

DEUTSCHES ELEKTRONEN-SYNCHROTRON  
DESY

Hamburg-Gr. Flottbek 1, Flottbeker Drift 56

Desy-Notiz A 2.90

Hamburg, den 3. Juli 1962

M 1-Dr. Ri/VM

DESY-Bibliothek

ÜBER DAS SPEKTRUM UND DIE WINKELVERTEILUNG DER SYNCHROTRON-  
STRAHLUNG

I. EINFÜHRUNG

Die in einem Synchrotron umlaufenden Elektronen emittieren nach klassischen Gesetzen elektromagnetische Wellen und verlieren somit ständig Energie, die zusätzlich zum Energieaufwand für die Beschleunigung der Teilchen durch die Arbeit des elektrischen Feldes gedeckt werden muß.

Nach Schwinger wird die Emission elektromagnetischer Wellen durch geladene Teilchen, die sich auf einer Kreisbahn mit dem Radius  $R$  bewegen, durch folgende Gleichungen beschrieben (1, 2):

$$(1) \quad P(\psi, \lambda, t) = \frac{3}{4\pi^2} \frac{e^2}{R} \left(\frac{\lambda c}{\lambda}\right)^2 \left(\frac{2\pi c}{\lambda^2}\right) \left(\frac{E}{m_0 c^2}\right)^2 \times \\ \times \left[ 1 + \left(\frac{E\psi}{m_0 c^2}\right)^2 \right]^2 \times \\ \times \left[ K_{2/3}^2(\xi) + \frac{(E\psi/m_0 c^2)^2}{1 + (E\psi/m_0 c^2)^2} K_{1/3}^2(\xi) \right]$$

DEUTSCHES ELEKTRONEN - SYNCHROTRON  
DESY

2000 Hamburg-Groß Flottbek 1, Notkestieg 1

Hamburg, den 29. Mai 1963  
E 2-Dr. Ri/VM

Errata  
zur Desy-Notiz A 2.90

ÜBER DAS SPEKTRUM UND DIE WINKELVERTEILUNG DER SYNCHROTRON-STRAHLUNG

Der Faktor  $\frac{3}{2\pi^2}$  in Gl. (26) auf Seite 14 bzw. 18 muß ersetzt werden durch  $\frac{18}{\pi^2}$ .

Gl. (26a) auf Seite 14 erhält auf der rechten Seite den Zahlenfaktor  $\frac{1}{12}$ . Außerdem ist die Funktion  $(\beta^2 + \gamma^2)$  im Integranden ins Quadrat zu erheben.

Die in Fig. 2 und 3 und in Anhang II angegebenen numerischen Werte für die Funktion  $\times^4 L(x, \gamma)$  bleiben von der Korrektur unberührt.

Gerhard Ripken

$$\begin{aligned}
 (2) \quad P(\psi, t) &\equiv \int P(\psi, \lambda, t) d\lambda \\
 &= \frac{e^2 c}{R^2} \left( \frac{E}{m_0 c^2} \right)^5 \left[ 1 + \left( \frac{E \psi}{m_0 c^2} \right)^2 \right]^{-5/2} \times \\
 &\quad \times \left[ \frac{7}{16} + \frac{5}{16} \frac{(E \psi / m_0 c^2)^2}{1 + (E \psi / m_0 c^2)^2} \right] ,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad P(\lambda, t) &\equiv \int P(\psi, \lambda, t) d\psi \\
 &= \frac{3^{5/3}}{16 \pi^2} \frac{e^2 c}{R^3} \left( \frac{E}{m_0 c^2} \right)^7 \left( \frac{\lambda_c}{\lambda} \right)^3 \int_{\lambda_c/\lambda}^{\infty} K_{5/3}(\eta) d\eta
 \end{aligned}$$

mit

$$\lambda_c = \frac{4 \pi R}{3} \left( \frac{m_0 c^2}{E} \right)^3 ,$$

$$(4) \quad \xi = \frac{\lambda_c}{2 \lambda} \left[ 1 + \left( \frac{E \psi}{m_0 c^2} \right)^2 \right]^{3/2} .$$

Dabei ist  $\psi$  der Winkel zwischen der Emissionsrichtung und der Bahnebene, und  $P(\psi, \lambda, t)$  bedeutet die Strahlungsleistung pro Wellenlängen- und Winkleinheit.

Angewandt auf die Theorie der Zirkularbeschleuniger, geben die obigen Formeln die Synchrotronstrahlung zu einem festen Zeitpunkt  $t$  bei einer Elektronenenergie  $E(t)$  an. Da  $E(t)$  jedoch in einer Beschleunigungsanlage rasch mit der Zeit anwächst, kann im allgemeinen diese "momentane Ausstrahlung" nicht beobachtet werden. Einer Messung zugänglich ist dagegen die über ein hinreichend großes Zeitintervall  $\Delta t$  gemittelte Strahlungsleistung. Daher ist es zweckmäßig, die obigen Strahlungsformeln noch über die Zeit, während der die Elektronen

beschleunigt werden, zu integrieren. Unter der Annahme, daß die Energie der Elektronen nach dem Zeitgesetz:

$$(5) \quad E(t) = E_m \sin^2 \frac{\pi t}{2T}$$

anwächst, wurde diese Zeitmittelung bereits von Tomboulian und Bedo für die Funktion  $P(\lambda, t)$  durchgeführt und anhand der gemittelten Funktion

$$(6) \quad \bar{P}(\lambda; t_1, t_2) = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} P(\lambda, t) dt$$

die Abhängigkeit der Strahlung von der Wellenlänge diskutiert (3). Das Ziel der vorliegenden Arbeit soll nun sein, im Anschluß an die Überlegungen von Tomboulian und Bedo die Funktionen  $P(\psi, t)$  und  $P(\psi, \lambda, t)$  unter Zugrundelegung des Zeitgesetzes (5) zu mitteln:

$$(7) \quad \bar{P}(\psi; t_1, t_2) = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} P(\psi, t) dt ,$$

$$(8) \quad \bar{P}(\psi, \lambda; t_1, t_2) = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} P(\psi, \lambda, t) dt ,$$

um neben Aussagen über die schon untersuchte  $\lambda$ -Abhängigkeit Aufschluß über die Winkelverteilung der Synchrotronstrahlung zu gewinnen.

## II. BERECHNUNG DER FUNKTION $\bar{P}(\psi)$ .

Wir beginnen die Untersuchung der Winkelabhängigkeit und des Spektrums der Synchrotronstrahlung mit der Berechnung der Funktion  $\bar{P}(\psi)$ . Zu dem Zweck haben wir  $P(\psi, t)$  aus (2) in Gl. (7) einzutragen und erhalten nach Einführung der Integrationsvariablen

$$\beta = \sin^{-2} \left( \frac{\pi t}{2T} \right)$$

die Funktion  $\bar{P}(\psi; t_1, t_2)$  in der Form

$$(9) \quad \bar{P}(\psi; t_1, t_2) = \frac{e^2 c}{\pi R^2} \left( \frac{E_m}{m_0 c^2} \right)^5 L(\psi, t_1, t_2)$$

mit

$$(10) \quad L(\psi; t_1, t_2) = \frac{7}{16} L_1(\psi; \beta_1, \beta_2) + \frac{5}{16} \eta^2 L_2(\psi; \beta_1, \beta_2)$$

$$(10a) \quad L_1(\psi; \beta_1, \beta_2) = \int_{\beta_2}^{\beta_1} d\beta \frac{1}{\beta (\beta^2 + \eta^2)^2 \sqrt{(\beta-1)(\beta^2 + \eta^2)}} ,$$

$$(10b) \quad L_2(\psi; \beta_1, \beta_2) = \int_{\beta_2}^{\beta_1} d\beta \frac{1}{\beta (\beta^2 + \eta^2)^3 \sqrt{(\beta-1)(\beta^2 + \eta^2)}} ,$$

$$(10c) \quad \beta_\nu = \sin^{-2} \left( \frac{\pi t_\nu}{2T} \right) , \quad (\nu = 1, 2) .$$

Dabei wurde zur Abkürzung

$$(11) \quad \eta = \frac{E_m \psi}{m_0 c^2}$$

gesetzt.

Aus den Gln. (9, 10, 11) ist ersichtlich, daß die Winkelverteilung bis auf einen konstanten Faktor, der von der Maximalenergie  $E_m$  der Elektronen und dem Krümmungsradius

$R$  der Elektronenbahn abhängt, allein bestimmt ist durch die Funktion  $L(y; t_1, t_2)$ , die für alle Kreisbeschleuniger den gleichen Verlauf zeigt. Diese Funktion zu berechnen, muß daher unsere weitere Aufgabe sein.

Für  $|y| < 1$  kann  $L(y; t_1, t_2)$  bestimmt werden, indem man den Integranden in (10a, b) in eine Reihe nach Potenzen von  $y$  entwickelt:

$$\frac{1}{\beta (\beta^2 + y^2)^2 \sqrt{(\beta - 1)(\beta^2 + y^2)}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{-5/2}{\nu} \frac{y^{2\nu}}{\beta^{6+2\nu} \sqrt{\beta - 1}},$$

$$\frac{1}{\beta (\beta^2 + y^2)^3 \sqrt{(\beta - 1)(\beta^2 + y^2)}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{-7/2}{\nu} \frac{y^{2\nu}}{\beta^{8+2\nu} \sqrt{\beta - 1}}$$

und anschließend diese Reihen unter Anwendung der Formel (4)

$$(12) \quad \int \frac{d\beta}{\beta^k \sqrt{\beta - 1}} = \sqrt{\beta - 1} \sum_{\nu=0}^{k-2} \frac{(2k-3; -2; \nu)}{2^\nu (k-1; -1; \nu+1)} \frac{1}{\beta^{k-\nu-1}} -$$

$$- \frac{(1; 2; k-1)}{2^{k-2} \cdot (k-1)!} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1}{\beta - 1}};$$

$$(m; d; \nu) \equiv m(m+d)(m+2d) \dots [m + (\nu-1)d]$$

gliedweise integriert. Bei Vernachlässigung höherer als quadratischer Potenzen von  $y$  ergibt sich dann die für  $|y| \ll 1$  gültige Gleichung

$$(13) \quad L(y; t_1, t_2) = \frac{7}{16} \int_{\beta_2}^{\beta_1} \frac{d\beta}{\beta^6 \sqrt{\beta - 1}} - y^2 \frac{25}{32} \int_{\beta_2}^{\beta_1} \frac{d\beta}{\beta^8 \sqrt{\beta - 1}},$$

wobei die in (13) auftretenden Integrale aus (12) zu entnehmen sind. Insbesondere erhält man bei Mittelung über die volle Beschleunigungsperiode ( $t_1 = 0, t_2 = T$ ) und damit nach (10c)  $\beta_1 = \infty, \beta_2 = 1$ ):

$$(13a) \quad L(\eta; 0, T) = \frac{7}{16} \frac{63}{256} \pi - \frac{25}{32} \frac{429}{2048} \pi \eta^2 \\ = 0,33824276 - 0,51412327 \eta^2 .$$

Aus (13) bzw. (13a) geht hervor, daß  $L(\eta)$  bei  $\eta = 0$  ein Maximum besitzt, so daß die intensivste Ausstrahlung beim Synchrotron in der Bahnebene  $\psi = 0$  erfolgt, während  $L(\eta)$  für kleine  $\eta$ -Werte quadratisch abfällt.

Zu einer allgemeinen Integration von (10a, b) für beliebige  $\eta$ -Werte gelangen wir durch den Ansatz (4)

$$(14a) \quad \int \frac{d\beta}{\beta (\beta^2 + \eta^2)^2 \cdot \sqrt{(\beta-1)(\beta^2 + \eta^2)}} = \\ = \frac{a_{10} + a_{11}\beta + a_{12}\beta^2 + a_{13}\beta^3}{(\beta^2 + \eta^2)^2} \sqrt{(\beta-1)(\beta^2 + \eta^2)} + \\ + A_1 \int \frac{d\beta}{\sqrt{(\beta-1)(\beta^2 + \eta^2)}} + B_1 \int \frac{\beta d\beta}{\sqrt{(\beta-1)(\beta^2 + \eta^2)}} + \\ + C_1 \int \frac{d\beta}{\beta \sqrt{(\beta-1)(\beta^2 + \eta^2)}} \quad ;$$

$$\begin{aligned}
 (14b) \quad & \int \frac{d\beta}{\beta (\beta^2 + \eta^2)^3 \sqrt{(\beta-1)(\beta^2 + \eta^2)}} = \\
 & = \frac{a_{20} + a_{21}\beta + a_{22}\beta^2 + a_{23}\beta^3 + a_{24}\beta^4 + a_{25}\beta^5}{(\beta^2 + \eta^2)^3} \times \\
 & \quad \times \sqrt{(\beta-1)(\beta^2 + \eta^2)} + \\
 & + A_2 \int \frac{d\beta}{\sqrt{(\beta-1)(\beta^2 + \eta^2)}} + B_2 \int \frac{\beta d\beta}{\sqrt{(\beta-1)(\beta^2 + \eta^2)}} + \\
 & + C_2 \int \frac{d\beta}{\beta \sqrt{(\beta-1)(\beta^2 + \eta^2)}} .
 \end{aligned}$$

Dabei sind die Koeffizienten  $a_{1\nu}, a_{2\nu}, A_\nu, B_\nu, C_\nu$  zunächst unbekannte Größen, die berechnet werden können, indem man (14a, b) nach  $\beta$  differenziert und anschließend Koeffizientenvergleich nach Potenzen von  $\beta$  durchführt. Auf diese Weise erhält man ebenso viele Bestimmungsgleichungen, wie Unbekannte vorhanden sind, mit der Lösung

$$\begin{aligned}
 (15a) \quad & A_1 = \frac{1}{2} a_{12} & A_2 &= \frac{1}{2} a_{24} \\
 & B_1 = -\frac{1}{2} a_{13} & B_2 &= -\frac{1}{2} a_{25} \\
 & C_1 = \frac{1}{\eta^4} & C_2 &= \frac{1}{\eta^6}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (15b) \quad & a_{10} \eta^2 = -\frac{12\eta^2 + 8}{6(\eta^2 + 1)^2} \\
 & a_{11} \eta^2 = -\frac{11\eta^2 + 7}{6(\eta^2 + 1)^2} \\
 & a_{12} \eta^4 = -\frac{10\eta^2 + 6}{6(\eta^2 + 1)^2}
 \end{aligned}$$

$$(15b) \quad \begin{aligned} a_{13} y^4 &= -\frac{9y^2 + 5}{6(y^2 + 1)^2} \\ a_{20} y^2 &= -\frac{92 + 333y^2 + 422y^4 + 181y^6}{60(1+y^2)^4} \\ a_{21} y^2 &= -\frac{76 + 277y^2 + 358y^4 + 157y^6}{60(1+y^2)^4} \\ a_{22} y^4 &= -\frac{70 + 259y^2 + 340y^4 + 151y^6}{30(1+y^2)^4} \\ a_{23} y^4 &= -\frac{55 + 206y^2 + 279y^4 + 128y^6}{30(1+y^2)^4} \\ a_{24} y^6 &= -\frac{60 + 221y^2 + 294y^4 + 133y^6}{60(1+y^2)^4} \\ a_{25} y^6 &= -\frac{46 + 171y^2 + 236y^4 + 111y^6}{60(1+y^2)^4} \end{aligned}$$

Die auf den rechten Seiten von (14a, b) vorkommenden Integrale ergeben sich zu (4)

$$(16) \quad \int \frac{d\beta}{\sqrt{(\beta-1)(\beta^2+y^2)}} = -\frac{(a+b)}{y} F(\varphi, k),$$

$$(17) \quad \int \frac{\beta d\beta}{\sqrt{(\beta-1)(\beta^2+y^2)}} = \frac{(a+b)^2}{y} \frac{1+\cos\varphi}{\sin\varphi} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} - \frac{(a+b)b}{y} F(\varphi, k) + \frac{(a+b)^2}{y} E(\varphi, k),$$

$$(18) \quad \int \frac{d\beta}{\beta\sqrt{(\beta-1)(\beta^2+y^2)}} = \frac{(a+b)}{ya} F(\varphi, k) - \frac{(a+b)^2}{yab} \int \frac{d\varphi}{(1+\frac{a}{b}\cos\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

mit

$$(18a) \quad \int \frac{d\varphi}{(1 + \rho \cos \varphi) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{1}{1 - \rho^2} \Pi(\varphi, \alpha, k) -$$

$$- \frac{\rho}{1 - \rho^2} \frac{1}{\sqrt{k^2 + \alpha}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{k^2 + \alpha} \sin \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}},$$

$$\left( \alpha = \frac{\rho^2}{1 - \rho^2} ; \rho = \frac{a}{b} \right),$$

wo  $F(\varphi, k)$ ,  $E(\varphi, k)$  und  $\Pi(\varphi, \alpha, k)$  die elliptischen Integrale erster, zweiter und dritter Gattung bedeuten, für die die Reihenentwicklungen

$$(19) \quad F(\varphi, k) \equiv \int_0^\varphi \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{-1/2}{\nu} (-k^2)^\nu j_{2\nu}(\varphi),$$

$$(20) \quad E(\varphi, k) \equiv \int_0^\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi} d\psi = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{1/2}{\nu} (-k^2)^\nu j_{2\nu}(\varphi),$$

$$(21) \quad \Pi(\varphi, \alpha, k) \equiv \int_0^\varphi \frac{d\psi}{(1 + \alpha \sin^2 \psi) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha + k^2}} \frac{1}{\sqrt{\alpha + 1}} \operatorname{arctg} (\sqrt{\alpha + 1} \operatorname{tg} \varphi) - \\ - \sum_{\mu=0}^{\infty} (-\alpha)^\mu j_{2\mu}(\varphi) \left[ \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha + k^2}} - \sum_{\nu=0}^{\mu} \binom{-1/2}{\nu} \left(\frac{k^2}{\alpha}\right)^\nu \right] \\ \text{für } |\alpha| > k^2 ; \\ \\ \sum_{\mu=0}^{\infty} (-\alpha)^\mu j_{2\mu}(\varphi) \sum_{\nu=0}^{\mu} \binom{-1/2}{\nu} \left(\frac{k^2}{\alpha}\right)^\nu \\ \text{für } |\alpha| < k^2, \text{ besonders für } |\alpha| < k^2 \end{array} \right.$$

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{2\nu}(\varphi) \equiv \int_0^\varphi \sin^{2\nu} \psi \, d\psi = \frac{2\nu-1}{2\nu} \int_{2\nu-2} - \\ \qquad \qquad \qquad - \frac{1}{2\nu} \sin^{2\nu-1} \varphi \cos \varphi \\ \int_0(\varphi) = \varphi \end{array} \right.$$

bestehen, und die Größen  $\varphi, k, a, b, \alpha, \gamma$  zu berechnen sind aus den Beziehungen

$$(23a) \quad \beta = \frac{a \cos \varphi + b}{1 - \cos \varphi}, \quad (0 \leq \varphi \leq \pi) ;$$

$$(23b) \quad k^2 = \sin^2 \vartheta \quad \text{mit} \quad \operatorname{tg} 2\vartheta = |y|, \quad (0 < 2\vartheta < \pi) \\ = \frac{\sqrt{1+y^2}-1}{2\sqrt{1+y^2}}, \quad (k \geq 0)$$

$$(23c) \quad a = |y| \cdot \operatorname{tg} \vartheta = \sqrt{1+y^2} - 1$$

$$(23d) \quad b = |y| \cdot \operatorname{tg} \vartheta = \sqrt{1+y^2} + 1 ;$$

$$(23e) \quad \alpha = k^4 \sqrt{1+y^2}$$

$$(23f) \quad \gamma = \sqrt{\frac{4|y|^3}{\sin^3 2\vartheta}} = 2\sqrt[4]{(1+y^2)^3} ;$$

$$(23g) \quad \sqrt{(\beta-1)(\beta^2+y^2)} = \gamma \frac{\sin \varphi \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}{(1-\cos \varphi)^2} .$$

Durch die Gleichungen (10), (14) bis (23) ist aber die Funktion  $L(y; t_1, t_2)$  eindeutig festgelegt, und wir sind damit in der Lage, durch eine numerische Auswertung dieser Formeln bei Vorgabe des Zeitintervalles

$$t_1 \leq t \leq t_2$$

über das die Strahlungsleistung gemittelt werden soll, den Verlauf dieser Funktion in Abhängigkeit von der Größe  $y$  (bzw. dem Winkel  $\psi$ ) zu bestimmen.

Wir wenden diese Formeln insbesondere an zur Berechnung der über die volle Beschleunigungsperiode ( $t_1=0, t_2=T$ ) gemittelten Strahlungsleistung. In diesem Falle wird nach (10), (14) und (15a)

$$(24) \quad L(y; 0, T) = \frac{5}{16} L_1(y; \infty, 1) + \frac{7}{16} L_2(y; \infty, 1),$$

$$(25) \quad L_\nu(y; \infty, 1) = A_\nu \int_1^\infty \frac{d\beta}{\sqrt{(\beta-1)(\beta^2+y^2)}} + \\ + C_\nu \int_1^\infty \frac{d\beta}{\beta \sqrt{(\beta-1)(\beta^2+y^2)}} - \\ - 2B_1 \cdot \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\sqrt{(\beta-1)(\beta^2+y^2)}}{\beta} \right\} - \frac{1}{2} \int_1^\beta \frac{\beta' d\beta'}{\sqrt{(\beta'-1)(\beta'^2+y^2)}}$$

( $\nu = 1, 2$ ) und nach (16), (17), (18), (23)

$$(25a) \quad \int_1^\infty \frac{d\beta}{\sqrt{(\beta-1)(\beta^2+y^2)}} = \frac{(a+b)}{y} F(\pi, k) \quad ;$$

$$(25b) \quad \int_1^{\infty} \frac{d\beta}{\beta \sqrt{(\beta-1)(\beta^2+y^2)}} = -\frac{(a+b)}{\gamma a} F(\pi, k) + \\ + \frac{(a+b)^2}{\gamma a b} \frac{b^2}{b^2-a^2} \Pi(\pi, \alpha, k) \quad ;$$

$$(25c) \quad \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\beta} \sqrt{(\beta-1)(\beta^2+y^2)} - \frac{1}{2} \int_1^{\beta} \frac{\beta' d\beta'}{\sqrt{(\beta'-1)(\beta'^2+y^2)}} \right\} \\ = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \left\{ \frac{(1-\cos \varphi)}{a \cos \varphi + b} \gamma \frac{\sin \varphi \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}{(1-\cos \varphi)^2} - \right. \\ \left. - \frac{(a+b)^2}{2\gamma} \frac{1+\cos \varphi}{\sin \varphi} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} + \right. \\ \left. + \lim_{\varphi \rightarrow \pi} \frac{(a+b)^2}{2\gamma} \frac{1+\cos \varphi}{\sin \varphi} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \left[ -\frac{(a+b)b}{\gamma} F(\varphi, k) + \frac{(a+b)^2}{\gamma} E(\varphi, k) \right]_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} \right\} \\ = -\frac{(a+b)b}{2\gamma} F(\pi, k) + \frac{(a+b)^2}{2\gamma} E(\pi, k) \quad ,$$

wobei die Größen  $F(\pi, k)$ ,  $E(\pi, k)$  und  $\Pi(\pi, \alpha, k)$  aus (19) bis (22) mit  $\varphi = \pi$  entnommen werden können.

Eine graphische Darstellung von  $L(y)$  ist in Fig. 1 wiedergegeben; die zugehörigen Zahlenwerte finden sich in Anhang I. (Da  $L(y)$  in  $y$  symmetrisch ist, wurden die Funktionswerte nur über der positiven  $y$ -Achse aufgetragen.)

Aus dieser Darstellung ist nun ersichtlich, daß  $L(\eta; 0, T)$  vom Maximum bei  $\eta = 0$  monoton mit wachsendem  $\eta$  abnimmt und sich asymptotisch dem Werte 0 nähert. Das Maximum selbst hat eine Halbwertsbreite von der Größenordnung  $\eta_m \approx 0,8$ . Dem entspricht ein Winkelbereich von

$$|\psi| < \psi_m \approx \frac{m_0 c^2}{E_m} \cdot 0,8,$$

auf den im wesentlichen die Synchrotronstrahlung konzentriert ist. Für DESY ergibt sich der Wert

$$\psi_m \approx 7 \cdot 10^{-5} \quad \text{mit} \quad E_m = 6 \text{ GeV}.$$

### III. BERECHNUNG DER FUNKTION $\bar{P}(\psi, \lambda)$ .

In Kap. II wurde die Winkelverteilung der Synchrotronstrahlung allein untersucht. Um auch Aufschluß über die Winkelverteilung in Verbindung mit der Wellenlängenabhängigkeit zu gewinnen, soll jetzt noch die Funktion  $\bar{P}(\psi, \lambda)$  bestimmt werden.

Zur Berechnung dieser Funktion setzen wir Gl. (1) in (8) ein und bekommen, wenn wir  $\beta = \sin^{-2}\left(\frac{\pi t}{2T}\right)$  als Integrationsvariable einführen,

$$(26) \quad \bar{P}(\psi, \lambda; t_1, t_2) = \frac{3}{2\pi^2} \left(\frac{E_m}{m_0 c^2}\right)^2 \frac{e^2}{R} \frac{c}{\lambda_m^2} X^4 L(x, y; t_1, t_2)$$

mit

$$(26a) \quad X^4 L(x, y; t_1, t_2) = X^4 \int_{\beta_1}^{\beta_2} d\beta \frac{1}{\beta \sqrt{\beta-1}} (\beta^2 + y^2) \times \\ \times \left[ K_{4/3}^2\left(\frac{x}{\beta}\right) + \frac{y^2}{\beta^2 + y^2} K_{1/3}^2\left(\frac{x}{\beta}\right) \right];$$

$$\frac{x}{\beta} = \frac{X}{2} (\beta^2 + y^2)^{3/2}$$

$$\beta_\nu = \sin^{-2}\left(\frac{\pi t_\nu}{2T}\right), \quad (\nu = 1, 2),$$

wo  $X$  eine dimensionslose Größe bedeutet, die die Wellenlänge der Strahlung charakterisiert:

$$(26b) \quad \chi = \frac{\lambda_m}{\lambda} \quad ,$$

$$(26c) \quad \lambda_m = \frac{4\pi R}{3} \left( \frac{m_0 c^2}{E_m} \right)^3 .$$

Für die weitere Untersuchung können wir uns wieder auf die Ermittlung einer einzigen Größe, der Funktion  $\chi^4 L(\chi, y; t_1, t_2)$  beschränken, die ebenso wie die Funktion  $L(y; t_1, t_2)$  unabhängig ist von den Maschinenparametern und somit für alle Kreisbeschleuniger den gleichen Wert besitzt.

Als Anwendung betrachten wir wiederum den Spezialfall der Mittelung über die volle Beschleunigungsperiode:

$$t_1 = 0 \quad , \quad t_2 = T \quad ;$$

$$\beta_1 = \infty \quad , \quad \beta_2 = 1 \quad .$$

In diesem Fall wird zwar der Integrand in (26a) an der unteren Grenze  $\beta_2 = 1$  singular, doch kann diese Singularität durch eine partielle Integration unter Benutzung der Formel

$$\frac{1}{\beta \sqrt{\beta-1}} v = \frac{d}{d\beta} \left\{ 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\beta-1} v \right\} - 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\beta-1} \frac{dv}{d\beta} \quad ,$$

$$v = (\beta^2 + 2\eta^2)^2 \left[ K_{\frac{2}{3}}^2 \left( \frac{\eta}{\beta} \right) + \frac{\eta^2}{\beta^2 + \eta^2} K_{\frac{1}{3}}^2 \left( \frac{\eta}{\beta} \right) \right]$$

behothen werden. Berücksichtigt man noch die Beziehungen

$$K'_\nu(z) = - \frac{K_{\nu-1}(z) + K_{\nu+1}(z)}{2} \quad ,$$

$$K_{\nu-1}(z) - K_{\nu+1}(z) = - \frac{2\nu}{z} K_\nu(z) \quad ,$$

$$K_{-\nu}(z) = K_\nu(z) \quad ,$$

so ergibt sich nach einigen Umformungen die Gleichung

$$(27) \quad X^4 L(X, \eta) = X^4 \int_1^{\infty} d\beta \cdot \beta \cdot (\beta^2 + 2\eta^2) \cdot \arctan \eta \sqrt{\beta - 1} \times \\ \times \bar{f} \cdot K_{1/3}(\bar{f}) \cdot K_{2/3}(\bar{f}) ,$$

in der die Funktion  $X^4 L(X, \eta)$  in Integralform angegeben ist.

Eine graphische Darstellung der Größe  $X^4 L(X, \eta)$  als Ergebnis der numerischen Auswertung von (27) wird schließlich in Fig. 2 und 3 gezeigt. Dort ist die Funktion  $X^4 L(X, \eta)$  für verschiedene  $X$ -Werte über der Koordinate  $\eta$  (Fig. 2; Winkelverteilung der Synchrotronstrahlung in verschiedenen Spektralbereichen) bzw. für verschiedene  $\eta$ -Werte über  $X$  (Fig. 3; Spektralverteilung der Synchrotronstrahlung unter verschiedenen Beobachtungswinkeln) aufgetragen. Zahlenwerte sind in Anhang II aufgeführt.

Aus Fig. 2 erkennt man, daß das Maximum der Strahlungsleistung in jedem Spektralbereich bei  $\eta = 0$ , also in der Bahnebene liegt. Die Halbwertsbreite dieser Kurven nimmt mit abnehmendem  $X$  zu.

Fig. 3 zeigt, daß das Maximum der Spektralverteilung, gemessen unter festem Beobachtungswinkel  $\psi$ , sich mit wachsendem  $\psi$  zur langwelligen Seite des Spektrums verschiebt. Für  $\eta = 0$  befindet es sich bei

$$X_{\max} \approx 2,5 , \\ \lambda_{\max} \approx 0,4 \cdot \lambda_m ,$$

für  $\eta \approx 0,8$  (Halbwertsbreite der Funktion  $L(\eta)$ ) bei

$$\chi_{\max} \approx 1,2 ,$$

$$\lambda_{\max} \approx 0,8 \cdot \lambda_m ,$$

so daß innerhalb der Halbwertsbreite der Funktion  $L(\chi)$ , die die Gesamtausstrahlung unter festem Winkel beschreibt, eine Verdoppelung von  $\lambda_{\max}$  auftritt.

Für DESY gilt

$$\lambda_m = 0,82034 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

und damit

$$\lambda_{\max} \approx 0,33 \cdot 10^{-10} \text{ m für } \chi = 0 ,$$

$$\lambda_{\max} \approx 0,66 \cdot 10^{-10} \text{ m für } \chi = 0,8 ,$$

das heißt, das Spektrum liegt zur Hauptsache im Bereich der harten Röntgenstrahlung.

Abschließend sei noch erwähnt, daß man die über  $\psi$  integrierte Funktion  $\bar{P}(\psi, \lambda; 0, T)$  nach Tombouljan und Bedo in der Form

$$\begin{aligned} \bar{P}(\lambda; 0, T) &\equiv \int \bar{P}(\psi, \lambda; 0, T) d\psi \\ &= \frac{3^{3/2}}{8\pi^3} \frac{e^2 c}{R^3} \left( \frac{E_m}{m_0 c^2} \right)^7 \chi^4 L(\chi) , \end{aligned}$$

$$L(\chi) = \int_0^\infty \left\{ (\beta^{1/3} - 1)^{1/2} (\beta^{1/3} + 2) K_{5/3}(\chi\beta) d\beta \right.$$

schreiben kann (3), wobei die Funktion  $\chi^4 L(\chi)$  bis auf einen konstanten Faktor die reine Spektralverteilung der Synchrontronstrahlung wiedergibt und in Fig. 4 graphisch dargestellt ist. Zahlenwerte für  $\chi^4 L(\chi)$  finden sich in Anhang III.

#### IV. ZUSAMMENFASSUNG

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist die zeitliche Mittelung der Strahlungsformeln

$$P(\psi, \lambda, t) = \text{Strahlungsleistung pro Wellenlängen- und Winkeleinheit,}$$

$$P(\psi, t) = \int P(\psi, \lambda, t) d\lambda$$

für die Emission elektromagnetischer Wellen durch geladene Teilchen, die sich auf einer Kreisbahn mit dem Radius  $R$  bewegen (siehe Gl. (1) - (4)), unter Zugrundelegung des Zeitgesetzes

$$E(t) = E_m \sin^2 \left( \frac{\pi t}{2T} \right),$$

das den Beschleunigungsablauf der Teilchen in einem Synchrotron beschreibt.

In Kap. II und III wird gezeigt, daß die gemittelten Strahlungsformeln

$$\bar{P}(\psi; t_1, t_2) = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} P(\psi, t) dt,$$

$$\bar{P}(\psi, \lambda; t_1, t_2) = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} P(\psi, \lambda, t) dt$$

in folgender Form geschrieben werden können:

$$(9) \quad \bar{P}(\psi, t_1, t_2) = \frac{e^2 c}{\pi R^2} \left( \frac{E_m}{m_0 c^2} \right)^5 L(\eta; t_1, t_2),$$

$$(26) \quad \bar{P}(\psi, \lambda, t_1, t_2) = \frac{3}{2\pi^2} \left( \frac{E_m}{m_0 c^2} \right)^2 \frac{e^2 c}{R \lambda_m^2} X^4 L(X, \eta; t_1, t_2);$$

mit

$$y = \frac{E_m \psi}{m_0 c^2} \quad ,$$

$$X = \frac{\lambda_m}{\lambda} \quad ,$$

$$\lambda_m = \frac{4\pi R}{3} \left( \frac{m_0 c^2}{E_m} \right)^3 \quad ,$$

wo  $L(y; t_1, t_2)$  und  $X^4 L(X, y; t_1, t_2)$  Funktionen bedeuten, die für alle Kreisbeschleuniger den gleichen Verlauf aufweisen, während die Faktoren

$$\frac{e^2 c}{\pi R^2} \left( \frac{E_m}{m_0 c^2} \right)^5$$

und

$$\frac{3}{2\pi^2} \left( \frac{E_m}{m_0 c^2} \right)^2 \frac{e^2 c}{R \lambda_m^2}$$

in (9) und (26) von den Maschinenparametern

$R$  = Bahnradius

$E_m$  = Maximalenergie der Elektronen

abhängen.

Die Funktionen  $L(y; t_1, t_2)$  und  $X^4 L(X, y; t_1, t_2)$  selbst können nach Gl. (10), (14) - (23) (für  $L(y)$ ) und Gl. (26a) bzw. (27) (für  $X^4 L(X, y)$ ) berechnet werden. Eine numerische Auswertung dieser Gleichungen erfolgt für den Spezialfall, daß die Mittelung über die ganze Beschleunigungsperiode

$$t_1 = 0 \quad , \quad t_2 = T$$

durchgeführt wird. Graphische Darstellungen von  $L(y)$  und  $X^4 L(X, y)$  sind in Fig. 1 - 3 wiedergegeben.

Der Fig. 1 entnimmt man nun, daß die Strahlungsintensität bei  $\eta = 0$  ein Maximum besitzt und die Ausstrahlung um so schwächer wird, je größer der Winkel gegen die Bahnebene ist, unter dem man die Strahlung beobachtet.

Aus Fig. 2, in der die Funktion  $X^4 L(X, \eta)$  für verschiedene Wellenlängen  $\lambda = \frac{\lambda_m}{X}$  über der Winkelkoordinate  $\eta$  aufgetragen ist, geht hervor, daß diese Abnahme der Intensität mit wachsendem  $\psi$  nicht nur bei der Gesamtausstrahlung auftritt, sondern sogar für jeden Spektralbereich charakteristisch ist. Bemerkenswert ist die Zunahme der Halbwertsbreite der Kurven

$$X^4 L(X, \eta), \quad X = \text{konst.}$$

mit fallendem  $X$ .

Aus Fig. 3 ist schließlich ersichtlich, daß das Maximum der Spektralverteilung, die unter festem Winkel  $\psi$  gegen die Bahnebene gemessen wird, sich mit wachsendem  $\psi$  nach der Seite der langen Wellen hin verschiebt derart, daß innerhalb der Halbwertsbreite der Funktion  $L(\eta)$  bzw.  $\bar{P}(\psi)$  eine Verdoppelung der Wellenlänge

$$\lambda_{\max} = \frac{\lambda_m}{X_{\max}}$$

auftritt.

Eine graphische Darstellung der reinen Spektralverteilung  $\bar{P}(\lambda; 0, T)$ , die aus  $\bar{P}(\psi, \lambda; 0, T)$  durch Integration über den Winkel  $\psi$  entsteht und bereits von Tombouliau und Bedo untersucht wurde (3):

$$\bar{P}(\lambda; 0, T) = \frac{3^{3/2}}{8\pi^3} \left( \frac{e^2 c}{R^3} \right) \left( \frac{E_m}{m_0 c^2} \right)^7 X^4 L(X),$$

$$L(X) = \int_1^\infty \left\{ (\beta^{3/2} - 1)^{1/2} (\beta^{1/3} + 2) \right\} K_{5/3}(X\beta) d\beta,$$

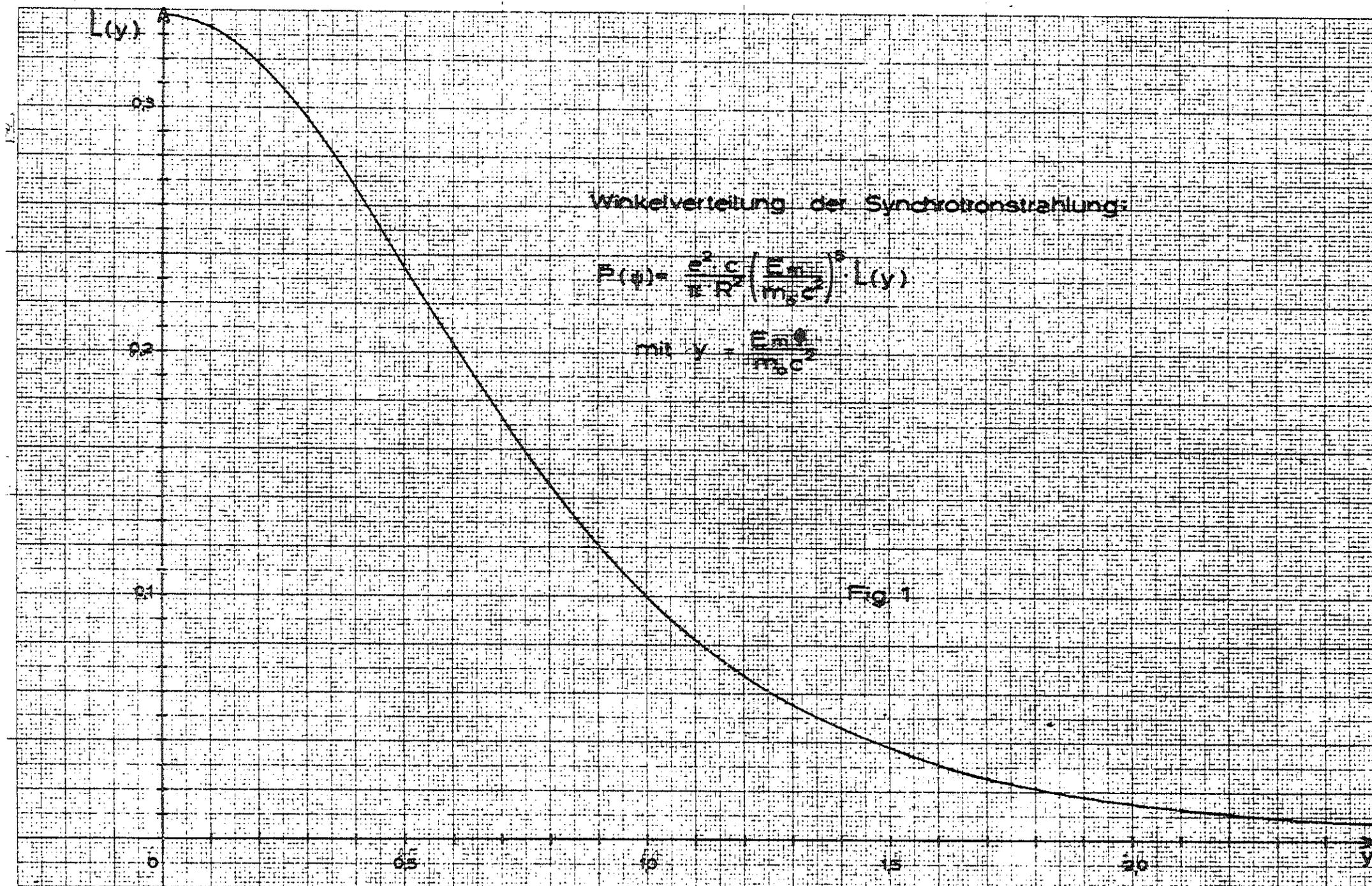
zeigt Fig. 4.

Die den Fig. 1 - 4 zugrundeliegenden Werte für  $L(\eta)$ ,  $\chi^4 L(\chi, \eta)$  und  $\chi^4 L(\chi)$  können dem Anhang I, II und III entnommen werden. Zahlenwerte für DESY sind am Schluß von Kap. II und III angegeben.

LITERATUR

- (1) J. Schwinger, Phys. Rev. 75 (1949), S. 1912
- (2) D. H. Tombouliau u. P. L. Hartmann, Phys. Rev. 102  
(1956), S. 1423
- (3) D. H. Tombouliau u. D. E. Bedo, Journal of Appl. Phys.  
29 (1958), S. 804
- (4) W. Gröbner u. N. Hofreiter, Integraltafel, 1. Teil

Frl. L. Jorjan danke ich für die Durchführung der  
numerischen Rechnungen auf der IBM 650



$L(y)$

0.3

0.2

0.1

0

0.5

1

1.5

2.0

$y$

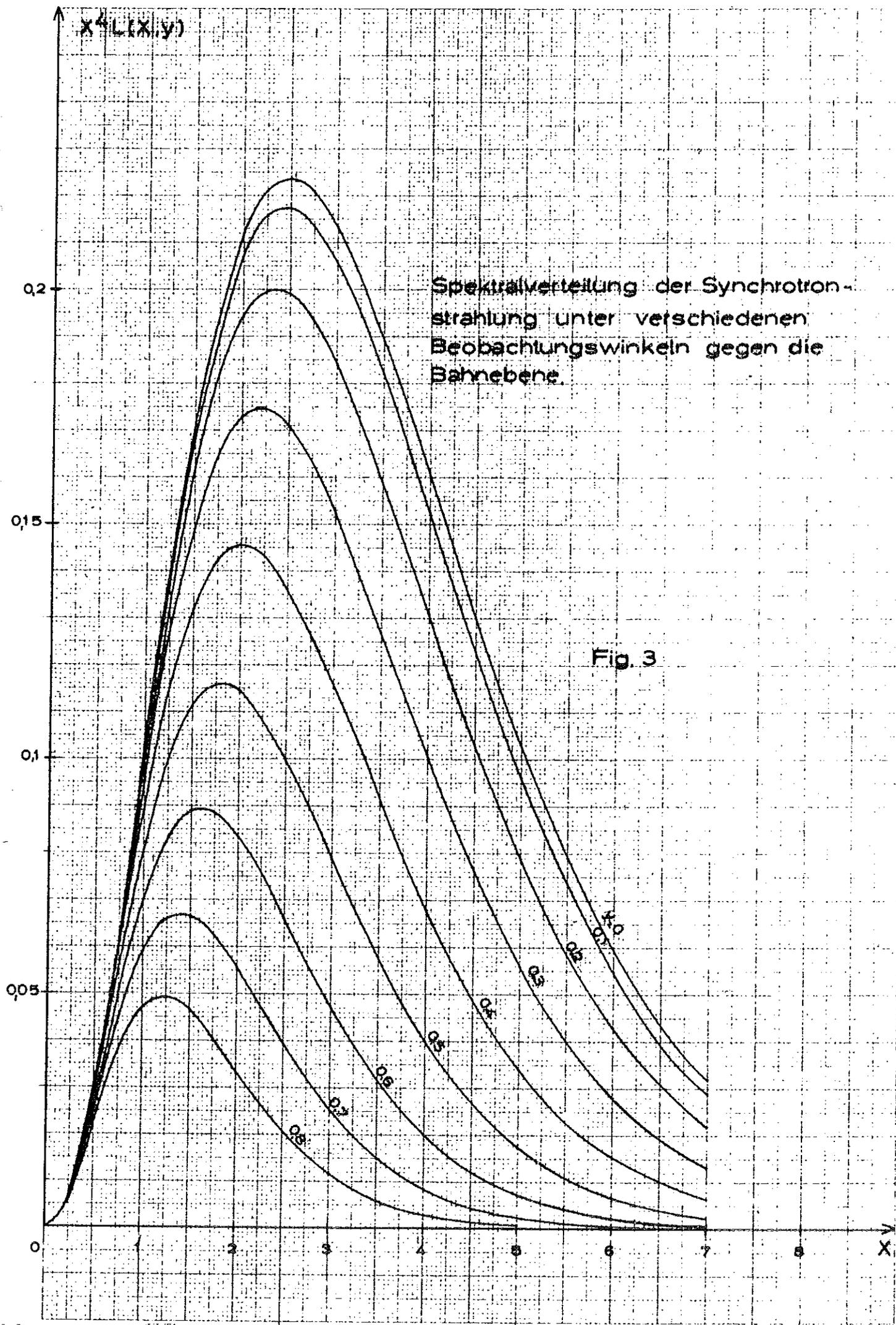
Winkelverteilung der Synchrotronstrahlung:

$$P(\varphi) = \frac{e^2 c}{4 \pi R^2} \left( \frac{E}{m_0 c^2 \gamma} \right)^2 L(y)$$

mit  $\gamma = \frac{E}{m_0 c^2}$

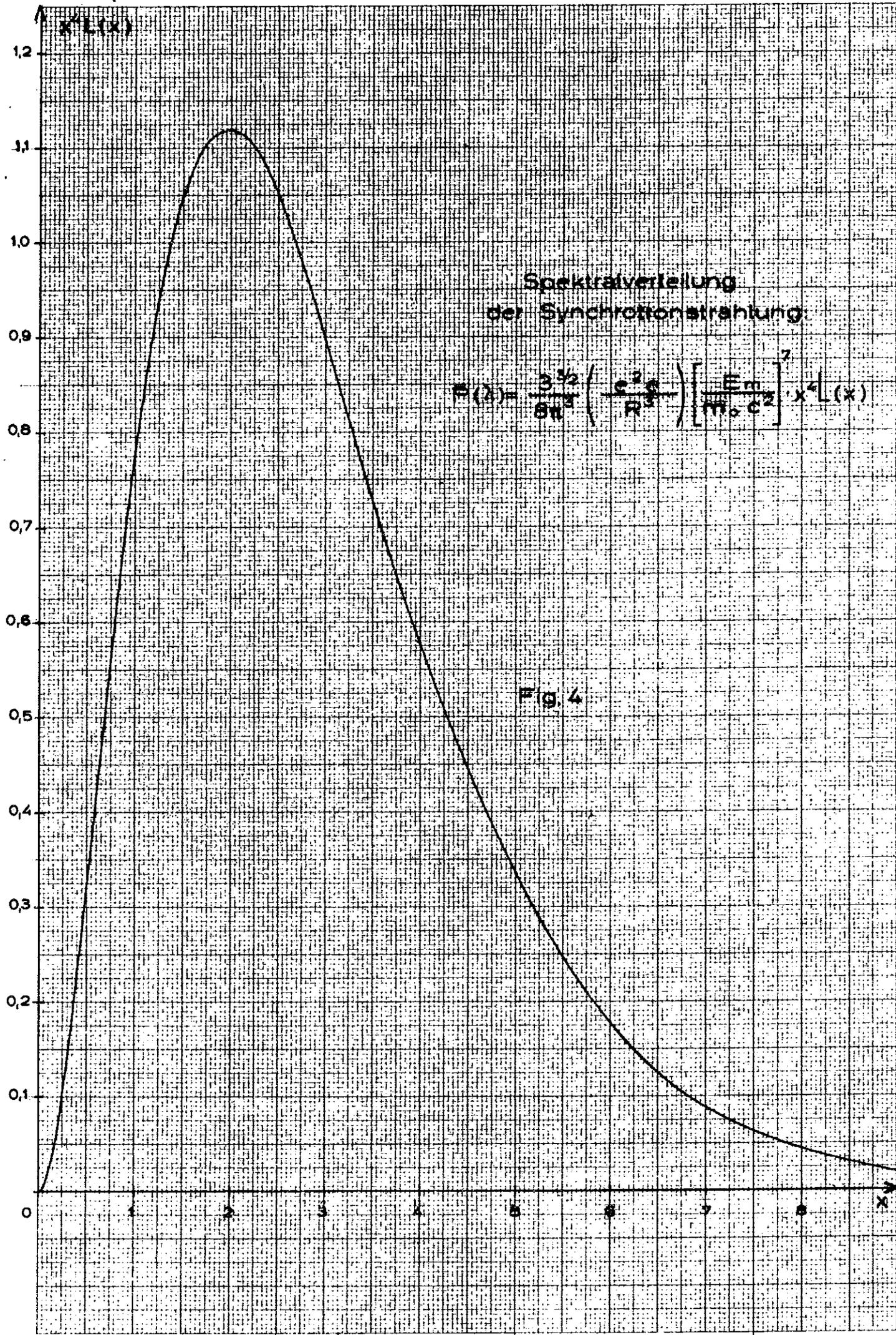
$\pi \approx 3.14$





Spektralverteilung der Synchrotronstrahlung unter verschiedenen Beobachtungswinkeln gegen die Bahnebene.

Fig. 3



Spektralverteilung  
der Synchrotronstrahlung:

$$P(\omega) = \frac{3^{3/2}}{8\pi^3} \left( \frac{c^2 \beta}{R^3} \right) \left[ \frac{E_m}{m_0 c^2} \right]^3 x^2 L(x)$$

Fig. 4

ANHANG I

Zahlenwerte für  $L(\eta)$

$\eta$	$L(\eta)$	$\eta$	$L(\eta)$
0	0,338	1,6	0,0313
0,1	0,333	1,7	0,0260
0,2	0,318	1,8	0,0217
0,3	0,296	1,9	0,0182
0,4	0,267	2,0	0,0153
0,5	0,235	2,1	0,0129
0,6	0,204	2,2	0,0109
0,7	0,173	2,3	0,00931
0,8	0,145	2,4	0,00795
0,9	0,121	2,5	0,00682
1	0,0999	2,6	0,00588
1,1	0,0822	2,7	0,00508
1,2	0,0676	2,8	0,00441
1,3	0,0556	2,9	0,00384
1,4	0,0458	3,0	0,00335
1,5	0,0378		



ANHANG III

Zahlenwerte für  $\chi^4 L(\chi)$ :

$\chi$	$\chi^4 L(\chi)$
0,1	$1,77 \cdot 10^{-2}$
0,2	$6,83 \cdot 10^{-2}$
0,4	$2,35 \cdot 10^{-1}$
0,5	$3,25 \cdot 10^{-1}$
0,6	$4,20 \cdot 10^{-1}$
1,0	$7,76 \cdot 10^{-1}$
1,5	1,05
2,0	1,12
2,5	1,05
3,0	$8,98 \cdot 10^{-1}$
4,0	$5,78 \cdot 10^{-1}$
5,0	$3,36 \cdot 10^{-1}$
6,0	$1,79 \cdot 10^{-1}$
7,0	$8,88 \cdot 10^{-2}$
10,0	$8,80 \cdot 10^{-3}$