

Interner Bericht
DESY R1-70/4
Juni 1970

Untersuchungen zur Strahlführung
und Stabilität der Teilchenbewegung
in Beschleunigern und Storage-Ringen
unter strenger Berücksichtigung
einer Kopplung der Betatronschwingungen

von

Gerhard Ripken

Abstract

The theory of AG-Synchrotrons as developed by Courant, Livingston and Snyder is extended to optical systems with x-z-coupling. The beam and angular envelopes of linear and circular accelerators are determined by considering a 4-dimensional ellipsoid in the $x - x' - z - z'$ - space. This ellipsoid is generated by 4 linearly independent trajectory vectors. In order to obtain the envelopes, the projections of the ellipsoid onto the $x - x'$ -, $z - z'$ - and $x - z$ - planes are considered. The eigenvectors and eigenvalues of the transformation matrix which are necessary for the determination of the periodic envelopes are calculated rigidly. Instabilities due to distortions in the bending field and errors of the focussing fields are investigated. In Appendix III the 4-dimensional envelope formalism is extended to a 5-dimensional ellipsoid in the $x - x' - z - z' - \frac{\Delta p}{p}$ - space for studying the effects of a relative particle momentum deviation $\frac{\Delta p}{p}$.

INHALT:

I.	Einführung	1
II.	Die gekoppelten Betatronschwingungen und ihre Bestimmungsgleichungen	3
	A. Die Differentialgleichungen der Teilchenbewegung	3
	B. Die Hamiltonsche Form der Bewegungsgleichungen	6
	C. Die Lagrange-Invariante	8
III.	Strahlführungstheorie bei fehlender Kopplung	9
	A. Die allgemeinen Enveloppen	9
	B. Die periodischen Enveloppen	13
IV.	Berechnung der Strahlenveloppen für gekoppelte Betatronschwingungen	15
	A. Die allgemeine Methode der Enveloppenberechnung	15
	B. Das vierdimensionale Ellipsoid im $x-x'-z-z'$ -Raum	17
	C. Einführung der verallgemeinerten Amplituden- und Phasenfunktionen	18
	D. Geometrische Deutung der Lagrange-Invarianten	19
	E. Die Projektionen des vierdimensionalen Ellipsoids	21
	1. Projektion auf die $x-x'$ -Ebene	21
	2. Projektion auf die $z-z'$ -Ebene	23
	3. Projektion auf die $x-z'$ -Ebene	23
V.	Die periodischen Strahlenveloppen	25
	A. Die Periodizitätsbedingung	25
	B. Das Eigenwertspektrum der Umlaufsmatrix. Floquet'sches Theorem	28
	C. Die Bedeutung der Amplituden- und Phasenfunktionen für die fokussierenden Eigenschaften des Linsensystems	33
VI.	Einfluß von Linsenfehlern	37
	A. Die zusätzlichen Stabilitätsbedingungen	37
	B. Störungsrechnung	38
	C. Berechnung der Störmatrix S^M und der Verschiebung des Arbeitspunktes	40
VII.	Fehler im magnetischen Führungsfeld und ihre Auswirkung	44
VIII.	Übergang zum Sonderfall der ungekoppelten Betatronschwingungen	48
Anhang I.	Berechnung des mittleren Strahlquerschnittes	51
Anhang II.	Berechnung der Eigenwerte und Eigenvektoren der Umlaufsmatrix	53
Anhang III.	Berechnung der Strahlenveloppen unter Berücksichtigung der Dispersion	58
Literatur		63

I. Einführung

In der vorliegenden Arbeit soll die Teilchenbewegung in Linear- und Ringbeschleunigern sowie Storage-Ringen untersucht werden, und zwar unter strenger Berücksichtigung einer Kopplung der Betatronschwingungen, die bisher lediglich als Störung behandelt worden ist. Wir schließen uns dabei eng an die Arbeit von C o u r a n t und S n y d e r (1) an, indem wir auch für das gekoppelte System Amplituden- und Phasenfunktionen definieren, die wiederum Aufschluß geben über das fokussierende Verhalten des Linsensystems und bei Entkopplung der Betatronschwingungen in die bekannten Funktionen $\beta(s)$ und $\phi(s)$ der linearen (ungekoppelten) Maschinentheorie übergehen.

In Kap.II.) werden zunächst die Bewegungsgleichungen der Teilchen angegeben und die sog. L a g r a n g e sche Invariante eingeführt, die bei der Diskussion der Fokussierungseigenschaften eines Beschleunigers eine wichtige Rolle spielt.

Anschließend stellen wir in Kap.III.) die Ergebnisse der Maschinentheorie für ungekoppelte Betatronschwingungen zusammen, die auf Systeme mit Kopplung erweitert werden sollen.

Um ein anschauliches Bild von der Teilchenbewegung zu gewinnen, betrachten wir in Kap.IV.) die Transformation eines beliebigen vierdimensionalen Ellipsoides im $x - x' - z - z'$ -Raum (x, z = horizontale und vertikale Schwingungsamplitude; x', z' = Steigung der Bahntangenten) durch das Linsensystem und diskutieren an Hand der Projektionen dieses Ellipsoides auf die $x - x'$ -, $z - z'$ - und $x - z$ -Ebene den Verlauf der Strahl- und Winkel-enveloppen, mit deren Hilfe der Platzbedarf des Elektronenstrahls in der Vakuumkammer abgeschätzt werden kann.

Zur Charakterisierung des Bewegungsablaufs einer Teilchengesamtheit, die im $x - x' - z - z'$ -Raum das vierdimensionale Ellipsoid ausfüllt, werden für das gekoppelte Linsensystem charakteristische Funktionen, insbesondere die verallgemeinerten Amplituden- und Phasenfunktionen, definiert.

In Kap.V.) erfolgt die Berechnung der periodischen Strahl- und Winkel-enveloppen auf Grund der Periodizitätsbedingung, daß das Ellipsoid nach einem Umlauf in einem Ringbeschleuniger seine ursprüngliche Gestalt wieder annehmen soll.

Es zeigt sich, daß diese Bedingung stets erfüllt werden kann, wenn das Floquetsche Theorem für Stabilität erfüllt ist, die Eigenwerte der Umlaufmatrix also den Absolutbetrag 1 besitzen.

Den Einfluß von Linsenfehlern auf die Teilchenbewegung und ihre Stabilität behandelt Kap. VI.). Fehler dieser Art haben eine Verschiebung des Eigenwertspektrums der Umlaufmatrix zur Folge, die wir durch eine Störungsrechnung ermitteln. Aus den allgemeinen Eigenschaften der Umlaufmatrix und ihrer Eigenwerte ergibt sich, daß eine Instabilität der Teilchenbewegung auf Grund der Linsenfehler (= Fokussierungsfehler) genau dann eintreten kann, wenn das Spektrum der Umlaufmatrix (nahezu) entartet ist.

In Kap. VII.) berechnen wir die closed-orbit-Verschiebung, die durch Fehler im magnetischen Führungsfeld am Ort der idealen Gleichgewichtsbahn bedingt ist. Es wird gezeigt, daß auch bei Kopplung die von der linearen (ungekoppelten) Maschinentheorie her bekannte resonanzartige Auswanderung der Gleichgewichtsbahn in einem Ringbeschleuniger auftritt, wenn die Eigenwerte der Umlaufmatrix ganzzahlige Werte annehmen.

Schließlich betrachten wir in Kap. VIII.) den Grenzfall der ungekoppelten Betatronschwingungen. Dort wird nachgewiesen, daß man im Falle der Entkopplung die bekannten, von Courant und Snyder angegebenen Formeln der linearen Maschinentheorie zurückgewinnt.

Zusammenfassend kann man somit zeigen, daß die vorliegende Arbeit eine Erweiterung der bisherigen Maschinentheorie unter strenger Berücksichtigung einer Kopplung der Betatronschwingungen darstellt.

II. Die gekoppelten Betatronschwingungen und ihre Bestimmungsgleichungen

A. Die Differentialgleichungen der Teilchenbewegung

Den Ausgangspunkt zur Berechnung der Teilchenbahnen und zur Diskussion der fokussierenden Eigenschaften des Linsensystems eines linearen oder zirkularen Beschleunigers bilden die Bewegungsgleichungen der Teilchen in der Form (2)

$$\begin{cases} X'' + \frac{1-n}{\rho^2} \cdot X = \frac{e}{\rho \cdot c} \frac{\partial B_z}{\partial z} \cdot z - \frac{e}{\rho \cdot c} B_s \cdot z' \\ z'' + \frac{n}{\rho^2} \cdot z = - \frac{e}{\rho \cdot c} \frac{\partial B_x}{\partial x} \cdot X + \frac{e}{\rho \cdot c} B_s \cdot X' \end{cases} \quad (2.1)$$

Dabei bezeichnet n den Feldindex und ρ den Krümmungsradius der Gleichgewichtsbahn, während e und p Ladung und Impuls der umlaufenden Teilchen bedeuten.

Zur Vereinfachung der Schreibweise führen wir folgende Abkürzungen ein:

$$\begin{aligned} N &= \frac{1}{2} \frac{e}{\rho \cdot c} \left(\frac{\partial B_x}{\partial x} - \frac{\partial B_z}{\partial z} \right) ; \\ R &= \frac{1}{2} \frac{e}{\rho \cdot c} \cdot B_s ; \\ K_1 &= \frac{1-n}{\rho^2} ; \\ K_2 &= \frac{n}{\rho^2} . \end{aligned} \quad (2.2)$$

Berücksichtigt man dann noch die Beziehung

$$\operatorname{div} \mathcal{L} = \sigma \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_s}{\partial s} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = \sigma ,$$

so entsteht aus Gl. (2.1)

$$\begin{aligned} X'' + K_1 \cdot X &= - (N + R') \cdot z - 2R \cdot z' ; \\ z'' + K_2 \cdot z &= - (N - R') \cdot X + 2R \cdot X' . \end{aligned} \quad (2.3a)$$

In Matrixschreibweise lautet diese Gleichung

$$y' + O_1 y = 0 \quad (2.3b)$$

mit

$$y = \begin{pmatrix} x \\ x' \\ z \\ z' \end{pmatrix} ; \quad (2.4)$$

$$O_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ \kappa_1 & 0 & (N+R') & 2R \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ (N-R') & -2R & \kappa_2 & 0 \end{pmatrix} , \quad (2.5)$$

und ihre Lösung kann in der Form

$$y(s_1) = \mathcal{M}(s, s_0) y(s_0) \quad (2.6)$$

angegeben werden, wobei $\mathcal{M}(s, s_0)$ die Übertragungsmatrix des Linsensystems bezeichnet.

Gl.(2.1) bzw. (2.3) stellt ein System gekoppelter linearer Differentialgleichungen dar mit den "Kopplungsfunktionen" $N(s)$ und $R(s)$, und zwar liegt sowohl eine Kopplung in x und z vor, bedingt durch die Feldfunktionen

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} \quad \text{und} \quad \frac{\partial B_z}{\partial z} ,$$

als auch in x' und z' , hervorgerufen durch ein Magnetfeld B_s in Richtung der Bezugsbahn. Die von C o u r a n t und S n y d e r untersuchten Differentialgleichungen der ungekoppelten Betatronschwingungen (1) ergeben sich, wenn N und R identisch verschwinden.

Wir bringen einige Beispiele für Linsensysteme, deren Fokussierung durch diese gekoppelten Differentialgleichungen beschrieben werden:

1. Die um 45° gedrehte Quadrupol-Linse mit den Bestimmungsgleichungen

$$\begin{cases} X'' + k \cdot z = 0, \\ z'' + k \cdot X = 0, \end{cases} \quad (2.7)$$

für die

$$K_1 = K_2 = 0, \quad R = 0,$$

$$N(s) = k = \text{konst}$$

gilt.

2. Die spiralförmige Quadrupol-Linse mit den Linsenfunktionen

$$K_1(s) = -k \cdot \cos 2as,$$

$$K_2(s) = +k \cdot \cos 2as, \quad (k = \text{konst.})$$

und dem Kopplungsglied $N(s) = k \cdot \sin 2as$:

$$X'' = k \cdot \{ X \cdot \cos 2as - z \cdot \sin 2as \};$$

$$z'' = -k \cdot \{ X \cdot \sin 2as + z \cdot \cos 2as \}. \quad (2.8)$$

3. Das Solenoid (in linearer Näherung) mit

$$K_1 = K_2 = 0; \quad N = 0$$

$$R = \text{konst.}$$

(Kopplung in x' und z' durch des homogene Feld B_s ; das Glied R' in Gl.(2.3), welches eine Kopplung in x' und z' ergibt, erfaßt den Einfluß des "Streifeldes").

4. Ringbeschleuniger und Speicherringe, deren Linsenfunktionen K_1 , K_2 , N und R die Periodizitätsbedingungen

$$K_1(s + C) = K_1(s)$$

$$K_2(s + C) = K_2(s)$$

$$N(s + C) = N(s)$$

$$R(s + C) = R(s)$$

(C = Umfang der Sollbahn)

erfüllen. Die Kopplungsglieder $N(s)$ und $R(s)$ dieser Linsensysteme sind bedingt durch

- a) Aufstellungsfehler der Magnete;
- b) Feldfehler;
- c) Magnetfeld der Erde;
- d) Einbau von Quadrupol-Linsen, die um 45° gedreht sind;
- e) Einbau eines Solenoids (Beispiel: Detektorsolenoid im Speicherring).

Ein Beschleuniger mit Kopplung ist z.B. die S i g u r g e i r s s o n - Maschine (4), für die

$$N(s) \neq 0, \quad R(s) \equiv 0$$

gilt.

B. Die Hamiltonsche Form der Bewegungsgleichungen

Zur Untersuchung der fokussierenden Eigenschaften eines Linsensystems ist es von Bedeutung, daß sich die Gln.(2.3) in kanonischer Form schreiben lassen mit der Hamiltonfunktion (1)

$$H = \frac{1}{2} \left\{ K_1 \cdot x^2 + K_2 \cdot z^2 + 2N \cdot xz + (p_x - Rx)^2 + (p_z + Rx)^2 \right\}; \quad (2.9)$$

(p_x, p_z = verallgemeinerte Impulse).

Die zugehörigen Hamiltonschen Gleichungen lauten

$$\frac{dX}{ds} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = p_x - R z ;$$

$$\frac{dp_x}{ds} = - \frac{\partial H}{\partial X} = - \kappa_1 X - N z - (p_x + R X) \cdot R ; \quad (2.10)$$

$$\frac{dz}{ds} = \frac{\partial H}{\partial p_z} = p_z + R X ;$$

$$\frac{dp_z}{ds} = - \frac{\partial H}{\partial z} = - \kappa_2 z - N X + (p_z - R z) \cdot R$$

oder in Matrixschreibweise

$$\dot{u}(s) = - T \mathcal{L}(s) u(s) \quad (2.11)$$

mit

$$u = \begin{pmatrix} X \\ p_x \\ z \\ p_z \end{pmatrix} ; \quad (2.12a)$$

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} (\kappa_1 + R^2) & 0 & N & R \\ 0 & 1 & -R & 0 \\ N & -R & (\kappa_2 + R^2) & 0 \\ R & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \quad (2.12b)$$

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.12c)$$

Eliminiert man in Gl.(10) die Größen p_x und p_z , so erhält man die Gl.(2.3) zurück.

C. Die Lagrange-Invariante

Die Hamiltonschen Gleichungen (10) und damit auch die Bewegungsgleichungen (2.3) bzw. (2.1) besitzen eine quadratische Invariante ((1), (2)):

$$W = \tilde{w}_2(s) \tilde{T} w_1(s) ;$$

$$(w_1, w_2 = \text{Lösungsvektoren der Gl.(10) bzw. (11)}) .$$

Man beweist leicht, daß W eine Konstante der Bewegung darstellt, indem man die Ableitung nach s bildet:

$$\begin{aligned} \frac{dW}{ds} &= (w_2')^{\sim} \tilde{T} w_1 + \tilde{w}_2 \tilde{T} w_1' \\ &= (-\tilde{T} L w_2)^{\sim} \tilde{T} w_1 + \tilde{w}_2 \tilde{T} (-\tilde{T} L w_1) \quad \text{nach Gl. (11)} \\ &= -\tilde{w}_2 \tilde{L} \tilde{T} \tilde{T} w_1 - \tilde{w}_2 \tilde{T}^2 L w_1 \\ &= 0, \quad \text{weil } \tilde{L} = L, \tilde{T} = -T, T^2 = 1 . \end{aligned}$$

Da W' verschwindet, muß

$$W = \tilde{w}_2 \tilde{T} w_1 = \text{konst.} \quad (2.13)$$

gelten.

Mit dem in Gl.(2.4) eingeführten Vektor

$$\eta = \begin{pmatrix} X \\ X' \\ z \\ z' \end{pmatrix}$$

kann die Lagrange-Invariante (2.13) auch in der Form

$$W(\eta_1, \eta_2) = \tilde{\eta}_2 \tilde{R} \tilde{T} R \eta_1 \quad (2.14)$$

mit

$$R(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & R & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -R & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

geschrieben werden, da nach Gl.(10) für x' and z' die Beziehungen

$$\begin{aligned} x' &= p_x - R z \\ z' &= p_z + R x \end{aligned}$$

gelten und somit zwischen \mathcal{H} und \mathcal{H}_0 der Zusammenhang

$$\mathcal{H} = R \mathcal{H}_0 \quad (2.16)$$

besteht.

Unsere weitere Aufgabe besteht nun darin, in Anschluß an die von Courant und Snyder entwickelte Maschinentheorie für Beschleuniger ohne Kopplung an Hand der Bewegungsgleichungen (2.3) die Strahlführung für allgemeinere Maschinen zu untersuchen, in denen eine Kopplung der Betatronsoschwingungen auftritt. Bei diesen Betrachtungen wird die Lagrange - Invariante eine wichtige Rolle spielen.

III. Strahlführungstheorie bei fehlender Kopplung

A. Die allgemeinen Enveloppen

Zur Vorbereitung behandeln wir zunächst die Theorie der Strahloptik bei fehlender Kopplung (5), und zwar in einer Form, die für die Erweiterung auf den Fall gekoppelter Betatronsoschwingungen geeignet ist.

Bekanntlich ist es in der Strahlführungstheorie für "ungekoppelte" Maschinen üblich, zur Veranschaulichung der fokussierenden Eigenschaften des Linsensystems den Strahl an der Einschußstelle näherungsweise durch eine Phasenellipse in der $x - x'$ - bzw. $z - z'$ - Ebene zu beschreiben, wobei x die Amplitude der horizontalen, z die Amplitude der vertikalen Schwingung angibt und x' bzw. z' die Steigung der Tangente bedeutet. Diese Annahme einer ellipsenförmigen Begrenzungskurve bringt den Vorteil mit sich, daß die am Startpunkt $s = s_0$ vorgegebene Phasenellipse während der Bewegung der Teilchen zwar fortlaufend ihre Form and Lage in der $x - x'$ - bzw. $z - z'$ - Phasenebene ändert, jedoch auf Grund der Linearität der Bewegungsgleichung ihre geometrische Gestalt als Ellipse beibehält.

Für die Phasenellipse am Anfangspunkt $s = s_0$ können wir nun schreiben

$$\eta = \sqrt{\varepsilon} \left\{ \eta_1(s_0) \cdot \cos \delta + \eta_2(s_0) \cdot \sin \delta \right\}; \quad (3.1)$$

$$(0 \leq \delta < 2\pi);$$

$$\eta_1 = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_1' \end{pmatrix}; \quad \eta_2 = \begin{pmatrix} Y_2 \\ Y_2' \end{pmatrix}; \quad Y_i = X_i \text{ oder } Z_i.$$

Diese Ellipse, welche wir uns mit Teilchen ausgefüllt denken, wird aufgespannt von den beiden linear unabhängigen Phasenvektoren $\eta_1(s_0)$ und $\eta_2(s_0)$, die so normiert sein sollen, daß die "Wronski-Determinante" gleich 1 wird:

$$\tilde{\eta}_2 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \eta_1 = 1. \quad (3.2)$$

Dann nimmt der Flächeninhalt der Ellipse den Wert $\pi \varepsilon$ an.

Während der Teilchenbewegung geht jetzt die Ellipse (3.1) über in eine andere Ellipse der Form

$$\eta = \sqrt{\varepsilon} \left\{ \eta_1(s) \cdot \cos \delta + \eta_2(s) \cdot \sin \delta \right\} \quad (3.3a)$$

mit

$$\begin{aligned} \eta_1(s) &= \mathcal{M}(s, s_0) \eta_1(s_0); \\ \eta_2(s) &= \mathcal{M}(s, s_0) \eta_2(s_0), \end{aligned} \quad (3.3b)$$

wobei nach dem Liouvilleschen Satz der Ellipseninhalte konstant bleibt (d.h. die Normierung (3.2) bleibt bestehen).

Die "erzeugenden Vektoren" der Ellipse (3.3a) stellen nach Gl. (3.3b) zwei spezielle Teilchenbahnen dar. Diese beiden Teilchenbahnen bestimmen somit bereits den gesamten Bewegungsablauf der durch die Ellipse (3.1) erfaßten Teilchengesamtheit.

Um den Platzbedarf des Elektronenstrahls in der Vakuumkammer abzuschätzen und die fokussierenden Eigenschaften des Linsensystems zu untersuchen, interessiert man sich nun für die Projektionen der Phasenellipse auf die

y- und y'-Achse, die die größtmögliche Schwingungsamplitude und die maximale Steigung der Bahntangente an einer festen Stelle s angeben. Zu dem Zweck formen wir Gl.(3.3a) um, indem wir die sog. Amplituden- und Phasenfunktion β und ϕ einführen:

$$\beta = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 ; \quad (3.4)$$

$$\gamma_1 = \sqrt{\beta} \cos \phi ; \quad \gamma_2 = \sqrt{\beta} \sin \phi \quad (3.5)$$

Weiterhin benötigen wir noch die Funktionen

$$\gamma = \gamma_1'^2 + \gamma_2'^2 ; \quad (3.6)$$

$$\alpha = -\frac{1}{2} \beta' = -(\gamma_1 \gamma_1' + \gamma_2 \gamma_2') . \quad (3.7)$$

Dann entsteht aus (3.3a)

$$\eta = \begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\epsilon} \sqrt{\beta} \cos(\phi - \delta) \\ \sqrt{\epsilon} \sqrt{\gamma} \cos(\phi - \tilde{\delta}) \end{pmatrix} . \quad (3.8)$$

Mit Gl.(3.5) geht die Normierungsbedingung (3.2) über in

$$\beta \phi' = 1 ; \quad \phi = \int \frac{ds}{\beta} . \quad (3.9)$$

Ferner folgt aus Gl.(3.8) unter Berücksichtigung von (3.7), wenn die erste Komponente von η nach s differenziert und mit der zweiten Komponente verglichen wird, daß zwischen den Funktionen α , β und γ der Zusammenhang

$$\gamma = \frac{1 + \alpha^2}{\beta} \quad (3.10)$$

besteht.

Aus Gl.(3.8) ist jetzt ersichtlich, daß die maximale Teilchenauslenkung gegeben ist durch

$$E = \sqrt{\epsilon} \sqrt{\beta} = \sqrt{\epsilon} \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2} , \quad (3.11)$$

die für $\delta = \phi$ angenommen wird. Für die zugehörige y' -Komponente findet man nach (3.3a)

$$\sqrt{\epsilon} \frac{\gamma_1 \gamma_1' + \gamma_2 \gamma_2'}{\sqrt{\gamma_1'^2 + \gamma_2'^2}} = -\sqrt{\epsilon} \frac{\alpha}{\sqrt{\beta}} \equiv E' \quad (3.12)$$

Entsprechend bekommen wir für die maximale Steigung

$$A = \sqrt{\epsilon} \sqrt{\gamma} = \sqrt{\epsilon} \sqrt{\gamma_1'^2 + \gamma_2'^2} \quad (3.13)$$

Mit den Enveloppenfunktionen E , E' und A kann die Phasenellipse (3.3a) auch in der Form

$$A^2 \cdot \gamma^2 - 2EE' \cdot \gamma \gamma' + E'^2 \cdot \gamma'^2 = \epsilon^2 \quad (3.14)$$

mit $\epsilon = E \sqrt{A^2 - E'^2}$

geschrieben werden. Dabei gibt E die Strahlenveloppe, E' ihre Steigung und A die Winkelenveloppe an (siehe Abb.1). Diese Enveloppenfunktionen sowie die Funktionen α , β , γ , ϕ errechnen sich nach Gl.(3,4,5,11,12,13) in einfacher Weise aus den Komponenten der beiden "erzeugenden Teilchenbahnen" $\eta_1(s)$ und $\eta_2(s)$.

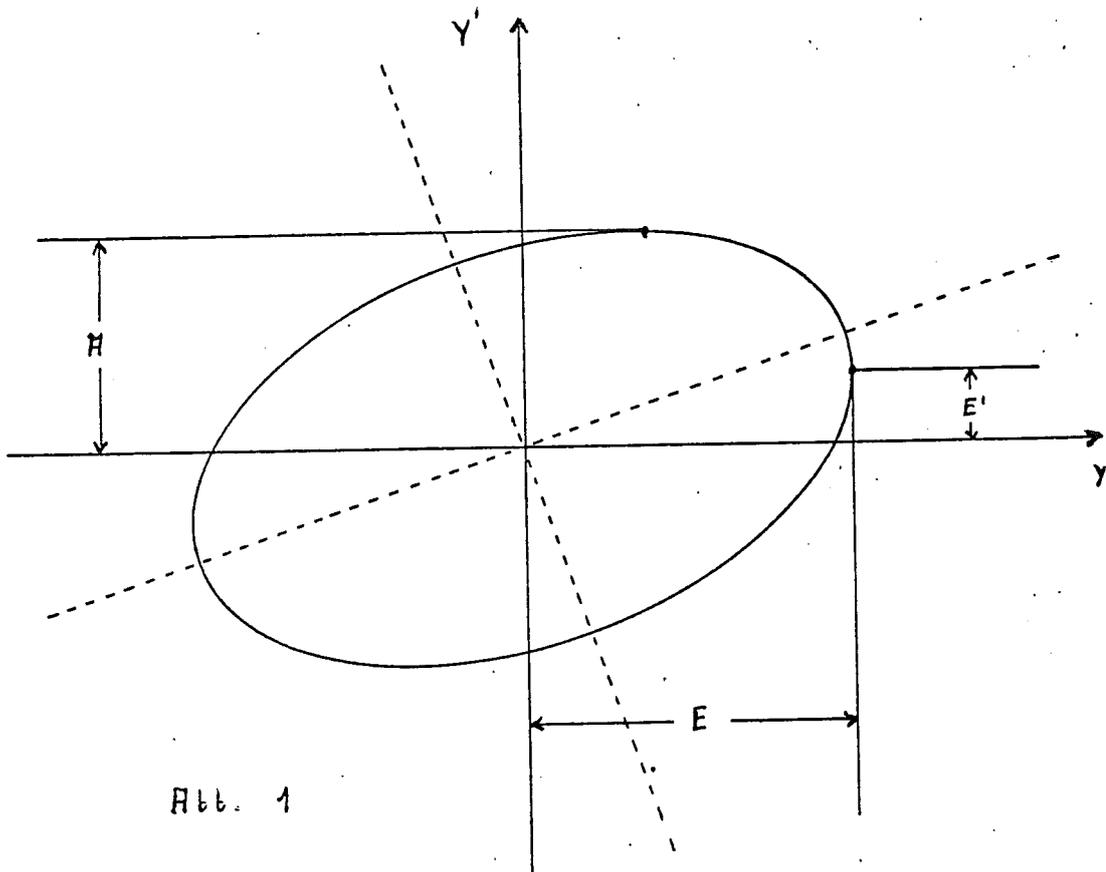


Abb. 1

B. Die periodischen Enveloppen

Zur Bestimmung der Teilchenbahnen $\eta_1(s)$ und $\eta_2(s)$ müssen nun die Anfangsvektoren $\eta_1(s_0)$ und $\eta_2(s_0)$, die die Phasenellipse am Startpunkt $s = s_0$ festlegen, bekannt sein. Bei einfachen Transportsystemen richtet sich die Wahl dieser Vektoren nach den Einschubbedingungen des Strahls. Dagegen hat man bei Ringbeschleunigern zu beachten, daß die bei $s = s_0$ vorgegebene Ellipse nach einem Umlauf in sich übergeht. Schreiben wir die Ellipse (3.1) in der Form

$$\eta = \frac{\sqrt{\varepsilon'}}{2} \left\{ (\eta_1 - i\eta_2) \cdot e^{+i\delta} + (\eta_1 + i\eta_2) \cdot e^{-i\delta} \right\} \quad (3.15)$$

mit der Normierungsbedingung

$$(\eta_1 - i\eta_2)^+ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} (\eta_1 - i\eta_2) = 2i, \quad (3.16)$$

so besagt diese Periodizitätsbedingung, daß der komplexe Vektor

$$\eta_1(s_0) - i\eta_2(s_0)$$

die Eigenwertgleichung

$$\mathcal{M}(s_0 + C, s_0) \{ \eta_1(s_0) - i\eta_2(s_0) \} = e^{-i \cdot 2\pi Q_y} \cdot \{ \eta_1(s_0) - i\eta_2(s_0) \} \quad (3.17)$$

mit dem Eigenwert

$$\left| e^{-i \cdot 2\pi Q_y} \right| = 1, \text{ d. h. } Q_y \text{ reell} \quad (3.18)$$

erfüllen muß. In der Tat ergibt sich dann

$$\mathcal{M}(s_0 + C, s_0) \eta = \frac{\sqrt{\varepsilon'}}{2} \left\{ (\eta_1 - i\eta_2)_{s=s_0} \cdot e^{+i(\delta - 2\pi Q_y)} + \text{Konj. Kompl.} \right\},$$

so daß lediglich der Parameter δ durch die Größe $(\delta - 2\pi Q_y)$ ersetzt wird, die wiederum das ganze Periodizitätsintervall von 0 bis 2π durchläuft.

Um die periodischen Enveloppen zu berechnen, braucht man somit lediglich die Eigenvektoren

$$\eta_1 = \eta_2 - i \eta_3$$

$$\eta_2 = \eta_1 + i \eta_3$$

der Umlaufmatrix $\mathcal{M}(s_0 + C, s_0)$ aufzusuchen, die nach Gl.(3.16) zu normieren sind, wobei man zu prüfen hat, ob die Forderung (3.18) tatsächlich erfüllt ist.

Gl.(3.18) selbst besagt, daß die Periodizitätsbedingung der Strahlenveloppen nur befriedigt werden kann, wenn die Eigenwerte λ_1 und λ_2 der Matrix $\mathcal{M}(s_0 + C, s_0)$ auf dem Einheitskreis der komplexen Ebene liegen.

Nun besitzt das Eigenwertspektrum der Umlaufmatrix allgemein folgende Eigenschaften (3):

$$(1) \quad \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 1;$$

(2) mit λ ist auch λ^* Eigenwert (da \mathcal{M} reell ist).

Daraus folgt aber, daß der Fall (3.18) tatsächlich auftreten kann, also nicht mit der Bewegungsgleichung der Teilchen im Widerspruch steht.

Daneben gibt es jedoch noch die Möglichkeit, daß

$$|\lambda_1| \neq 1, \quad |\lambda_2| \neq 1 \quad (3.19)$$

wird. Dann müssen λ_1 und λ_2 auf der reellen Achse liegen, und zwar ein Eigenwert innerhalb, der andere außerhalb des Einheitskreises.

Bedenken wir jetzt, daß die Teilchenbewegung nach dem Floquetschen Theorem in der allgemeinen Form

$$\eta_1(s) = A_1 \cdot \tilde{u}_1(s) \cdot e^{-i \cdot 2\pi Q_y \frac{s}{C}} + A_2 \cdot \tilde{u}_2(s) \cdot e^{+i \cdot 2\pi Q_y \frac{s}{C}}$$

mit

$$\tilde{u}_i(s + C) = \lambda_i \tilde{u}_i(s) \quad ; \quad (i = 1, 2) \quad ;$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = e^{-i \cdot 2\pi Q_y} \\ \lambda_2 = e^{+i \cdot 2\pi Q_y} \end{cases}$$

dargestellt werden kann (Q_y gibt also die Zahl der Betatronwellen pro Umfang an), so erkennt man, daß bei Gültigkeit der Bedingung (3.18) die Schwingungsamplitude beschränkt bleibt, während sie für den Fall (3.19) exponentiell anwachsen muß. Somit stellt Gl.(3.18) ein notwendiges Stabilitätskriterium dar.

Für den einwandfreien Betrieb des Beschleunigers ist die Bedingung (3.18) allein allerdings nicht ausreichend. Weitere Einschränkungen ergeben sich bekanntlich, wenn der Einfluß von Fokussierungsfehlern und Fehlern im Führungsfeld berücksichtigt wird, und zwar gilt (1):

Fokussierungsfehler werden gefährlich, wenn die "Schwingungszahl" Q_y ganz- oder halbzahlige Werte annimmt.

Bei ganzzahligen Q_y -Werten tritt außerdem unter der Einwirkung von Fehlern im magnetischen Führungsfeld eine resonanzartige Auswanderung aller Teilchenbahnen auf.

Mit der Berechnung der Strahl- und Winkelveloppen und der Untersuchung des Einflusses von Fokussierungs- und Feldfehlern auf die Stabilität des Strahls ist die Teilchenbewegung in Beschleunigern und Storage-Ringen bei fehlender Kopplung bereits vollständig beschrieben. Unser weiteres Ziel muß nunmehr sein, diese Überlegungen auf den Fall gekoppelter Betatronschwingungen zu übertragen.

IV. Berechnung der Strahlenveloppen für gekoppelte Betatronschwingungen

A. Die allgemeine Methode der Enveloppenberechnung

Wir beginnen unsere Untersuchungen zur Teilchenbewegung in Beschleunigern und Storage-Ringen mit der Berechnung der allgemeinen Strahlenveloppen für gekoppelte Betatronschwingungen.

In Falle einer Kopplung ist es jetzt nicht mehr möglich, die in der $x - x' - z - z'$ -Ebene vorgegebenen Ellipsen unabhängig voneinander durch das Linsensystem zu transformieren, weil sich die Betatronschwingungen in der x - und z -Richtung gegenseitig beeinflussen. Will man daher die in Kap.III) verwendete Methode der Enveloppenberechnung auf gekoppelte Betatronschwingungen übertragen, so muß der Bewegungsablauf im gesamten vierdimensionalen $x - x' - z - z'$ -Raum beschrieben werden. Zu dem Zweck hat

man wiederum zu untersuchen, wie ein geeignetes, im $x - x' - z - z'$ - Raum abgegrenztes Gebiet, das wir uns mit Teilchen besetzt denken, sich während der Teilchenbewegung verformt, wobei folgende Bedingungen erfüllt sein müssen:

- (I) Der im vierdimensionalen $x - x' - z - z'$ - Raum vorgegebene Bereich darf zwar während der Bewegung der Teilchen seine Form und Lage ändern, muß jedoch seine geometrische Gestalt beibehalten, damit der Bewegungsablauf an jeder Stelle s der Bezugsbahn durch eine einheitliche Parameterschar beschrieben werden kann.
- (II) Es muß möglich sein, den Bereich so zu wählen, daß er nach einem Umlauf seine ursprüngliche Gestalt wieder annimmt. Diese Periodizitätsbedingung ist bei Zirkularbeschleunigern und Storage-Ringen anzuwenden.
- (III) Im Fall der ungekoppelten Betatronschwingungen soll das allgemeine Verfahren der Enveloppenberechnung übergehen in die schon besprochene Methode, die in der Transformation der Phasenellipsen besteht.

Hat man einen solchen Bereich im $x - x' - z - z'$ - Raum gefunden, so kann man wiederum Projektionen dieses Gebietes auf verschiedene Ebenen betrachten, insbesondere auf die $x - x'$ -, $z - z'$ - und $x - z$ - Ebene. Diese Projektionen können dazu dienen, den Bewegungsablauf der durch das vierdimensionale Gebiet erfaßten Teilchengesamtheit zu charakterisieren, und zwar geben die Projektionen auf die $x - x'$ - und $z - z'$ - Ebene Aufschluß über die Fokussierungskräfte des Linsensystems, während die Projektion auf die $x - z$ - Ebene unmittelbar den Strahlquerschnitt liefert und auf diese Weise wieder den Platzbedarf des Elektronenstrahls in der Vakuumkammer abzuschätzen gestattet. Als Strahlenveloppen für gekoppelte Systeme können dann die Projektionen des Ellipsoids auf die x - bzw. z -Achse oder allgemeiner auf eine beliebige Gerade durch den Nullpunkt der $x-z$ -Ebene angesehen werden, die die Ausdehnung des Strahls in der betreffenden Richtung angeben. Diese Enveloppen stellen die Einhüllende aller Teilchenbahnen dar, die durch den vierdimensionalen Bereich im $x - x' - z - z'$ - Raum erfaßt werden.

B. Das vierdimensionale Ellipsoid im $x - x' - z - z'$ - Raum

Es zeigt sich nun, daß alle Forderungen (I)-(III) erfüllt werden können, wenn man am Startpunkt $s = s_0$ als Bereich im $x - x' - z - z'$ - Raum ein vierdimensionales Ellipsoid vorgibt, das wir in der Form

$$\eta = \cos \chi \cdot \sqrt{\epsilon_I} \{ \eta_1(s_0) \cos \delta_I + \eta_2(s_0) \sin \delta_I \} + \\ + \sin \chi \cdot \sqrt{\epsilon_{II}} \{ \eta_3(s_0) \cos \delta_{II} + \eta_4(s_0) \sin \delta_{II} \} \quad (4.1)$$

schreiben.

Dieses Ellipsoid wird von den vier linear unabhängigen Vektoren

$$\eta_k = \begin{pmatrix} x_k \\ x_k' \\ z_k \\ z_k' \end{pmatrix} \quad (k = 1, 2, 3, 4), \quad (4.2)$$

aufgespannt, die paarweise normiert sein sollen gemäß

$$\begin{cases} \tilde{\eta}_2 \tilde{Q} \tilde{\sigma} \tilde{Q} \eta_1 = 1, \\ \tilde{\eta}_4 \tilde{Q} \tilde{\sigma} \tilde{Q} \eta_3 = 1, \end{cases} \quad (4.3)$$

im übrigen jedoch zunächst wieder beliebig gewählt werden können.

Während der Bewegung der Teilchen geht jetzt das vierdimensionale Ellipsoid (4.1) über in

$$\eta = \cos \chi \cdot \sqrt{\epsilon_I} \{ \eta_1(s) \cos \delta_I + \eta_2(s) \sin \delta_I \} + \\ + \sin \chi \cdot \sqrt{\epsilon_{II}} \{ \eta_3(s) \cos \delta_{II} + \eta_4(s) \sin \delta_{II} \} \quad (4.4)$$

mit

$$\eta_k(s) = \mathcal{M}(s, s_0) \eta_k(s_0), \quad (4.5) \\ (k = 1, 2, 3, 4),$$

behält also seine geometrische Gestalt als Ellipsoid bei. Damit ist bereits die Gültigkeit der Bedingung (I) nachgewiesen. Daß mit dem Ansatz (4.1) auch die Forderung (II) und (III) erfüllt werden kann, soll in Kap.V.) und VIII.) gezeigt werden.

Die "erzeugenden Vektoren" $\eta_k(s)$, die das Ellipsoid an der Stelle s bestimmen, stellen nach Gl.(4.5) wiederum spezielle Teilchenbahnen dar

zu den Anfangswerten

$$\eta_A = \eta_A(s_0) \quad \text{für } s = s_0$$

Somit wird der gesamte Bewegungsablauf der durch das Ellipsoid erfaßten Teilchengesamtheit nunmehr durch vier Teilchenbahnen festgelegt. Insbesondere müssen sich daher die Strahlenveloppen aus den Komponenten der Vektoren (4.5) berechnen lassen.

Da Gl.(4.3) die Form der Lagrange - Invarianten (2.14) hat, bleibt die durch (4.3) festgesetzte Normierung der Vektoren η_A während der Teilchenbewegung erhalten:

$$\begin{cases} \tilde{\eta}_2(s) \tilde{R}^T R \eta_1(s) = 1, \\ \tilde{\eta}_4(s) \tilde{R}^T R \eta_3(s) = 1. \end{cases} \quad (4.6)$$

Diese Tatsache wird sich bei der Untersuchung der fokussierenden Eigenschaften eines ringförmigen Linsensystems als bedeutsam erweisen.

C. Einführung der verallgemeinerten Amplituden- und Phasenfunktionen

Zur Berechnung der Strahlenveloppen ist es nun zweckmäßig, analog zu Gl.(3.4) und (3.5) des ungekoppelten Falls verallgemeinerte Amplituden- und Phasenfunktionen

$$\beta_{Ix} = X_1^2 + X_2^2; \quad \beta_{IIX} = X_3^2 + X_4^2 \quad (4.7a)$$

$$\begin{aligned} X_1 &= \sqrt{\beta_{Ix}} \cos \phi_{Ix}; & X_2 &= \sqrt{\beta_{Ix}} \sin \phi_{Ix}; \\ X_3 &= \sqrt{\beta_{IIX}} \cos \phi_{IIX}; & X_4 &= \sqrt{\beta_{IIX}} \sin \phi_{IIX} \end{aligned} \quad (4.8a)$$

und

$$\beta_{Iz} = z_1^2 + z_2^2; \quad \beta_{IIz} = z_3^2 + z_4^2; \quad (4.7b)$$

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt{\beta_{Iz}} \cos \phi_{Iz}; & z_2 &= \sqrt{\beta_{Iz}} \sin \phi_{Iz}; \\ z_3 &= \sqrt{\beta_{IIz}} \cos \phi_{IIz}; & z_4 &= \sqrt{\beta_{IIz}} \sin \phi_{IIz} \end{aligned} \quad (4.8b)$$

einzuführen. Definiert man dann weiterhin in Analogie zur Gl.(3.6) die Funktionen

$$\begin{aligned} \gamma_{IX} &= X_1'^2 + X_2'^2; & \gamma_{IIX} &= X_3'^2 + X_4'^2; \\ \gamma_{Iz} &= z_1'^2 + z_2'^2; & \gamma_{IIz} &= z_3'^2 + z_4'^2, \end{aligned} \quad (4.9)$$

so können wir für das Ellipsoid (4.4) schreiben

$$\begin{aligned} X &= \cos \chi \cdot \sqrt{\varepsilon_I} \sqrt{\beta_{IX}} \cos(\phi_{IX} - \delta_I) + \sin \chi \cdot \sqrt{\varepsilon_{II}} \sqrt{\beta_{IIX}} \cos(\phi_{IIX} - \delta_{II}); \\ X' &= \cos \chi \cdot \sqrt{\varepsilon_I} \sqrt{\gamma_{IX}} \cos(\phi_{IX} - \tilde{\delta}_I) + \sin \chi \cdot \sqrt{\varepsilon_{II}} \sqrt{\gamma_{IIX}} \cos(\phi_{IIX} - \tilde{\delta}_{II}); \\ z &= \cos \chi \cdot \sqrt{\varepsilon_I} \sqrt{\beta_{Iz}} \cos(\phi_{Iz} - \delta_I) + \sin \chi \cdot \sqrt{\varepsilon_{II}} \sqrt{\beta_{IIZ}} \cos(\phi_{IIZ} - \delta_{II}); \\ z' &= \cos \chi \cdot \sqrt{\varepsilon_I} \sqrt{\gamma_{Iz}} \cos(\phi_{Iz} - \tilde{\delta}_I) + \sin \chi \cdot \sqrt{\varepsilon_{II}} \sqrt{\gamma_{IIZ}} \cos(\phi_{IIZ} - \tilde{\delta}_{II}). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Mit (4.7) und (4.8) geht die Normierungsbedingung (4.6) über in

$$1 = (\phi_{IX})' \cdot \beta_{IX} + (\phi_{Iz})' \cdot \beta_{Iz} - 2R \sqrt{\beta_{IX}} \sqrt{\beta_{Iz}} \sin(\phi_{IX} - \phi_{Iz}); \quad (4.11)$$

$$1 = (\phi_{IIX})' \cdot \beta_{IIX} + (\phi_{IIZ})' \cdot \beta_{IIZ} - 2R \sqrt{\beta_{IIX}} \sqrt{\beta_{IIZ}} \sin(\phi_{IIX} - \phi_{IIZ}).$$

Diese Gleichungen können geometrisch gedeutet werden, wie im nächsten Abschnitt gezeigt werden soll.

Setzt man schließlich wieder

$$\beta' = -2\alpha, \quad (4.12)$$

so erhält man aus (4.8) und (4.9) vier Relationen der Form

$$\gamma = \frac{(\beta \phi')^2 + \alpha^2}{\beta} \quad (4.13)$$

mit

$$\beta = \beta_{ik}, \quad \alpha = \alpha_{ik}, \quad \gamma = \gamma_{ik}, \quad \phi = \phi_{ik},$$

$$\left(\begin{array}{l} i = I, II \\ k = X, z \end{array} \right),$$

die eine Verallgemeinerung der Beziehung (3.10) darstellen.

D. Geometrische Deutung der Lagrange-Invarianten

Aus Gl. (4.10) ersieht man nun, daß bei der Betatronschwingung für Systeme mit Kopplung zwei verschiedene Schwingungszweige

$$\begin{aligned} X_i &= \sqrt{\beta_{ix}} \cos(\phi_{ix} - \delta_i) \\ z_i &= \sqrt{\beta_{iz}} \cos(\phi_{iz} - \delta_i) \\ (i &= I, II) \end{aligned} \quad (4.14)$$

auftreten, die voneinander unabhängige Emittanzen ε_I und ε_{II} besitzen.

Für die Untersuchung der fokussierenden Eigenschaften des Linsensystems ist es aufschlußreich, diese beiden Schwingungsformen getrennt für sich in der $x - p_x$ - und $z - p_z$ - Phasenebene zu betrachten, wobei die verallgemeinerten Impulse p_{ix} und p_{iz} nach Gl.(2.10) gegeben sind durch

$$\begin{aligned} p_{ix} &= X_i' + R \cdot z_i ; \\ p_{iz} &= z_i' - R \cdot X_i . \end{aligned} \quad (4.15)$$

Durchläuft dann δ_i das Periodizitätsintervall $0 \leq \delta_i < 2\pi$, so beschreibt der Phasenvektor

$$\begin{pmatrix} X_i \\ p_{ix} \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} z_i \\ p_{iz} \end{pmatrix}$$

in der $x - p_x$ - bzw. $z - p_z$ - Ebene eine Ellipse. Der Inhalt dieser Phasenellipsen errechnet sich zu

$$F_{ix} = \pi \cdot \left| \varepsilon_{(x, p_x)}^{(i)} \right| \quad \text{für die } x - p_x \text{ - Ebene (4.16a)}$$

bzw.

$$F_{iz} = \pi \cdot \left| \varepsilon_{(z, p_z)}^{(i)} \right| \quad \text{für die } z - p_z \text{ - Ebene (4.16b)}$$

mit

$$\begin{aligned} \varepsilon_{(x, p_x)}^{(i)} &= (\phi_{ix})' \beta_{ix} - R \sqrt{\beta_{ix}} \sqrt{\beta_{iz}} \sin(\phi_{ix} - \phi_{iz}) ; \\ \varepsilon_{(z, p_z)}^{(i)} &= (\phi_{iz})' \beta_{iz} - R \sqrt{\beta_{ix}} \sqrt{\beta_{iz}} \sin(\phi_{ix} - \phi_{iz}) . \end{aligned} \quad (4.17)$$

Aus Gl.(4.11) ergibt sich jetzt, daß

$$\varepsilon_{(x, p_x)}^{(i)} + \varepsilon_{(z, p_z)}^{(i)} = 1 \quad (4.18)$$

und damit entweder

$$F_{ix} + F_{iz} = \pi$$

oder

$$|F_{ix} - F_{iz}| = \eta$$

gilt, je nachdem $\epsilon_{(x, \rho_x)}^{(i)}$ und $\epsilon_{(z, \rho_z)}^{(i)}$ gleiches oder entgegengesetztes Vorzeichen besitzen. Daraus folgt aber, daß die Flächeninhalte F_{ix} und F_{iz} der beiden Phasenellipsen und somit auch die Amplitudenfunktionen β_{ix} und β_{iz} beschränkt bleiben müssen, wenn beide Größen $\epsilon_{(x, \rho_x)}^{(i)}$ und $\epsilon_{(z, \rho_z)}^{(i)}$ positiv ausfallen. Wird dagegen $\epsilon_{(x, \rho_x)}^{(i)}$ oder $\epsilon_{(z, \rho_z)}^{(i)}$ an einer beliebigen Stelle s negativ, so können dort F_{ix} und F_{iz} sowie β_{ix} und β_{iz} (z.B. bei kleinen äußeren Störungen) im Prinzip beliebig groß werden. Von physikalischen Interesse ist daher allein der Fall, daß $\epsilon_{(x, \rho_x)}^{(i)}$ und $\epsilon_{(z, \rho_z)}^{(i)}$ stets gleiches Vorzeichen haben, auf den wir uns im folgenden beschränken wollen.

E. Die Projektionen des vierdimensionalen Ellipsoids

Um die Strahlenveloppen zu bestimmen, betrachten wir nunmehr die Projektionen des vierdimensionalen Ellipsoids auf die $x - x' -$, $z - z' -$ und $x - z -$ Ebene.

1. Projektion auf die $x - x' -$ Ebene

Die Projektion des Ellipsoids auf die $x - x' -$ Ebene ergibt eine Ellipse, von der wir leicht folgende Bestimmungsgrößen ermitteln können (siehe Abb.2):

a) Projektion auf die x-Achse

Zur Berechnung der Projektion auf die x-Achse, die die größtmögliche Teilchenauslenkung in der x-Richtung angibt, schreiben wir die erste Gleichung von Gl.(4.10) in der Form

$$X = \cos(\chi - \chi_x) \times \sqrt{\epsilon_I \beta_{Ix} \cos^2(\phi_{Ix} - \delta_I) + \epsilon_{II} \beta_{IIx} \cos^2(\phi_{IIx} - \delta_{II})} \quad (4.19)$$

Dann folgt (mit $\delta_I = \phi_{Ix}$, $\delta_{II} = \phi_{IIx}$, $\chi_x = \chi$)

$$X_{\max} \equiv E_x = \sqrt{\epsilon_I \beta_{Ix} + \epsilon_{II} \beta_{IIx}} = \sqrt{\epsilon_I \cdot (X_1^2 + X_2^2) + \epsilon_{II} \cdot (X_3^2 + X_4^2)}; \quad (4.20)$$

(Strahlenvelope).

Für die zugehörige x' -Komponente findet man durch Differentiation der Gl.(4.19) unter Berücksichtigung von (4.12)

$$-\frac{1}{E_x} (\epsilon_I x_{Ix} + \epsilon_{II} x_{IIx}) = \frac{\epsilon_I \cdot (X_1 X_1' + X_2 X_2') + \epsilon_{II} \cdot (X_3 X_3' + X_4 X_4')}{E_x} \equiv E_x'$$

(4.21)

b) Projektion auf die x' -Achse

In ähnlicher Weise erhält man durch Umformung der zweiten Gleichung in (4.10)

$$\begin{aligned} X'_{\max} &\cong R_x = \sqrt{\epsilon_I \gamma_{Ix} + \epsilon_{II} \gamma_{IIx}} & (4.22) \\ &= \sqrt{\epsilon_I \cdot (X_1'^2 + X_2'^2) + \epsilon_{II} \cdot (X_3'^2 + X_4'^2)} ; \\ &\quad (\text{Winkelenveloppe}). \end{aligned}$$

Mit den Parameter E_x, E_x', A_x ist aber die Form der Ellipse bereits eindeutig bestimmt. Ihre Gleichung lautet

$$\begin{aligned} R_x^2 \cdot X^2 - 2 E_x E_x' \cdot X X' + E_x'^2 \cdot X'^2 &= \\ &= (E_x \sqrt{R_x^2 - E_x'^2})^2, \end{aligned} \quad (4.23)$$

wobei die auf der rechten Seite auftretende Größe

$$\epsilon_x = E_x \cdot \sqrt{R_x^2 - E_x'^2} \quad (4.24)$$

die horizontale Emittanz bedeutet, die bis auf den Faktor π den Inhalt dieser Ellipse angibt.

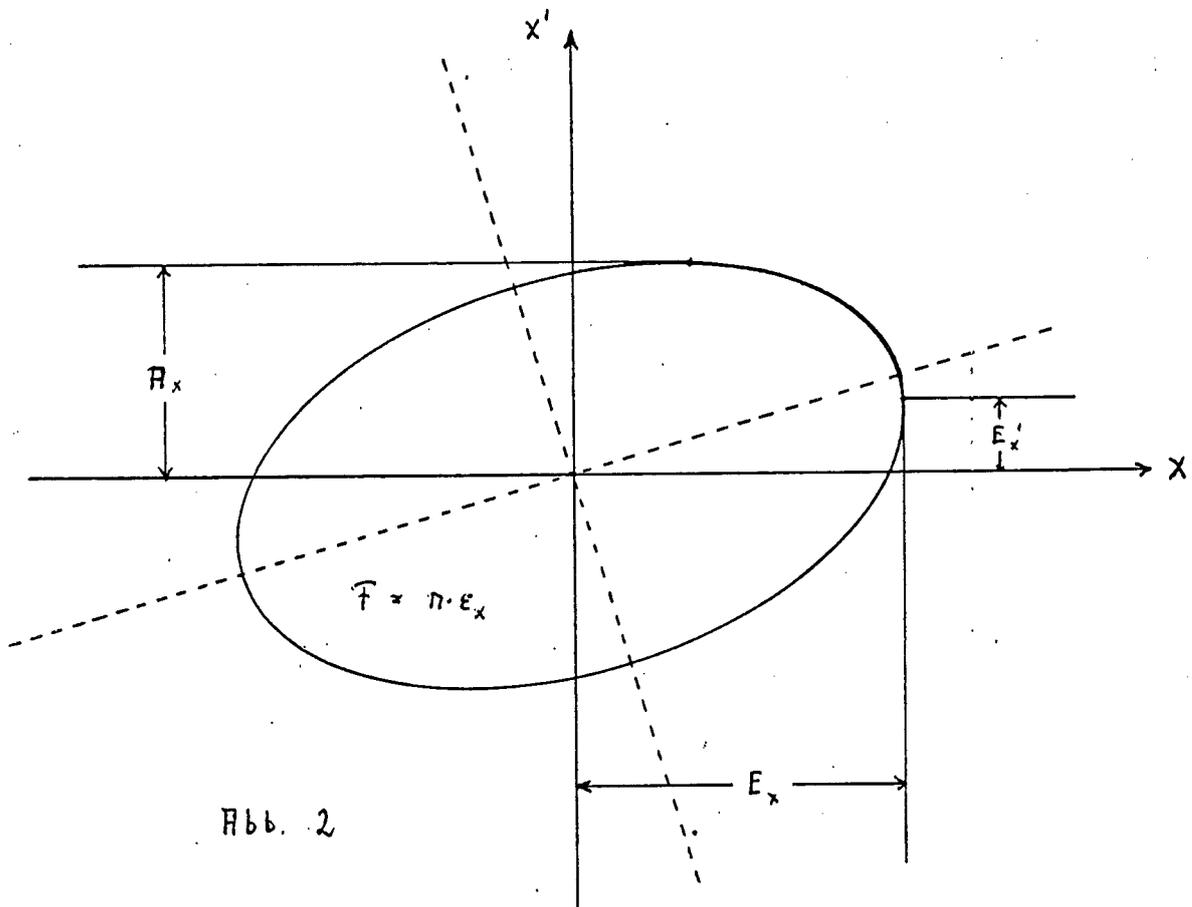


Abb. 2

2. Projektion auf die $z - z'$ - Ebene

Entsprechend bekommt man durch Projektion des Ellipsoids auf die $z - z'$ - Ebene eine Ellipse der Form

$$H_2^2 \cdot z^2 - 2 E_2 E_2' \cdot z z' + E_2'^2 \cdot z'^2 = \varepsilon_2^2 \quad (4.25)$$

mit den Bestimmungsparametern

$$\begin{aligned} z_{\max} &\equiv E_2 = \sqrt{\varepsilon_I \beta_{I2} + \varepsilon_{II} \beta_{II2}} & (4.26) \\ &= \sqrt{\varepsilon_I \cdot (z_1^2 + z_2^2) + \varepsilon_{II} \cdot (z_3^2 + z_4^2)} \quad (\text{Strahlenveloppe}) ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_2' &= - \frac{1}{E_2} (\varepsilon_{I2} \alpha_{I2} + \varepsilon_{II2} \alpha_{II2}) = & (4.27) \\ &= \frac{\varepsilon_I \cdot (z_1 z_1' + z_2 z_2') + \varepsilon_{II} \cdot (z_3 z_3' + z_4 z_4')}{E_2} ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z'_{\max} &\equiv H_2 = \sqrt{\varepsilon_I \beta_{I2} + \varepsilon_{II} \beta_{II2}} \\ &= \sqrt{\varepsilon_I \cdot (z_1'^2 + z_2'^2) + \varepsilon_{II} \cdot (z_3'^2 + z_4'^2)} ; \quad (4.28) \end{aligned}$$

$$\varepsilon_2 = E_2 \sqrt{H_2^2 - E_2'^2} \quad (\text{vertikale Emittanz}) ; \quad (4.29)$$

3. Projektion auf die $x - z$ - Ebene

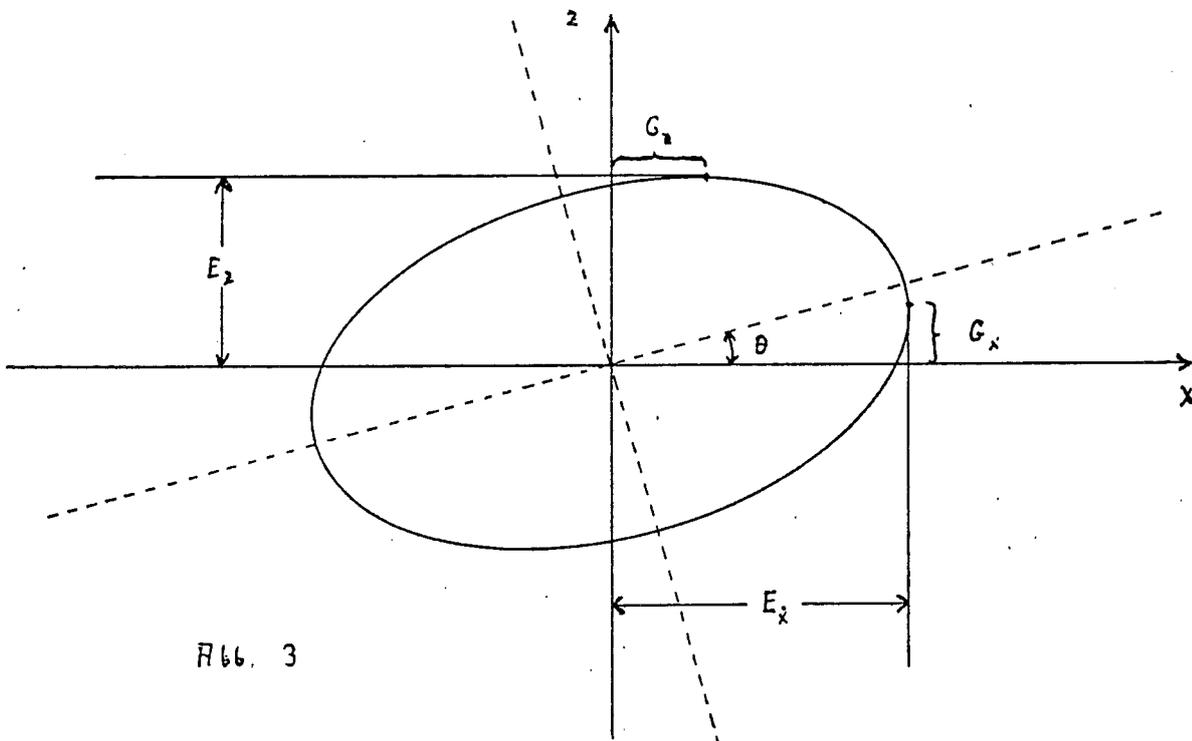


Abb. 3

Durch Projektion des Ellipsoids auf die $x - z$ - Ebene erhält man den Strahlquerschnitt mit der Gleichung

$$E_2^2 \cdot X^2 - 2 E_x G_x \cdot X z + E_x^2 \cdot z^2 = \varepsilon_{x2}^2 ; \quad (4.30)$$

$$\varepsilon_{x2} = E_x \sqrt{E_2^2 - G_x^2} = E_2 \sqrt{E_x^2 - G_2^2} , \quad (4.31)$$

wobei E_x und E_z aus Gl.(4.20) und (4.26) zu entnehmen sind und der Parameter G_x (bzw. G_z) die zu $x = E_x$ (bzw. $z = E_z$) gehörige z -Koordinate (bzw. x -Koordinate) bedeutet.

Zur Bestimmung der Größe G_x bedenken wir, daß das Maximum von X in Gl.(4.10) für

$$\delta_I = \phi_{IX} , \quad \delta_{II} = \phi_{IIX} ;$$

$$\cos \chi = \frac{\sqrt{\varepsilon_I \beta_{IX}}}{E_x} ; \quad \sin \chi = \frac{\sqrt{\varepsilon_{II} \beta_{IIX}}}{E_x}$$

angenommen wird. Setzt man diese Werte in die dritte Gleichung von (4.10) ein, so bekommt man

$$G_x = \frac{1}{E_x} \left\{ \varepsilon_I (X_1 z_1 + X_2 z_2) + \varepsilon_{II} (X_3 z_3 + X_4 z_4) \right\} . \quad (4.32a)$$

Entsprechend ergibt sich G_z zu

$$G_z = \frac{1}{E_z} \left\{ \varepsilon_I (X_1 z_1 + X_2 z_2) + \varepsilon_{II} (X_3 z_3 + X_4 z_4) \right\} , \quad (4.32b)$$

d.h. es gilt

$$G_x E_x = G_z E_z .$$

Führt man noch die Funktionen

$$\begin{cases} J_I = X_1 z_1 + X_2 z_2 \\ J_{II} = X_3 z_3 + X_4 z_4 \end{cases} \quad (4.33)$$

ein, so kann der in Gl.(4.30) auftretende Koeffizient $G_x E_x$ auch in der Form

$$G_x E_x = G_z E_z = \epsilon_I J_I + \epsilon_{II} J_{II} \quad (4.34)$$

angegeben werden.

Aus Gl.(4.30) ist ersichtlich, daß der Strahlquerschnitt nicht mehr wie bei fehlender Kopplung symmetrisch zur x- und z-Achse liegt, sondern um einen Winkel θ gedreht ist, der sich zu

$$\tan 2\theta = \frac{2 E_x G_x}{E_x^2 - E_z^2} \quad (4.35)$$

errechnet. Der Drehwinkel hängt also ab vom Verlauf der Funktionen J_I und J_{II} .

V. Die periodischen Strahlenveloppen

A. Die Periodizitätsbedingung

In Kap.IV.) haben wir die allgemeinen Strahlenveloppen ermittelt, die sich bei Vorgabe eines beliebigen Phasenellipsoides an der Stelle $s = s_0$ ergeben. In dieser Form kann das Verfahren der Enveloppenberechnung unmittelbar auf einfache Transportsysteme angewandt werden, bei denen die Bestimmungsparameter des am Startpunkt vorgegebenen Ellipsoides allein den Einschubbedingungen des Strahls anzupassen sind.

Um nun die periodischen Strahlenveloppen für Ringbeschleuniger und Storage-Ringe zu bestimmen, muß zunächst nachgewiesen werden, daß mit unserer Wahl eines vierdimensionalen Ellipsoides als Bereich im $x - x' - z - z'$ - Raum, welches durch das Linsensystem transformiert wird, die Bedingung (II) aus Abschnitt IV A.) erfüllt werden kann. Wir haben also zu zeigen, daß es bestimmte Ellipsoide gibt, die nach einem Umlauf in sich übergehen.

Zu dem Zweck formen wir in Anlehnung an Gl.(3.15) die Bestimmungsgleichung (4.4) des Ellipsoides um, indem wir setzen

$$\eta = \frac{1}{2} \cos \chi \cdot \sqrt{\varepsilon_I} \left\{ e^{i\psi_I} \cdot \eta_I + e^{-i\psi_I} \cdot \eta_I^* \right\} + \frac{1}{2} \sin \chi \cdot \sqrt{\varepsilon_{II}} \left\{ e^{i\psi_{II}} \cdot \eta_{II} + e^{-i\psi_{II}} \cdot \eta_{II}^* \right\} \quad (5.1)$$

mit

$$\begin{aligned} \eta_I(s) &= \eta_1(s) - i \cdot \eta_2(s) ; \\ \eta_{II}(s) &= \eta_3(s) - i \cdot \eta_4(s) . \end{aligned} \quad (5.2)$$

Dann schreibt sich die Lagrange - Invariante (4.6), die die Normierung der Vektoren η_k festlegt, in der Form

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i} \eta_I^+ \tilde{R} \bar{T} R \eta_I &= 1 , \\ \frac{1}{2i} \eta_{II}^+ \tilde{R} \bar{T} R \eta_{II} &= 1 , \end{aligned} \quad (5.3)$$

und die Gleichungen (4.7), (4.9), (4.12) und (4.33) für die "charakteristischen Funktionen" $\beta, \gamma, \alpha, \theta$ gehen über in

$$\begin{aligned} \beta_{ix} &= v_{i1} \cdot v_{i1}^* \\ \beta_{iz} &= v_{i3} \cdot v_{i3}^* \\ \alpha_{ix} &= -\frac{1}{2} [v_{i1} \cdot v_{i2}^* + v_{i1}^* \cdot v_{i2}] \\ \alpha_{iz} &= -\frac{1}{2} [v_{i3} \cdot v_{i4}^* + v_{i3}^* \cdot v_{i4}] \\ \gamma_{ix} &= v_{i2} \cdot v_{i2}^* \\ \gamma_{iz} &= v_{i4} \cdot v_{i4}^* \\ \psi_i &= \frac{1}{2} [v_{i1} \cdot v_{i3}^* + v_{i1}^* \cdot v_{i3}] \end{aligned} \quad (5.4)$$

mit

$$\begin{pmatrix} v_{i1} \\ v_{i2} \\ v_{i3} \\ v_{i4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\beta_{ix}} \cdot e^{-i\psi_{ix}} \\ -\frac{1}{\sqrt{\beta_{ix}}} [\alpha_{ix} + i \cdot (\psi_{ix})' \cdot \beta_{ix}] \cdot e^{-i\psi_{ix}} \\ \sqrt{\beta_{iz}} \cdot e^{-i\psi_{iz}} \\ -\frac{1}{\sqrt{\beta_{iz}}} [\alpha_{iz} + i \cdot (\psi_{iz})' \cdot \beta_{iz}] \cdot e^{-i\psi_{iz}} \end{pmatrix} = \eta_i \quad (5.5)$$

Aus Gl.(5.1) ist aber ersichtlich, daß das am Startpunkt $s = s_0$ vorgegebene Ellipsoid gerade dann nach einem Umlauf in sich übergeht, wenn die Vektoren $w_I(s_0)$ und $w_{II}(s_0)$ wieder Eigenvektoren der Umlaufmatrix $M(s_0 + C, s_0)$ sind:

$$M(s_0 + C, s_0) w_I(s_0) = e^{-i \cdot 2\pi Q_I} \cdot w_I(s_0) ;$$

$$M(s_0 + C, s_0) w_{II}(s_0) = e^{-i \cdot 2\pi Q_{II}} \cdot w_{II}(s_0)$$

und die zugehörigen Eigenwerte den Absolutbetrag 1 besitzen:

$$\left| e^{-i \cdot 2\pi Q_I} \right| = \left| e^{-i \cdot 2\pi Q_{II}} \right| = 1 , \quad (5.6)$$

d. h. Q_I, Q_{II} reell.

Um die periodischen Strahlenveloppen zu gewinnen, hat man also wiederum die Eigenvektoren $w_1(s_0), w_2(s_0), w_3(s_0), w_4(s_0)$ und die zugehörigen Eigenwerte λ_k ($k = 1, 2, 3, 4$) der Umlaufmatrix $M(s_0 + C, s_0)$ aufzusuchen. Ist dann die Bedingung (5.6)

$$|\lambda_k| = 1$$

erfüllt, so können die Vektoren $w_k(s_0)$ zu Paaren konjugiert-komplexer Eigenvektoren

$$\left(w_I, w_I^* \right) ,$$

$$\left(w_{II}, w_{II}^* \right)$$

zusammengefaßt werden derart, daß $w_I(s_0)$ und $w_{II}(s_0)$ die Normierungsbedingung (5.3) erfüllen. Aus $w_I(s_0)$ und $w_{II}(s_0)$ gewinnt man weiterhin durch Anwendung der Übertragungsmatrix $M(s, s_0)$ die Vektoren $w_I(s)$ und $w_{II}(s)$, mit deren Hilfe sich nach Gl.(5.4) die Funktionen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ und schließlich nach Gl.(4.20), (4.22), (4.26) und (4.28) die Strahl- und Winkelenveloppen $E(s)$ und $A(s)$ errechnen.

Gl.(5.6) selbst besagt, daß die periodischen Strahlenveloppen nur in dem Falle existieren, wenn sämtliche Eigenwerte der Matrix $M(s_0 + C, s_0)$ wie bei ungekoppelten Linsensystemen auf dem Einheitskreis der komplexen Ebene liegen. Zur physikalischen Deutung der Forderung (5.6) müssen wir

zunehmend die Eigenschaften des Eigenwertspektrums der Umlaufmatrix bestimmen. Diese Betrachtungen leiten wieder unmittelbar auf Untersuchungen zur Stabilität der Teilchenbewegung über.

B. Das Eigenwertspektrum der Umlaufmatrix. Floquet'sches Theorem.

Die Untersuchung des Eigenwertspektrums von $M(s_0 + C, s_0)$ führen wir in mehreren Schritten.

1) Bildet man mit zwei beliebigen Eigenvektoren $w_k(s_0)$ und $w_l(s_0)$ die Lagrangesche Invariante (2.14):

$$W(w_k, w_l) = \tilde{w}_l \tilde{R}^T R w_k,$$

so ergibt sich aus der Tatsache, dass W eine Konstante der Bewegung darstellt, die Beziehung

$$\begin{aligned} \tilde{w}_l(s_0) \tilde{R}^T R w_k(s_0) &= \tilde{w}_l(s_0 + C) \tilde{R}^T R w_k(s_0 + C) \\ &= e^{-i \cdot 2\pi Q_l} \cdot \tilde{w}_l(s_0) \cdot \tilde{R}^T R \cdot e^{-i \cdot 2\pi Q_k} \cdot w_k(s_0) \\ &= e^{-i \cdot 2\pi (Q_l + Q_k)} \cdot \tilde{w}_l(s_0) \tilde{R}^T R w_k(s_0), \end{aligned} \quad (5.7)$$

wobei wir die Eigenwerte λ_n der Vektoren $w_n(s_0)$ mit

$$\lambda_n = e^{-i \cdot 2\pi Q_n} \quad (5.8)$$

bezeichnet haben. Da die vier Eigenvektoren w_n ($n = 1, 2, 3, 4$) zusammen den ganzen vierdimensionalen Raum aufspannen, kann die Größe $W(w_k, w_l)$ bei fest vorgegebenem Vektor w_k nicht für alle Eigenvektoren w_l ($l = 1, 2, 3, 4$) verschwinden. Somit folgt aus Gl.(5.7):

Die Eigenvektoren $w_k(s_0)$ können so klassifiziert werden, daß

$$\begin{aligned} Q_1 + Q_2 &= 0, \\ Q_3 + Q_4 &= 0 \end{aligned} \quad (5.9)$$

gilt und gleichzeitig die Relationen

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i} \tilde{w}_2 \tilde{R}^T R w_1 &= -\frac{1}{2i} \tilde{w}_1 \tilde{R}^T R w_2 = 1, \\ \frac{1}{2i} \tilde{w}_4 \tilde{R}^T R w_3 &= -\frac{1}{2i} \tilde{w}_3 \tilde{R}^T R w_4 = 1, \\ \frac{1}{2i} \tilde{w}_l \tilde{R}^T R w_k &= 0 \quad \text{sonst.} \end{aligned} \quad (5.10a)$$

erfüllt sind (6).

In Matrixschreibweise lassen sich die Gln. (5.10a) zusammenfassen zu

$$\frac{1}{2i} \tilde{W} \tilde{R} \tilde{T} R W = \tilde{T}, \quad (5.10b)$$

wobei W die Matrix

$$W = (w_1, w_2, w_3, w_4)$$

bezeichnet.

2) Gl. (5.9) besagt, daß die Eigenwerte der Matrix $M(s_0 + C, s_0)$ stets in reziproken Paaren

$$(\lambda_1, \lambda_2 = 1/\lambda_1) \quad \text{und} \quad (\lambda_3, \lambda_4 = 1/\lambda_3)$$

auftreten.

Da weiterhin $M(s_0 + C, s_0)$ eine reelle Matrix darstellt, ist mit λ auch λ^* Eigenwert von $M(s_0 + C, s_0)$.

Für die Form des (nichtentarteten) Eigenwertspektrums der Matrix $M(s_0 + C, s_0)$ ergeben sich damit folgende vier Möglichkeiten (1, 2):

a) Alle vier Eigenwerte sind komplex und haben den Absolutbetrag 1, liegen also in der komplexen Ebene auf dem Einheitskreis (Abb.4a):

$$|\lambda_n| = 1 \quad \text{für} \quad n = 1, 2, 3, 4.$$

Dann gilt

$$\lambda_2 = 1/\lambda_1 = \lambda_1^*,$$

$$\lambda_4 = 1/\lambda_3 = \lambda_3^*.$$

b) Ein reziprokes Paar ist reell, das andere hingegen komplex und liegt auf dem Einheitskreis (Abb.4b):

$$\lambda_1 = \lambda_1^*, \quad \lambda_2 = \lambda_2^* \quad \text{mit} \quad \lambda_2 = 1/\lambda_1;$$

$$|\lambda_3| = |\lambda_4| = 1 \quad \text{mit} \quad \lambda_4 = \lambda_3^* = 1/\lambda_3$$

oder

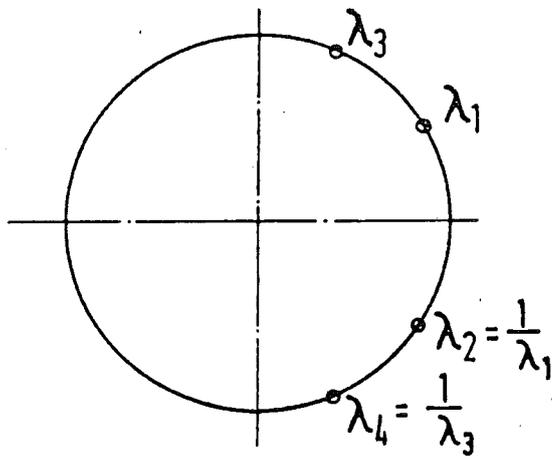
$$|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1 \quad \text{mit} \quad \lambda_2 = \lambda_1^* = 1/\lambda_1,$$

$$\lambda_3 = \lambda_3^*, \quad \lambda_4 = \lambda_4^* \quad \text{mit} \quad \lambda_4 = 1/\lambda_3.$$

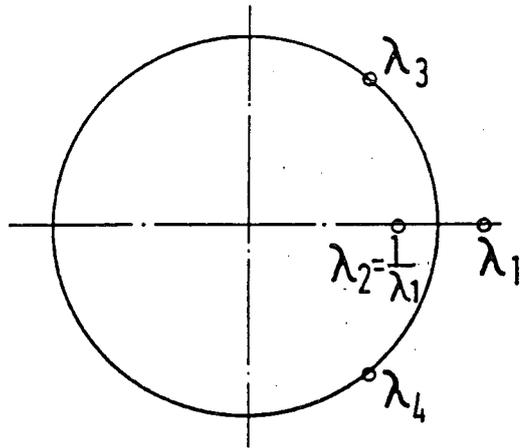
c) Die beiden reziproken Paare sind reell (Abb.4c):

$$\lambda_1 = \lambda_1^*, \quad \lambda_2 = \lambda_2^* \quad \text{mit} \quad \lambda_2 = 1/\lambda_1,$$

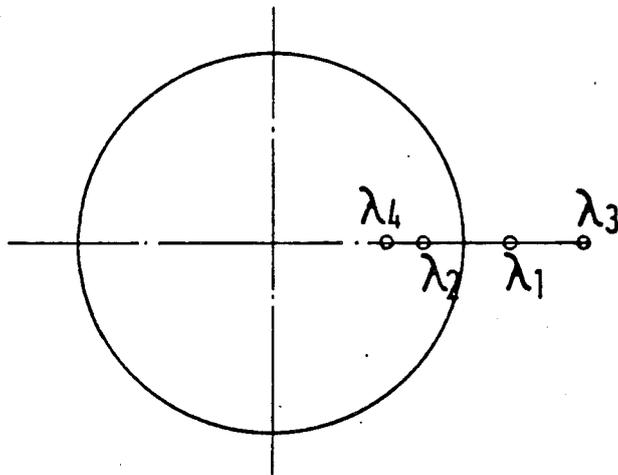
$$\lambda_3 = \lambda_3^*, \quad \lambda_4 = \lambda_4^* \quad \text{mit} \quad \lambda_4 = 1/\lambda_3.$$



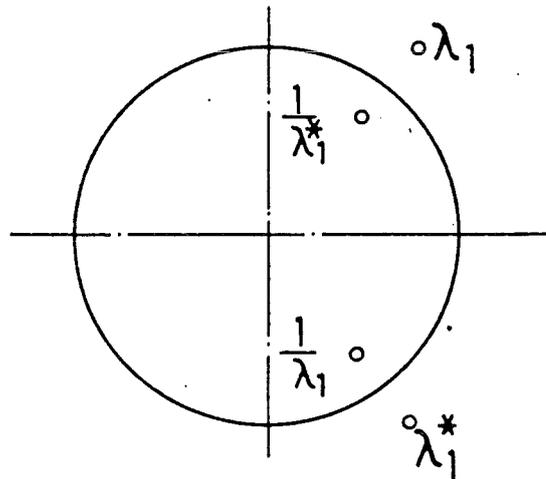
a)



b)



c)



d)

d) Ein Eigenwert, z.B. λ_1 , ist komplex und liegt nicht auf dem Einheitskreis (Abb.4d):

$$|\lambda_1| \neq 1, \quad \lambda_1 \neq \lambda_1^*.$$

Dann muß gelten
und

$$\lambda_2 = 1/\lambda_1$$

$$\lambda_3 = \lambda_1^*$$

$$\lambda_4 = 1/\lambda_1^*$$

oder

$$\lambda_3 = 1/\lambda_1^*$$

$$\lambda_4 = \lambda_1^*$$

Von diesen vier Möglichkeiten ist nur im Fall a) die Periodizitätsbedingung (II) aus Abschnitt IV A.) realisierbar. Wir ersehen jedoch daraus, daß die Forderung (5.6) wiederum nicht im Widerspruch steht zur vorgegebenen Bewegungsgleichung (2.1) bzw. (2.3), da die in (5.6) verlangte Form des Eigenwertspektrums tatsächlich auftreten kann.

Im Fall b), c) und d) können keine periodischen Strahlenveloppen existieren. Es wird sich zeigen, daß in diesen Fällen die Teilchenbewegung instabil wird.

3) Mit

$$W_R(s_0 + C) = e^{-i \cdot 2\pi Q_k} \cdot W_R(s_0) \quad (5.11a)$$

gilt allgemein

$$W_R(s + C) = e^{-i \cdot 2\pi Q_k} \cdot W_R(s) \quad (5.11b)$$

für alle s .

Beweis:

$$\begin{aligned} W_R(s + C) &= M(s + C, s_0 + C) M(s_0 + C, s_0) W_R(s_0) \\ &= M(s, s_0) M(s_0 + C, s_0) W_R(s_0), \\ &\text{da } M(s + C, s_0 + C) = M(s, s_0) \\ &= e^{-i \cdot 2\pi Q_k} \cdot M(s, s_0) W_R(s_0) \text{ nach Gl. (5.11a)} \\ &= e^{-i \cdot 2\pi Q_k} \cdot W_R(s), \quad \text{q. e. d.} \end{aligned}$$

$w_k(s)$ ist also Eigenvektor der Ulaufmatrix $M(s + C, s)$ und hat den gleichen Eigenwert wie $w_k(s_0)$.

4) Wir setzen

$$w_k(s) = \tilde{u}_k(s) \cdot e^{-i \cdot 2\pi Q_k \frac{s}{C}} \quad (5.12a)$$

Dann gilt

$$\tilde{u}_k(s + C) = \tilde{u}_k(s) \quad (5.12b)$$

Beweis:

Setzt man Gl.(5.12a) in Gl.(5.11b) ein, so folgt

$$\tilde{u}_k(s + C) \cdot e^{-i \cdot 2\pi Q_k \frac{s + C}{C}} = e^{-i \cdot 2\pi Q_k} \cdot \tilde{u}_k(s) \cdot e^{-i \cdot 2\pi Q_k \frac{s}{C}}$$

Gl.(5.12b) erhält man jetzt, indem man auf jeder Seite den Faktor

$$e^{-i \cdot 2\pi Q_k \left(1 + \frac{s}{C}\right)}$$

kürzt.

Mit Gl.(5.12) haben wir nun bereits das Floquet'sche Theorem (6) gewonnen. Die Vektoren $w_k(s)$ sind spezielle Lösungsvektoren der Bewegungsgleichungen (2.1) bzw. (2.3), die sich als Produkt einer periodischen Funktion $\tilde{u}_k(s)$ und einer (i.a. unperiodischen) harmonischen Funktion

$$e^{-i \cdot 2\pi Q_k \frac{s}{C}}$$

darstellen lassen. Dabei kann die Größe Q_k als Zahl der Betatronwellen pro Umfang interpretiert werden für einen Schwingungszustand, der durch Gl.(5.12) beschrieben wird.

5) Die allgemeine Lösung der Differentialgleichungen (2.1) bzw. (2.3) ist eine Linearkombination der speziellen Lösungsvektoren (5.12), läßt sich also in der Form

$$w(s) = \sum_{k=1}^4 A_k \tilde{u}_k(s) \cdot e^{-i \cdot 2\pi Q_k \frac{s}{C}} \quad (5.13)$$

schreiben. Aus dieser Gleichung kann man aber wie im ungekoppelten Fall (Kap.III.) leicht ersehen, daß die Bedingung (5.6) ein notwendiges Stabili-

tätskriterium für die Teilchenbewegung in Ringbeschleunigern und Storage-Ringen darstellt:

Sind alle Eigenwerte vom Absolutbetrag 1, d.h. die Größen Q_k reell (Abb.4a), so bleibt der Lösungsvektor (5.13) beschränkt, und die Teilchenbewegung ist stabil (wenn wir vom Einfluß der Feldfehler und Fokussierungsfehler absehen).

Ist dagegen wenigstens einer der Exponenten, etwa Q_1 , komplex (Abb.4b,c,d), so besitzt nach Gl.(5.9) entweder Q_1 oder Q_2 einen positiven Imaginärteil. In diesem Falle wachsen die Komponenten von $w_j(s)$ und damit die Amplituden der Betatronschwingung exponentiell an, und es liegt eine Instabilität der Teilchenbewegung vor.

6) Im folgenden setzen wir nun allgemein voraus, daß die Stabilitätsbedingung (5.6) erfüllt ist. Dann sind nach Gl.(5.7) und (5.8) die Eigenwerte λ_1 und λ_2 bzw. λ_3 und λ_4 und somit auch die Eigenvektoren $w_1(s_0)$ und $w_2(s_0)$ bzw. $w_3(s_0)$ und $w_4(s_0)$ (nach geeigneter Wahl des freien Phasenfaktors) zueinander konjugiert-komplex, so daß man setzen kann

$$\begin{aligned} Q_1 &\equiv Q_I, & Q_2 &\equiv -Q_I, \\ Q_3 &\equiv Q_{II}, & Q_4 &\equiv -Q_{II}, \end{aligned} \quad (5.14)$$

$$\begin{aligned} w_1(s_0) &\equiv w_I(s_0), & w_2(s_0) &\equiv w_I(s_0)^*, \\ w_3(s_0) &\equiv w_{II}(s_0), & w_4(s_0) &\equiv w_{II}(s_0)^*. \end{aligned}$$

Außerdem ist mit Gl.(5.10) auch die Normierungsbedingung (5.3) erfüllt, womit wir wieder den Anschluß an die im letzten Abschnitt verwendete Bezeichnung gewonnen haben.

7) Für die charakteristischen Funktionen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ zeigt sich jetzt, daß der Verlauf dieser Funktionen in Ringbeschleunigern und Storage-Ringen auf Grund der Periodizitätsbedingung (II) in Abschnitt IV A) unabhängig ist vom Startpunkt s_0 (im Gegensatz zu den entsprechenden Funktionen bei einfachen Transportsystemen, in denen das Ellipsoid am Startpunkt beliebig vorgegeben werden kann), da die Vektoren $w_I(s)$ und $w_{II}(s)$ durch die Eigenwertgleichung (5.11b) und die Normierungsbedingung (=Lagrange-Invariante) (5.3) bereits bis auf einen beliebigen Phasenfaktor bestimmt sind, der in den Gln.(5.4) wieder herausfällt.

Die Phasenfunktion Ψ_{ix} und Ψ_{iz} ($i = I, II$) liegen nach Gl.(5.5) bis auf eine gemeinsame additive Konstante fest.

8) Für spätere Untersuchungen zu den fokussierenden Eigenschaften des Linsensystems leiten wir noch eine Beziehung über den Zuwachs der Phasenfunktionen Ψ_{ix} und Ψ_{iz} ($i = I, II$) pro Umlauf ab:

Der Phasenvorschub der Funktionen Ψ_{Ix} u. Ψ_{Iz} bzw. Ψ_{IIx} u. Ψ_{IIz} beträgt für einen Umlauf

$$\begin{aligned}\Psi_{Ix}(s+C) - \Psi_{Ix}(s) &= 2n Q_I, \\ \Psi_{Iz}(s+C) - \Psi_{Iz}(s) &= 2n Q_I\end{aligned}\quad (5.15a)$$

bzw.

$$\begin{aligned}\Psi_{IIx}(s+C) - \Psi_{IIx}(s) &= 2n Q_{II}, \\ \Psi_{IIz}(s+C) - \Psi_{IIz}(s) &= 2n Q_{II}\end{aligned}\quad (5.15b)$$

Beweis:

Schreiben wir die x- und z-Komponente der Vektoren $\vec{u}_k(s)$ in der Form

$$\begin{aligned}u_{kx}(s) &= |u_{kx}(s)| \cdot e^{-i \cdot \eta_{kx}(s)}, \\ u_{kz}(s) &= |u_{kz}(s)| \cdot e^{-i \cdot \eta_{kz}(s)},\end{aligned}$$

so folgt durch Vergleich von (5.12a) und (5.5)

$$\begin{aligned}\Psi_{ix}(s) &= \eta_{ix}(s) + 2n Q_i \cdot \frac{s}{C}, \\ \Psi_{iz}(s) &= \eta_{iz}(s) + 2n Q_i \cdot \frac{s}{C}.\end{aligned}$$

Daraus erhält man die Gln.(5.15), wenn noch die Periodizitätsbedingungen (5.12b) berücksichtigt werden.

C. Die Bedeutung der Amplituden- und Phasenfunktionen für die fokussierenden Eigenschaften des Linsensystems

Mit Hilfe der Gln.(5.10) und (5.15) sind wir jetzt in der Lage zu entscheiden, ob ein Teilchen, das an der Stelle $s = s_0$ mit dem Anfangsvektor

$$\eta(s_0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \\ z_0 \\ z'_0 \end{pmatrix} \quad (5.16)$$

startet, das Linsensystem (im Sinne der Strahloptik) durchlaufen kann oder durch Aufprall gegen die Kammerwand für den Beschleunigungsprozeß verlorenght.

Zu dem Zweck entwickeln wir den Vektor $\eta(s_0)$ nach den Eigenvektoren $\eta_k(s_0)$:

$$\eta(s_0) = \{ A \eta_I(s_0) + B \eta_{II}(s_0) \} + \text{Konj. Kompl.}, \quad (5.17)$$

wobei sich die Entwicklungskoeffizienten A und B auf Grund der "Orthonormierungsbedingungen" (5.10) zu

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{\lambda_I} \eta_I^\dagger(s_0) \tilde{R}^\dagger R \eta(s_0), \\ B &= \frac{1}{\lambda_{II}} \eta_{II}^\dagger(s_0) \tilde{R}^\dagger R \eta(s_0) \end{aligned} \quad (5.18)$$

errechnen. Die zugehörige Teilchenbahn lautet dann

$$\eta(s) = \{ A \eta_I(s) + B \eta_{II}(s) \} + \text{Konj. Kompl.}, \quad (5.19)$$

Setzen wir nun

$$\begin{aligned} A &= \frac{\sqrt{\epsilon_I}}{2} e^{i\varphi_I}, \\ B &= \frac{\sqrt{\epsilon_{II}}}{2} e^{i\varphi_{II}}, \end{aligned} \quad (5.20)$$

so erhalten wir insbesondere für die x- und z-Komponente der Bahnkurve

$$\begin{aligned} X(s) &= \sqrt{\epsilon_I} \sqrt{\beta_{Ix}(s)} \cos[\psi_{Ix}(s) - \varphi_I] + \\ &\quad + \sqrt{\epsilon_{II}} \sqrt{\beta_{IIx}(s)} \cos[\psi_{IIx}(s) - \varphi_{II}]; \\ Z(s) &= \sqrt{\epsilon_I} \sqrt{\beta_{Iz}(s)} \cos[\psi_{Iz}(s) - \varphi_I] + \\ &\quad + \sqrt{\epsilon_{II}} \sqrt{\beta_{IIz}(s)} \cos[\psi_{IIz}(s) - \varphi_{II}], \end{aligned} \quad (5.21)$$

wobei die Größen ϵ_I und ϵ_{II} aus (5.18) und (5.20) zu entnehmen sind.

Aus diesen Gleichungen geht aber hervor, daß während der Teilchenbewegung stets

$$\begin{aligned} |X(s)| &\leq \sqrt{\epsilon_I} \sqrt{\beta_{Ix}(s)} + \sqrt{\epsilon_{II}} \sqrt{\beta_{IIx}(s)}; \\ |Z(s)| &\leq \sqrt{\epsilon_I} \sqrt{\beta_{Iz}(s)} + \sqrt{\epsilon_{II}} \sqrt{\beta_{IIz}(s)} \end{aligned} \quad (5.22)$$

gilt, und zwar für beliebig viele Umläufe, da die Amplitudenfunktionen β_{ix} und β_{iz} ($i = I, II$) (nach Konstruktion) periodisch sind.

Wesentlich ist jetzt, daß sich die Phasenfunktionen $\psi_{ix}(s)$ und $\psi_{iz}(s)$ ($i = I, II$) an einer beliebigen festen Stelle s nach jedem Teilchenumlauf sprunghaft ändern, wie aus Gl.(5.15) hervorgeht, und zwar für $i = I$ und $i = II$ um verschiedene Werte (die Fälle $Q_i = n, \frac{n}{2}$ und $Q_I - Q_{II} = n$, $n =$ ganze Zahl, müssen aus Stabilitätsgründen ausgeschlossen werden; siehe Abschnitt V A.1). Daher kann man erwarten, daß die in Gl.(5.22) für $|x(s)|$ und $|z(s)|$ angegebenen oberen Schranken im Laufe der Zeit einmal (beliebig genau) angenommen werden:

$$\text{Max } |x(s)| = \sqrt{\varepsilon_I} \sqrt{\beta_{Ix}(s)} + \sqrt{\varepsilon_{II}} \sqrt{\beta_{IIx}(s)} ; \quad (5.23a)$$

$$\text{Max } |z(s)| = \sqrt{\varepsilon_I} \sqrt{\beta_{Iz}(s)} + \sqrt{\varepsilon_{II}} \sqrt{\beta_{IIz}(s)} . \quad (5.23b)$$

Für den störungsfreien Bewegungsablauf eines Teilchens mit dem Anfangsvektor $\mathcal{M}(s_0)$ haben wir somit zu beachten, daß die in (23) angegebenen oberen Grenzen für $|x(s)|$ und $|z(s)|$, welche die größtmöglichen Projektionen der Teilchenbahnen auf die x- und z-Achse darstellen, kleiner ausfallen als die Ausdehnung der Vakuumkammer in x- und z-Richtung.

Die Gln.(5.23) können noch verallgemeinert werden auf den Fall, daß nach der größtmöglichen Auslenkung des Teilchens längs einer Achse, die mit der x-Achse den Winkel δ einschließt, gefragt wird. Führt man nämlich ein um den Winkel δ gegenüber dem x-z-System gedrehtes $\tilde{x} - \tilde{z}$ -Koordinatensystem ein:

$$\begin{aligned} \tilde{x}(\delta; s) &= \cos \delta \cdot x(s) + \sin \delta \cdot z(s) \\ &= \sum_{i=I}^{II} \left\{ \cos \delta \cdot \sqrt{\varepsilon_i} \sqrt{\beta_{ix}(s)} \cos [\psi_{ix}(s) - \varphi_i] \right. \\ &\quad \left. + \sin \delta \cdot \sqrt{\varepsilon_i} \sqrt{\beta_{iz}(s)} \cos [\psi_{iz}(s) - \varphi_i] \right\} \\ &= \sum_{i=I}^{II} \sqrt{\varepsilon_i} \cdot \left\{ \cos \delta \cdot \sqrt{\beta_{ix}} \cos \left[\frac{\psi_{ix} + \psi_{iz} - 2\varphi_i}{2} + \frac{\psi_{iz} - \psi_{ix}}{2} \right] \right. \\ &\quad \left. + \sin \delta \cdot \sqrt{\beta_{iz}} \cos \left[\frac{\psi_{ix} + \psi_{iz} - 2\varphi_i}{2} - \frac{\psi_{ix} - \psi_{iz}}{2} \right] \right\} \\ &= \sum_{i=I}^{II} \sqrt{\varepsilon_i} \cdot \left\{ \cos \frac{\psi_{ix} - \psi_{iz}}{2} \cdot \left(\sqrt{\beta_{ix}} \cos \delta + \sqrt{\beta_{iz}} \sin \delta \right) \right. \\ &\quad \left. \times \cos \frac{\psi_{ix} + \psi_{iz} - 2\varphi_i}{2} \right. \\ &\quad \left. - \sin \frac{\psi_{ix} - \psi_{iz}}{2} \cdot \left(\sqrt{\beta_{ix}} \cos \delta - \sqrt{\beta_{iz}} \sin \delta \right) \right. \\ &\quad \left. \times \sin \frac{\psi_{ix} + \psi_{iz} - 2\varphi_i}{2} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{X}(\delta, s) = \sum_{i=I}^{II} \sqrt{\varepsilon_i} \cdot \left\{ (\sqrt{\beta_{i,x}} \cos \delta + \sqrt{\beta_{i,z}} \sin \delta)^2 \cdot \cos^2 \frac{\varphi_{i,x} - \varphi_{i,z}}{2} \right. \\ \left. + (\sqrt{\beta_{i,x}} \cos \delta - \sqrt{\beta_{i,z}} \sin \delta)^2 \cdot \sin^2 \frac{\varphi_{i,x} - \varphi_{i,z}}{2} \right\}^{1/2} \cdot \\ \times \cos \left(\frac{\varphi_{i,x} + \varphi_{i,z}}{2} - \tilde{\varphi}_i \right) \end{aligned}$$

und bedenkt, daß die Phase $\frac{\varphi_{i,x} + \varphi_{i,z}}{2}$

nach jedem Umlauf wieder springt, während die Funktion

$$\frac{\varphi_{i,x} - \varphi_{i,z}}{2}$$

nach Gl.(15) ihren Wert beibehält, so ergibt sich die Beziehung

$$\begin{aligned} \text{Max } |\tilde{X}(\delta; s)| &= \sum_{i=I}^{II} \sqrt{\varepsilon_i} \left\{ (\sqrt{\beta_{i,x}} \cos \delta + \sqrt{\beta_{i,z}} \sin \delta)^2 \cdot \right. \\ &\quad \times \cos^2 \frac{\varphi_{i,x} - \varphi_{i,z}}{2} \\ &\quad \left. + (\sqrt{\beta_{i,x}} \cos \delta - \sqrt{\beta_{i,z}} \sin \delta)^2 \cdot \right. \\ &\quad \left. \times \sin^2 \frac{\varphi_{i,x} - \varphi_{i,z}}{2} \right\}^{1/2} \\ &\quad (5.24) \\ &= \sum_{i=I}^{II} \sqrt{\varepsilon_i} \left\{ \frac{1}{2} [\beta_{i,x} + \beta_{i,z}] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} [\beta_{i,x} - \beta_{i,z}] \cdot \cos 2\delta + \beta_i \cdot \sin 2\delta \right\}^{1/2} \end{aligned}$$

die für $\delta = 0$ bzw. $\pi/2$ tatsächlich in Gl.(5.23a) bzw. (5.23b) übergeht.

In ähnlicher Weise, wie wir die Größen

$$\text{Max } |X(s)| \text{ und } \text{Max } |z(s)| \text{ sowie } \text{Max } |\tilde{X}(\delta; s)|$$

ermittelt haben, kann auch die Abschätzung der maximalen Steigung

$$\text{Max } |X'(s)| \text{ und } \text{Max } |z'(s)|$$

für ein Teilchen mit dem Anfangsvektor η_0 (s_0) erfolgen. Betrachten wir z.B. die Ableitung $x'(s)$, so ergibt sich aus Gl.(5.21) unter Berücksichtigung von (5.4) und (5.5)

$$\begin{aligned} X'(s) &= \sqrt{\varepsilon_I} \sqrt{\gamma_{Ix}} \cos [\varphi_{Ix} - \hat{\varphi}_I] + \\ &\quad + \sqrt{\varepsilon_{II}} \sqrt{\gamma_{IIX}} \cos [\varphi_{IIX} - \hat{\varphi}_{II}] . \end{aligned}$$

Folglich errechnet sich (analog zu Gl.(5.22) die größtmögliche Steigung $x'(s)$ zu

$$\text{Max } |x'(s)| = \sqrt{\epsilon_I} \sqrt{\gamma_{Ix}} + \sqrt{\epsilon_{II}} \sqrt{\gamma_{IIx}} \quad (5.25a)$$

Für die Steigung in z-Richtung bekommt man entsprechend

$$\text{Max } |z'(s)| = \sqrt{\epsilon_I} \sqrt{\gamma_{Iz}} + \sqrt{\epsilon_{II}} \sqrt{\gamma_{IIz}} \quad (5.25b)$$

Aus Gl.(5.22) und (5.25) ist ersichtlich, daß für die maximalen Amplituden die Funktionen β_{ix} und β_{iz} , für die maximalen Steigungen dagegen die Funktionen γ_{ix} und γ_{iz} ($i = I, II$) maßgebend sind. Die in Gl.(5.20) eingeführten Phasen φ_I und φ_{II} sind in (5.22) bzw. (5.24) und (5.25) wieder herausgefallen, so daß $\text{Max } |\tilde{x}(\delta, s)|$, $\text{Max } |x'(s)|$ und $\text{Max } |z'(s)|$ nur von den Größen ϵ_I und ϵ_{II} abhängen.

Abschließend bemerken wir noch, daß bei allen Rechnungen stets die Gültigkeit der Beziehung (5.6) vorauszusetzen ist. Wie schon erwähnt, stellt diese Gleichung eine notwendige Bedingung für die Stabilität der Teilchenbewegung dar. Diese Bedingung ist jedoch (ebenso wie in ungekoppelten Systemen) nicht hinreichend für die Stabilität des Strahls, weil beim Bau eines Beschleunigers unvermeidliche Abweichungen vom idealen Entwurf auftreten, die die Stabilität gefährden können. Die beiden Typen von Fehlern, die wir im Sinne einer vollständigen Beschreibung der Teilchenbewegung betrachten müssen, sind wiederum

- a) Fokussierungsfehler,
- b) Fehler im Führungsfeld,

deren Einfluß auf die Stabilität in den folgenden Kapiteln untersucht werden soll.

VI. Einfluß von Linsenfehlern

A. Die zusätzlichen Stabilitätsbedingungen

Wir behandeln zunächst die Fokussierungsfehler, die in einer Abweichung der "Linsenfunktionen" K_1 , K_2 , N und R von ihren Sollwerten bestehen.

Zu dem Zweck denken wir uns den Verlauf der Linsenfunktionen K_1, K_2, N und R stetig geändert unter der Voraussetzung, daß am Anfang Stabilität vorliegt. Dann werden die Bildpunkte der Eigenwerte zunächst in einer bestimmten Weise auf dem Einheitskreis in der komplexen Ebene wandern (Abb.4a), wobei sie stets spiegelbildlich zur reellen Achse bleiben, bis sie bestimmte Punkte des Einheitskreises erreichen, bei denen eine Verzweigung der Ortskurve auftritt und die Bildpunkte den Einheitskreis verlassen können. Aus Abb.4b,c,d) ist nun ersichtlich, daß diese Verzweigungspunkte an solchen Stellen liegen, bei denen zwei Eigenwerte zusammenfallen. Demnach werden die Fokussierungsfehler genau dann für die Stabilität gefährlich, wenn das Eigenwertspektrum (nahezu) entartet ist, also

$$\begin{aligned} \lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{\lambda_1} &\Rightarrow \lambda_1 = \pm 1, Q_I \text{ ganz- oder halbzahlig} \\ \text{oder } \lambda_3 = \lambda_4 = \frac{1}{\lambda_3} &\Rightarrow \lambda_3 = \pm 1, Q_{II} \text{ ganz- oder halbzahlig} \\ \text{oder } \lambda_1 = \lambda_3 &\Rightarrow (Q_I - Q_{II}) \text{ ganzzahlig} \\ \text{oder } \lambda_1 = \lambda_4 &\Rightarrow (Q_I + Q_{II}) \text{ ganzzahlig} \end{aligned}$$

gilt, so daß wir neben (5.6) noch folgende zusätzliche Bedingungen für eine stabile Teilchenbewegung zu beachten haben:

$$\begin{aligned} Q_I, Q_{II} &\neq n, \frac{n}{2}; \\ (Q_I \pm Q_{II}) &\neq n; \end{aligned} \tag{6.1}$$

(n = ganze Zahl) .

Für die Stabilität selbst ist es vorteilhaft, wenn die Eigenwerte λ_k ($k = 1,2,3,4$) weit auseinander liegen.

B. Störungsrechnung

Die Verschiebung des Eigenwertspektrums der Unlaufmatrix $\mathcal{M}(s_0 + C, s_0)$ auf Grund der Linsenfehler soll jetzt im einzelnen durch eine Störungs-

rechnung ermittelt werden, indem wir für die gestörte Matrix $\mathcal{M}(s_0 + C, s_0)$

$$\mathcal{M}(s_0 + C, s_0) = \mathcal{M}_0(s_0 + C, s_0) + \delta \mathcal{M} \quad (6.2)$$

($\delta \mathcal{M}$ = Störmatrix)

die Eigenwerte ($\lambda_k + \delta \lambda_k$) näherungsweise aus den entsprechenden Eigenwerten λ_k der ungestörten Übertragungsmatrix $\mathcal{M}_0(s_0 + C, s_0)$ zu bestimmen suchen. Aus den Störungen $\delta \lambda_k$ der Eigenwerte können dann die Änderungen

$$\begin{aligned} \delta Q_1 &= -\delta Q_2 \\ \delta Q_3 &= -\delta Q_4 \end{aligned}$$

der "Schwingungszahlen" Q_k unter Berücksichtigung der Beziehungen (5.8) nach der Gleichung

$$\begin{aligned} \delta Q_1 &= -\delta Q_2 = -\frac{\delta \lambda_1 + \delta \lambda_2}{4n \cdot \sin 2n Q_1} \\ \delta Q_3 &= -\delta Q_4 = -\frac{\delta \lambda_3 + \delta \lambda_4}{4n \cdot \sin 2n Q_3} \end{aligned} \quad (6.3)$$

berechnet werden.

Die Bestimmungsgleichung für das gestörte Eigenwertproblem lautet nun

$$(\mathcal{M}_0 + \delta \mathcal{M})(w_k + \delta w_k) = (\lambda_k + \delta \lambda_k)(w_k + \delta w_k). \quad (6.4)$$

Entwickeln wir die Vektoren δw_k nach dem normierten System der ungestörten Eigenvektoren w_n :

$$\delta w_k = \sum_{n=1}^4 a_{kn} \cdot w_n \quad (6.5)$$

und bedenken, daß die Vektoren w_n der Gleichung

$$\mathcal{M}_0 w_n = \lambda_n \cdot w_n$$

genügen, so entsteht aus (6.4) in erster Näherung der Störungstheorie

$$\delta \lambda_k \cdot w_k = \delta \mathcal{M} \cdot w_k + \sum_{n=1}^4 a_{kn} (\lambda_n - \lambda_k) w_n. \quad (6.6)$$

Durch Linksmultiplikation dieser Gleichung mit der Matrix $\frac{1}{2i} \tilde{w}_n \tilde{R}^T R$ erhält man aber, wenn man noch die "Orthogonalitätsrelationen" (5.10) beachtet,

$$\begin{aligned} \delta \lambda_1 &= \frac{1}{2i} \tilde{w}_2 \tilde{R}^T R \cdot \delta \mathcal{M} \cdot w_1; & \delta \lambda_2 &= -\frac{1}{2i} \tilde{w}_1 \tilde{R}^T R \cdot \delta \mathcal{M} \cdot w_2; \\ \delta \lambda_3 &= \frac{1}{2i} \tilde{w}_4 \tilde{R}^T R \cdot \delta \mathcal{M} \cdot w_3; & \delta \lambda_4 &= -\frac{1}{2i} \tilde{w}_3 \tilde{R}^T R \cdot \delta \mathcal{M} \cdot w_4. \end{aligned} \quad (6.7)$$

(6.7)

Setzt man (6.7) in (6.3) ein, so findet man schließlich (wir verwenden die in (5.14) eingeführten Bezeichnungen, beschränken uns also auf die stabile Teilchenbewegung)

$$\delta Q_I = - \frac{1}{4\pi \cdot \sin 2n \alpha_I} \cdot \gamma_m \left\{ w_I^+ \tilde{R}^T R \cdot \delta M \cdot w_I \right\}; \quad (6.8)$$

$$\delta Q_{II} = - \frac{1}{4\pi \cdot \sin 2n \alpha_{II}} \cdot \gamma_m \left\{ w_{II}^+ \tilde{R}^T R \cdot \delta M \cdot w_{II} \right\}.$$

Diese Gleichung gibt die Verschiebung $(\delta Q_I, \delta Q_{II})$ des Arbeitspunktes (Q_I, Q_{II}) unter dem Einfluß der Störung δM an und kann als Ausgangspunkt für weitere Betrachtungen dienen.

C. Berechnung der Störmatrix δM und der Verschiebung des Arbeitspunktes

Zur weiteren Auswertung der Gl.(6.8) benötigt man die Störmatrix δM , die wir nunmehr ermitteln wollen unter der Annahme, daß Abweichungen $\Delta K_1(s)$, $\Delta K_2(s)$ und $\Delta N(s)$ der Linsenfunktion K_1 , K_2 und N von ihren Sollwerten $K_1^{(0)}$, $K_2^{(0)}$ und $N^{(0)}$ auftreten. (Wir vernachlässigen der Einfachheit halber Fehler ΔR , $\Delta R'$ im Feld B_s , die physikalisch und technisch von geringerem Interesse sind).

Zu dem Zweck schreiben wir die Bewegungsgleichung (2.3b) in der Form

$$y' + (\alpha_0 + v) y = 0, \quad (6.9)$$

wobei α_0 die "Fokussierungsmatrix" der idealen Maschine bedeuten soll (siehe Gl.(2.5)), während die Matrix

$$v = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Delta K_1 & 0 & \Delta N & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Delta N & 0 & \Delta K_2 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.10)$$

den Einfluß der Linsenfehler ΔK_1 , ΔK_2 und ΔN wiedergibt.

Eine Störung $u(s)$ sei vorhanden in den Intervallen

$$s_\mu \leq s \leq s_\mu + \Delta s_\mu, \\ (\mu = 1, 2, \dots, p),$$

so daß wir setzen können

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(s_0 + C, s_0) &= \mathcal{M}_0(s_0 + C, s_p) \cdot \mathcal{M}_0^{-1}(s_p + \Delta s_p, s_p) \mathcal{M}(s_p + \Delta s_p, s_p) \\ &\times \mathcal{M}_0(s_p, s_{p-1}) \cdot \mathcal{M}_0^{-1}(s_{p-1} + \Delta s_{p-1}, s_{p-1}) \mathcal{M}(s_{p-1} + \Delta s_{p-1}, s_{p-1}) \\ &\quad \vdots \\ &\times \mathcal{M}_0(s_{\mu+1}, s_\mu) \cdot \mathcal{M}_0^{-1}(s_\mu + \Delta s_\mu, s_\mu) \mathcal{M}(s_\mu + \Delta s_\mu, s_\mu) \\ &\quad \vdots \\ &\times \mathcal{M}_0(s_2, s_1) \cdot \mathcal{M}_0^{-1}(s_1 + \Delta s_1, s_1) \mathcal{M}(s_1 + \Delta s_1, s_1) \\ &\times \mathcal{M}_0(s_1, s_0) \end{aligned} \quad (6.11)$$

Auf Grund der Bewegungsgleichungen (6.9) gilt jetzt

$$\begin{aligned} \eta(s + \Delta s) &= \eta(s) + \Delta s \cdot \eta'(s) \\ &= \eta(s) - \Delta s \cdot \mathcal{O}(s) \eta s \\ &= \mathcal{M}(s + \Delta s, s) \eta(s), \end{aligned}$$

also

$$\mathcal{M}(s + \Delta s, s) = \{ \underline{1} - \mathcal{O}(s) \cdot \Delta s \}$$

und weiterhin

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_0^{-1}(s_\mu + \Delta s_\mu, s_\mu) \cdot \mathcal{M}(s_\mu + \Delta s_\mu, s_\mu) \\ &= \{ \underline{1} - \mathcal{O}_0(s_\mu) \Delta s_\mu \}^{-1} \cdot \{ \underline{1} - \mathcal{O}_0(s_\mu) \Delta s_\mu - u(s_\mu) \Delta s_\mu \} \\ &= \underline{1} - u(s_\mu) \cdot \Delta s_\mu. \end{aligned}$$

Damit geht Gl.(6.11) über in

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}(s_2 + C, s_0) &= \mathcal{M}_0(s_0 + C, s_p) \cdot \{ \underline{1} - u(s_p) \cdot \Delta s_p \} \\
 &\times \mathcal{M}_0(s_p, s_{p-1}) \cdot \{ \underline{1} - u(s_{p-1}) \cdot \Delta s_{p-1} \} \\
 &\quad \vdots \\
 &\times \mathcal{M}_0(s_{\mu+1}, s_\mu) \cdot \{ \underline{1} - u(s_\mu) \cdot \Delta s_\mu \} \\
 &\quad \vdots \\
 &\times \mathcal{M}_0(s_2, s_1) \cdot \{ \underline{1} - u(s_1) \cdot \Delta s_1 \} \\
 &\times \mathcal{M}(s_1, s_0) \\
 &= \mathcal{M}_0(s_0 + C, s_0) \\
 &\quad - \int_{s_0}^{s_0+C} d\sigma \cdot \mathcal{M}_0(s_0 + C, \sigma) u(\sigma) \mathcal{M}(\sigma, s_0) \\
 &\quad + \dots
 \end{aligned}$$

und es folgt in erster Näherung

$$\delta \mathcal{M} = - \int_{s_0}^{s_0+C} d\sigma \cdot \mathcal{M}_0(s_0 + C, \sigma) u(\sigma) \mathcal{M}_0(\sigma, s_0) \quad (6.12)$$

Durch Gl.(6.12) und (6.10) ist nun die Störmatrix $\delta \mathcal{M}$ bestimmt, und wir sind in der Lage, mit Hilfe der Gl.(6.8) die zugehörige Verschiebung des Arbeitspunktes zu ermitteln.

Zunächst folgt durch Einsetzen von (6.12) in (6.8)

$$\begin{aligned}
 \delta Q_i &= - \frac{1}{4n \cdot \operatorname{Im} \ln Q_i} \times \\
 &\times \gamma_m \left\{ e^{-i \cdot 2n R_i} \int_{s_0}^{s_0+C} d\sigma \cdot w_i^+(\sigma) \tilde{Q}^\dagger Q u(\sigma) w_i(\sigma) \right\} ; \\
 &\quad (i = I, II) \dots
 \end{aligned} \quad (6.13)$$

Zur Herleitung dieser Gleichung benötigt man die Beziehung

$$\tilde{M} \tilde{Q} \tau R M = \tilde{Q} \tau R, \quad (6.14)$$

die man leicht aus Gl.(5.10b) und der Gleichung

$$M(s, s_0) W(s_0) = W(s), \quad M(s, s_0) = W(s) W^{-1}(s_0)$$

gewinnt.

Berücksichtigt man noch Gl.(6.8) und (5.5), so erhält man schließlich aus (6.13) für die Verschiebungen δQ_I und δQ_{II} der Schwingungszahlen Q_I und

Q_{II}

$$\delta Q_I = \frac{1}{4n} \int_{s_0}^{s_0+c} d\sigma \cdot \left\{ \beta_{Ix}(\sigma) \cdot \Delta K_1(\sigma) + \beta_{Iz}(\sigma) \cdot \Delta K_2(\sigma) + 2J_I(\sigma) \cdot \Delta N(\sigma) \right\};$$

(6.15)

$$\delta Q_{II} = \frac{1}{4n} \int_{s_0}^{s_0+c} d\sigma \cdot \left\{ \beta_{Ix}(\sigma) \cdot \Delta K_1(\sigma) + \beta_{Iz}(\sigma) \cdot \Delta K_2(\sigma) + 2J_{II}(\sigma) \cdot \Delta N(\sigma) \right\},$$

wobei die Funktionen β_{ix} , β_{iz} , J_i ($i = I, II$) aus (5.4) zu entnehmen sind.

Aus dieser Gleichung geht hervor, daß die Betatronschwingungen um so empfindlicher auf die Linsenfehler reagieren, je größer die Amplitudenfunktionen β_{ix} und β_{iz} sowie die Funktionen J_i ($i = I, II$), die die Drehung des Strahls festlegen, an der Störstelle s ausfallen.

Ist die ideale Maschine entkoppelt, so trägt in erster Näherung nur die Störung ΔK_1 bzw. ΔK_2 zur Frequenzänderung bei, während der Einfluß der Kopplung $\Delta N(s)$ in dieser Näherung wegen $J_I(s) = J_{II}(s) = 0$ vernachlässigt werden kann.

Bei einer Maschine mit Kopplung kann hingegen die Frequenz der Betatronschwingung schon in erster Näherung der Störungstheorie durch Quadrupole verschoben werden, die um einen beliebigen Winkel gedreht sind. Damit ergeben sich für die gekoppelte Maschine gegenüber der ungekoppelten weitere Korrekturmöglichkeiten zur Verschiebung des Arbeitspunktes.

VII. Fehler im magnetischen Führungsfeld und ihre Auswirkung

Wie wir in Abschnitt VI A.) gesehen haben, kann unter der Einwirkung von Fokussierungsfehlern die Teilchenbewegung instabil werden, indem die Amplitude der Betatronschwingung beliebig stark anwächst. Eine weitere Instabilität, jedoch von anderer Form als bei Linsenfehlern, tritt bei Fehlern des magnetischen Führungsfeldes am Ort der idealen Gleichgewichtsbahn auf.

Fehler dieser Art führen mathematisch zu inhomogenen Zusatzgliedern in den Bewegungsgleichungen derart, daß die rechten Seiten der Gl.(2.1) zu ergänzen sind durch die Glieder

$$\begin{aligned} & \frac{e}{p \cdot c} B_x(0, s, 0) \text{ für die } x\text{-Richtung} \\ & - \frac{e}{p \cdot c} B_z(0, s, 0) \text{ für die } z\text{-Richtung,} \end{aligned}$$

wobei $B_x(0, s, 0)$ und $B_z(0, s, 0)$ die Komponenten des Störfeldes am Ort der idealen Gleichgewichtsbahn ($x = z = 0$) bedeuten. Verwenden wir wie in Gl.(2.3b) die Matrixschreibweise, so ergeben sich damit die neuen Bewegungsgleichungen

$$\eta' + \Omega \eta = \gamma \tag{7.1}$$

$$\text{mit } \gamma = \frac{e}{p \cdot c} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ B_x(0, s, 0) \\ 0 \\ -B_z(0, s, 0) \end{pmatrix},$$

deren allgemeine Lösung in der Form

$$\eta(s) = M(s, s_0) \left\{ \eta(s_0) + \int_{s_0}^s M^{-1}(c, s_0) \gamma(c) dc \right\} \tag{7.2}$$

geschrieben werden kann.

In der Maschinentheorie ist es nun üblich, die allgemeine Teilchenbahn unter dem Einfluß von Feldfehlern darzustellen als Superposition einer freien Betatronschwingung

$$\eta(s) = M(s, s_0) \eta(s_0), \tag{7.3}$$

- diese Schwingungen genügen der homogenen Gleichung (2.3b) und können als bekannt vorausgesetzt werden -, und einer nach einem Umlauf in sich geschlossenen Bahn $\hat{y}(s)$, welche den noch zu bestimmenden "closed orbit" angibt, der an die Stelle der idealen Gleichgewichtsbahn der ungestörten Maschine tritt.

Zur Berechnung dieser neuen Gleichgewichtsbahn bedenken wir, daß $\hat{y}(s)$ außer Gl.(7.1) und damit (7.2) noch die Periodizitätsbedingung

$$\hat{y}(s_0 + C) = \hat{y}(s_0) \quad (7.4)$$

erfüllen muß, die in Verbindung mit Gl.(7.2) eine Bestimmungsgleichung für den Anfangsvektor $\hat{y}(s_0)$ liefert mit der Lösung

$$\hat{y}(s_0) = [1 - M(s_0 + C, s_0)]^{-1} M(s_0 + C, s_0) \times \int_{s_0}^{s_0+C} M^{-1}(\sigma, s_0) y(\sigma) d\sigma. \quad (7.5)$$

Die sich beim Einsetzen von (7.4) in (7.2) ergebende Gleichung für $\hat{y}(s)$ schreibt man zweckmäßigerweise in der Form

$$\hat{y}(s) = M(s, s_0) \{ [1 - M(s_0 + C, s_0)]^{-1} \cdot M(s_0 + C, s_0) + 1 \} \times \int_{s_0}^s M^{-1}(\sigma, s_0) y(\sigma) d\sigma + (7.6) + M(s, s_0) [1 - M(s_0 + C, s_0)]^{-1} \cdot M(s_0 + C, s_0) \int_{s_0+C}^s M^{-1}(\sigma + C, s_0) y(\sigma) d\sigma.$$

Zur weiteren Umformung der Gl.(7.6) beachten wir, daß die Umlaufmatrix $M(s_0 + C, s_0)$ mit Hilfe der Matrix

$$W(s_0) = (w_1(s_0), w_2(s_0), w_3(s_0), w_4(s_0)),$$

die die Eigenwertgleichung

$$M(s_0 + C, s_0) W(s_0) = W(s_0) \cdot \Omega$$

mit

$$\Omega = \begin{pmatrix} e^{-i \cdot 2\pi Q_T} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{+i \cdot 2\pi Q_T} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i \cdot 2\pi Q_T} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{+i \cdot 2\pi Q_T} \end{pmatrix}$$

erfüllt, auf Hauptachsen transformiert werden kann:

$$W^{-1}(s_0) M(s_0 + c, s_0) W(s_0) = \Omega$$

Unter Berücksichtigung der Beziehungen

$$\begin{aligned} [1 - M(s_0 + c, s_0)]^{-1} &= [W(s_0) \cdot (1 - \Omega) \cdot W^{-1}(s_0)]^{-1} \\ &= W(s_0) \cdot (1 - \Omega)^{-1} \cdot W^{-1}(s_0); \end{aligned}$$

$$W(\sigma) = M(\sigma, s_0) W(s_0), \text{ also } M(\sigma, s_0) = W(\sigma) \cdot W^{-1}(s_0);$$

$$W(\sigma + c) = W(\sigma) \cdot \Omega$$

ergibt sich dann der closed orbit zu

$$\hat{y}(s) = W(s) \cdot [1 - \Omega]^{-1} \cdot \int_{s-c}^s W^{-1}(\sigma) y(\sigma) d\sigma$$

$$\text{mit } [1 - \Omega]^{-1} = \left(\left(\frac{1}{1 - e^{-i \cdot 2\pi Q_m}} \cdot \delta_{mn} \right) \right). \quad (7.7)$$

(Dabei kann die in (7.7) auftretende Matrix $W^{-1}(\sigma)$ nach Gl.(5.10b) noch in der Form

$$W^{-1} = -\frac{1}{2i} T \tilde{W} \tilde{Q} T Q$$

angegeben werden).

Insbesondere erhält man für die x- und z-Komponente des closed orbit die Beziehungen

$$\begin{aligned} x(s) &= \frac{\sqrt{\beta_{Ix}(s)}}{2 \sin \pi Q_I} \cdot \frac{e}{p \cdot c} \int_s^{s+c} d\sigma \cdot \left\{ B_x(\sigma) \cdot \sqrt{\beta_{Ix}(\sigma)} \cos[\psi_{Ix}(\sigma) - \psi_{Ix}(s) - \pi Q_I] \right. \\ &\quad \left. - B_x(\sigma) \cdot \sqrt{\beta_{Ix}(\sigma)} \cos[\psi_{Ix}(\sigma) - \psi_{Ix}(s) - \pi Q_I] \right\} \\ &+ \frac{\sqrt{\beta_{Iz}(s)}}{2 \sin \pi Q_I} \cdot \frac{e}{p \cdot c} \int_s^{s+c} d\sigma \cdot \left\{ B_z(\sigma) \cdot \sqrt{\beta_{Iz}(\sigma)} \cos[\psi_{Iz}(\sigma) - \psi_{Iz}(s) - \pi Q_I] \right. \\ &\quad \left. - B_z(\sigma) \cdot \sqrt{\beta_{Iz}(\sigma)} \cos[\psi_{Iz}(\sigma) - \psi_{Iz}(s) - \pi Q_I] \right\}; \end{aligned}$$

(7.8a)

$$z(s) = \frac{\sqrt{\beta_{I_2}(s)}}{2 \sin \pi Q_I} \cdot \frac{e}{p \cdot c} \int_s^{s+c} d\sigma \cdot \left\{ -B_x(\sigma) \cdot \sqrt{\beta_{I_2}(\sigma)} \cos[\psi_{I_2}(\sigma) - \psi_{I_2}(s) - \pi Q_I] \right. \\ \left. + B_z(\sigma) \cdot \sqrt{\beta_{I_2}(\sigma)} \cos[\psi_{I_2}(\sigma) - \psi_{I_2}(s) - \pi Q_I] \right\} \\ + \frac{\sqrt{\beta_{II_2}(s)}}{2 \sin \pi Q_{II}} \cdot \frac{e}{p \cdot c} \int_s^{s+c} d\sigma \cdot \left\{ -B_x(\sigma) \cdot \sqrt{\beta_{II_2}(\sigma)} \cos[\psi_{II_2}(\sigma) - \psi_{II_2}(s) - \pi Q_{II}] \right. \\ \left. + B_z(\sigma) \cdot \sqrt{\beta_{II_2}(\sigma)} \cos[\psi_{II_2}(\sigma) - \psi_{II_2}(s) - \pi Q_{II}] \right\},$$

die für den Fall der Entkopplung in die bekannten, von C o u r a n t und S n y d e r angegebenen Gleichungen

$$\chi(s) = \frac{\sqrt{\beta_x(s)}}{2 \sin \pi Q_x} \cdot \frac{e}{p \cdot c} \int_s^{s+c} d\sigma \cdot B_z(\sigma) \sqrt{\beta_x(\sigma)} \cos[\psi_x(\sigma) - \psi_x(s) - \pi Q_x]; \\ z(s) = - \frac{\sqrt{\beta_z(s)}}{2 \sin \pi Q_z} \cdot \frac{e}{p \cdot c} \int_s^{s+c} d\sigma \cdot B_x(\sigma) \sqrt{\beta_z(\sigma)} \cos[\psi_z(\sigma) - \psi_z(s) - \pi Q_z]$$

übergehen (vgl. Kap. VIII.)

Aus Gl.(7.7) und (7.8) ist nun ersichtlich, daß die Komponenten von $\hat{\eta}(s)$ unendlich werden, wenn mindestens eine der beiden Schwingungszahlen Q_I und Q_{II} ganzzahlige Werte annimmt, sofern das Integral nicht gerade verschwindet. In diesem Resonanzfall existiert also kein closed orbit mehr.

Physikalisch kann man leicht einsehen, daß bei ganzzahligem Q_i ($i = I, II$) eine monotone Auswanderung aller Teilchenbahnen auftreten muß, bei denen der Schwingungszustand

$$\eta(s) = \eta \cdot \tilde{\eta}_i(s) \cdot e^{i i \cdot 2\pi Q_i \frac{s}{c}}$$

(siehe Gl.(5.13)) beteiligt ist, wenn man bedenkt, daß das inhomogene Glied $\psi(\sigma)$ der Gl.(7.1) als Störung aufgefaßt werden kann, die an einer festen Stelle bei jedem Teilchenumlauf in gleicher Phase durchlaufen wird, so daß sich die einzelnen Wirkungen der Störung fortwährend superponieren, während sie sich bei nichtganzzahligem Q_i im Laufe der Zeit kompensieren würden.

VIII. Übergang zum Sonderfall der ungekoppelten Betatronschwingungen

Mit der Bestimmung der periodischen Strahl- und Winkel envelopes und der Aufstellung von Stabilitätskriterien haben wir gleichzeitig nachgewiesen, daß die Bedingung (II) aus Abschnitt IV A.) tatsächlich befriedigt werden kann. Zum Schluß müssen wir noch zeigen, daß auch die letzte Forderung (III) in Abschnitt IV A.) erfüllt ist, indem wir prüfen, ob die allgemeine Methode der Enveloppenberechnung, die in der Transformation eines vierdimensionalen Ellipsoides besteht, im Sonderfall entkoppelter Betatronschwingungen auf das in Kap. III.) angegebene Verfahren (Transformation von Phasenellipsen) zurückgeführt werden kann.

Zu dem Zweck schreiben wir jetzt für das an der Einschußstelle $s = s_0$ vorgegebene Ellipsoid (4.1)

$$(4)_{s=s_0} = \left\{ \begin{pmatrix} X_1(s_0) \\ X_1'(s_0) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cos \delta_I + \begin{pmatrix} X_2(s_0) \\ X_2'(s_0) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \sin \delta_I \right\} \cdot \sqrt{\varepsilon_I} \cos \chi \quad (8.1)$$

$$+ \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z_3(s_0) \\ z_3'(s_0) \end{pmatrix} \cos \delta_{II} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z_4(s_0) \\ z_4'(s_0) \end{pmatrix} \sin \delta_{II} \right\} \cdot \sqrt{\varepsilon_{II}} \sin \chi$$

Da die Übertragungsmatrix $\mathcal{M}(s, s_0)$ im ungekoppelten Fall

$$\mathcal{M}(s, s_0) = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_x(s, s_0) & 0 \\ 0 & \mathcal{M}_z(s, s_0) \end{pmatrix} \quad (8.2)$$

lautet, geht dieses Ellipsoid während der Teilchenbewegung über in

$$\eta = \left\{ \begin{pmatrix} X_1(s) \\ X_1'(s) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cos \delta_I + \begin{pmatrix} X_2(s) \\ X_2'(s) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \sin \delta_I \right\} \cdot \sqrt{\varepsilon_I} \cos \chi$$

$$+ \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z_3(s) \\ z_3'(s) \end{pmatrix} \cos \delta_{II} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z_4(s) \\ z_4'(s) \end{pmatrix} \sin \delta_{II} \right\} \cdot \sqrt{\varepsilon_{II}} \sin \chi \quad (8.3)$$

mit

$$\begin{pmatrix} X_i(s) \\ X_i'(s) \end{pmatrix} = \mathcal{M}_x(s, s_0) \begin{pmatrix} X_i(s_0) \\ X_i'(s_0) \end{pmatrix}, \quad (i = 1, 2);$$

$$\begin{pmatrix} z_i(s) \\ z_i'(s) \end{pmatrix} = \mathcal{M}_z(s, s_0) \begin{pmatrix} z_i(s_0) \\ z_i'(s_0) \end{pmatrix}, \quad (i = 3, 4),$$

behält also seine besondere Form, in der jeweils zwei Komponenten der Vektoren η_1 und η_2 bzw. η_3 und η_4 verschwinden, bei.

Diese spezielle Form besitzt auch das periodische Ellipsoid, da wegen der Diagonalgestalt der Ulaufmatrix $\mathcal{M}(s_0 + C, s_0)$ bei den Eigenvektoren η_k von $\mathcal{M}(s_0 + C, s_0)$ ebenfalls zwei Komponenten gleich Null werden.

Betrachten wir nun die Projektionen des Ellipsoids (8.3) auf die $x - x'$ - und $z - z'$ -Ebene, so erhält man aus den Gleichungen des Abschnitts IV E.) als Bestimmungsparameter für die Projektionsellipsen in der $x - x'$ -Ebene:

$$\begin{aligned} E_x &= \sqrt{\varepsilon_I} \sqrt{X_1'^2 + X_2'^2}; \\ E_x' &= \frac{\varepsilon_I \cdot (X_1 X_1' + X_2 X_2')}{E_x}; \\ H_x &= \sqrt{\varepsilon_I} \sqrt{X_1'^2 + X_2'^2}; \end{aligned} \quad (8.4a)$$

in der $z - z'$ -Ebene:

$$\begin{aligned} E_z &= \sqrt{\varepsilon_{II}} \sqrt{z_3'^2 + z_4'^2}; \\ E_z' &= \frac{\varepsilon_{II} \cdot (z_3 z_3' + z_4 z_4')}{E_z}; \\ H_z &= \sqrt{\varepsilon_{II}} \sqrt{z_3'^2 + z_4'^2}. \end{aligned} \quad (8.4b)$$

Zu den gleichen Ergebnissen gelangen wir jedoch auch, indem wir nach der in Kap. III.) beschriebenen, im ungekoppelten Fall üblichen Methode

die Phasenellipsen

$$y = \sqrt{\epsilon_I} \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1' \end{pmatrix} \cos \delta_I + \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2' \end{pmatrix} \sin \delta_I \right\} \quad (8.5)$$

$$z = \sqrt{\epsilon_{II}} \left\{ \begin{pmatrix} z_3 \\ z_3' \end{pmatrix} \cos \delta_{II} + \begin{pmatrix} z_4 \\ z_4' \end{pmatrix} \sin \delta_{II} \right\}$$

durch das Linsensystem transformieren und die zugehörigen Projektionen auf die x - und x' -Achse bzw. z - und z' -Achse ermitteln.

In diesem Sinne kann man sagen, daß unser allgemeines Verfahren zur Bestimmung der Strahl- und Winkelenveloppen, welches auch bei Kopplung angewendet werden kann, bei Entkopplung der Betatronschwingungen zur speziellen Methode der Ellipsentransformation äquivalent ist, womit wir in der Tat den Nachweis für die Gültigkeit der Bedingung (III) erbracht haben.

Aus Gl.(4.33) und (4.35) ergibt sich noch, daß der Strahlquerschnitt für das Ellipsoid (8.3) eine zur x - und z -Achse symmetrische Ellipse darstellt, während Gl.(4.16, 17, 18) den Liouvilleschen Satz des zweidimensionalen Falles liefert:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \text{konst.}, \\ \epsilon_z &= \text{konst.}, \end{aligned} \quad (8.6)$$

Weiterhin reduziert sich die Bestimmungsgleichung

$$| M(s_0 + C, s_0) - \lambda \cdot \underline{1} | = 0$$

für die Eigenwerte der Umlaufmatrix, die eine Gleichung vierten Grades in λ darstellt, auf die beiden quadratischen Gleichungen

$$| M_x(s_0 + C, s_0) - \lambda \cdot \underline{1} | = 0;$$

$$| M_z(s_0 + C, s_0) - \lambda \cdot \underline{1} | = 0,$$

so daß die Größen Q_I und Q_{II} im ungekoppelten Fall übergehen in die bekannten Schwingungszahlen Q_x und Q_z aus Kap.III.).

Abschließend können wir somit sagen, daß die in der vorliegenden Arbeit entwickelte Theorie der Teilchenbewegung in Beschleunigern und Storage-Ringen als eine echte Erweiterung der "ungekoppelten" Maschinentheorie anzusehen ist, die es ermöglicht, auch bei Kopplung der Betatronschwingungen Aussagen über den Verlauf der Enveloppen und der Stabilität des Strahls zu gewinnen.

ANHANG I.

Berechnung des mittleren Strahlquerschnittes

Nach dem Floquetschen Theorem (siehe Gl.(5.13)) kann die Lösung der Bewegungsgleichungen (2.1) bzw. (2.3) in der allgemeinen Form (wir setzen Stabilität der Teilchenbewegung voraus)

$$\eta = A_1 \cdot \tilde{u}_I(s) e^{-i \cdot 2\pi Q_I \frac{s}{C}} + A_1^* \cdot \tilde{u}_I^*(s) e^{+i \cdot 2\pi Q_I \frac{s}{C}} + A_2 \cdot \tilde{u}_II(s) e^{-i \cdot 2\pi Q_{II} \frac{s}{C}} + A_2^* \cdot \tilde{u}_II^*(s) e^{+i \cdot 2\pi Q_{II} \frac{s}{C}} \quad (1)$$

angegeben werden. Insbesondere erhält man für die x- und z-Komponente der Betatronschwingung

$$X = A_1 \cdot u_{I1} e^{-i \cdot 2\pi Q_I \frac{s}{C}} + A_1^* \cdot u_{I1}^* e^{+i \cdot 2\pi Q_I \frac{s}{C}} + A_2 \cdot u_{II1} e^{-i \cdot 2\pi Q_{II} \frac{s}{C}} + A_2^* \cdot u_{II1}^* e^{+i \cdot 2\pi Q_{II} \frac{s}{C}}; \quad (2a)$$

$$z = A_1 \cdot u_{I3} e^{-i \cdot 2\pi Q_I \frac{s}{C}} + A_1^* \cdot u_{I3}^* e^{+i \cdot 2\pi Q_I \frac{s}{C}} + A_2 \cdot u_{II3} e^{-i \cdot 2\pi Q_{II} \frac{s}{C}} + A_2^* \cdot u_{II3}^* e^{+i \cdot 2\pi Q_{II} \frac{s}{C}} \quad (2b)$$

mit (siehe Gl.(5.5))

$$|u_{i1}| = \sqrt{\beta_{ix}} \quad ; \quad |u_{i3}| = \sqrt{\beta_{iz}} \quad (i = I, II).$$

Durch Mittelung über viele Umläufe ergibt sich aus (2a,b)

$$\begin{aligned} \langle X^2 \rangle &= 2 |A_1|^2 \cdot \beta_{Ix} + 2 |A_2|^2 \cdot \beta_{IIx}; \\ \langle z^2 \rangle &= 2 |A_1|^2 \cdot \beta_{Iz} + 2 |A_2|^2 \cdot \beta_{IIz}; \quad (3) \\ \langle Xz \rangle &= 2 |A_1|^2 \cdot J_I + 2 |A_2|^2 \cdot J_{II}. \end{aligned}$$

Allgemein errechnet sich durch Einführung eines gedrehten $\tilde{x} - \tilde{z}$ -Koordinatensystems

$$\begin{aligned}\tilde{X}(\delta) &= X \cdot \cos \delta + z \cdot \sin \delta \\ \tilde{Z}(\delta) &= -X \cdot \sin \delta + z \cdot \cos \delta\end{aligned}\quad (4)$$

das mittlere Amplitudenquadrat der Betatronschwingung längs der x -Achse, die mit der x -Achse den Winkel δ einschließt, zu

$$\begin{aligned}\langle \tilde{X}^2(\delta) \rangle &= \frac{1}{2} \cos 2\delta \cdot [\langle X^2 \rangle - \langle z^2 \rangle] + \\ &+ \sin 2\delta \cdot \langle Xz \rangle + \frac{1}{2} [\langle X^2 \rangle + \langle z^2 \rangle],\end{aligned}\quad (5)$$

wobei die Größen $\langle x^2 \rangle$, $\langle z^2 \rangle$ und $\langle xz \rangle$ aus (3) zu entnehmen sind.

Der mittlere Strahlquerschnitt wird nun beschrieben durch die Amplitude

$$\eta(\delta) = \sqrt{\langle \tilde{X}^2(\delta) \rangle}, \quad (6)$$

die die Projektion dieses Querschnitts auf die \tilde{x} -Achse angibt.

Daraus folgt aber, daß der mittlere Strahlquerschnitt eine Ellipse darstellt mit der Gleichung

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} X \\ z \end{pmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{\langle X^2 \rangle}} \left\{ \begin{pmatrix} \langle X^2 \rangle \\ \langle Xz \rangle \end{pmatrix} \cos \varphi + \right. \\ &\left. + \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{\langle X^2 \rangle \cdot \langle z^2 \rangle - \langle Xz \rangle^2} \end{pmatrix} \sin \varphi \right\}.\end{aligned}\quad (7)$$

(Man zeigt leicht, daß die Ellipse (7) die durch (5) und (6) gegebene Projektion auf die x -Achse besitzt).

Durch Elimination der Größen $\cos \varphi$ und $\sin \varphi$ entsteht aus (7)

$$\begin{aligned}\langle z^2 \rangle \cdot X^2 - 2 \langle Xz \rangle \cdot Xz + \langle X^2 \rangle \cdot z^2 &= \bar{\epsilon}_{x_1}^2; \\ \bar{\epsilon}_{x_2} &= \sqrt{\langle X^2 \rangle \langle z^2 \rangle - \langle Xz \rangle^2}.\end{aligned}\quad (8b)$$

Vergleicht man nunmehr die Ellipse (8) mit dem Strahlquerschnitt (4.30) des vierdimensionalen Ellipsoids (4.4), so sieht man, daß beide Ellipsen übereinstimmen, wenn

$$\begin{aligned}|A_1|^2 &= \frac{1}{2} \epsilon_I \\ |A_2|^2 &= \frac{1}{2} \epsilon_{II}\end{aligned}$$

(9)

gesetzt wird.

Somit kann auch der mittlere Strahlquerschnitt durch Transformation eines vierdimensionalen Ellipsoides gewonnen werden.

ANMERKUNG: Auf Grund der Strahlungseffekte stellen sich in einem Zirkularbeschleuniger oder Storage-Ring mittlere, aus der Strahlungstheorie zu bestimmende Werte für die Koeffizienten $|A_1|^2$ und $|A_2|^2$ ein, die wir uns in (9) eingesetzt zu denken haben, um den mittleren Strahlquerschnitt im Strahlungsgleichgewicht zu bekommen.

ANHANG II.

Berechnung der Eigenwerte und Eigenvektoren der Umlaufsmatrix

Die Eigenwerte λ_k und Eigenvektoren w_k der Umlaufsmatrix $M(s_0 + C, s_0)$ können in expliziter Form angegeben werden, und zwar auf Grund der Beziehung

$$\tilde{M} \tilde{R} \tau R M = \tilde{R} \tau R, \quad (1)$$

die in Abschnitt VI C.) abgeleitet worden ist (siehe Gl.(6.14)).

Zur Vereinfachung der Rechnungen untersuchen wir zunächst anstelle von M die Matrix

$$N = R M R^{-1}, \quad (2)$$

welche (da N zu M ähnlich ist), die gleichen Eigenwerte λ_k wie M und die Eigenvektoren

$$w_k = R w_k$$

(w_k = Eigenvektor von M) besitzt. Dann geht (1) über in die Gleichung

$$\tilde{N} \tau N = \tau, \quad (3)$$

die besagt, daß N eine "symplektische" Matrix darstellt (1).

1. Die Eigenwerte

Aus Gl.(3) ist ersichtlich, daß die inverse Matrix N^{-1} in der Form

$$N^{-1} = -\tau \tilde{N} \tau \quad (4)$$

geschrieben werden kann (es gibt $\mathcal{T}^2 = -1$), oder, wenn

$$\pi = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}; \quad \mathcal{T} = \begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

gesetzt wird ($\alpha, \beta, \gamma, \delta$ = zweireihige Untermatrizen),

$$\pi^{-1} = \begin{pmatrix} -\gamma \tilde{\alpha} \gamma & -\gamma \tilde{\beta} \gamma \\ -\gamma \tilde{\gamma} \gamma & -\gamma \tilde{\delta} \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & \bar{\beta} \\ \bar{\gamma} & \bar{\delta} \end{pmatrix}, \quad (6)$$

wobei $\bar{\alpha} = (\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}, \bar{\delta})$ die Matrix

$$\bar{\alpha} = -\gamma \tilde{\alpha} \gamma = \begin{pmatrix} \kappa_{12} & -\kappa_{12} \\ -\kappa_{21} & \kappa_{11} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \tilde{\alpha} = \begin{pmatrix} \kappa_{11} & \kappa_{12} \\ \kappa_{21} & \kappa_{22} \end{pmatrix} \quad (7)$$

bedeutet.

Da $\lambda_k \neq 0$ ist (siehe Abschnitt V B.), gilt neben der Eigenwertgleichung

$$\pi \, u_0 = \lambda \, u_0 \quad (8)$$

bzw.

$$(\alpha - \lambda \cdot 1) \varphi_1 + \beta \varphi_2 = 0; \quad (9a)$$

$$\gamma \varphi_1 + (\delta - \lambda \cdot 1) \varphi_2 = 0 \quad (9b)$$

$$\text{mit} \quad u_0 = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$$

noch die Beziehung

$$\pi^{-1} \, u_0 = \frac{1}{\lambda} \, u_0 \quad (10)$$

bzw.

$$(\bar{\alpha} - \lambda^{-1} \cdot 1) \varphi_1 + \bar{\beta} \varphi_2 = 0; \quad (11a)$$

$$\bar{\gamma} \varphi_1 + (\bar{\delta} - \lambda^{-1} \cdot 1) \varphi_2 = 0. \quad (11b)$$

Addiert man die Gln. (9a) und (11a) sowie (9b) und (11b), so folgt

$$(s_p \alpha - \Delta) \varphi_1 + (\mathcal{L} + \bar{\mathcal{L}}) \varphi_2 = 0; \quad (12a)$$

$$(\mathcal{L} + \bar{\mathcal{L}}) \varphi_1 + (s_p \beta - \Delta) \varphi_2 = 0 \quad (12b)$$

mit

$$\Delta = \lambda + \lambda^{-1}. \quad (13)$$

Durch Elimination von φ_1 bzw. φ_2 entsteht aus (12a,b)

$$\{ (\mathcal{L} + \bar{\mathcal{L}})(\mathcal{L} + \bar{\mathcal{L}}) - 1 \cdot (s_p \alpha - \Delta)(s_p \beta - \Delta) \} \varphi_1 = 0; \quad (14a)$$

$$\{ (\mathcal{L} + \bar{\mathcal{L}})(\mathcal{L} + \bar{\mathcal{L}}) - 1 \cdot (s_p \alpha - \Delta)(s_p \beta - \Delta) \} \varphi_2 = 0. \quad (14b)$$

Nun gilt ...

$$\begin{cases} (\mathcal{L} + \bar{\mathcal{L}})(\mathcal{L} + \bar{\mathcal{L}}) = \frac{1}{2} \cdot \det(\mathcal{L} + \bar{\mathcal{L}}); \\ (\mathcal{L} + \bar{\mathcal{L}})(\mathcal{L} + \bar{\mathcal{L}}) = \frac{1}{2} \cdot \det(\mathcal{L} + \bar{\mathcal{L}}), \end{cases} \quad (15)$$

wie man durch Einsetzen von (7) in die linke Seite von (15) leicht bestätigt.

Damit wird aus (14)

$$\{ \det(\mathcal{L} + \bar{\mathcal{L}}) - (s_p \alpha - \Delta)(s_p \beta - \Delta) \} \varphi = 0, \quad (16)$$

und als Bestimmungsgleichung für die Größe Δ gewinnen wir die Beziehung

$$(s_p \alpha - \Delta)(s_p \beta - \Delta) = \det(\mathcal{L} + \bar{\mathcal{L}})$$

mit der Lösung

$$\Delta_{1,2} = \frac{1}{2} \left\{ (s_p \alpha + s_p \beta) \pm \left[(s_p \alpha - s_p \beta)^2 + 4 \det(\mathcal{L} + \bar{\mathcal{L}}) \right]^{1/2} \right\}. \quad (17)$$

Diese Gleichung wurde bereits von Courant und Snyder angegeben (1).

Aus Gl.(17) errechnen sich schließlich die Eigenwerte λ_k unter Berücksichtigung von (13) zu

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{1}{2} \{ \Delta_1 + \sqrt{\Delta_1^2 - 4} \} ; \\ \lambda_2 &= \frac{1}{2} \{ \Delta_1 - \sqrt{\Delta_1^2 - 4} \} ; \\ \lambda_3 &= \frac{1}{2} \{ \Delta_2 + \sqrt{\Delta_2^2 - 4} \} ; \\ \lambda_4 &= \frac{1}{2} \{ \Delta_2 - \sqrt{\Delta_2^2 - 4} \} .\end{aligned}\tag{18}$$

2. Die Eigenvektoren

Da die Eigenwerte λ_k jetzt bekannt sind, können die Eigenvektoren $w_k = \mathcal{R} w_k$ nunmehr nach Gl.(8) bzw. (9) berechnet werden. Dabei ist es zweckmäßig, Gl.(9a) durch Gl.(12a) zu ersetzen, aus der sich sofort

$$v_1 = - \frac{(\mathcal{L} + \bar{\mathcal{L}}) v_2}{(s_p \sigma - \Delta)}\tag{19}$$

ergibt, wobei Δ aus Gl.(17) zu entnehmen ist. Setzt man (19) in (9b) ein, so wird

$$- \frac{\mathcal{L}(\mathcal{L} + \bar{\mathcal{L}}) v_2}{(s_p \sigma - \Delta)} + (\mathcal{D} - \lambda \cdot \mathbb{1}) v_2 = 0$$

oder mit $\mathcal{L} \bar{\mathcal{L}} = \mathbb{1} \cdot \det \mathcal{L}$

$$\{ - \mathcal{L} \mathcal{L} + [\mathcal{D} - (\det \mathcal{L} + \lambda) \cdot \mathbb{1}] \cdot (s_p \sigma - \Delta) \} v_2 = 0,$$

und wir erhalten als Bestimmungsgleichung für den Vektor

$$v_2 = \begin{pmatrix} w_3 \\ w_4 \end{pmatrix}\tag{20}$$

den Ausdruck

$$\{ - (\mathcal{L} \mathcal{L})_{11} + [D_{11} - \det \mathcal{L} - \lambda] \cdot (s_p \sigma - \Delta) \} \cdot w_3 - (\mathcal{L} \mathcal{L})_{12} \cdot w_4 = 0$$

mit der Lösung

$$w_3 = N \cdot (C_{11} B_{12} + C_{12} B_{11}) ;\tag{21}$$

$$w_4 = N \{ (C_{11} B_{11} + C_{12} B_{21}) - (D_{11} - \det \mathcal{L} - \lambda) \cdot (s_p \sigma - \Delta) \}.$$

Nach Ermittlung von φ_2 kann dann der Vektor

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

nach Gl.(19) berechnet werden.

Damit haben wir den zum Eigenwert λ gehörigen Eigenvektor

$$\eta_0 = Q^{-1} \eta = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \quad (22)$$

der Matrix \mathcal{M} bzw.

$$\eta = Q^{-1} \eta_0 \quad (23)$$

der Umlaufmatrix \mathcal{M} bis auf einen Normierungsfaktor N bestimmt. Der Faktor N ist schließlich durch Gl.(5.10) festgelegt.

Abschließend erwähnen wir noch, daß für die Gültigkeit der Gl.(19)

$$(S_p \mathcal{M} - \Delta) \neq 0$$

vorausgesetzt werden muß.

Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so können die Gln.(12a) und (9b) durch (12b) und (9a) ersetzt werden. Aus (12b) folgt dann sofort

$$\varphi_2 = - \frac{(L + \bar{L}) \varphi_1}{(S_p \mathcal{J} - \Delta)} \quad (24)$$

falls

$$(S_p \mathcal{J} - \Delta) \neq 0$$

ist, und Gl.(9a) liefert in Verbindung mit Gl.(24) eine Beziehung zur Berechnung des Vektors φ_1 .

Gilt sowohl

$$(S_p \mathcal{M} - \Delta) = 0$$

als auch

$$(S_p \mathcal{J} - \Delta) = 0,$$

so ergibt sich nach Gl.(17)

$$\Delta_1 = \Delta_2$$

und somit

$$\lambda_1 = \lambda_3,$$

$$\lambda_2 = \lambda_4,$$

d.h. das Eigenwertspektrum ist entartet und die Teilchenbewegung folglich (entweder entkoppelt oder) instabil. Diesen Fall können wir außer acht lassen.

ANHANG III.

Berechnung der Strahlenveloppen unter Berücksichtigung der Dispersion

Bei der Berechnung der Strahlenveloppen in Kap. IV.) und V.) ist die Dispersion außer acht gelassen worden, die auftritt, wenn die Sollbahn gekrümmt ist (Krümmungsradius = $\rho(s)$) und die Teilchen eine Impulsabweichung Δp von Sollimpuls p_0 besitzen. Diese Aufspaltung der Teilchenbahnen nach Impulsen können wir jedoch in einfacher Weise in unseren Formalismus einbauen, wie anschließend gezeigt werden soll.

Im Falle einer Impulsabweichung lauten die Bewegungsgleichungen der Teilchen

$$\begin{aligned} x'' + \kappa_1 \cdot x + (N + R') \cdot z + 2R \cdot z' &= \frac{1}{\beta} \frac{\Delta p}{\rho} ; \\ z'' + \kappa_2 \cdot z + (N - R') \cdot x - 2R \cdot x' &= 0 \end{aligned} \quad (1a)$$

oder in Matrixschreibweise

$$\begin{aligned} y' + \mathcal{M} y &= \gamma \\ \gamma &= \frac{1}{\beta} \frac{\Delta p}{\rho} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1b)$$

wobei die Matrix \mathcal{M} aus Gl.(2.5) zu entnehmen ist.

Ein solches inhomogenes Gleichungssystem ist bereits in Kap. VIII.) bei der Bestimmung des closed orbit aufgetreten, und die dort angegebene Lösung in Gl.(7.7) und (7.8) kann übernommen werden, indem wir $\frac{p}{\beta \cdot c} B_x$ durch $\frac{1}{\beta} \frac{\Delta p}{\rho}$ und B_x durch 0 ersetzen.

Der Lösungsvektor von (1) ist in der Form

$$\begin{pmatrix} y(s) \\ \Delta p / \rho \end{pmatrix} = \hat{\mathcal{M}}(s, s_0) \begin{pmatrix} y(s_0) \\ \Delta p / \rho \end{pmatrix} \quad (2)$$

darstellbar mit

$$\hat{M}(s, s_0) = \begin{pmatrix} M(s, s_0) & \varphi(s, s_0) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

wobei M die Übertragungsmatrix des homogenen Systems

$$\dot{\eta} + M \eta = 0$$

bedeutet und $\varphi(s, s_0)$ eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems (9b) für $\Delta p/p = 1$ mit der Anfangsbedingung

$$\varphi(s_0, s_0) = 0 \quad (4)$$

angibt.

Um nun allgemein den Strahlquerschnitt bei Dispersion zu ermitteln, erweitern wir unsern Ansatz in Gl.(4.4) für die Teilchengesamtheit, deren Bewegungsablauf untersucht werden soll, indem wir zum fünfdimensionalen $x - x' - z - z' - \Delta p/p$ -Raum übergehen und dort ein Ellipsoid der Form

$$\begin{aligned} \hat{\eta}(s; \varphi, \chi, \delta_I, \delta_{II}) = & \cos \varphi \cdot \frac{1}{2} \left\{ \cos \chi \cdot \sqrt{\varepsilon_I} \left[\begin{pmatrix} \eta_I(s_0) \\ 0 \end{pmatrix} e^{i\delta_I} + \begin{pmatrix} \eta_I^*(s_0) \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\delta_I} \right] \right. \\ & + \sin \chi \cdot \sqrt{\varepsilon_{II}} \left[\begin{pmatrix} \eta_{II}(s_0) \\ 0 \end{pmatrix} e^{i\delta_{II}} + \begin{pmatrix} \eta_{II}^*(s_0) \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\delta_{II}} \right] \left. \right\} \quad (5) \\ & + \sin \varphi \cdot \frac{\Delta p}{p} \cdot \begin{pmatrix} \eta_5(s_0) \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \eta_I &= \eta_1 - i \cdot \eta_2, \\ \eta_{II} &= \eta_3 - i \cdot \eta_4 \end{aligned}$$

vorgeben, das von den fünf Vektoren η_ν ($\nu = 1, 2, 3, 4, 5$) aufgespannt wird.

Dieses Ellipsoid geht während der Teilchenbewegung über in

$$\begin{aligned} \hat{\eta}(s; \varphi, \chi, \delta_I, \delta_{II}) = & \hat{M}(s, s_0) \hat{\eta}(s_0; \varphi, \chi, \delta_I, \delta_{II}) \\ = & \cos \varphi \cdot \frac{1}{2} \left\{ \cos \chi \cdot \sqrt{\varepsilon_I} \left[\begin{pmatrix} \eta_I(s) \\ 0 \end{pmatrix} e^{i\delta_I} + \begin{pmatrix} \eta_I^*(s) \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\delta_I} \right] \right. \\ & + \sin \chi \cdot \sqrt{\varepsilon_{II}} \left[\begin{pmatrix} \eta_{II}(s) \\ 0 \end{pmatrix} e^{i\delta_{II}} + \begin{pmatrix} \eta_{II}^*(s) \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\delta_{II}} \right] \left. \right\} \\ & + \sin \varphi \cdot \frac{\Delta p}{p} \cdot \begin{pmatrix} \eta_5(s) \\ 1 \end{pmatrix} \quad (6) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \omega_I(s) &= M(s, s_0) \omega_I(s_0) ; \\ \omega_{II}(s) &= M(s, s_0) \omega_{II}(s_0) ; \\ \eta_5(s) &= M(s, s_0) \eta_5(s_0) + \psi(s, s_0), \end{aligned} \quad (7)$$

behält also wiederum seine geometrische Gestalt als Ellipsoid bei.

Für Linearbeschleuniger und Transportsysteme setzt man dabei zweckmäßigerweise

$$\eta_5(s_0) = 0, \quad (8)$$

während die Vektoren ω_I und ω_{II} nach Gl.(5.3) zu normieren sind.

Für Zirkularbeschleuniger dagegen muß außer der Normierung (5.3) noch die Periodizitätsbedingung, daß das Ellipsoid (6) nach einem Umlauf seine ursprüngliche Gestalt wieder annimmt, erfüllt sein. Dies ist genau dann der Fall, wenn neben den Eigenwertgleichungen für die Vektoren ω_I und ω_{II}

$$\begin{aligned} M(s_0 + C, s_0) \omega_I(s_0) &= \lambda_I \cdot \omega_I(s_0) \\ M(s_0 + C, s_0) \omega_{II}(s_0) &= \lambda_{II} \cdot \omega_{II}(s_0) \end{aligned} \quad (9)$$

noch die Bedingung

$$\hat{M}(s_0 + C, s_0) \begin{pmatrix} \eta_5(s_0) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_5(s_0) \\ 1 \end{pmatrix} \quad (10a)$$

oder

$$M(s_0 + C, s_0) \eta_5(s_0) + \psi(s_0 + C, s_0) = \eta_5(s_0) \quad (10b)$$

befriedigt wird.

Um nun die zum Ellipsoid (6) gehörigen Strahlenveloppen zu bestimmen, formen wir Gl.(6) um, indem wir wieder die Amplituden- und Phasenfunktionen nach Gl.(4.7) und (4.8) einführen.

Dann erhält man insbesondere für die x- und z-Komponente von $\hat{\eta}(s; \varphi, \chi, \delta_I, \delta_{II})$ analog zu Gl.(4.10) und (4.19)

$$x = \cos \varphi \cdot \cos (\chi - \chi_x) \cdot \sqrt{\varepsilon_I \beta_{Ix} \cdot \cos^2 (\phi_{Ix} - \delta_I) + \varepsilon_{II} \beta_{IIx} \cdot \cos^2 (\phi - \delta_{II})} + \sin \varphi \cdot \frac{\Delta p}{\rho} \cdot X_5 ; \quad (11a)$$

$$z = \cos \varphi \cdot [\cos \chi \cdot \sqrt{\varepsilon_I \beta_{Iz}} \cos (\phi_{Iz} - \delta_I) + \sin \chi \cdot \sqrt{\varepsilon_{II} \beta_{IIz}} \cos (\phi_{IIz} - \delta_{II})] + \sin \varphi \cdot \frac{\Delta p}{\rho} \cdot z_5 . \quad (11b)$$

Aus Gl. (11a) ist aber ersichtlich, daß die Enveloppe in x-Richtung gegeben ist durch

$$E_x = \sqrt{\varepsilon_I \beta_{Ix} + \varepsilon_{II} \beta_{IIx} + \left(\frac{\Delta p}{\rho}\right)^2 \cdot X_5^2} \\ = \sqrt{\varepsilon_I (X_1^2 + X_2^2) + \varepsilon_{II} (X_3^2 + X_4^2) + \left(\frac{\Delta p}{\rho}\right)^2 \cdot X_5^2} . \quad (12)$$

Dieser Wert wird angenommen für

$$\delta_I = \phi_{Ix} ; \quad \delta_{II} = \phi_{IIx} ; \quad (13a)$$

$$\chi = \chi_x \quad \text{mit} \quad \cos \chi_x = \frac{\sqrt{\varepsilon_I \beta_{Ix}}}{\sqrt{\varepsilon_I \beta_{Ix} + \varepsilon_{II} \beta_{IIx}}} ; \quad (13b)$$

$$\sin \chi_x = \frac{\sqrt{\varepsilon_{II} \beta_{IIx}}}{\sqrt{\varepsilon_I \beta_{Ix} + \varepsilon_{II} \beta_{IIx}}} ;$$

$$\cos \varphi = \frac{\sqrt{\varepsilon_I \beta_{Ix} + \varepsilon_{II} \beta_{IIx}}}{E_x} ; \quad \sin \varphi = \frac{X_5}{E_x} \cdot \frac{\Delta p}{\rho} . \quad (13c)$$

Setzt man (13a,b,c) in (11b) ein, so errechnet sich die zugehörige z-Komponente (d.h. die z-Koordinate des Ellipsenpunktes, der zur $x = E_x$ gehört) unter Berücksichtigung der Gln. (4.7) und (4.8) zu

$$G_x = \frac{1}{E_x} \left\{ \varepsilon_I (X_1 z_1 + X_2 z_2) + \varepsilon_{II} (X_3 z_3 + X_4 z_4) + \left(\frac{\Delta p}{\rho}\right)^2 X_5 z_5 \right\} . \quad (14)$$

Entsprechend findet man für die Enveloppe in z-Richtung

$$E_z = \sqrt{\varepsilon_I \beta_{Iz} + \varepsilon_{II} \beta_{IIz} + \left(\frac{\Delta p}{\rho}\right)^2 \cdot z_5^2} \\ = \sqrt{\varepsilon_I (z_1^2 + z_2^2) + \varepsilon_{II} (z_3^2 + z_4^2) + \left(\frac{\Delta p}{\rho}\right)^2 \cdot z_5^2} , \quad (15)$$

und die zugehörige x-Koordinate des Ellipsenpunktes lautet

$$G_2 = \frac{1}{E_2} \left\{ \epsilon_I (x_1 z_1 + x_2 z_2) + \epsilon_{II} (x_3 z_3 + x_4 z_4) + \left(\frac{\Delta p}{p}\right)^2 x_5 z_5 \right\}, \quad (16)$$

d.h. es gilt wieder

$$E_x G_x = E_2 G_2, \quad (17)$$

Mit den in Gl.(12), (15) und (14) bzw. (16) ist der Strahlquerschnitt wieder eindeutig bestimmt.

Aus den in Kap. VIII.) gewonnenen Ergebnissen können wir schließen, daß die in Gl.(12) und (15) angegebenen Enveloppen E_x und E_z unendlich groß werden, wenn die in Gl.(5.9) definierte Größe Q_I oder Q_{II} ganzzahlige Werte annimmt. In diesem Fall wird die Teilchenbewegung instabil, und ein Strahlquerschnitt kann nicht mehr definiert werden.

Für $\Delta p/p = 0$ erhält man aus (12) und (15) die in Kap. IV.) angegebenen "Enveloppen ohne Dispersion" zurück.

Für Diskussionen und Anregungen möchte ich Fräulein J. Borchardt, Herrn Dr. K. G. Steffen und Herrn Dr. H. O. Wüster recht herzlich danken.

Literatur

- (1) E. D. Courant, H. S. Snyder:
Theory of the Alternating-Gradient-Synchrotron;
Annals of Physics: 3, 1-48 (1958)
- (2) Kolomenski-Lebedev:
Theory of Cyclic Accelerators (1966)
- (3) G. Lüders:
Über den Einfluß von Fehlern des magnetischen Feldes auf die
Betatronsoszillationen im Synchrotron mit starker Stabilisierung.
Nuovo Cim. (10) 2, Suppl. 4, 1075 (1955)
- (4) T. Sigurgeirsson:
Focussing in a Synchrotron with Periodic Field Perturbation
Treatment;
CERN 55-14
- (5) K. G. Steffen:
High Energy Beam Optics (1964)
- (6) G. Leleux:
Orsay, Technischer Bericht 14-64 GL-FB.