden wir, indem wir die Reihenglieder mit $n > N$ weglassen. Allerdings stellt die abgebrochene Reihe das Feld $-\mathcal{L}_3$ für $r > R$ nur näherungsweise dar. Der Fehler läßt sich abschätzen; er nimmt sehr stark mit N ab.

Zur Fehlerabschätzung bilden wir aus (31)

$$B_r = \frac{1}{r} \frac{\partial A_4}{\partial \vartheta} = - \frac{u_{0j} R^2}{\pi r} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{R}{r}\right)^{4n} \sin 4n \vartheta.$$

Für $r \geq r_0 > R$ läßt sich der Fehler $|\Delta B_r|$ durch eine geometrische Reihe majorisieren:

$$(32) \quad |\Delta B_r| < \frac{\mu_{0j} R^2}{\pi r_0} \frac{1}{(2N+3)(4N+5)} \cdot \frac{\left(\frac{R}{r_0}\right)^{4N+4}}{1 - \left(\frac{R}{r_0}\right)^4} .$$

Derselbe Ausdruck ergibt sich für $|\Delta B_{\mathcal{A}}|$.

Unter der Voraussetzung, daß die Fehler $|\Delta B_{r, \mathcal{A}}|$ klein gegen das in der Linse herrschende Quadrupolfeld sind, können wir näherungsweise setzen

$$(33) \quad \left\{ \begin{aligned} A_4 &= - \frac{\mu_{0j} R^2}{\pi} \left\{ \frac{1}{2} \ln \frac{x^2 + y^2}{R^2} - \sum_{n=1}^N \frac{a_n}{4n} \left(\frac{R^2}{x^2 + y^2}\right)^{2n} \cos\left(4n \operatorname{arctg} \frac{y}{x}\right) \right\} \\ B_{4x} &= - \frac{\mu_{0j} R^2}{\pi(x^2 + y^2)} \sum_{n=0}^N a_n \left(\frac{R^2}{x^2 + y^2}\right)^{2n} \left\{ y \cos\left(4n \operatorname{arctg} \frac{y}{x}\right) \right. \\ &\quad \left. + x \sin\left(4n \operatorname{arctg} \frac{y}{x}\right) \right\} \\ B_{4y} &= \frac{\mu_{0j} R^2}{\pi(x^2 + y^2)} \sum_{n=0}^N a_n \left(\frac{R^2}{x^2 + y^2}\right)^{2n} \left\{ x \cos\left(4n \operatorname{arctg} \frac{y}{x}\right) \right. \\ &\quad \left. - y \sin\left(4n \operatorname{arctg} \frac{y}{x}\right) \right\} ; \end{aligned} \right.$$

dabei ist $-\frac{\tilde{\pi}}{2} \leq \arctg \frac{y}{x} \leq \frac{\tilde{\pi}}{2}$.

Zur Berechnung der Eisenkontur sind die Felder (27) und (33) in Gl. (24) einzusetzen. Als Beispiel führen wir die Rechnung durch für $a = 20$, $\alpha = 4$, $s = 2$ und $p = \frac{u_{0j}}{B_0} = 1$. Berechnet wird die Kontur durch den Punkt $(-2; -1)$; in dem vorher benutzten Koordinatensystem ist dies der Punkt $(20; 5)$. Dieselben Zahlenwerte wurden bei der Eisenkontur in Fig. 13 zugrunde gelegt; statt in dem dort angegebenen Kreisabschnitt fehlt jetzt die Stromdichte unterhalb der Geraden $y = 5$ im Rechteck $20 \leq x \leq 24$, $4 \leq y \leq 5$. Die Multipolentwicklung liegt im Punkt $(22; 6)$.

In den Fig. 16 und 17 sind die Eisenprofile für $N = 0, 1, 2, 3$ und 5 dargestellt. Für $N \geq 2$ laufen sie in den Quadratmittelpunkt, so daß diese Profile zunächst nicht zu gebrauchen sind. Man kann aber ein Profil benutzen, das anfangs der Kurve für $N = 3$ folgt und dann, wie in Fig. 17 gestrichelt angedeutet, in die Kurve für $N = 1$ übergeht. In genügend großem Abstand von $x = 20$ kann die Kontur so abgeändert werden, daß sie auf dem vorgegebenen Spulenrand (Rechteckspule bzw. T-Spule) verläuft. Die Spulenfläche ist $\frac{2ab}{p} = 200 \text{ cm}^2$.

Auch für $x < 20$ führt das Störfeld $\mathcal{L}_3 + \mathcal{L}_4$ zu kleinen Abweichungen des Profils von der exakten Hyperbel. Für $N = 0$ ergab sich bei $x = 15$ eine Abweichung von $5/100$ mm nach unten. Für $N > 0$ waren die Abweichungen kleiner (z. B. für $N = 3$ $2/1000$ mm nach oben) und lagen innerhalb der Genauigkeit des Runge-Kutta-Verfahrens.

Der relative Fehler im Feld außerhalb eines Kreises um den Quadratmittelpunkt mit $r = 1,25 R$ ist nach Gl. (32) kleiner als

$$\frac{\Delta B}{B} = \frac{\sqrt{|\Delta B_r|^2 + |\Delta B_{\theta}|^2}}{B_0 a} < 0,086 \cdot \frac{0,8^{4N+4}}{(2N+3)(4N+5)} .$$

Wenn wir für das in Fig. 17 angegebene, aus den Kurven für $N = 3$ und $N = 1$ zusammengesetzte Eisenprofil $N = 2$ setzen, wird $\frac{\Delta B}{B} < 7 \cdot 10^{-5}$. Für $N = 1$ wird $\frac{\Delta B}{B} < 3 \cdot 10^{-4}$.

D. Lublow

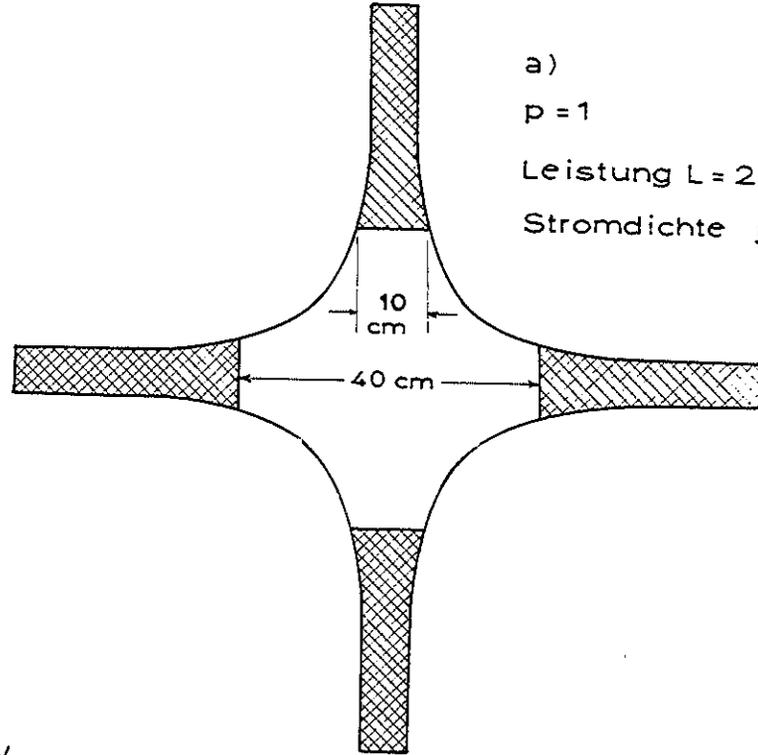
FIG. 3

Spaltenrand und Eisenkontur nach Gl. (8)



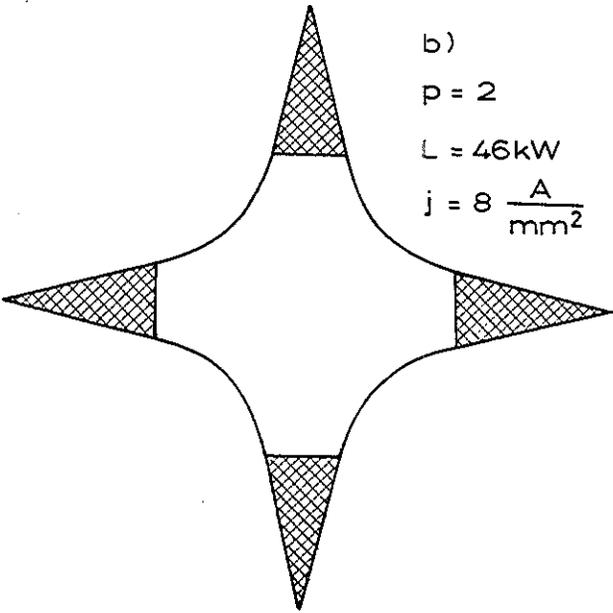
Fig. 5

Quadrupollinsen

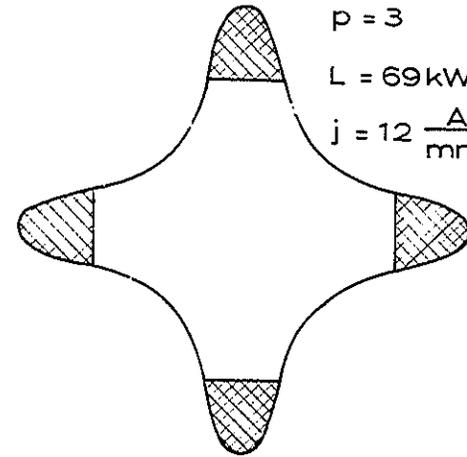


a)
p = 1

Leistung $L = 23 \text{ kW}$ (für 1m Länge und $B_0 = 4,85 \frac{\text{Vs}}{\text{m}^3}$)
Stromdichte $j = 4 \frac{\text{A}}{\text{mm}^2}$



b)
p = 2
 $L = 46 \text{ kW}$
 $j = 8 \frac{\text{A}}{\text{mm}^2}$



c)
p = 3
 $L = 69 \text{ kW}$
 $j = 12 \frac{\text{A}}{\text{mm}^2}$

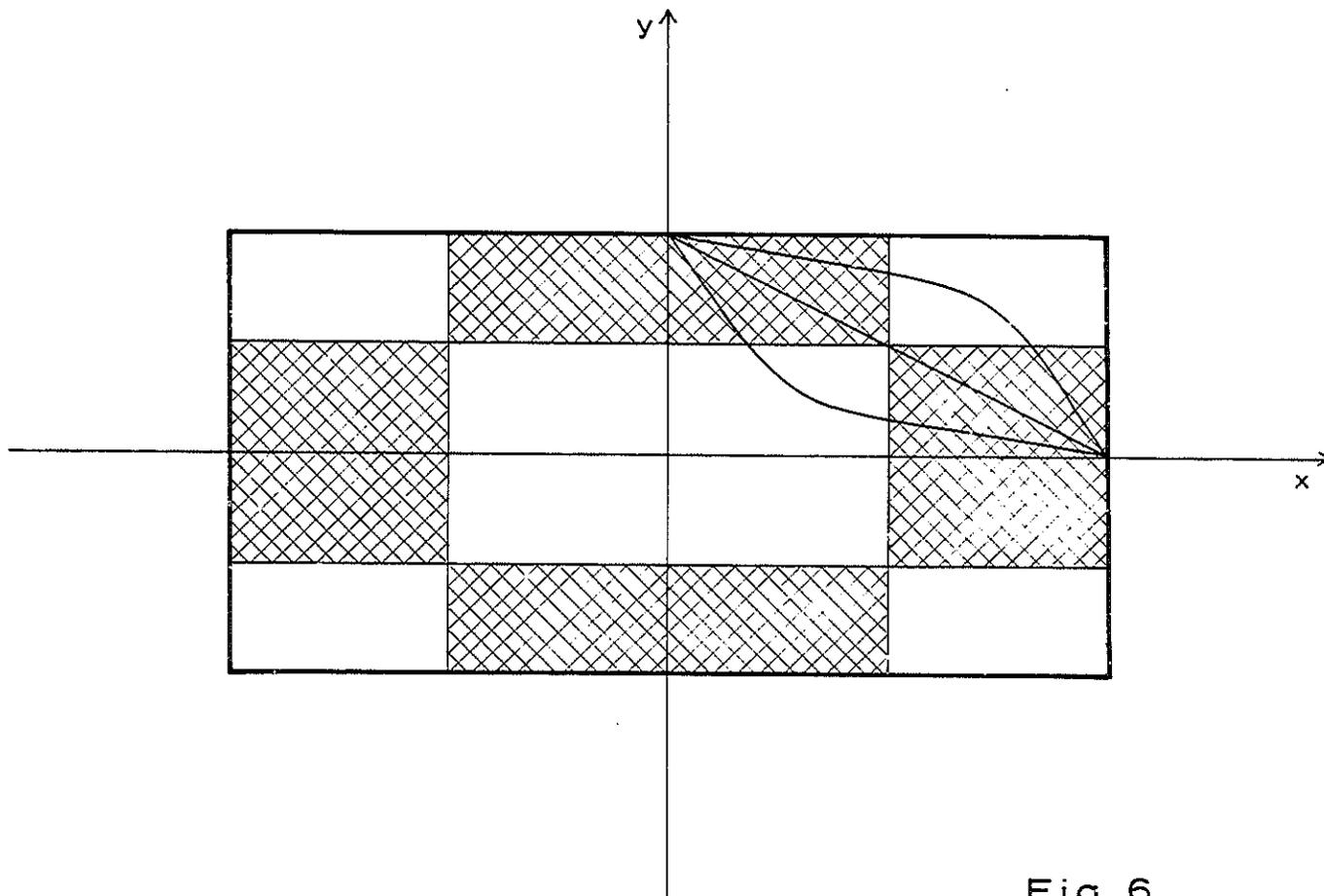


Fig. 6

Panofsky - Linse

(Im 1. Quadranten sind weitere mögliche
Konfurkurven eingezeichnet.)

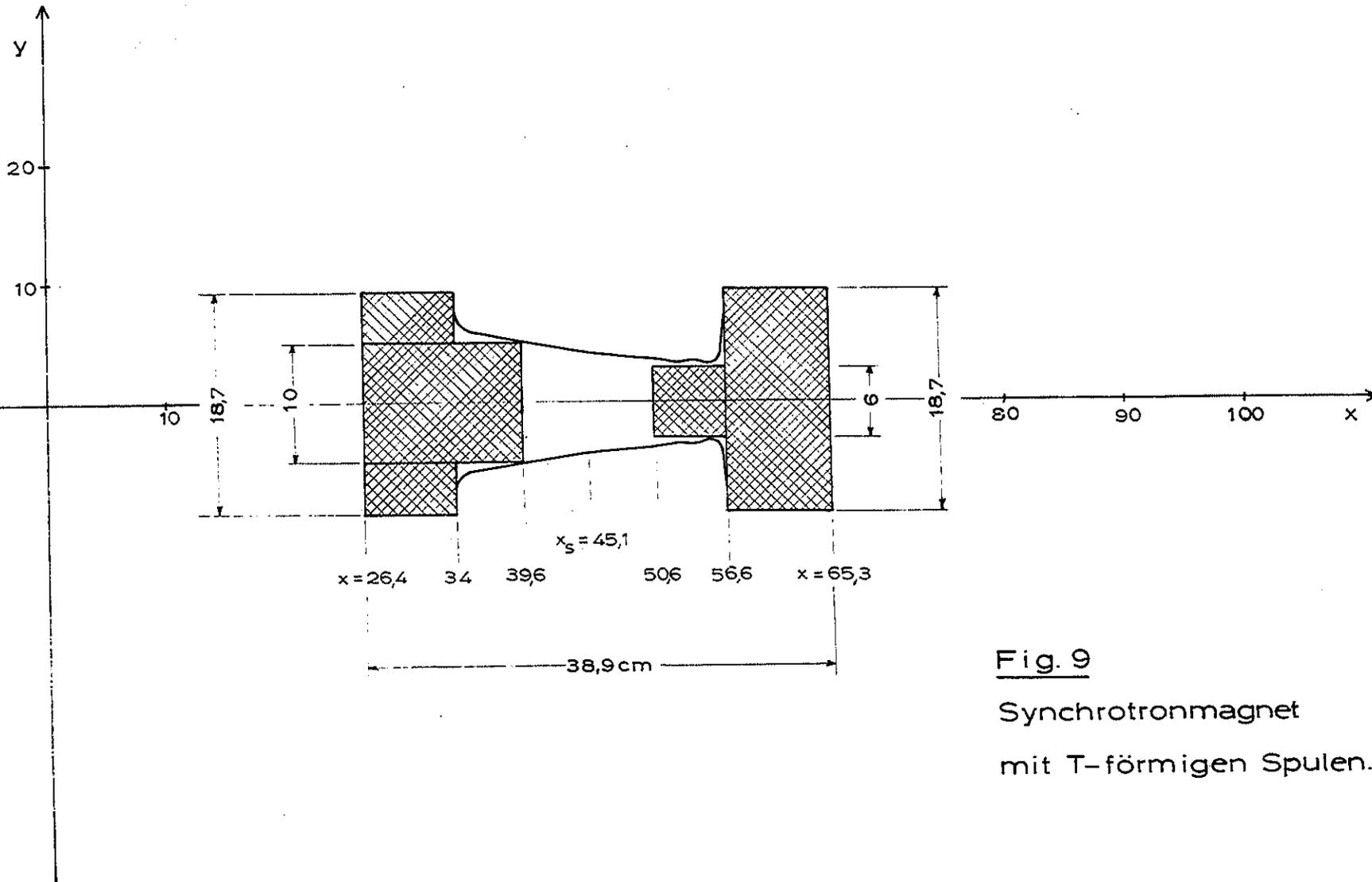


Fig. 9

Synchrotronmagnet
mit T-förmigen Spulen.

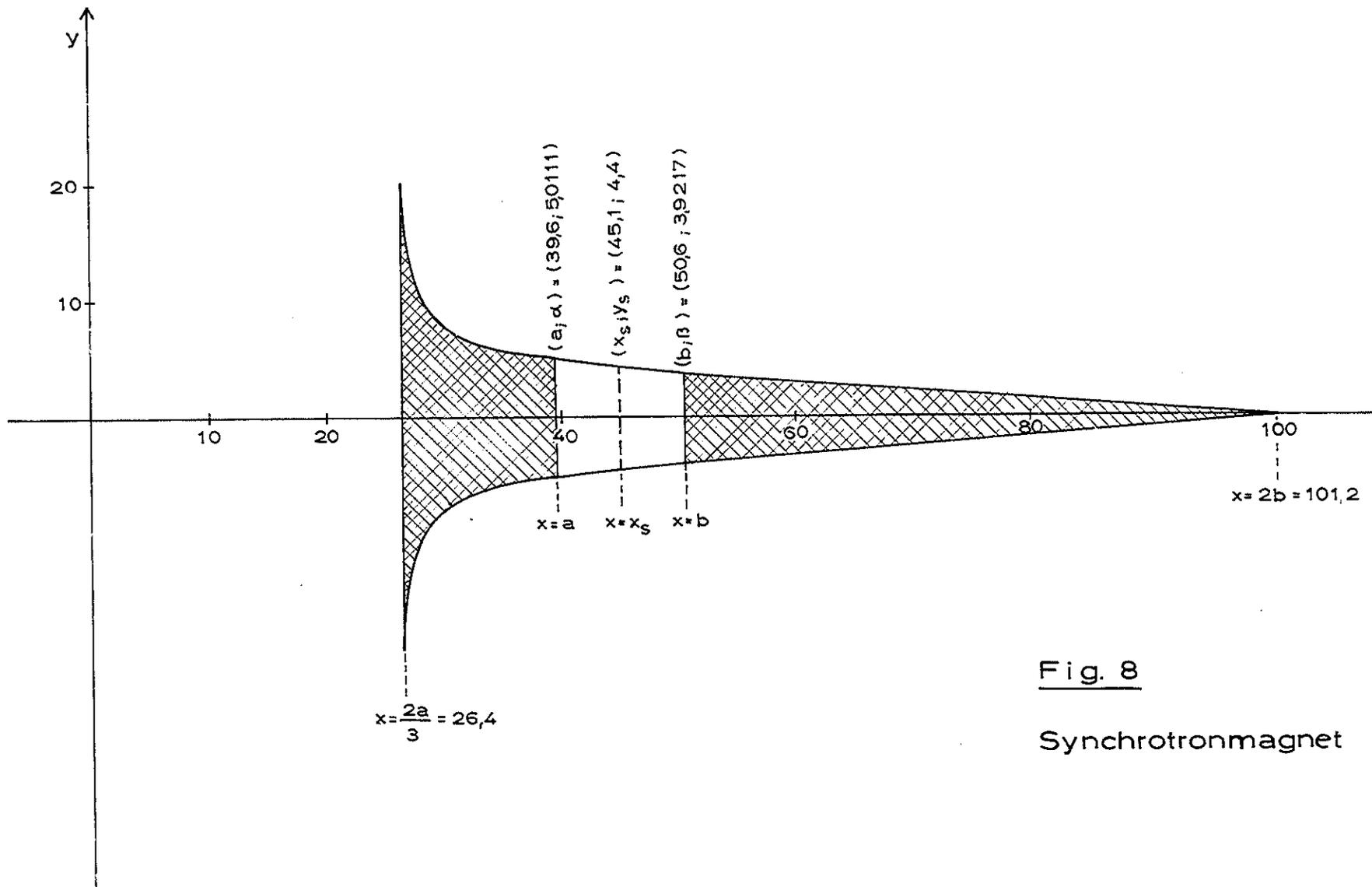


Fig. 8

Synchrotronmagnet

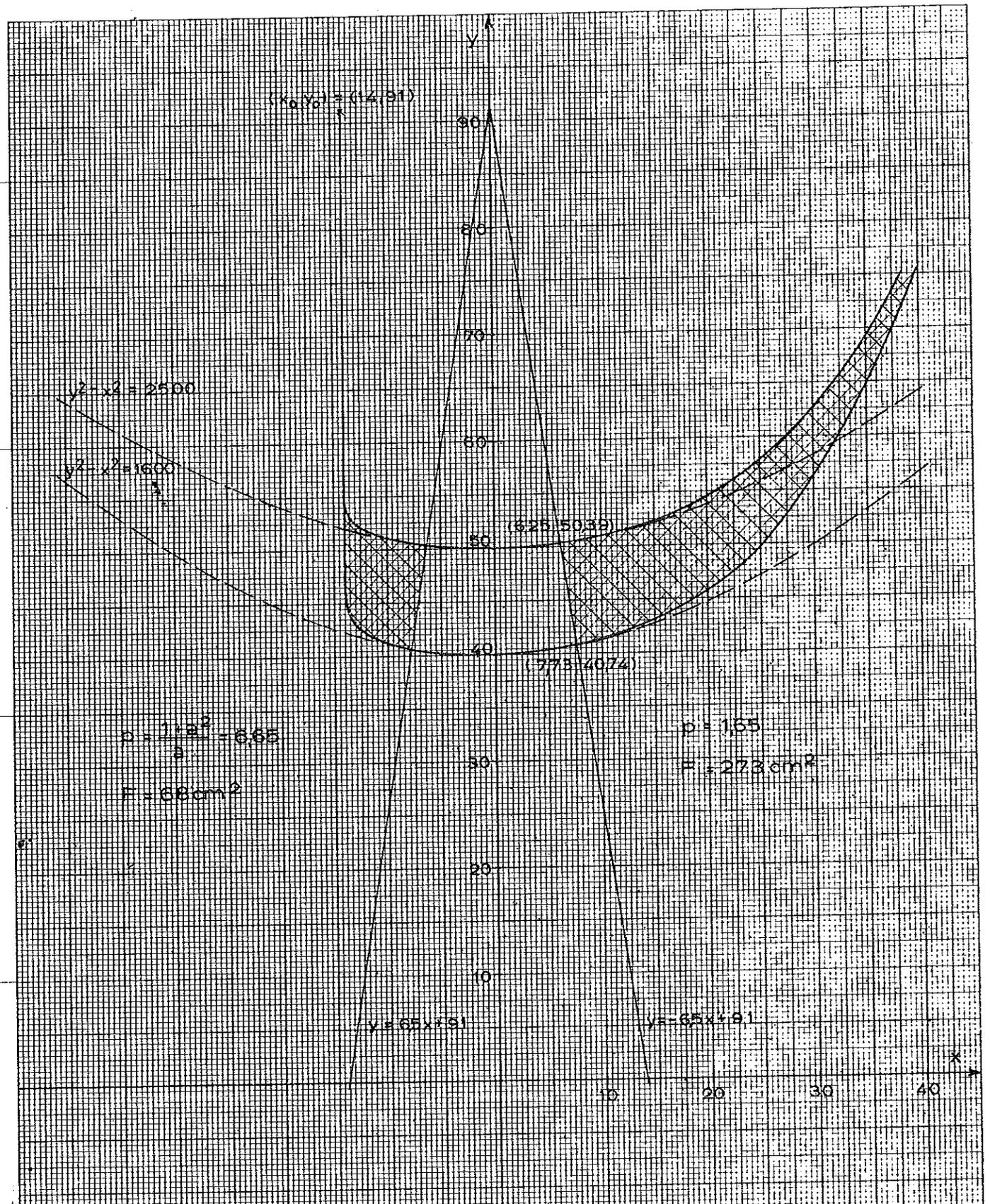
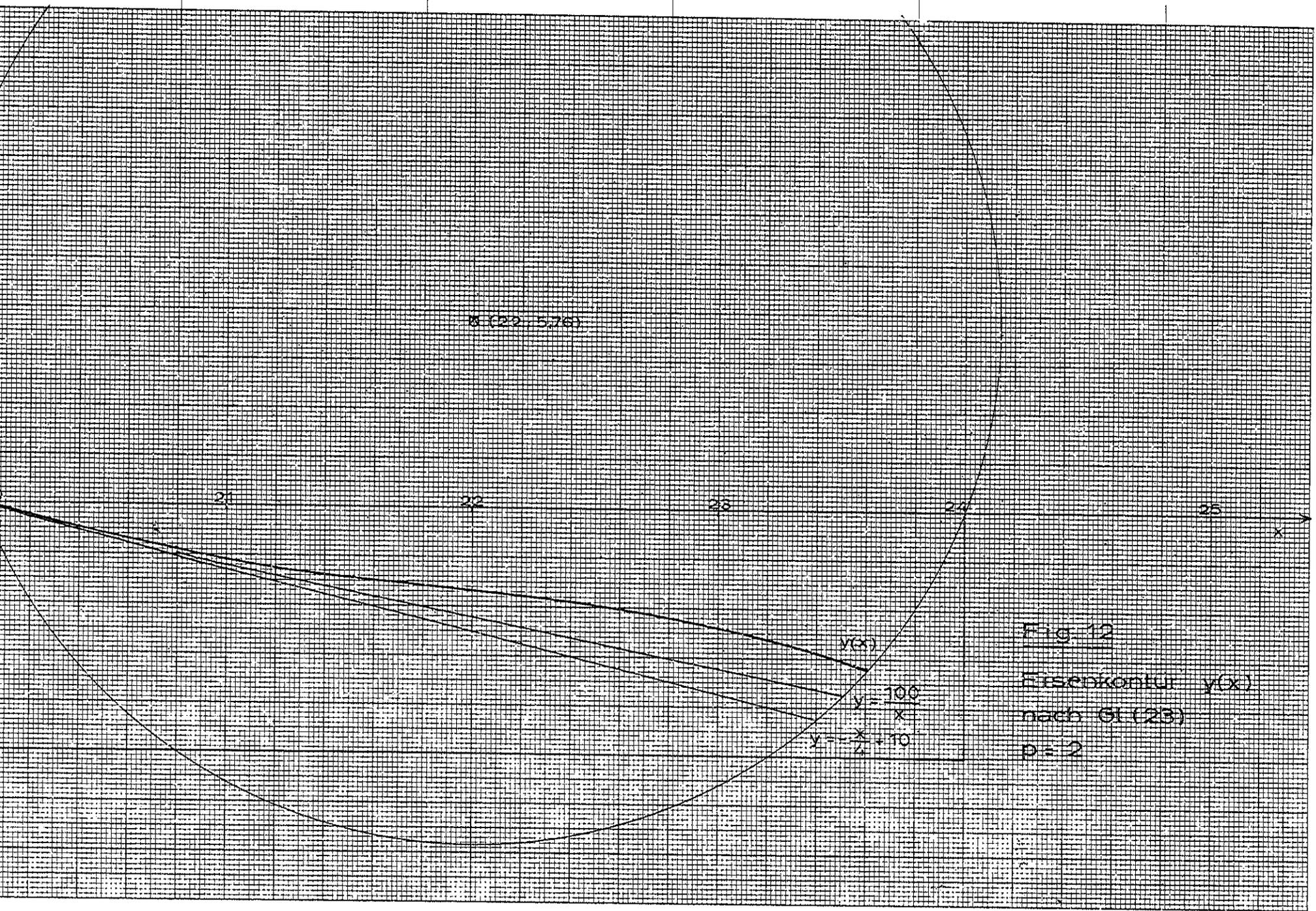


Fig 10

Stromspulen nach Gl. (22)



K(22, 5.76)

21

22

23

24

25

x

$v(x)$

$$y = \frac{100}{x}$$

$$y = -\frac{x}{4} + 10$$

Fig. 12

Eisenkontur $y(x)$

nach Gl. (23)

$p = -2$

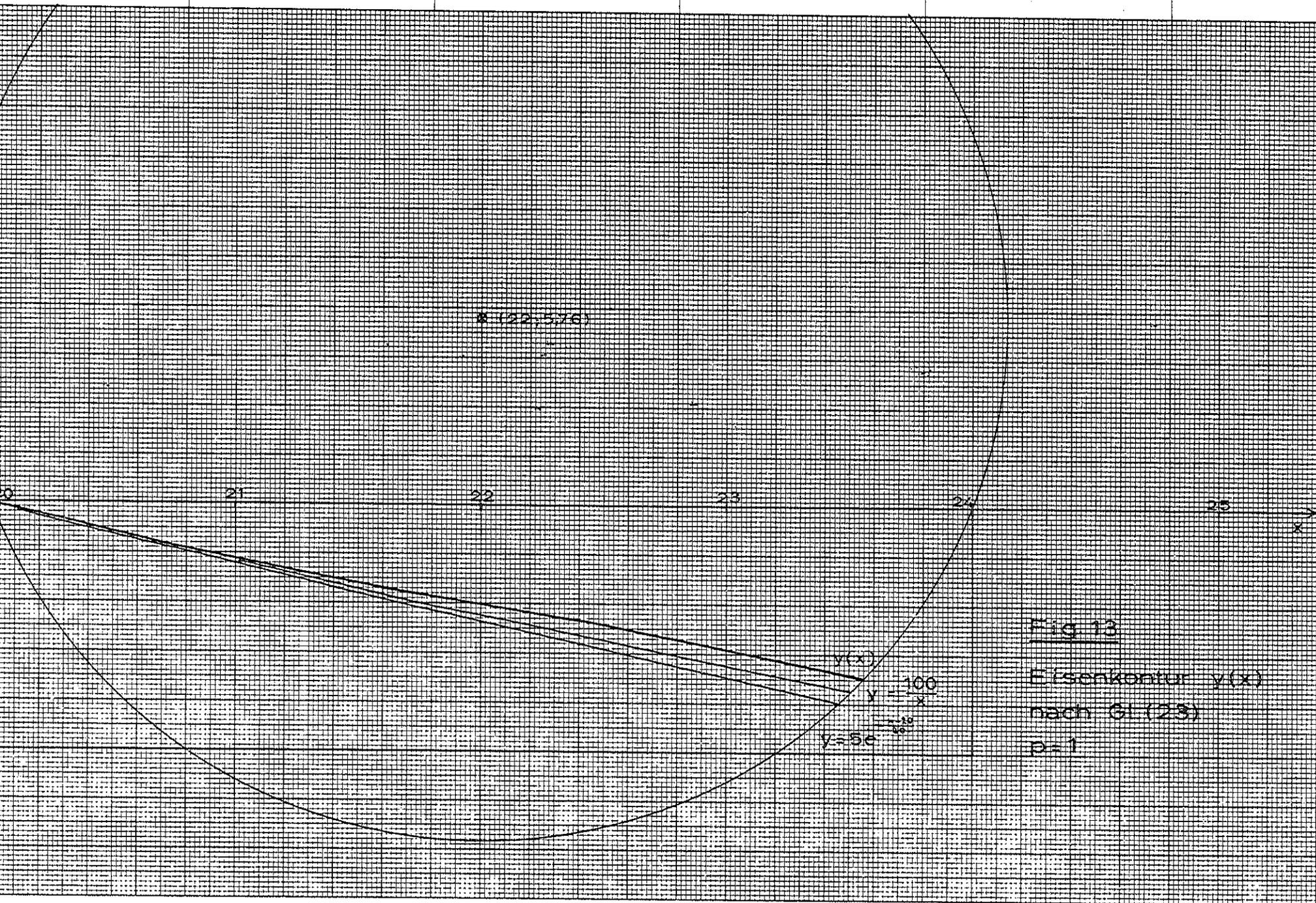


Fig 13

Eisenkontur $v(x)$
nach Gl (23)

$D=1$

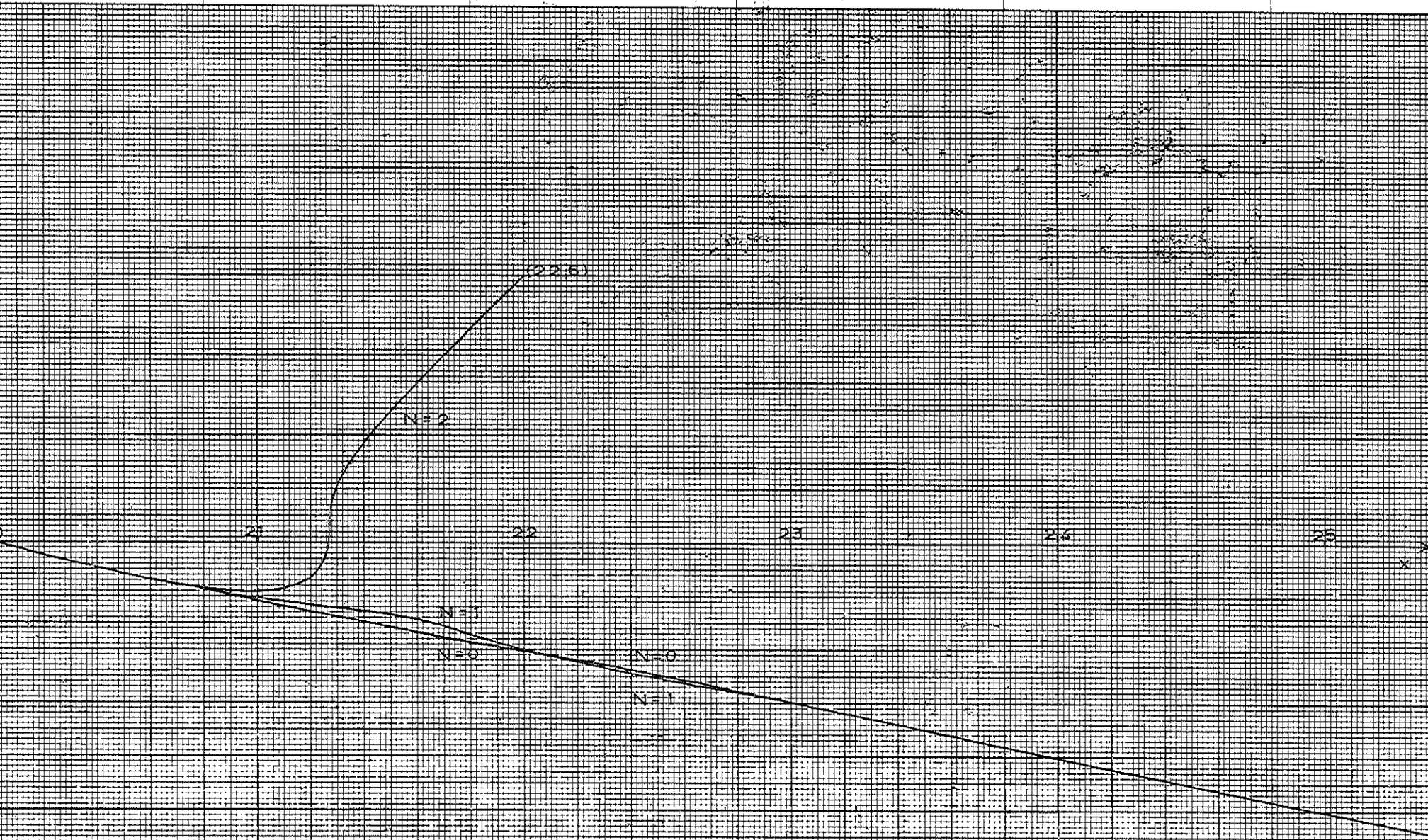


Fig. 16

Eisenprofil nach Gl. (24)

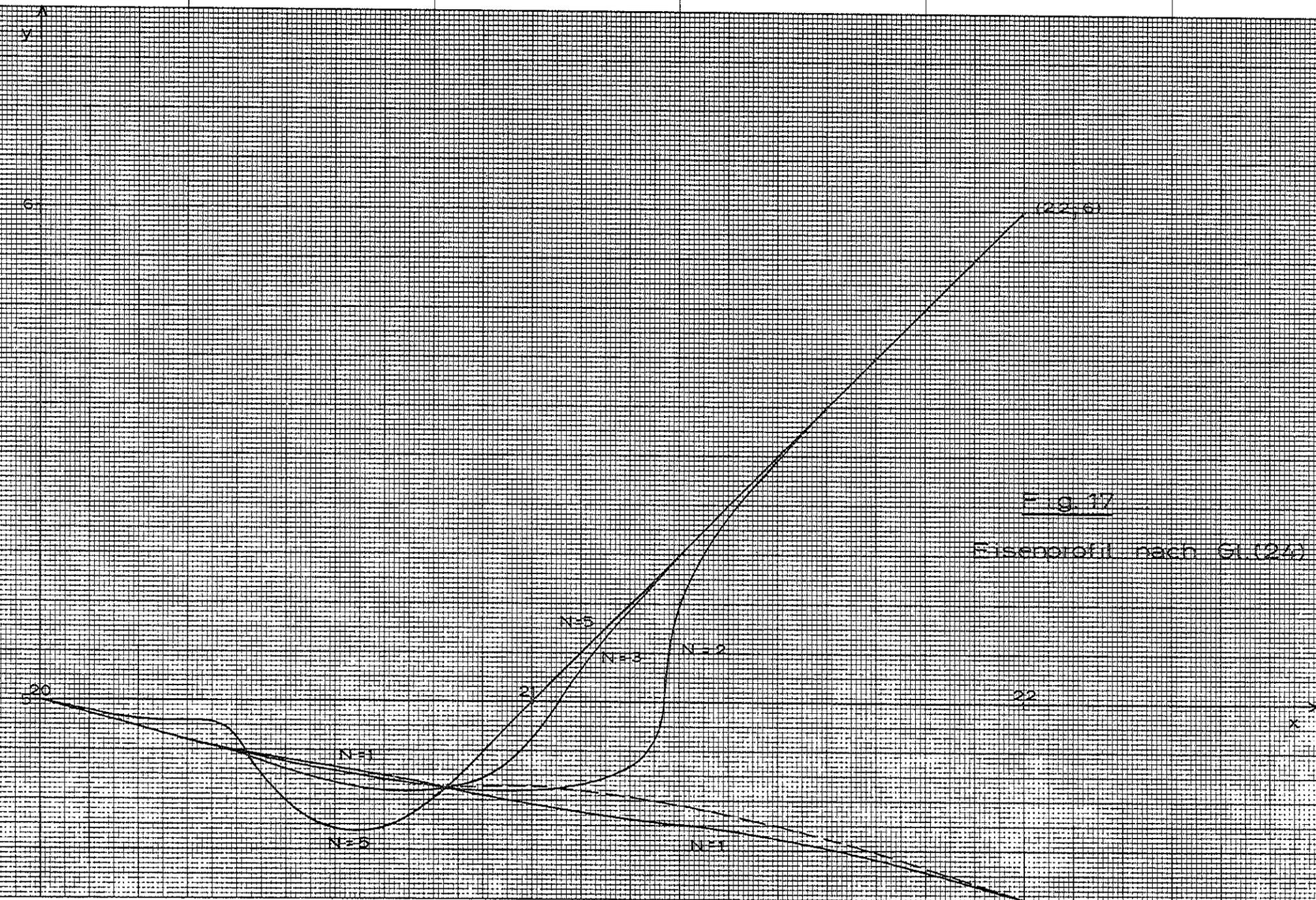


Fig. 17

Eisprofil nach Gl. (24)