

D E U T S C H E S   E L E K T R O N E N - S Y N C H R O T R O N  
DESY

Hamburg-Gr. Flottbek 1, Flottbeker Drift 56

DESY-Bibliothek

Desy-Notiz A 2.87

Hamburg, den 1. Juni 1962

GRAPHISCHE DARSTELLUNG DER DIFFERENTIELLEN WIRKUNGSQUER-  
SCHNITTE VON BETHE-HEITLER UND PAULI-WEISSKOPF IM EXTREM  
RELATIVISTISCHEN GRENZFALL

GRAPHISCHE DARSTELLUNG DER DIFFERENTIELLEN WIRKUNGSQUERSCHNITTE VON BETHE-HEITLER UND PAULI-WEISSKOPF IM EXTREM RELATIVISTISCHEN GRENZFALL

I. EINLEITUNG

Der differentielle Wirkungsquerschnitt für die Paarerzeugung von Fermionen mit Spin  $1/2$  wurde zuerst von Bethe-Heitler<sup>1)</sup> (B-H) angegeben, der entsprechende Ausdruck für Bosonen mit Spin 0 von Pauli-Weisskopf<sup>2)</sup> (P-W). Obwohl bekannt ist, daß mit größer werdender Energie der primären  $\gamma$ -Strahlung erhebliche Abweichungen von diesen 1. Näherungen der Quantenelektrodynamik auftreten (sei es durch höhere Näherung, durch Berücksichtigung der auf den Kern übertragenen Energie oder durch die starke Wechselwirkung), können die Formeln von B-H und P-W für eine erste Orientierung z. B. bei der Planung von Experimenten nützlich sein. Im folgenden werden daher extrem relativistische Näherungen der Formeln von B-H und P-W angegeben und graphisch dargestellt, die für nicht zu große Winkel ( $\theta \ll 1$ ) gültig sind. Dabei läßt sich die Abhängigkeit von der Primärenergie in einfacher Weise darstellen.

II. EXTREM RELATIVISTISCHER GRENZFALL FÜR FERMIONEN

Die B-H-Formel lautet (vergl. Jauch-Rohrlich p. 375):

---

1) H.A. Bethe und W. Heitler, Proc. Roy. Soc. A 146, 83 (1934)

2) W. Pauli und V. Weisskopf, Helv. Phys. Acta 7, 709 (1934)  
Der ursprüngliche Ausdruck ist um den Faktor 2 verkehrt.

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\varepsilon_+ d\Omega_+ d\Omega_-} = & -\frac{\alpha Z^2}{(2\pi)^2} r_0^2 \frac{m^2}{q^4} \frac{p_+ p_-}{k^3} \times \left[ \frac{\beta_+^2 \sin^2 \Theta_+}{(1-\beta_+ \cos \Theta_+)^2} (4\varepsilon_-^2 - q^2) \right. \\ & + \frac{\beta_-^2 \sin^2 \Theta_-}{(1-\beta_- \cos \Theta_-)^2} (4\varepsilon_+^2 - q^2) + \frac{2\beta_+ \beta_- \sin \Theta_+ \sin \Theta_- \cos \phi}{(1-\beta_+ \cos \Theta_+)(1-\beta_- \cos \Theta_-)} (4\varepsilon_+ \varepsilon_- + q^2 - 2k^2) \\ & \left. - 2k^2 \frac{(\gamma_+^2 - 1) \sin^2 \Theta_+ + (\gamma_-^2 - 1) \sin^2 \Theta_-}{\gamma_+ \gamma_- (1-\beta_+ \cos \Theta_+)(1-\beta_- \cos \Theta_-)} \right] \end{aligned} \quad (1)$$

Hierin bedeuten

$$\alpha = \frac{1}{137}$$

Z = Kernladung

$$r_0 = \frac{e^2}{4\pi m} = 2.8 \cdot 10^{-13} \text{ cm}$$

$\vec{k}$  der Impuls der primären  $\gamma$  in Richtung der Polarachse

$\vec{p}_\pm$  die Impulse der Fermionen

$\varepsilon_\pm$  die Energien der Fermionen

$\Theta_\pm$  die Polarwinkel der Fermionen

$\phi$  die Differenz ihrer Azimutalwinkel

$q = |\vec{q}|$  wo  $\vec{q} = \vec{k} - \vec{p}_- - \vec{p}_+$  der auf den Kern übertragene Puls ist.

Wir führen nun folgende Näherungen und Definitionen ein:

$$\begin{aligned}
 \beta &= 1 - \frac{1}{2\gamma^2} \\
 \cos \Theta &= 1 - \frac{1}{2} \Theta^2 \\
 \sin \Theta &= \Theta \\
 v_+ &= \gamma_+ \Theta_+ \\
 v_- &= \gamma_- \Theta_- \\
 \gamma &= \frac{1}{2} (\gamma_+ + \gamma_-) \\
 \Delta &= \frac{1}{2\gamma} (\gamma_+ - \gamma_-)
 \end{aligned} \tag{2}$$

Beschränken wir uns auf die höchste Potenz in  $\gamma$  (extrem relativistische Näherung), so ergibt sich

$$q^2 = m^2 (v_+^2 + v_-^2 + 2v_+ v_- \cos \Theta) \tag{3}$$

und der Ausdruck (1) nimmt die Gestalt an

$$\begin{aligned}
 \frac{d\mathcal{G}}{dE d\Omega_+ d\Omega_-} &= \frac{\alpha z^2}{(2\pi)^2} r_0^2 \frac{\gamma^3}{m} S_F (v_+ v_- \phi \Delta) \\
 \text{wo } S_F &= 2(1-\Delta^2)^3 (1+v_+^2)^{-2} (1+v_-^2)^{-2} \times \{v_+^2 + v_-^2 + 2v_+ v_- \cos \phi\}^{-2} \\
 &\times \left\{ \frac{1+\Delta^2}{1-\Delta^2} (v_+^2 + v_-^2 + 2v_+^2 v_-^2 + v_+^2 v_-^4 + v_+^4 v_-^2 + v_+^4 + v_-^4) \right. \\
 &\left. + v_+^4 + v_-^4 - 2v_+^2 v_-^2 + 2 \frac{1+\Delta^2}{1-\Delta^2} v_+ v_- (1+v_+^2 + v_-^2 + v_+^2 v_-^2) \cos \phi \right\}
 \end{aligned} \tag{4}$$

Das Angenehme an dem Ausdruck (4) ist, daß  $S_F$  nicht mehr explizit von der Primärenergie  $2 \gamma m$  abhängt. Allerdings muß dabei beachtet werden, daß die  $\vartheta_{\pm}$  nicht die geometrischen Polarwinkel der erzeugten Teilchen sind, sondern "gespreizt" sind

$$\vartheta_{\pm} = \gamma_{\pm} \Theta_{\pm} \quad \text{nach (2)}$$

Ein Mangel des Ausdruckes  $S_F$  ist, daß es bei festgehaltenem  $\Delta$ ,  $\vartheta_{+}$  jeweils einen Punkt in der  $\vartheta_{-}$ ,  $\phi$ -Ebene gibt, an dem Zähler und Nenner verschwinden. Es ist dies der Punkt  $\vartheta_{-} = \vartheta_{+}$ ,  $\phi = \pi$ , wo der übertragene Impuls in der von uns betrachteten Näherung verschwindet. In der Umgebung dieses Punktes wird daher der differentielle Streuquerschnitt durch (4) nicht richtig wiedergegeben, sondern muß von Fall zu Fall aus (1) direkt berechnet werden. Eine Abschätzung zeigt, daß (4) gültig ist, solange gilt

$$\frac{q}{m} > \max \left( \frac{1}{\gamma^2} \vartheta_{+}, \frac{1}{\gamma} \vartheta_{+}^2 \right)$$

wobei  $\frac{q}{m}$  aus (3) zu entnehmen ist.

Im Falle  $\Delta = 0$ , das heißt bei Gleichverteilung der Energie auf die beiden Teilchen läßt sich der Wirkungsquerschnitt für den "kritischen Punkt" selbst leicht angeben, mit  $q = 2 \gamma m (1 - \beta \cos \Theta)$  wird hier

$$\frac{d\sigma}{d\epsilon d\Omega_{+} d\Omega_{-}} = \frac{\alpha Z^2}{(2\pi)^2} r_0^2 \frac{\gamma^3}{m} \frac{2 \vartheta^2}{(1 + \vartheta^2)^4} \quad (5)$$

In seiner Umgebung muß man, was hier nicht geschehen soll, auf den Ausdruck (1) zurückgreifen.

III. EXTREM RELATIVISTISCHER GRENZFALL FÜR BOSONEN

Hier lautet die (berichtigte) Formel von Pauli-Weisskopf

$$\frac{d\sigma}{d\epsilon d\Omega_+ d\Omega_-} = - \frac{\alpha Z^2}{2(\pi)^2} n_0^2 \frac{m^2}{q^4} \frac{p_+ p_-}{k^3} \left[ \epsilon_+^2 \frac{\beta_-^2 \sin^2 \theta_-}{(1 - \beta_- \cos \theta_-)^2} \right. \\ \left. + 2\epsilon_+ \epsilon_- \frac{\beta_+ \beta_- \sin \theta_+ \sin \theta_- \cos \phi}{(1 - \beta_+ \cos \theta_+)(1 - \beta_- \cos \theta_-)} + \epsilon_-^2 \frac{\beta_+^2 \sin^2 \theta_+}{(1 - \beta_+ \cos \theta_+)^2} \right] \quad (6)$$

Das genau analoge Vorgehen wie bei den Fermionen ergibt den Ausdruck

$$\frac{d\sigma}{d\epsilon d\Omega_+ d\Omega_-} = \frac{\alpha Z^2}{(2\pi)^2} n_0^2 \frac{\gamma^3}{m} S_B(v_+, v_-, \phi, \Delta) \\ \text{wo } S_B = (1 - \Delta^2)^3 (1 + v_-^2)^2 (1 + v_+^2)^2 \times \left\{ v_+^2 + v_-^2 + 2 v_+ v_- \cos \phi \right\}^{-2} \quad (7)$$

$$\left\{ v_-^2 + v_+^2 + 4 v_-^2 v_+^2 + v_+^2 v_-^4 + v_+^4 v_-^2 + 2 v_+ v_- (1 + v_+^2 + v_-^2 + v_+^2 v_-^2) \cos \phi \right\}$$

Auch dieser Ausdruck (7) verliert seine Gültigkeit in der Umgebung des "kritischen Punktes", und es gilt das Entsprechende wie bei den Fermionen.

Am "kritischen Punkt" selbst gilt dagegen stets streng

$$\frac{d\sigma}{d\epsilon d\Omega_+ d\Omega_-} = 0 \quad \text{für } \Delta = 0 \quad (8)$$

In den graphischen Darstellungen (Fig. 1-8) sind die Funktionen  $S_F$  und  $S_B$  bei jeweils festgehaltenem  $\Delta$  und  $\mathcal{V}_+$  mittels Höhenlinien als Funktion von  $\mathcal{V}_-$  und  $\phi$  dargestellt. In der Umgebung des kritischen Punktes  $\mathcal{V}_- = \mathcal{V}_+$ ,  $\phi = 180^\circ$ , stellen sie den Wirkungsquerschnitt, wie oben vermerkt, nicht richtig dar; überdies mußte der Verlauf der Höhenlinien in diesem Bereich etwas geraten werden.

#### IV. EINFLUSS DER ABSCHIRMUNG AUF DEN STREUQUERSCHNITT

Sowohl die Formel von B-H als auch die von P-W setzen ein reines Coulombfeld zur Aufnahme des Impulses  $q$  voraus. Sie enthalten daher den Faktor  $F(q) = \frac{1}{q^4}$ . In Wirklichkeit ist das Coulombfeld aber außen durch die Elektronenhülle, innen durch die endliche Ausdehnung des Kerns reduziert.

Es tritt also ein Formfaktor auf, der das schematische Aussehen besitzt, wie es in Fig. 9 dargestellt ist.

Mit Hilfe der angegebenen Formel

$$q^2 = m^2 (\mathcal{V}_+^2 + \mathcal{V}_-^2 + 2 \mathcal{V}_+ \mathcal{V}_- \cos \phi)$$

(ungültig in der Umgebung des kritischen Punktes)

$$q = \frac{m}{\gamma} (1 + \mathcal{V}^2) \quad \text{am kritischen Punkt, wenn } \Delta = 0,$$

läßt sich schnell entscheiden, wann der Formfaktor eine Rolle spielt.

Fig 1

$S_F \quad \Delta = 0 \quad \delta_+ = 0,5$

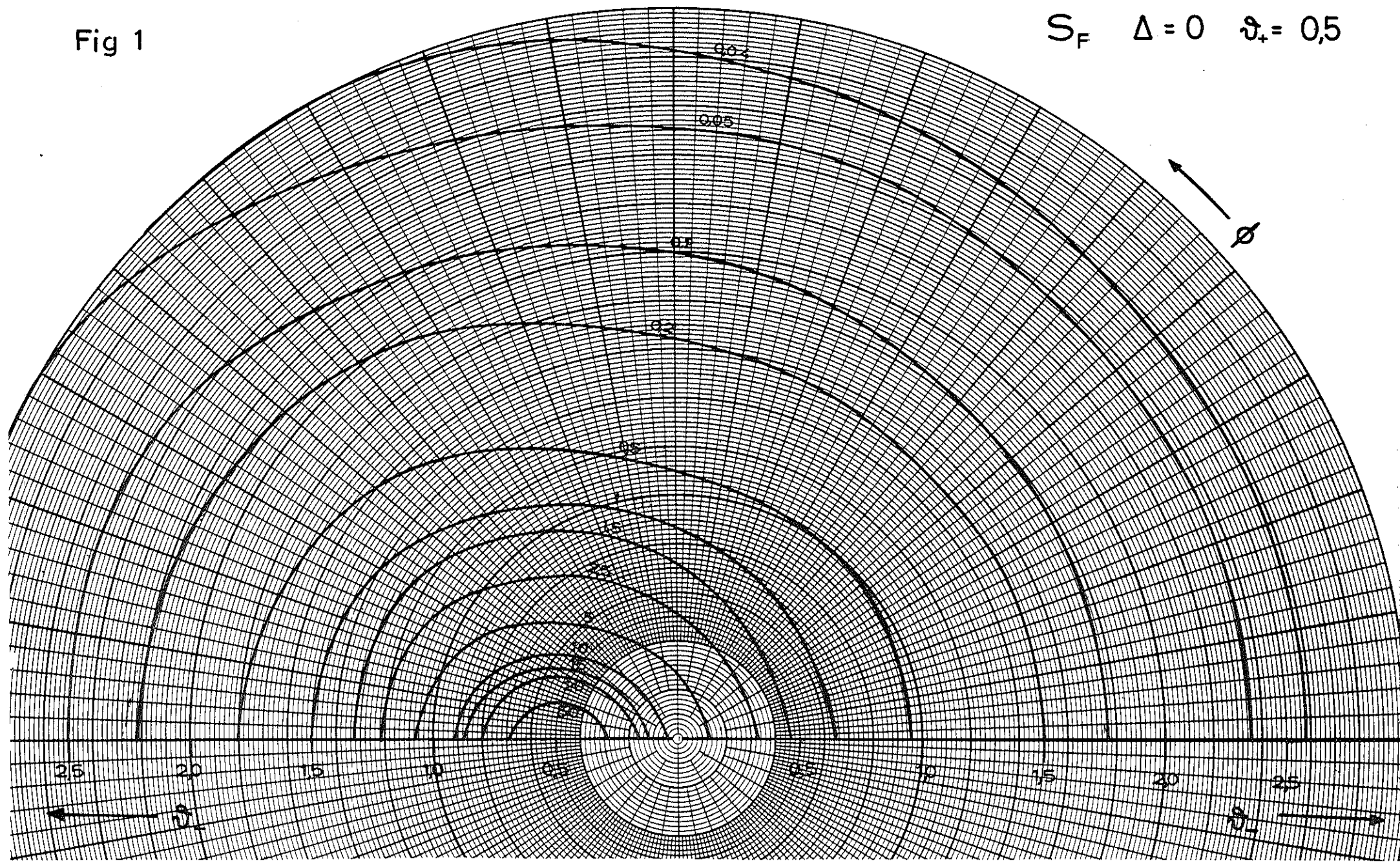




Fig 2

$$S_F \quad \Delta = 0 \quad \vartheta_+ = 1$$

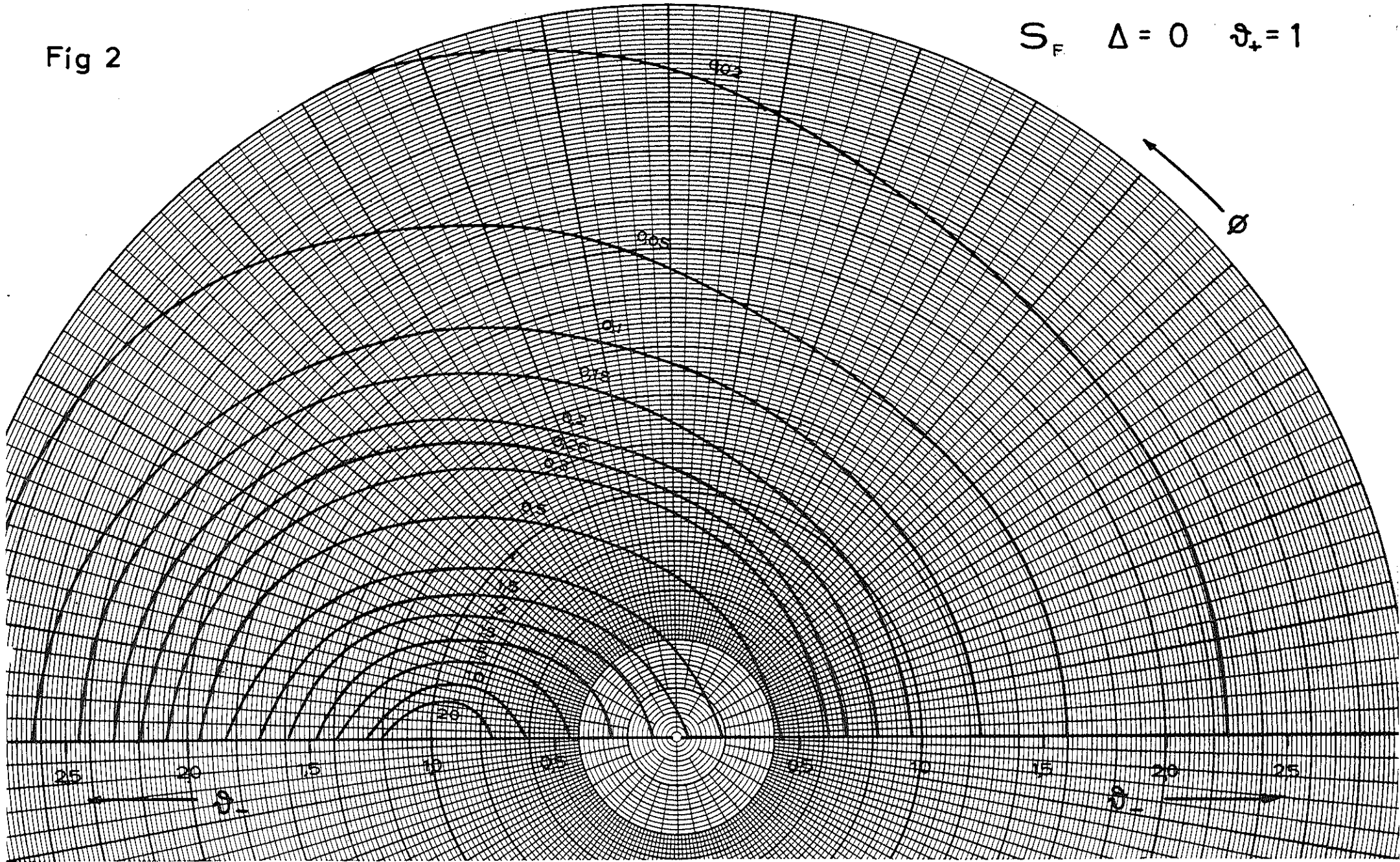


Fig 3

$S_F \quad \Delta = 0,5 \quad \vartheta_+ = 0,5$

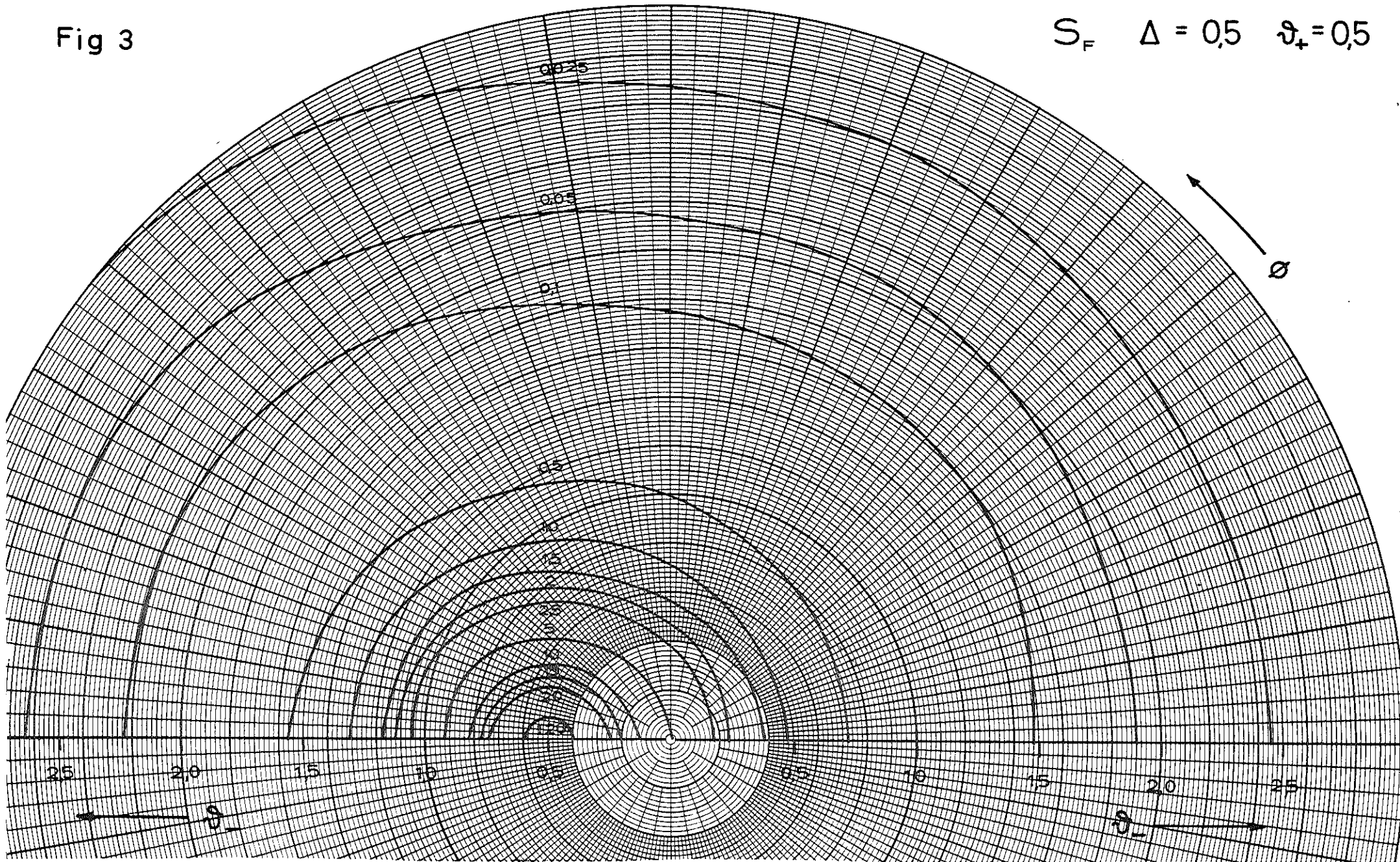


Fig 4

$$S_F \quad \Delta = 0,5 \quad \vartheta_+ = 1$$

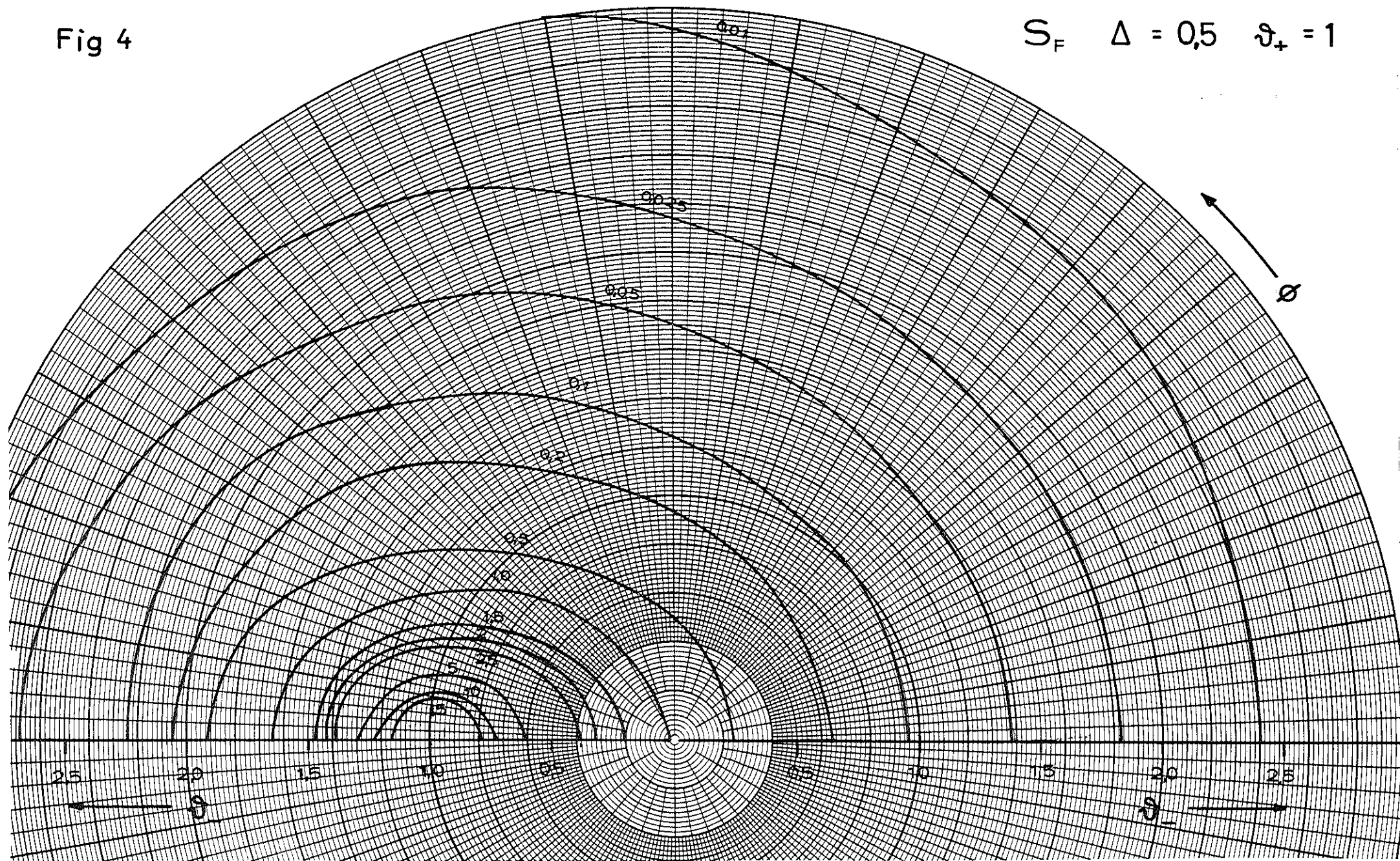




Fig 5

0,003

$S_B \Delta = 0 \quad \vartheta_+ = 0,5$

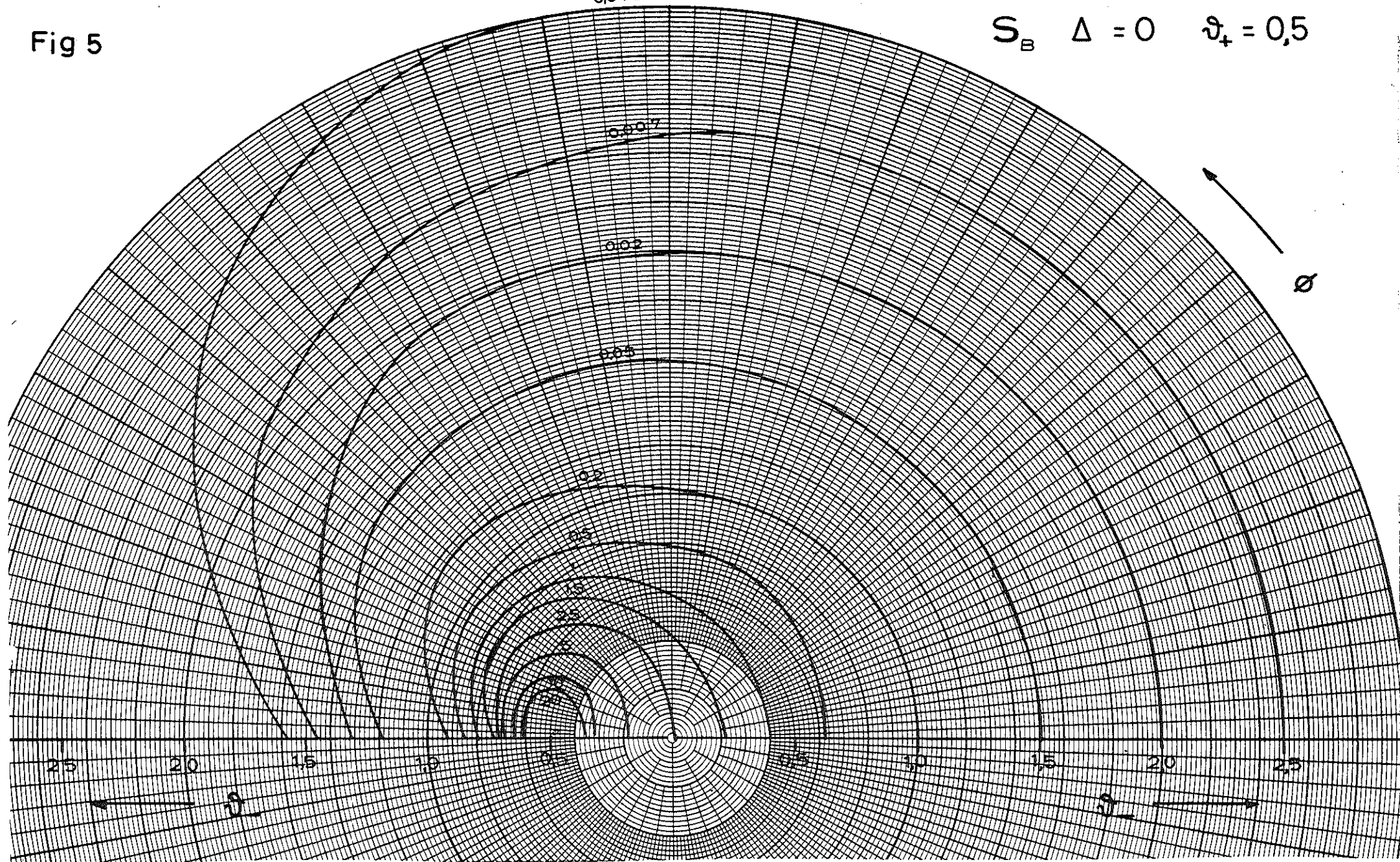


Fig 6

$$S_B \quad \Delta = 0 \quad \vartheta_+ = 1$$

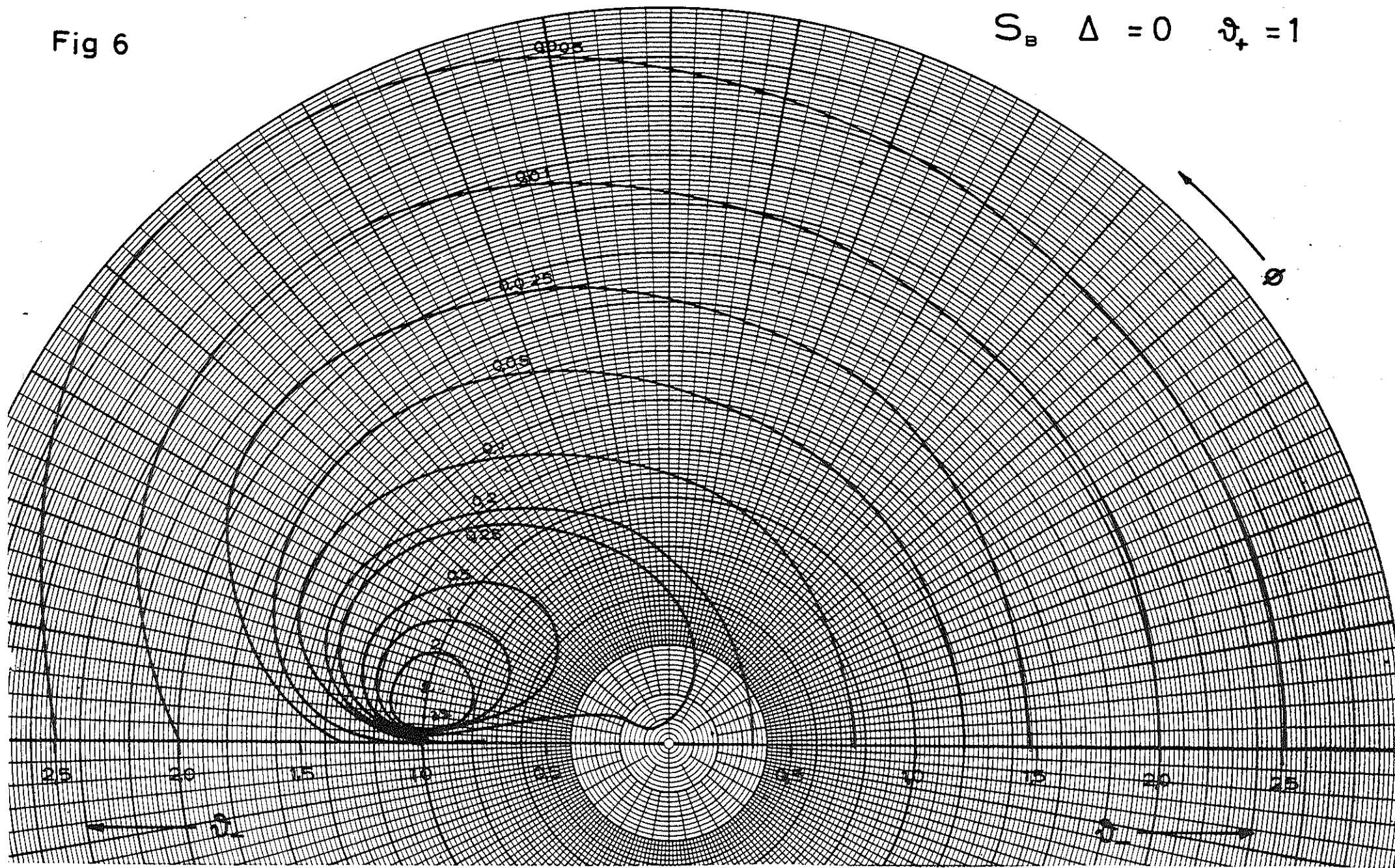


Fig 7

$$S_B \quad \Delta = 0.5 \quad \delta_+ = 0.5$$

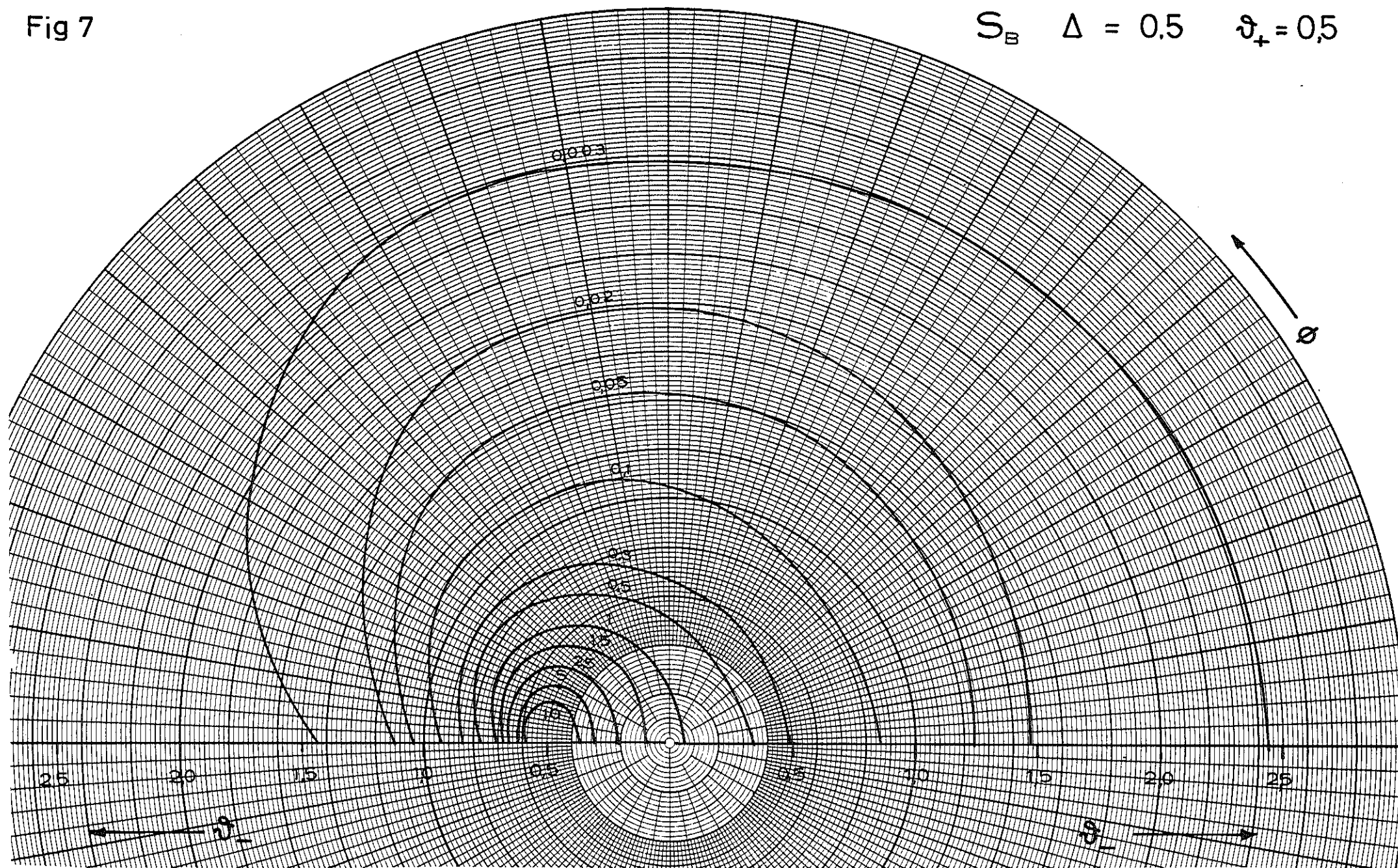
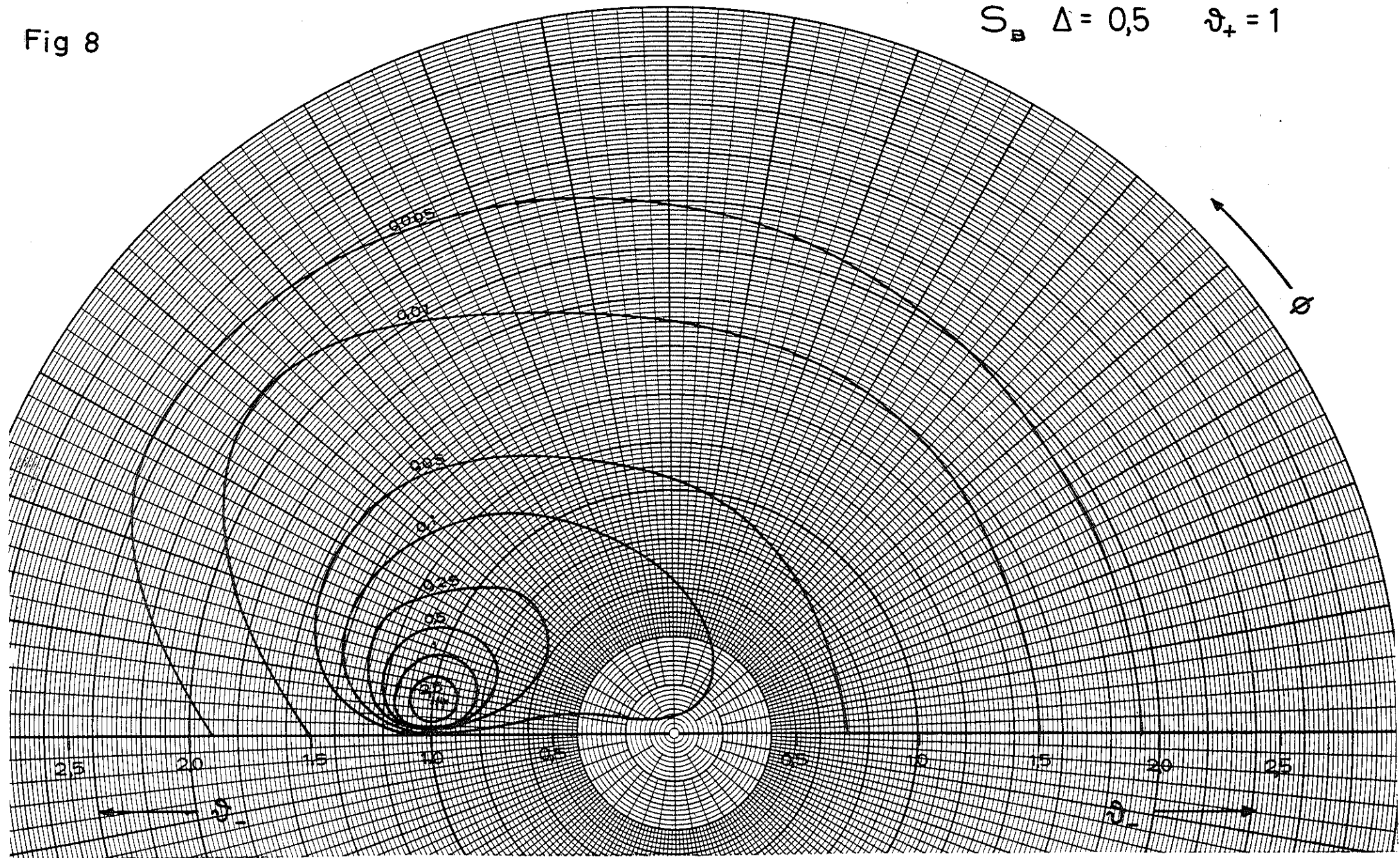




Fig 8

$$S_B \Delta = 0,5 \quad \vartheta_+ = 1$$



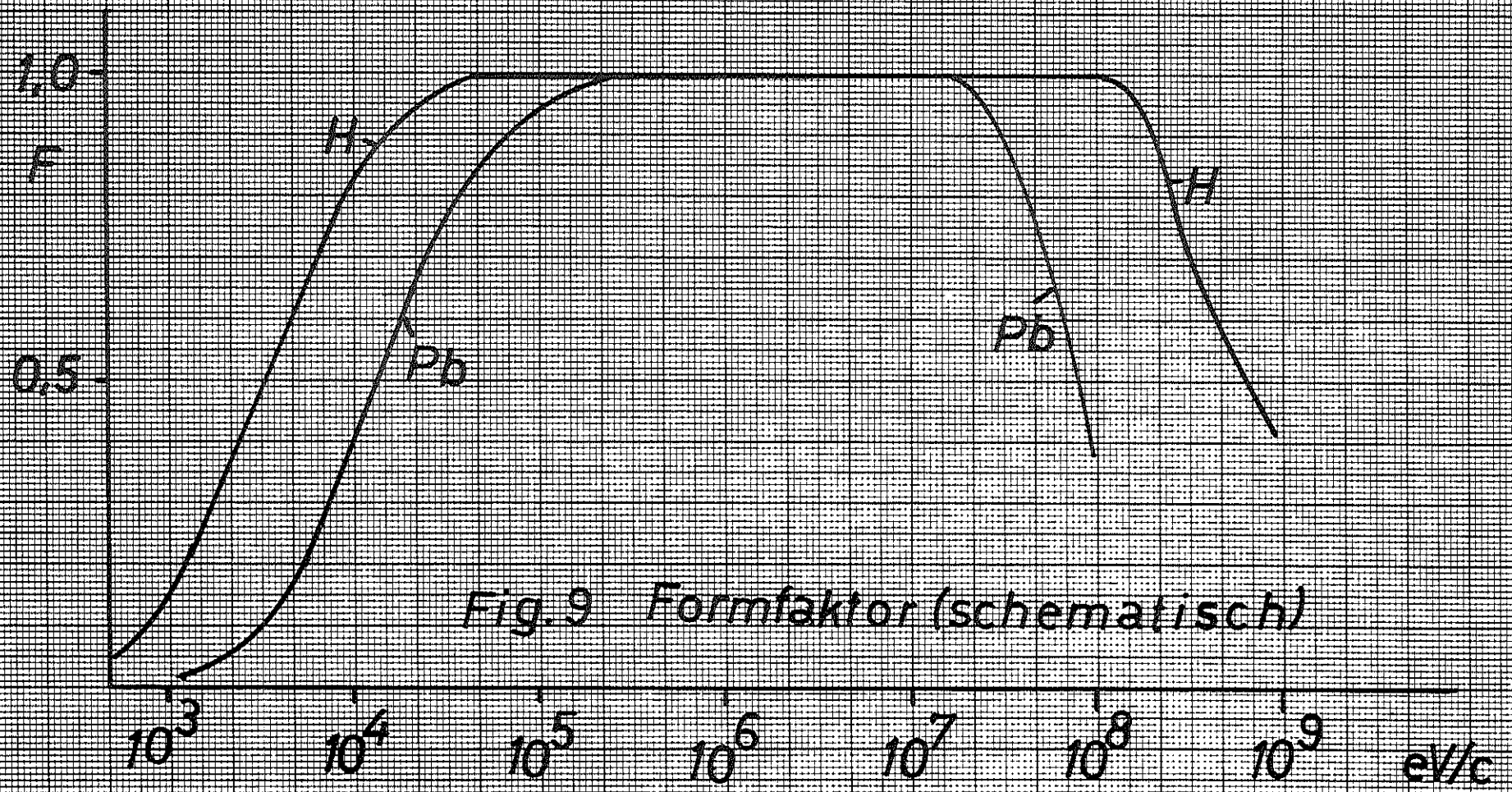


Fig. 9 Formfaktor (schematisch)