

DESY-Bibliothek

Desy-Notiz A 2.89

Hamburg, den 1. Juni 1962

DIE ENERGIE-RICHTUNGS-VERTEILUNG VON PAAR-ELEKTRONEN,  
DIE DURCH EIN BREMSSTRAHLUNGS-SPEKTRUM ERZEUGT WERDEN  
UND VIELFACHSTREUUNG ERLEIDEN

DIE ENERGIE-RICHTUNGS-VERTEILUNG VON PAAR-ELEKTRONEN,  
DIE DURCH EIN BREMSSTRAHLUNGS-SPEKTRUM ERZEUGT WERDEN  
UND VIELFACHSTREUUNG ERLEIDEN

---

Einleitung

G. Köpp<sup>1)</sup> hat mit Hilfe einer graphischen Methode das Energie-Richtungs-Spektrum von Paarelektronen angegeben, die durch Bremsstrahlung mit einer Maximalenergie von 6 GeV erzeugt werden und anschließend an einer Folie von 0,1 Strahlungslängen Vielfachstreuung erleiden. Dabei ist vereinfachend angenommen, daß sich die Elektronen vor der Vielfachstreuung geradeaus bewegen.

Im Folgenden wird unter besonders einfachen Annahmen (extrem hohe Energie etc.) die Energie-Richtungsverteilung analytisch angegeben und damit eine Erweiterung auf andere Energien und Folienstärken möglich.

Weiterhin wird der Fall betrachtet, bei dem die Vielfachstreuung in gleichem Target, wie die Paarerzeugung, stattfindet.

Schließlich wird eine Faustformel für den Gültigkeitsbereich der benutzten Formel für die Vielfachstreuung angegeben.

---

1) G. Köpp, Vielfachstreuung von Paar-Elektronen bei gegebenem Bremsspektrum - Internal report, DESY

Das Energiespektrum der Paarelektronen

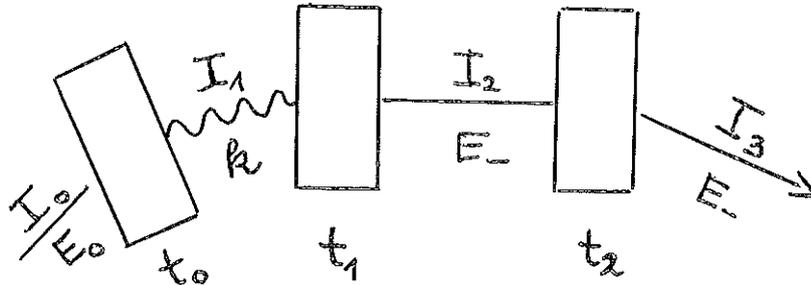


Fig. 1

$t$  = Dicke des Targets  
in Strahlungslängen

Ein Elektronenstrom  $I_0$  (Teilchen / s) der Energie  $E_0$  (einige GeV) erzeugt in einem dünnen Target von  $t_0$  Strahlungslängen  $dI_1$  Bremsquanten im Intervall  $dk$  bei  $k$  <sup>2)</sup>

$$dI_1 = I_0 t_0 \frac{dk}{k} \quad (1)$$

Diese erzeugen  $d^2I_2$  Paarelektronen im Energieintervall  $dE_-$  bei  $E_-$

$$d^2I_2 = dI_1 t_1 \frac{7}{9} \frac{dE_-}{k} \quad (2)$$

Dabei ist vereinfachend ein rechteckiges Energiespektrum der Maximalenergie  $k$  zugrunde gelegt. Summiert man über alle Intervalle  $dk$  des Bremsspektrums mit  $k > E_-$ , so ergibt sich

2) Bethe-Ashkin, Experimental Nuclear Physics,  
Editor E. Segrè, Vol. I

$$dI_2 = I_0 t_0 t_1 \frac{7}{9} dE_- \int_{E_-}^{E_0} \frac{1}{k^2} dk \quad (3)$$

$$dI_2 = I_0 t_0 t_1 \frac{7}{9} \left( \frac{E_0}{E_-} - 1 \right) \frac{dE_-}{E_0} \quad (4)$$

Die Funktion  $\frac{7}{9} \left( \frac{E_0}{E_-} - 1 \right)$  ist in Fig. 2 dargestellt.

### Richtungsverteilung nach Vielfachstreuung

- a) Wir betrachten jetzt zunächst den einfacheren Fall, daß die Paarelektronen in dem sehr dünnen Target  $t_1$  erzeugt werden, aber hier keine wesentliche Vielfachstreuung erleiden, sondern diese vor allem in einem weiteren Target von  $t_2$  Strahlungslängen stattfindet. Daß sich die Elektronen direkt nach der Erzeugung geradeaus bewegen, setzen wir ja ohnehin voraus.

Nach Durchlaufen von  $t_2$  Strahlungslängen haben wir eine Richtungsverteilung<sup>2)</sup>

$$d^2 I_3 = dI_2 \tilde{P}(\theta) d\Omega \quad (5)$$

mit 
$$\tilde{P}(\theta) d\Omega = \frac{1}{\pi \langle \theta^2 \rangle} e^{-\frac{\theta^2}{\langle \theta^2 \rangle}} \quad (6)$$

wobei 
$$\langle \theta^2 \rangle = \left( \frac{21 \text{ MeV}}{E_-} \right)^2 t_2 \quad (6a)$$

Die in 1) Fig. 2 und 3 dargestellte Funktion  $\frac{d}{dE} \frac{d^2 I_3}{d\Omega}$  sollte

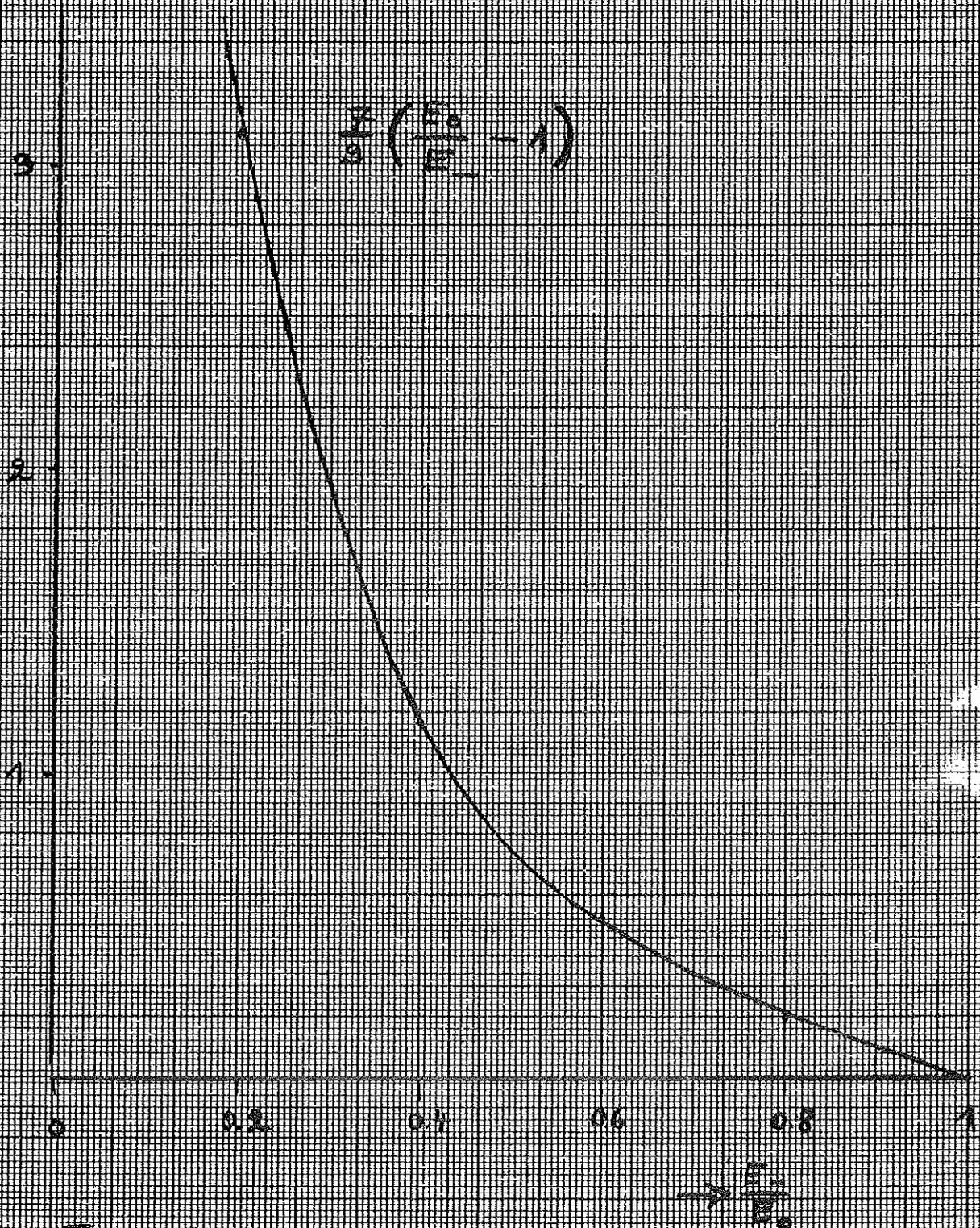


Fig 2

mit dem sich hier ergebenden Ausdruck

$$d^2 I_3 = I_0 t_0 t_1 \frac{7}{9} \left( \frac{E_0}{E_-} - 1 \right) \frac{dE_-}{E_0} \tilde{P}(\theta) d\Omega \quad (7)$$

in folgender Beziehung stehen:

$$\frac{E_0 (\text{GeV})}{\overline{\phi} (\text{cm}^2)} \frac{d^2 \tilde{\sigma}}{dE d\Omega} = \frac{7}{9} \left( \frac{E_0}{E_-} - 1 \right) \tilde{P}(\theta) \quad (8)$$

wo

$$\overline{\phi} = 12,6 \cdot 10^{-28} \text{ cm}^2 \quad (8a)$$

Zur geeigneten Darstellung der hier interessierenden Funktion (7)

$$f = \frac{7}{9} \left( \frac{E_0}{E_-} - 1 \right) \frac{1}{\pi \langle \theta^2 \rangle} e^{-\theta^2 / \langle \theta^2 \rangle} \quad (9)$$

führen wir die Abkürzungen ein

$$\begin{aligned} \alpha &= \left( \frac{E_0}{21 \text{ MeV}} \right)^2 \\ x &= \frac{E_-}{E_0} \\ \mathcal{D}^2 &= \alpha \theta^2 / t \end{aligned} \quad (10)$$

Damit wird dann

$$f = \frac{\alpha}{t} F(x, \mathcal{D}) \quad (11)$$

mit

$$F(x, \vartheta) = \frac{7}{9\pi} \left(\frac{1}{x} - 1\right) x^2 e^{-\vartheta^2 x^2} \quad (11a)$$

F ist in Fig. 3 als Funktion von x mit  $\vartheta$  als Parameter aufgetragen.

### Gültigkeit der Formel (6) für Vielfachstreuung

Wenn die Einfach-Streuung durch die Rutherford-Streufornel wiedergegeben werden kann, so kann die Formel (6) für die Vielfach-Streuung bei großem Winkel nicht richtig sein, weil die Gaussfunktion sehr stark abfällt, verglichen mit  $\sin^{-4}(\theta/2)$  aus der Rutherford-Formel. Selbst wenn bei großen Energien Abweichungen von der Rutherford-Streufornel durch relativistische Effekte und einen endlichen Kernradius auftreten, so können wir auf diese Weise einen Anhaltspunkt für den Gültigkeitsbereich der Formel (6) finden.

Dazu schreiben wir die Rutherford-Streufornel

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{e^4 z^2}{4 E^2} \frac{1}{\sin^4 \theta/2}$$

unter Einführung von  $\langle \theta^2 \rangle$  nach (6a), um in die Gestalt

$$\frac{dI_2}{d\Omega} = 0,0155 I_0 \langle \theta^2 \rangle \theta^{-4}$$

die einen leichten Vergleich mit der Vielfachstreuung zuläßt.

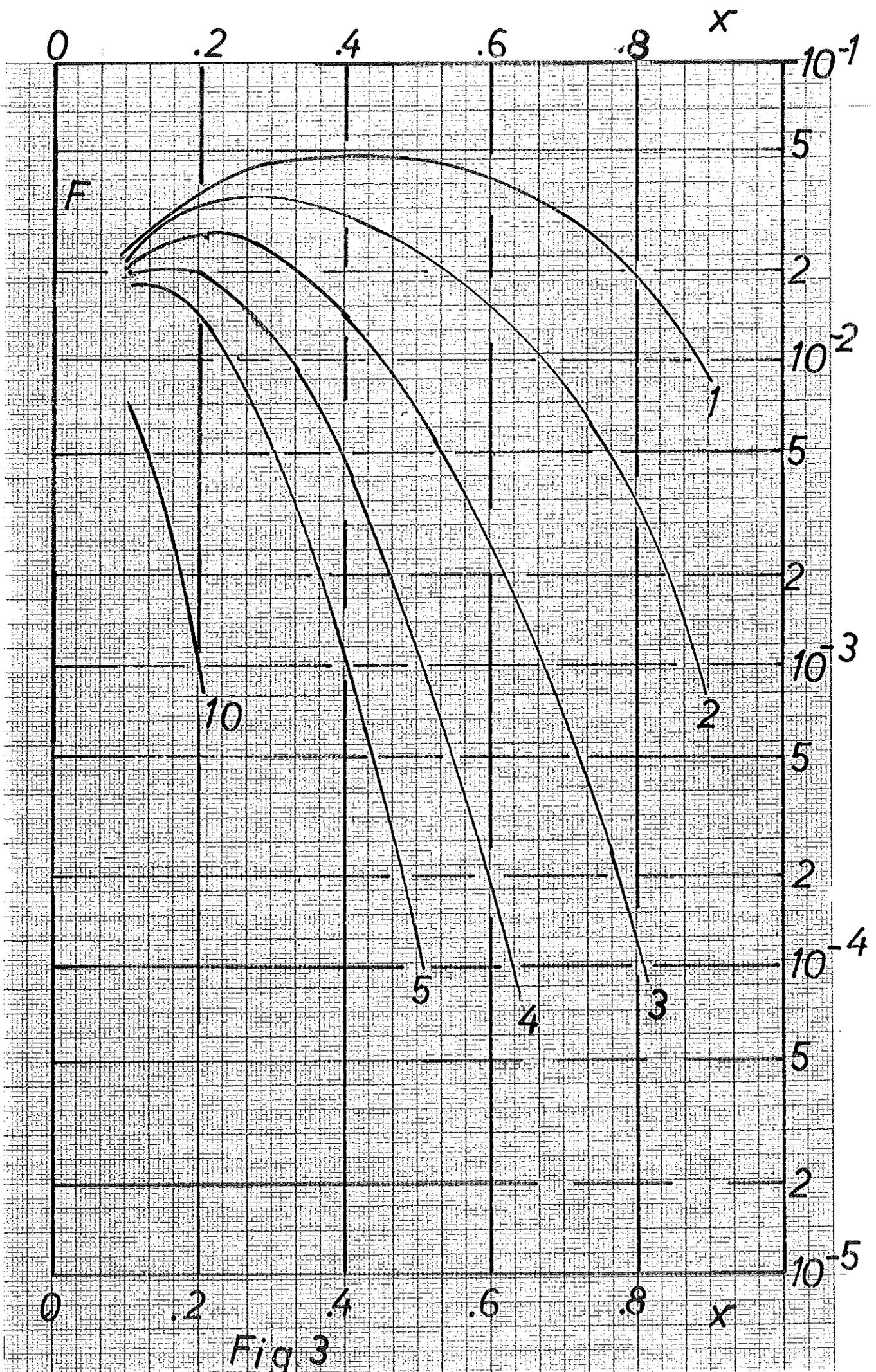


Fig 3

Fragen wir nach dem Winkel, bei dem bereits die Rutherford-Streufornel einen so großen Fluß ergibt, wie die Formel für die Vielfachstreuung

$$\frac{dI_v}{d\Omega} = I_0 \frac{1}{\pi \langle \theta^2 \rangle} e^{-\theta^2 / \langle \theta^2 \rangle} \quad (6)$$

so werden wir auf die Gleichung geführt

$$e^{-z} = 0,0155 \pi z^{-2} \quad (12)$$

$$\text{wo } z = \theta^2 / \langle \theta^2 \rangle$$

mit der Lösung

$$z = 6,82$$

$$\text{das heißt } \theta = 2,6 \sqrt{\langle \theta^2 \rangle} \quad (13)$$

Also unabhängig von Energie und Targetstärke ergibt sich auf diese Weise, daß die Vielfachstreuformel bereits vom 2,6-fachen des mittleren Winkels an unbrauchbar wird.

Für eingehende Untersuchungen der Vielfachstreuung siehe den angegebenen Artikel von Bethe und Ashkin. Ein anschauliches Bild gewinnt man leicht aus der Arbeit von A.O. Hanson et al. P.R. 84, 634, (1951).

Als Konsequenz der gefundenen Beziehung (13) ergibt sich

$$\theta^2 < 6,8 \quad \langle \theta^2 \rangle = 6,8 \frac{t}{\alpha x^2} \quad (14)$$

$$\vartheta_x < 2,6$$

Zum Schluß wollen wir noch auf den Fall  
 b) eingehen, daß die Vielfachstreuung im gleichen Target stattfindet, wie die Paarerzeugung.

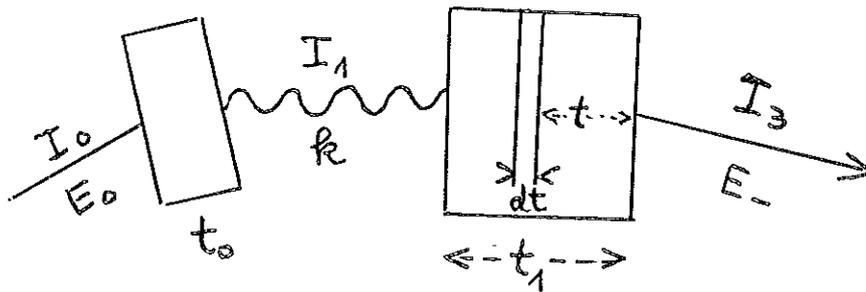


Fig. 4

Dazu fassen wir zunächst diejenigen Paarelektronen ins Auge, die in der Schicht  $dt$  gebildet werden und noch eine Schicht  $t$  zu durchlaufen haben, ehe sie aus der Rückwand des Targets austreten. Deren Zahl ist

$$d^2 I_2 = I_0 t_0 dt \frac{7}{9} \left( \frac{1}{x} - 1 \right) dx \quad (15)$$

und sie besitzen die räumliche Verteilung

$$\tilde{P} d\Omega = \frac{x^2 \alpha}{\pi t} e^{-\frac{\theta^2 x^2 \alpha}{t}} d\Omega$$

Summieren wir über alle Schichten  $dt$ , so ergibt sich

$$d^2 I_3 = I_0 t_0 \frac{7}{9\pi} \left(\frac{1}{x} - 1\right) dx x^2 \alpha \int_0^{t_1} \frac{dt}{t} e^{-\frac{\theta^2 x^2 \alpha}{t}} \quad (16)$$

Nach Einführung der Integrationsvariablen

$$z = \frac{\theta^2 x^2 \alpha}{t} \quad z_1 = \frac{\theta^2 x^2 \alpha}{t_1}$$

finden wir

$$d^2 I_3 = I_0 t_0 \alpha \frac{7}{9\pi} \left(\frac{1}{x} - 1\right) x^2 \left[ -\text{Ei}(-\vartheta^2 x^2) \right] dx d\Omega \quad (17)$$

Vergleichen wir dies Resultat mit demjenigen von Fall a):

$$d^2 I_3 = I_0 t_0 \alpha \frac{t_1}{t_2} \frac{7}{9\pi} \left(\frac{1}{x} - 1\right) x^2 e^{-\vartheta^2 x^2} dx d\Omega \quad (7)$$

so sehen wir, daß im wesentlichen die Gauss-Funktion durch das Exponentialintegral ersetzt worden ist.

In Fig. (5) ist die Funktion

$$G(x, \vartheta) = \frac{7}{9\pi} \left(\frac{1}{x} - 1\right) x^2 \left[ -\text{Ei}(-\vartheta^2 x^2) \right] \quad (18)$$

als Funktion von  $x$  mit  $\vartheta$  als Parameter aufgetragen.

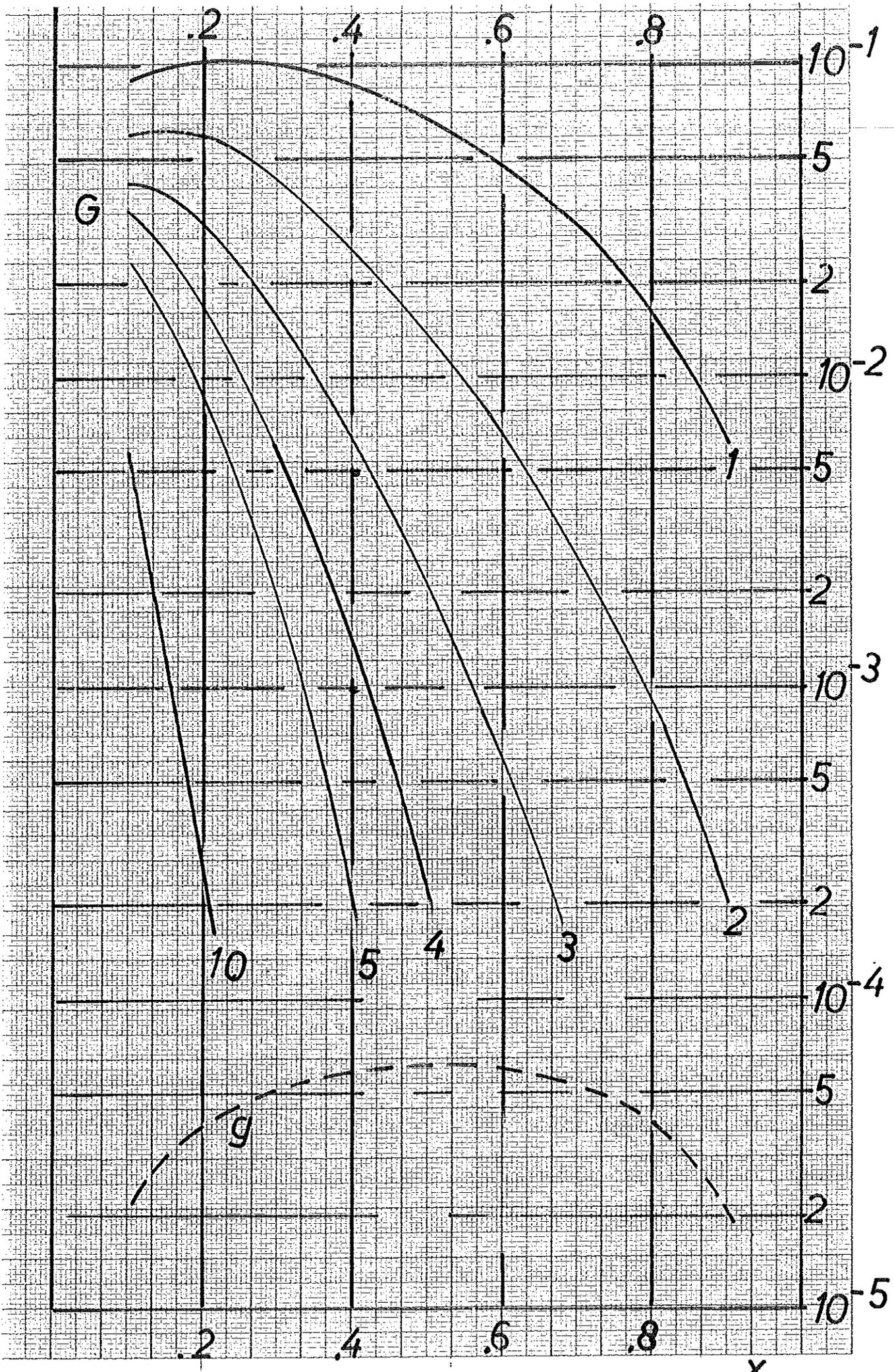


Fig.5

Führt man eine Überlegung für die Gültigkeit dieser Formel durch, so läßt sich zeigen, daß der Fehler, soweit er durch die Beziehung (14) verursacht wird, kleiner als 20 % bleibt, für  $\sqrt{v} x < 2$ .

Als Mittelwert von  $\theta^2$  ergibt sich aus (16)

$$\overline{\theta^2} = \frac{\int_0^{t_1} \frac{dt}{t} \int_0^\infty \theta^2 e^{-\theta^2 x^2 \alpha / t} \theta d\theta}{\int_0^{t_1} \frac{dt}{t} \int_0^\infty e^{-\theta^2 x^2 \alpha / t} \theta d\theta}$$
$$\overline{\theta^2} = \frac{t_1}{2\alpha x^2}$$

das heißt ein Target der Stärke  $\frac{t_1}{2}$ , das genau von allen Elektronen durchlaufen würde, führte zum gleichen mittleren Winkel.

Zusammenfassung

Findet Paarerzeugung nur in einem Target ( $t_1$ ) und Vielfachstreuung nur in einem zweiten ( $t_2$ ) statt, so ergibt sich die Energie-Richtungsverteilung der Elektronen zu

$$d^2 I_3 = I_0 t_0 \alpha \frac{t_1}{t_2} F(x, \vartheta) dx d\Omega \quad (7)$$
$$x \vartheta < 2,6$$

Findet dagegen die Vielfachstreuung bereits im gleichen Target wie die Paarerzeugung statt, so gilt

$$d^2 I_3 = I_0 t_0 \alpha G(x, \vartheta) dx d\Omega \quad (17)$$
$$x \vartheta < 2$$

Die Funktionen F und G sind in Fig. 3 und 5 als Funktionen von x mit  $\vartheta$  als Parameter aufgetragen.

J. von Behr