

DEUTSCHES ELEKTRONEN-SYNCHROTRON

DESY

DESY A 2.100
Juni 1963
M 4-Schm/P

DER INJEKTIONS WEG

W. Schmidt

DEUTSCHES ELEKTRONEN - SYNCHROTRON
DESY
Hamburg-Gr.Flottbek 1, Notkestieg 1

DESY-Notiz A 2.100

Hamburg, den 21. Juni 1963
M 4-Schm/P

DER INJEKTIONSWEG

von

W. Schmidt

Summary

This paper gives a survey of the elements and data which are necessary to inject the electrons from the linear accelerator into the synchrotron. The injection is affected by two procedures:

1.) Energy Matching:

In order to prevent additional betatron oscillations, building up within the synchrotron, electrons with energy deviation have to be placed on their equilibrium orbit.

2.) Beam Matching:

The emittance-phase plane of the linac has to be conformed on the acceptance phase plane of the synchrotron to lose a minimum of the injected electrons.

A description of the beam path between linac and synchrotron has already come out earlier in DESY report A 2.40. A later change in location of the injection point, with respect to the linac position, called for a new calculation of the beam path. This report summarizes the beam geometry with the exception of beam matching.

-.-.-.-

1. Einleitung

Zum Einschuss der Elektronen in das Synchrotron sind zwei Dinge von besonderer Bedeutung: die Energieanpassung und das sog. "beam matching". Einmal sollen Elektronen mit einer Energieabweichung von $\pm 1\%$ auf ihre zugehörige Gleichgewichtsbahn im Synchrotron gebracht werden, zum anderen müssen die Emittanz-Phasenflächen des Linac simultan auf die entsprechenden Akzeptanzflächen des Synchrotrons abgebildet werden. Das dazu notwendige Injektionssystem zeigt die Abb. 1.

2. Energieanpassung

Um sich darüber klar zu werden, welche Elemente und wieviel zur Anpassung am besten geeignet sind, benötigen wir zunächst die Bahnkurven durch den Inflektor und das Streufeld des D-Sektors am Synchrotron, denn diese Elemente sind fest vorgegeben. Die Bestimmung der Bahnkurven geschieht in zwei Schritten.

2.1 Inflektor

Ein Elektron der Energie $W + \Delta W$ tritt bei D mit y_D und $y'_D = \left(\frac{dy}{dx}\right)_D$ in das gerade Stück ein und verlässt den Inflektor am Einschusspunkt A mit y_A und $y'_A = \left(\frac{dy}{dx}\right)_A$ (s. Abb.2). Dabei durchläuft es ein feldfreies Stück der Länge l und ein Magnetfeld B der Länge L . Die Übertragungsmatrix lautet demnach:

$$(1) \begin{pmatrix} y_A \\ y'_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_D \\ y'_D \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{L^2}{2} \\ L \end{pmatrix} \frac{cB}{W}$$

(B in $\frac{Vsec}{m^2}$ L, l in Meter und W in Volt)

Damit wird

$$(2) y_D = y_A + \frac{cB}{W} L \left(\frac{L}{2} + l \right) - (L + l) y'_A$$

$$(3) y'_D = y'_A - \frac{cB}{W} \cdot L$$

Das Magnetfeld $B = 33,3 \cdot 10^{-4} \frac{Vsec}{m^2}$ ist so gewählt, dass für $\Delta W = 0$ und $W = 40 \cdot 10^6$ V $y_A = y'_A = 0$ ist. für $\frac{\Delta W}{W} = \pm 1\%$ sind die y_A und y'_A dem Bericht M1-Th9 zu entnehmen.

Es gilt

$$\frac{\Delta W}{W} = \pm 1\% \quad y_A = \pm 1,800106 \cdot 10^{-2} m \quad y'_A = \pm 2,3106 \cdot 10^{-3} rad$$

Mit $l = 0,35$ m und $L = 1,75$ m erhält man

$\frac{\Delta W}{W}$	y_D (m)	y'_D (rad)
0	$5,36085 \cdot 10^{-2}$	$+ 43,764 \cdot 10^{-3}$
+1%	$6,62240 \cdot 10^{-2}$	$+ 41,018 \cdot 10^{-3}$
-1%	$4,10039 \cdot 10^{-2}$	$+ 46,519 \cdot 10^{-3}$

2.2 Streufeld des D-Sektors

Das Streufeld des D-Sektors wurde von der Magnetgruppe ausgemessen und tabelliert. Die Auswertung der Bahnkurven erfolgte numerisch auf der IBM 650 durch Integration in 50 Schritten. Den Verlauf der Kurven sehen wir in Abb.3.

Darin ist die x-Achse mit der Sollbahn im geraden Stück am Einschusspunkt E identisch (vgl. Abb. 1 und 2). Von $x = 0$ bis $x = 1,40$ m verlaufen die Teilchenbahnen linear. Von $x = 1,40$ m bis $5,6$ m ist der Einfluss des Streufeldes wirksam. Bei $x = 5,95$ m beginnt der Inflektor.

Der Punkt E bei $x = 0$ ist Ausgangspunkt für das Rechenprogramm zur Energieanpassung. Die Abweichung von der Sollbahn ($\Delta W = 0$) sei $\Delta y = y_{\pm 1} - y_0$ und $\Delta y' = y'_{\pm 1} - y'_0$. Bei E findet man folgende Koordinaten:

$\frac{\Delta W}{W}$ (%)	y_E (m)	y'_E (rad)	Δy_E (m)	$\Delta y'_E$ (rad)
0	$7,795 \cdot 10^{-2}$	$5,691 \cdot 10^{-3}$	—	—
+ 1%	$9,831 \cdot 10^{-2}$	$3,063 \cdot 10^{-3}$	$+2,036 \cdot 10^{-2}$	$-2,898 \cdot 10^{-3}$
- 1%	$5,852 \cdot 10^{-2}$	$8,777 \cdot 10^{-3}$	$-1,934 \cdot 10^{-2}$	$+2,816 \cdot 10^{-3}$

Die Unterschiede zwischen Δy und $\Delta y'$ bei $\pm 1\%$ entstehen zum Teil durch Abrunden zum Teil aus der geringen Nichtlinearität

des Streufeldes. Für die Energieanpassung werden Mittelwerte zugrunde gelegt.

$$\begin{array}{ccc} \frac{\Delta W}{W} & \Delta y_E & \Delta y'_E \\ \pm 1\% & \pm 1,993 \cdot 10^{-2} \text{ m} & \pm 2,858 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \end{array}$$

2.3 Der restliche Injektionsweg

Vom Linac aus gesehen bis hinter die Quadrupoltripel ist der Strahlweg unabhängig von der Energiestreuung. Die Energieanpassung wird mit 3 Sektormagneten und 2 Quadrupollinsen bewerkstelligt (s. Abb. 4). Im Punkte E ist dabei die Dispersion nach 2.2 vorgegeben.

In Abänderung von Bericht A 2.40 benötigen wir 3 Einlenkmagnete, da sich nachträglich sowohl Einschussort A (durch Vertauschung von F- und D-Sektor) als auch Einschussrichtung (genaue Ausmessung der Linac-Achse zum Ring) geändert haben.

Der Magnet M_2 besitzt drehbare Stirnflächen. Die Anstellwinkel ϵ' bzw. ϵ'' der Stirnflächen bewirken eine zusätzliche Fokussierung oder Defokussierung und können daher wie dünne Linsen der Brennweite

$$f = -\frac{1}{q} = -\frac{R}{\text{tg } \epsilon} \quad (4)$$

betrachtet werden. Der Winkel ϵ gegen die Normalfläche rechnet positiv in Drehrichtung der Strahlkrümmung, die durch die Stirnfläche des Magneten verursacht wird.

Die Benutzung eines 3. Magneten M_0 bietet den Vorteil, dass bei einer bestimmten Stelle B (s. Abb. 1) im geraden Stück L_0 eine

Strahlentaille auftritt, so dass dort eine Energieselektion möglich wird (s. weiter unten).

Alle Grössen L_i, R_i, φ_i ($i = 0, 1, 2$) ergeben sich aus geometrischen Überlegungen, die hier nicht weiter diskutiert werden sollen. Zur Energieanpassung bleiben dann die Parameter q' und q'' der beiden "Linsen" Q' und Q'' übrig.

Statt der festen Koordinaten x und y , führen wir jetzt bewegte Bahnkoordinaten s, r, z ein (s. Abb.6). Damit wird r bzw. z die Abweichung von der Sollbahn in horizontaler bzw. vertikaler Richtung und $r' = \frac{dr}{ds}$ bzw. $z' = \frac{dz}{ds}$ die Winkelabweichung gegen die Sollbahn an der Stelle s . Für die Transformation durch das Injektionssystem der Abb.4 gilt dann:

$$(5) \quad W_E = L_2 Q'' \partial L_2 Q' L_1 \partial L_1 L_0 W_0 + L_2 Q'' \left\{ \partial L_2 Q' L_1 (m_1 - \partial L_1 L_0 m_0) - m_2 \right\} \cdot \frac{\Delta W}{W}$$

Mit

$$(6) \quad W_E = \begin{pmatrix} \Delta y_E \\ \Delta y'_E \end{pmatrix}, \quad W_0 = 0, \quad \frac{\Delta W}{W} = \pm 1\%, \quad m_i = \begin{pmatrix} R_i (1 - \cos \varphi_i) \\ R_i \sin \varphi_i \end{pmatrix}$$

$$\partial L_i = \begin{pmatrix} \cos \varphi_i & R_i \sin \varphi_i \\ -\frac{\sin \varphi_i}{R_i} & \cos \varphi_i \end{pmatrix}, \quad L_i = \begin{pmatrix} 1 & L_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ q & 1 \end{pmatrix} \quad i = 0, 1, 2$$

erhält man ein System von 2 Gleichungen in q' und q'' von der Gestalt

$$r_E = a_0 + a_1 \cdot q' + a_2 q' \cdot q''$$

$$r'_E = b_0 + b_1 q' + b_2 q' q'',$$

welches sich leicht nach q' und dann nach q'' lösen lässt.

Mit den Zahlenwerten

$$\varphi_0 = 7^\circ 20' 17'' \hat{=} 0,128073 \text{ rad} \quad R_0 = 4\text{m} \quad L_0 = 6,629\text{m}$$

$$\varphi_1 = 42^\circ 56' 56'' \hat{=} 0,749600 \text{ rad} \quad R_1 = 1,5\text{m} \quad L_1 = 2,435\text{m}$$

$$\varphi_2 = 30^\circ \hat{=} 0,523599 \text{ rad} \quad R_2 = 1,1\text{m} \quad L_2 = 2 \text{ m}$$

$$\frac{\Delta W}{W} = + 1\% \quad r_E = 1,993 \cdot 10^{-2} \text{m} \quad r_E' = -2,857 \cdot 10^{-3} \text{rad}$$

ergeben sich die Lösungen

$$q' = -0,0481 \text{m}^{-1}$$

$$q'' = 0,0386 \text{m}^{-1}$$

$$\underline{\varepsilon' = -4,131^\circ}$$

$$\underline{\varepsilon'' = +3,311^\circ}$$

Im folgenden sind noch die Koordinaten der Punkte O bis E für die Anfangsbedingungen (6) angegeben (Dimension von $[M] = \left[\frac{\text{m}}{\text{rad}} \right]$)

$$M_0 = 0 \quad M_1 = \begin{pmatrix} -0,033 \\ -0,128 \end{pmatrix} \frac{\Delta W}{W} \quad M_2 = \begin{pmatrix} -0,880 \\ -0,128 \end{pmatrix} \cdot \frac{\Delta W}{W}$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} -0,445 \\ 1,133 \end{pmatrix} \frac{\Delta W}{W} \quad M_4 = \begin{pmatrix} 2,313 \\ 1,133 \end{pmatrix} \frac{\Delta W}{W} \quad M_5 = \begin{pmatrix} 2,313 \\ 1,022 \end{pmatrix} \frac{\Delta W}{W}$$

$$M_6 = \begin{pmatrix} 2,568 \\ -0,386 \end{pmatrix} \frac{\Delta W}{W} \quad M_7 = \begin{pmatrix} 2,568 \\ -0,286 \end{pmatrix} \frac{\Delta W}{W} \quad M_E = \begin{pmatrix} 1,993 \\ -0,286 \end{pmatrix} \frac{\Delta W}{W}$$

Weiter folgen die Zahlenwerte der Transformationsmatrizen mit den Dimensionen

$$[Q, \lambda, M] = \begin{pmatrix} [1] & [m] \\ [m^{-1}] & [1] \end{pmatrix} \quad [m] = \begin{pmatrix} [m] \\ [1] \end{pmatrix}$$

M

3

$$M_0 : \begin{pmatrix} 0,991806 & 0,511000 \\ -0,031938 & 0,991806 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0,512292 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_1 : \begin{pmatrix} 0,731962 & 0,749481 \\ -0,619406 & 0,731962 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0,824560 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 M_2 &: \begin{pmatrix} 0,866025 & 0,75 \\ -0,333333 & 0,866025 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0,785399 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 Q' &: \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -0,048149 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -0,048149 & 1 \end{pmatrix} \\
 Q'' &: \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0,038567 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -0,038567 & 1 \end{pmatrix} \\
 m_0 &= \begin{pmatrix} 0,032776 \\ 0,127750 \end{pmatrix} & m_1 = \begin{pmatrix} 0,294842 \\ 0,681346 \end{pmatrix} & m_2 = \begin{pmatrix} 0,200963 \\ 0,5 \end{pmatrix} \\
 L_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 6,629 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2,435 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Für die z-Richtung wirken die Magnete wie ein gerades Stück der Länge $L = R \cdot \varphi$. Die Quadrupollinsen kehren ihre Wirkung um, nämlich $q_x = -q_z$.

3.1 Transformation der Phasenellipsen

Das Problem der Strahlanpassung besteht darin, die Emittanzellipsen des Linac in r und z so durch die beiden Quadrupoltripel zu transformieren, dass sie am Einschusspunkt A mit den Akzeptanzellipsen des Synchrotrons übereinstimmen. Zwischen Punkt O und A sind die Injektionselemente vorgegeben. Man kann also das Injektionssystem bis zum Punkt O zurückrechnen (Abb.1). In diesem Punkt erfolgt dann die Anpassung vom Linac her durch 2 Quadrupoltripel, die schon in den Berichten A 2.40 und A 2.61 diskutiert wurde. Hier soll nur die Rechnung bis zum Punkt O behandelt werden.

Die Phasenflächenellipse wird wie in A 2.70 dargestellt durch

$$(7) \quad \gamma x^2 + 2\alpha xy + \beta y^2 = \epsilon$$

mit $x \equiv r, z$ $y \equiv r', z'$ und

$$(8) \quad f\beta - \alpha^2 = 1$$

Rechnet man x in m und y in rad , so erscheinen die Koeffizienten in den Dimensionen

$$[\alpha] = [1] \quad [\beta] = [m] \quad [f] = [m^{-1}] \quad [\mathcal{E}] = [m].$$

Ferner gelten die Beziehungen:

$$x_{\max} = \sqrt{\mathcal{E}\beta} = \text{halber Strahldurchmesser}$$

$$y_{\max} = \sqrt{\mathcal{E}f} = \text{halbe maximale Divergenz}$$

$$\mathcal{E} = \frac{F}{\pi} = \text{Ellipsenfläche dividiert durch } \pi = \text{Emittanz} \\ \text{bzw. Akzeptanz}$$

Die Stelle s_0 , an der $r(s)$ ein Minimum annimmt, nennt man eine Strahltaille. Dort ist $\alpha = 0$. Dann gibt der "Taillenabstand"

$$L = \frac{\alpha}{f} \text{ den Laufweg } L = s - s_0 \text{ an, den der Strahl an der Stelle } s_i \text{ von der Taille zurückgelegt h\u00e4tte.}$$

Bei der Transformation einer solchen Ellipse von s_0 nach S bleibt \mathcal{E} unver\u00e4ndert. (Satz von Liouville). Daher wird die Ellipse vollst\u00e4ndig durch den symbolischen Vektor

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ f \end{pmatrix}$$

beschrieben.

F\u00fcr die lineare Transformation

$$\mathcal{H} = \alpha \mathcal{H}_0 \quad \text{mit} \quad \alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathcal{H} = \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}$$

mit den Dimensionen $[a] = [d] = 1$, $[c] = m^{-1}$ und $[b] = [m]$

transformiert sich der Ellipsenvektor \mathcal{H} durch

$$(9) \quad \mathcal{H} = \begin{pmatrix} ad + bc & -ac & -bd \\ -2ab & a^2 & b^2 \\ -2cd & c^2 & d^2 \end{pmatrix} \mathcal{H}_0$$

An der Stelle D, dem Ende des D-Sektors, sind die Vektoren M_r und M_z bekannt und dem Bericht M 1, Th-9 zu entnehmen.

Es gilt

$$M_{rD} = \begin{pmatrix} -1.318080 \\ 6.337983 \\ 0.431894 \end{pmatrix} \quad M_{zD} = \begin{pmatrix} 2.376220 \\ 15.389017 \\ 0.431894 \end{pmatrix}$$

Gesucht werden M_{r0} und M_{z0} an der Stelle 0 in Abb.4. Die Transformation von 0 nach D erfolgt in 2 Schritten, nämlich durch die Injektionselemente von 0 bis E und durchs Streufeld von E bis D. Die Matrizen α_{ED} erhält man aus der numerischen Berechnung mindestens zweier Teilchenbahnen im Streufeld.

Es wurden etwa 20 Bahnen unter verschiedenen Anfangsbedingungen auf der Akzeptanzellipse mit einem IBM 650 Programm berechnet und daraus durch Mittelung die Koeffizienten einer linearen Transformation bestimmt. Die Abweichung von der tatsächlichen Transformation ist nur geringfügig.

Wegen $\varphi_D = \alpha_{ED} \cdot \varphi_E$ entsteht φ_E aus φ_D durch Anwendung von $\alpha_{ED}^{-1} \equiv \alpha_{DE}$ auf die Transformation (9). Die entsprechenden

Matrizen lauten:

$$\alpha_{DE} = \begin{pmatrix} 3,177628 & -8,317906 \\ -0,568424 & 1,807380 \end{pmatrix} \quad \alpha_{DE} = \begin{pmatrix} -0,515260 & -3,380726 \\ 0,355600 & 0,392060 \end{pmatrix}$$

Daraus bestimmt man

$$M_{rE} = \begin{pmatrix} 4,138865 \\ 24,201428 \\ 0,750393 \end{pmatrix} \quad M_{zE} = \begin{pmatrix} 0,055434 \\ 0,743382 \\ 1,349777 \end{pmatrix}$$

Die Transformationsmatrix α_{0E} ist durch Gl. (5) mit $\frac{\Delta W}{W} = 0$ gegeben

$$(10) \quad \alpha_{0E} = L_2 Q'' \cdot M_2 \cdot Q' \cdot L_1 \cdot M_1 \cdot L_0 \cdot M_0$$

Mit Hilfe eines Rechenprogramms wurden Vektoren $n_7, n_6 \dots n_0$ für r und z sukzessive aus n_E berechnet. So findet man z.B.:

$$\begin{aligned} n_7 \text{ aus } n_E \text{ mit } \alpha_{E,7} &= \mathcal{L}_2^{-1} \\ n_6 \text{ aus } n_7 \text{ mit } \alpha_{7,6} &= Q''^{-1} \text{ usw.} \end{aligned}$$

Das Rechenprogramm liefert ausserdem noch alle x_{\max} und x'_{\max} für jeden Punkt des Injektionsweges. In der Rechnung ist für die Linacemittanz $\mathcal{E}_L = 1.25 \cdot 10^{-6} [\text{m}]$ eingesetzt. Somit erhalten wir direkte Informationen über den tatsächlichen Strahlquerschnitt.

In der Tabelle sind die Werte für alle Punkte zusammengestellt. Dabei wurden in z -Richtung die Punkte 1 bis 3 in der Aufstellung nicht berücksichtigt, da sie für die Transformation nur gerade Stücke darstellen.

In Abb. 7 und 8 sind für r und z die Phasenellipsen an 3 Punkten des Injektionsweges dargestellt.

3.2 Die Strahltaille

An der Stelle B im geraden Stück L_0 besitzt der Strahl eine Taille mit $r_{B\max} = 4 \cdot 10^{-4} \text{m}$. Die Strecke $\overline{B1}$ beträgt $L_{00} = 6.32 \text{m}$. Die Dispersion an dieser Stelle beträgt

$$n_E = -\mathcal{L}_{00} \cdot m_0 \cdot \frac{\Delta W}{W} = \begin{pmatrix} 0,840 \\ 0,128 \end{pmatrix} \cdot \frac{\Delta W}{W}$$

Folglich kann an dieser Stelle sehr gut eine Energieselektion vorgenommen werden.

Pkt	α_r	β_r [m]	δ_r [m ⁻¹]	r_{max} [m]	r'_{max} [rad]
E	4,138865	24,201428	0,750393	0,0055	$0,968 \cdot 10^{-3}$
7	5,639651	43,758460	0,750393	0,0074	$0,968 \cdot 10^{-3}$
6	7,327267	43,758460	1,250483	0,0074	$1,250 \cdot 10^{-3}$
5	-8,156133	43,040638	1,569514	0,0073	$1,401 \cdot 10^{-3}$
4	-10,228499	43,040638	2,454717	0,0073	$1,752 \cdot 10^{-3}$
3	-4,252094	7,785289	2,454717	0,0031	$1,752 \cdot 10^{-3}$
2	-2,487245	0,884654	8,157721	0,0011	$3,193 \cdot 10^{-3}$
1	51,592856	326,42122	8,157721	0,0202	$3,193 \cdot 10^{-3}$
0	43,705612	375,51063	5,089632	0,0217	$2,522 \cdot 10^{-3}$

Pkt	α_z	β_z [m]	δ_z [m ⁻¹]	z_{max} [m]	z'_{max} [m ⁻¹]
E	0,055434	0,743382	1,349777	0,0010	$1,299 \cdot 10^{-3}$
7	2,754988	6,364226	1,349777	0,0028	$1,299 \cdot 10^{-3}$
6	2,509541	6,364226	1,146742	0,0028	$1,197 \cdot 10^{-3}$
5	3,410190	11,013572	1,146742	0,0037	$1,197 \cdot 10^{-3}$
4	3,940483	11,013572	1,500670	0,0037	$1,370 \cdot 10^{-3}$
3	-	-	-	-	-
2	-	-	-	-	-
1	-	-	-	-	-
0	19,548694	255,32049	1,500670	0,0179	$1,370 \cdot 10^{-3}$

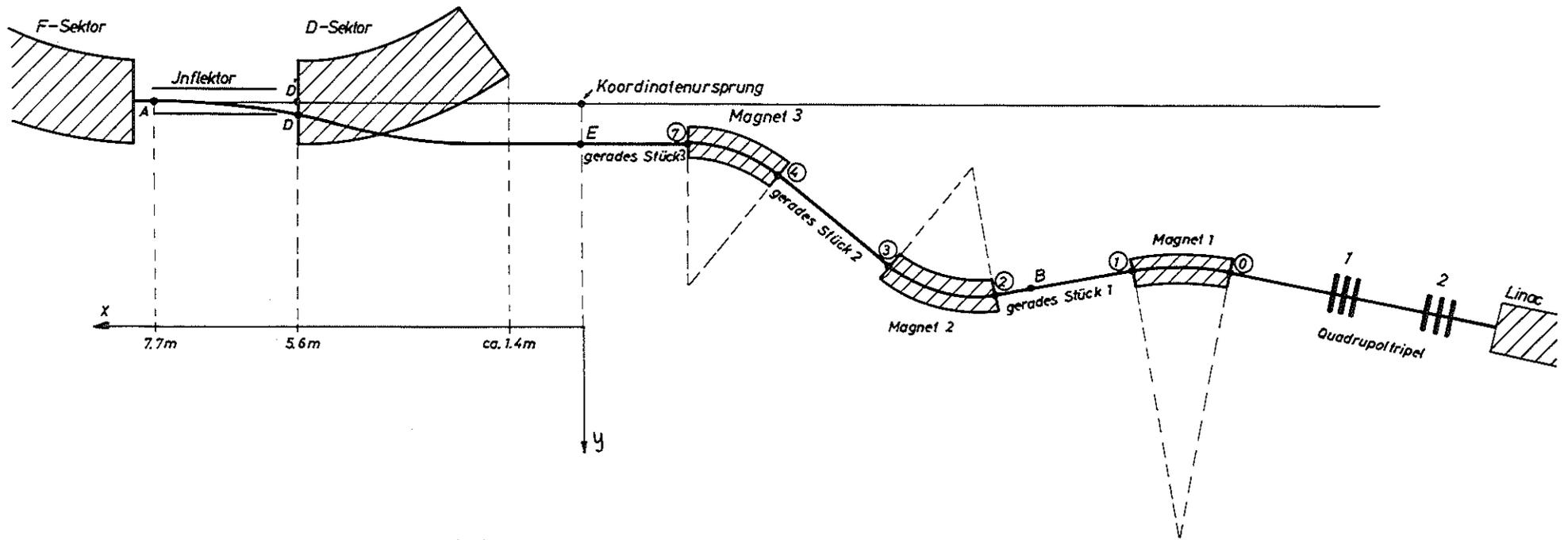


Abb.1
 Injektionsweg schematisch

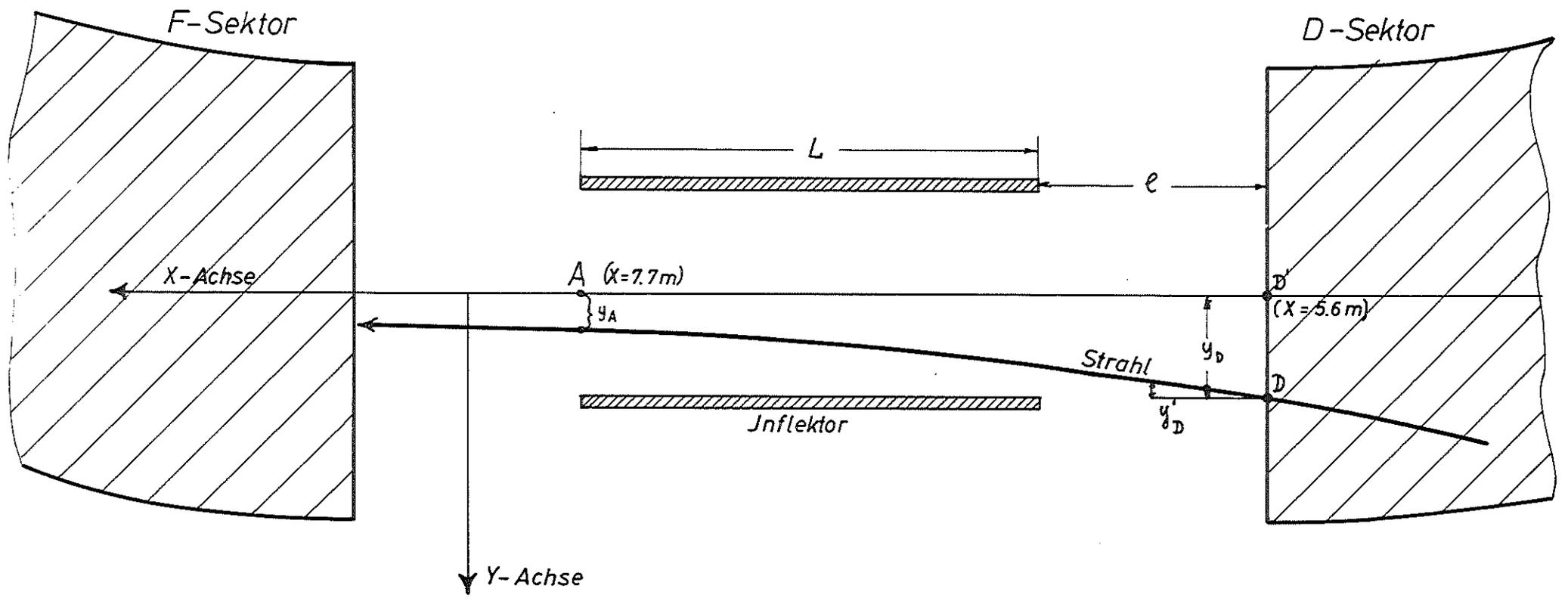


Abb.2

Elektronenbahn im Inflektor
(schematisch)

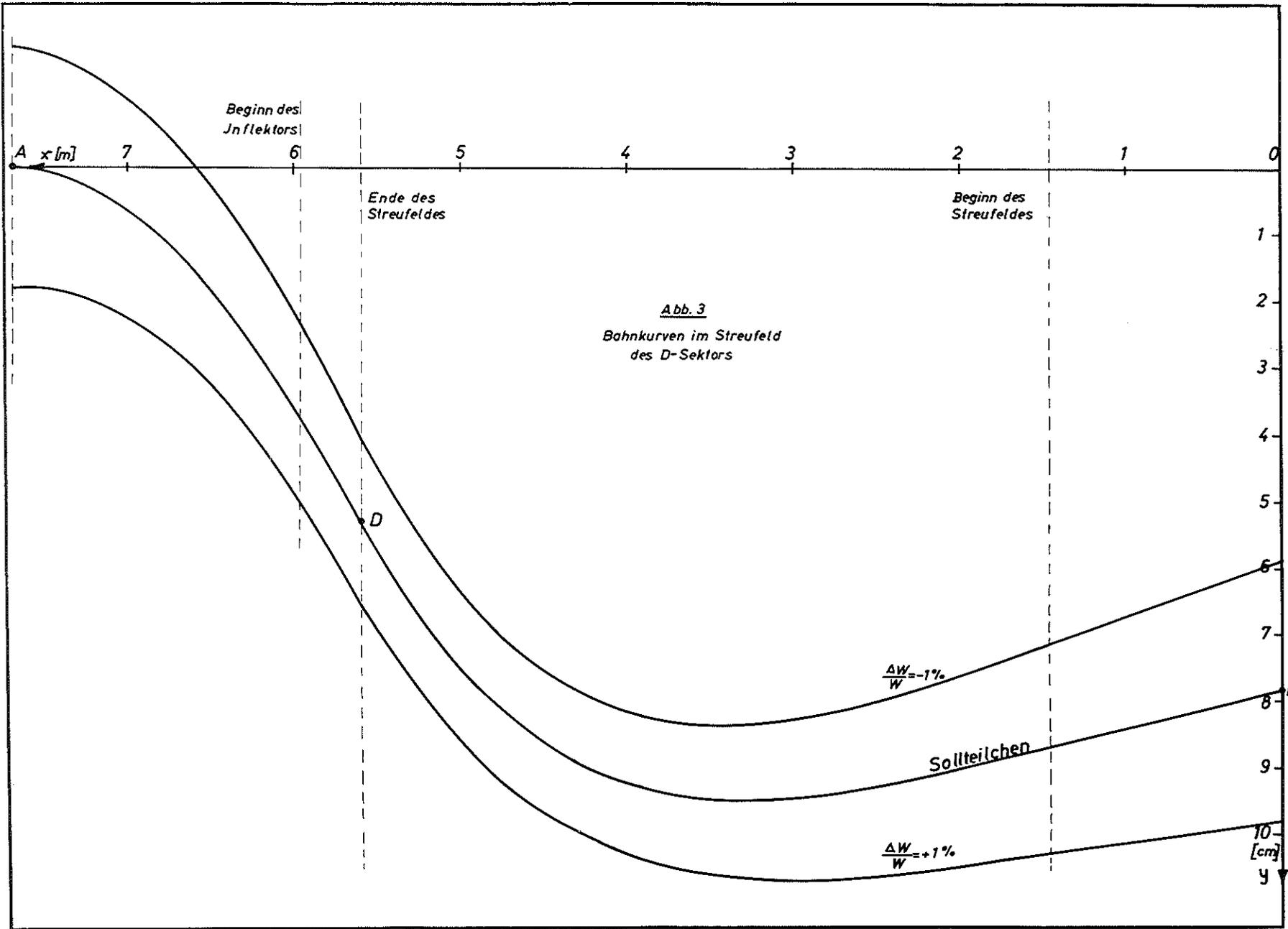


Abb. 3
 Bahnkurven im Streufeld
 des D-Sektors

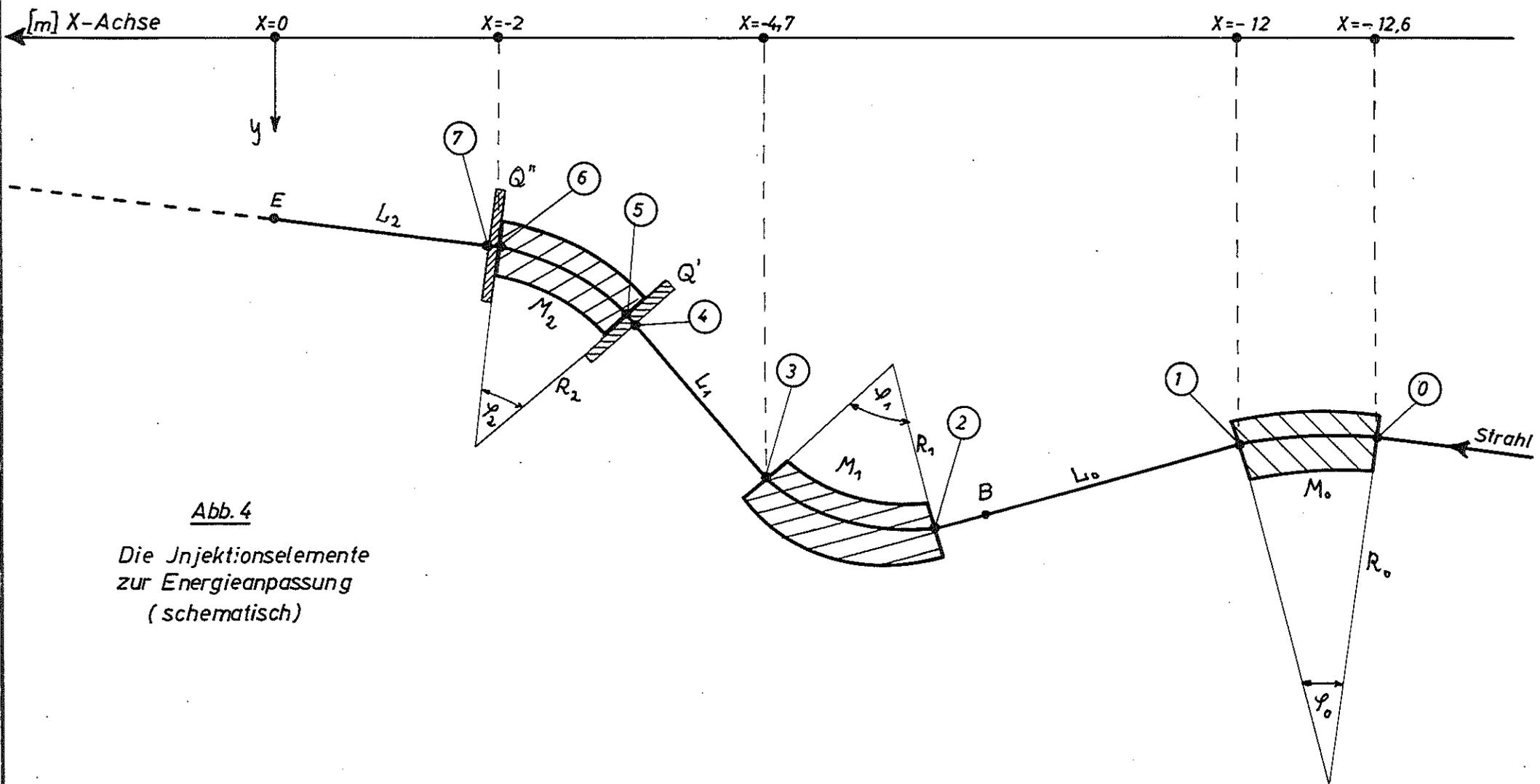


Abb. 4

Die Injektionselemente zur Energieanpassung (schematisch)

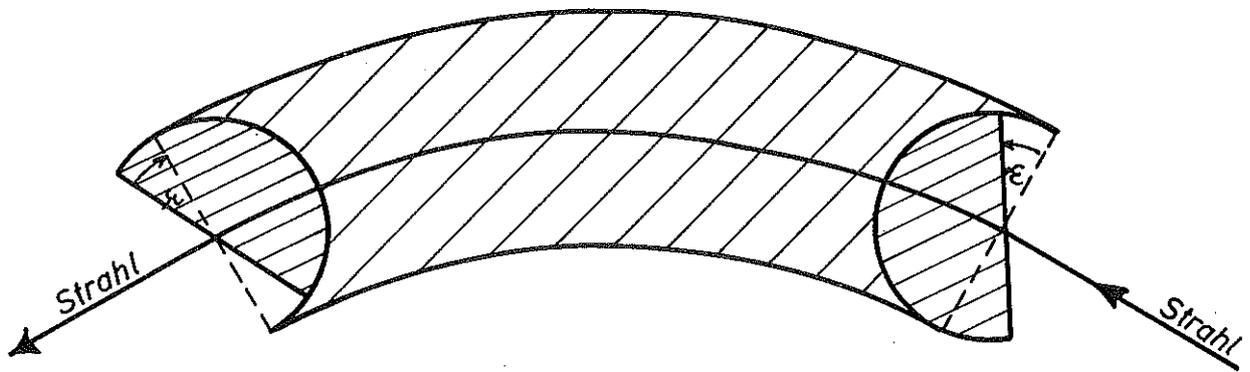


Abb.5

Sektormagnet mit
beweglichen Stirnflächen

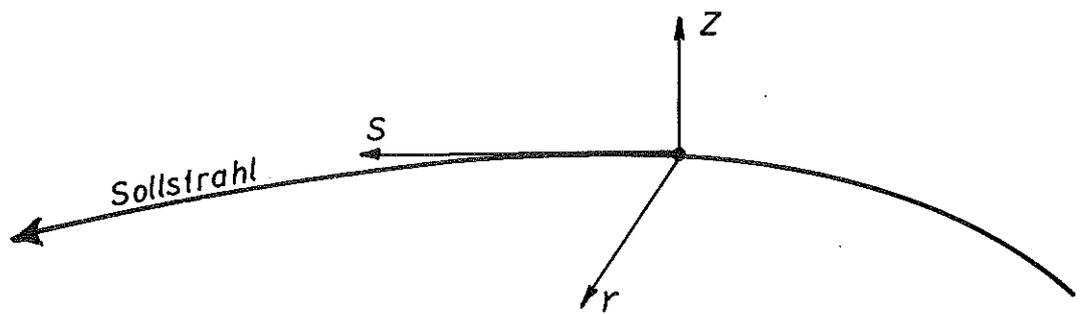


Abb.6

System der bewegten
Bahnkoordinaten

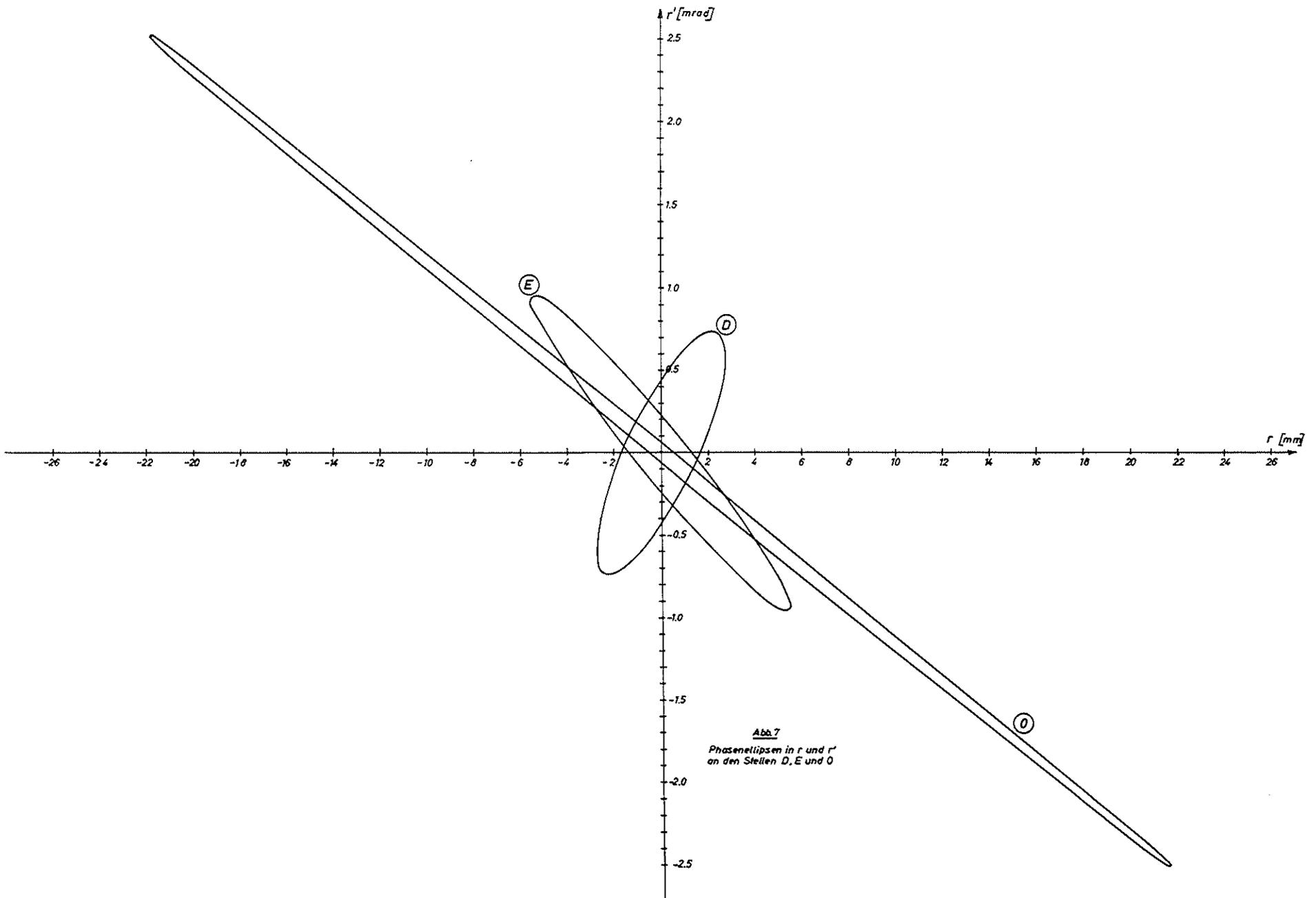


Abb. 7
 Phasenellipsen in r und r'
 an den Stellen D , E und O

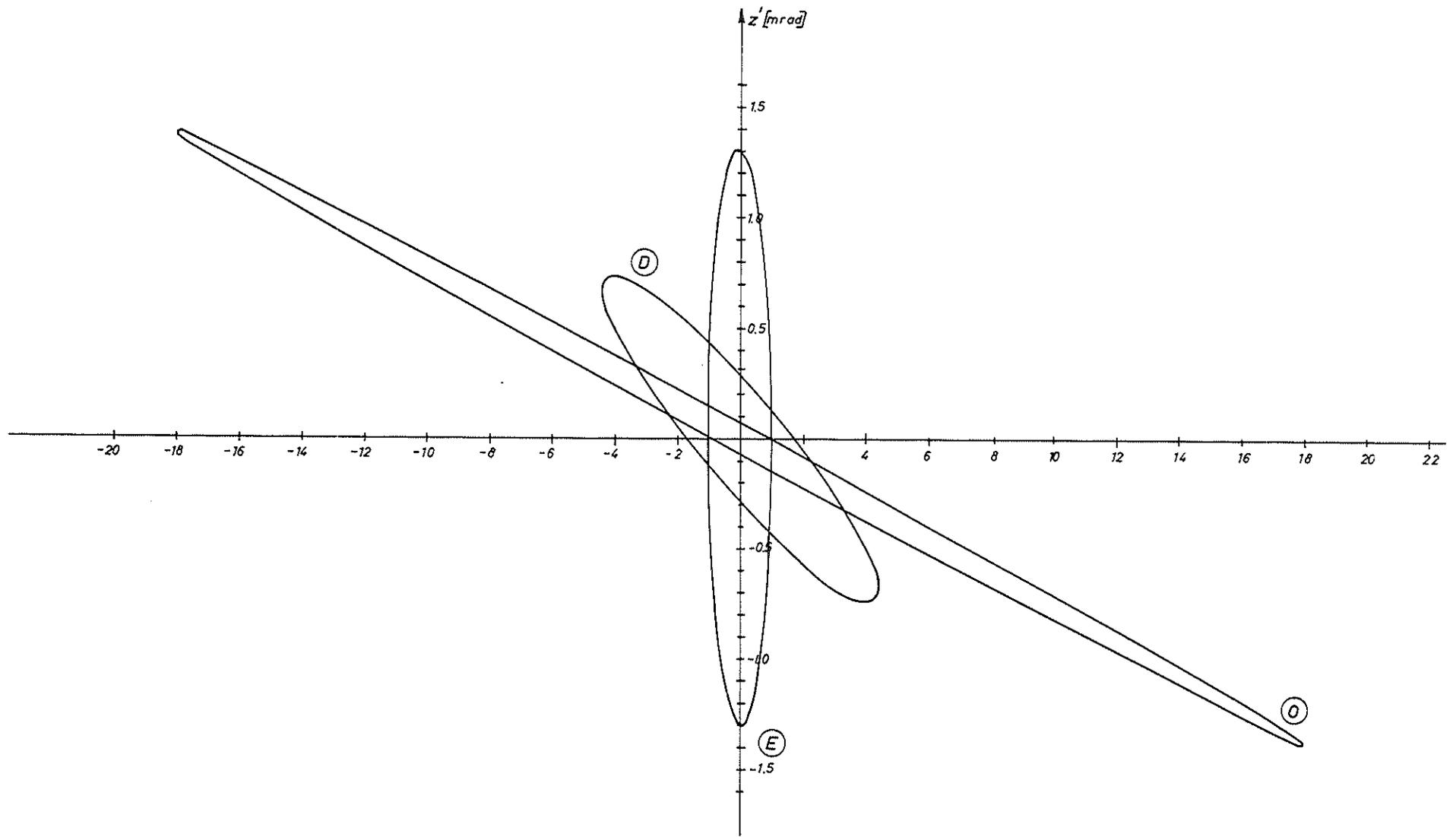


Abb. 8
 Phasenellipsen in z und z'
 an den Stellen D, E und O