

DESY HERA 88-02

März 1988

**Untersuchungen zur dynamischen Akzeptanz von Protonenbeschleunigern
und ihre Begrenzung durch chaotische Bewegung**

Frank Schmidt

II. Institut für Experimentalphysik
Universität Hamburg



DESY behält sich alle Rechte für den Fall der Schutzrechtserteilung und für die wirtschaftliche Verwertung der in diesem Bericht enthaltenen Informationen vor.

DESY reserves all rights for commercial use of information included in this report, especially in case of filing application for or grant of patents.

Untersuchungen zur dynamischen Akzeptanz von Protonenbeschleunigern
und ihre Begrenzung durch chaotische Bewegung

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
des Fachbereichs Physik
der Universität Hamburg

vorgelegt von

Frank Schmidt

aus Hamburg

Hamburg
1987

Gutachter der Dissertation Prof. Dr. B. H. Wiik
 Prof. Dr. P. Schmüser

Gutachter der Disputation Prof. Dr. P. Schmüser
 Prof. Dr. E. Lohrmann

Datum der Disputation 22. Januar 1988

Sprecher des
Fachbereichs Physik
und
Vorsitzender des
Promotionsausschusses Prof. Dr. P. E. Toschek

Zusammenfassung

In dieser Arbeit soll die dynamische Akzeptanz von Protonenbeschleunigern untersucht und ihre Beschränkung durch chaotische Bewegung festgestellt werden.

Für die Simulationen ist das Teilchenbahnsimulationsprogramm RACETRACK (Wrulich /2/) verwendet worden, das auf einen sechs-dimensionalen symplektischen Formalismus erweitert worden ist, um Energieschwingungen zu berücksichtigen.

Durch nichtlineare Feldfehler kann die Teilchenbewegung in einem Beschleuniger auf sogenannten chaotischen Bahnen verlaufen. Teilchen erreichen nach einer gewissen Verweildauer in einem solchen chaotischen Bereich große Schwingungsamplituden und gehen dann an der Vakuumkammerwand verloren. Um eine Akzeptanzgrenze zu definieren, die sich aufgrund der chaotischen Bewegung ergibt, braucht man deshalb ein Verfahren, um chaotische von regulärer Bewegung unterscheiden zu können. Dazu wird der charakteristische Lyapunov-Exponent bestimmt.

Da für die Untersuchungen Rechnungen über lange Zeiten ausgeführt werden, sind die Rundungsfehler, die bei der großen Zahl von Rechnungsoperationen ($\leq 10^{11}$) auftreten, studiert worden.

Als Anwendungsbeispiel sind Rechnungen für HERA gemacht worden. Neben der Bestimmung der Akzeptanz ist auch die Arnold-Diffusion untersucht worden.

Ein anderen Anwendungsbeispiel ist die Bestimmung der Akzeptanzgrenze für DESY III. Das Simulationsprogramm berücksichtigt dabei die adiabatische Energieerhöhung von einem Bereich mit kleinen Geschwindigkeiten ($v \ll c$) bis zum ultrarelativistischen Grenzfall ($v \approx c$).

Abstract

In this thesis the dynamical acceptance of proton accelerators and its reduction because of chaotic motion is studied.

The particle tracking code RACETRACK (Wrulich /2/) is used for these studies. This code has been extended to treat the sixdimensional motion including synchrotron oscillations in a symplectic manner.

Because of nonlinear field errors the motion of particles in an accelerator can be chaotic. Moving in such a chaotic region for some time the particles eventually will reach large amplitudes of oscillation and will finally hit the wall of the vacuum chamber.

To define a border of acceptance caused by chaotic motion it is therefore necessary to have a mean to distinguish between regular and chaotic motion. This can be done by evaluating the characteristic Lyapunov-Exponent.

Since the simulations are taken over a long period of time, the rounding errors are studied, that occur during the very large amount of operations ($\leq 10^{11}$).

As an example simulations for HERA have been performed. Besides finding the border of acceptance, the Arnold Diffusion has been studied.

DESY III has been used as another tracking example. The extended code can consider adiabatic energy rise from low velocities ($v \ll c$) up to the ultrarelativistic case ($v \approx c$).

Inhaltsverzeichnis

	Seite
<u>Einleitung</u>	1
<u>Kapitel 1:</u> Vergleich der Simulationen von Teilchenbahnen mit den Resultaten der nichtlinearen Störungstheorie	
1.1 Einführung	6
1.2 Integrierbare Systeme	6
1.2.1 Eigenschaften der Trajektorien	6
1.2.2 Integrabilitätsbedingung	7
1.2.3 Winkel-Wirkungsvariablen	7
1.2.4 Poincaré-Abbildung	9
1.3 Fast integrierbare Systeme	12
1.3.1 Störungstheorie	12
1.3.2 Resonanzbreitenberechnung	19
1.3.3 Stabilitätsuntersuchungen von Fixpunkten	22
1.3.4 Poincaré-Birkhoff-Theorem	26
1.4 Vergleich der Resultate der Störungstheorie erster und zweiter Ordnung mit Simulationen am Beispiel einer linearen Struktur mit Sextupolfeldern	27
1.4.1 Störungstheorie erster Ordnung	28
1.4.1.1 Summenresonanz $Q_x + 2Q_z = p$	30
1.4.1.2 Differenzenresonanz $Q_x - 2Q_z = p$	36
1.4.2 Störungstheorie zweiter Ordnung	44
1.4.2.1 Resonanz vierter Ordnung $4Q_x = p$	44
1.4.2.2 Resonanz sechster Ordnung $6Q_x = p$	51

	Seite
<u>Kapitel 2: Chaotische Bewegung</u>	54
2.1 Einführung	54
2.2 Chaotische Bewegung in nichtlinearen Systemen	54
2.2.1 KAM-Theorem	54
2.2.2 Verletzung der Bedingungen des KAM-Theorems	57
2.2.2.1 Ungebundene Bewegung	57
2.2.2.2 Bewegung in der Nähe der Separatrix	58
2.2.2.3 Überlappung von Resonanzen	59
2.2.3 Der charakteristische Lyapunov-Exponent	60
2.2.4 Arnold-Diffusion	64
2.2.5 Konsequenzen für die Bewegung in einem Beschleuniger	66
2.3 Simulationsbeispiele für die Entstehung von chaotischer Bewegung	69
2.3.1 Überlappung der Summenresonanz $Q_x + 2Q_z = p_1$ und der horizontalen Resonanz $3Q_x = p_2$	69
2.3.2 Überlappung der Differenzenresonanz $Q_x - 2Q_z = p_1$ und der horizontalen Resonanz $3Q_x = p_2$	77
2.3.3 Chaotische Bewegung in der Nähe der Separatrix einer stabilisierten Resonanz $4Q_x = p$	89
<u>Kapitel 3: Simulationstechniken</u>	95
3.1 Einführung	95
3.2. Das Teilchenbahnsimulationsprogramm RACETRACK	96
3.3 Rundungsfehler	98
3.3.1 Methoden zur Bestimmung von Rundungsfehlern	98
3.3.2 Entwicklung der Rundungsfehler mit der Umlaufzahl N	99

	Seite	
3.3.3	Auswirkungen der Rundungsfehler auf die Bewegung im Phasenraum	101
3.3.3.1	Reguläre Bewegung auf einem KAM-Torus	101
3.3.3.2	Reguläre Bewegung in der Nähe eines instabilen Fixpunktes	103
3.3.3.3	Chaotische Bewegung	105
3.3.4	Methoden zur Korrektur von Rundungsfehlern	114
3.3.5	Erratische Fehler der Rechenmaschine	118
3.4	Numerische Berechnung des charakteristischen Lyapunov-Exponenten	119
3.4.1	1. Methode-Untersuchung des Abstandes im Phasen- raum	120
3.4.1.1	Definition	120
3.4.1.2	Einfluß von Rundungsfehlern auf den Lyapunov- Exponenten	128
3.4.1.3	Unterscheidung zwischen linearem und exponentiellem Wachstum des Abstandes im Phasenraum	135
3.4.2	2. Methode-Bestimmung eines mittleren Wertes für den Lyapunov-Exponenten	142
3.5	Methoden zur Untersuchung des höher- dimensionalen Phasenraums	147
3.5.1	Vierdimensionale Bewegung	147
3.5.1.1	Darstellung durch ein graphisches System	149
3.5.1.2	Nachweis des Aufbruchs eines KAM-Torus	154
3.5.2	Sechsdimensionale Bewegung	159
3.6	Konsequenzen für die Bestimmung der dynamischen Akzeptanz	164
3.7	Gegenüberstellung der Simulationen über kurze Umlaufzahlen und der Langzeitsimulationen	165

	Seite
<u>Kapitel 4: HERA</u>	173
4.1 Einführung	173
4.2 Untersuchungen für die Optik mit Kreuzungswinkel	177
4.2.1 Zweidimensionale Bewegung	178
4.2.2 Vierdimensionale Bewegung	182
4.2.3 Sechsdimensionale Bewegung	186
4.2.4 Dynamische Akzeptanz	189
4.3 Simulationsergebnisse der Optik ohne Kreuzungswinkel	193
4.3.1 Bestimmung der Akzeptanz	194
4.3.2 Arnold-Diffusion	200
4.4 Zusammenfassung der Ergebnisse	202
 <u>Kapitel 5: DESY III</u>	 203
5.1 Einführung	203
5.2 DESY III - Berechnungen mit dem erweiterten RACETRACK-Code	204
5.3 Ergebnisse	208
5.4 Verschiebung der Q-Werte durch Nichtlinearitäten	217
 <u>Anhang 1: Erweiterung des RACETRACK-Codes auf einen sechsdimensionalen symplektischen Formalismus</u>	 223
<u>Anhang 2: Adiabatische Energieänderung</u>	235
<u>Anhang 3: Korrektur von Rundungsfehlern</u>	239
<u>Anhang 4: Bewegung chaotischer Trajektorien im Phasenraum</u>	241
<u>Anhang 5: AufbruchszENARIO von KAM-Tori in vier Dimensionen</u>	245
<u>Anhang 6: Multipolkoeffizienten der combined function-Magnete von DESY III</u>	255

Einleitung

Bei DESY wird die Hadron-Elektron-Ringanlage HERA gebaut, mit der man die Wechselwirkung von Elektronen mit Protonen untersuchen kann.

Die 6.3 km lange Anlage ist ausgelegt, um Elektronen auf 30 GeV und Protonen auf 820 GeV (Injektionsenergie 14 bzw. 40 GeV) in zwei übereinanderliegenden Ringen zu beschleunigen und in drei der vier geraden Stücken zur Kollision zu bringen. Mit diesen Energien der beiden Teilchenstrahlen läßt sich eine Schwerpunktsenergie von 314 GeV erzielen. Die erreichbare Luminosität wird dabei bei $2 \times 10^{31} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$ liegen.

Diese Schwerpunktsenergie und Luminosität reichen aus, um in ein neues kinematisches Gebiet jenseits der Massenskala ($M_W, M_Z \approx 90 \text{ GeV}$) der schwachen Wechselwirkung vorzustoßen.

HERA ist als Speicherring konzipiert worden, das heißt, daß die Teilchen nach Erreichen der gewünschten Endenergie (Beschleunigungsdauer etwa 10 Minuten) über lange Zeit im Beschleuniger gehalten werden sollen. Da die Teilchen in HERA 20 μs für einen Umlauf brauchen, bedeuten 10 Stunden Speicherzeit somit $\approx 2 \times 10^9$ Umläufe (die Teilchen legen dabei eine Strecke von ca. 10^{10} km zurück). Bei einer derart großen Umlaufzahl können selbst kleine Fehler der Magnete, die den Strahl ablenken und fokussieren, zu Instabilitäten der Schwingungen um die Designbahn führen. Bei Elektronen werden jedoch diese Schwingungen gedämpft, da durch Synchrotronstrahlung abgegebene Energie dem System ständig wieder zugeführt wird. Bei Protonen hingegen ist diese Abstrahlung der Energie auf Grund der etwa 2000-fach größeren Masse und bei Berücksichtigung der entsprechenden maximalen Energien um den Faktor 10^7 schwächer. Da den Protonen im Speicherbetrieb also kaum Energie zugeführt wird und damit die Dämpfung entfällt, kann die Bewegung der Protonen als ein ungedämpftes konservatives System aufgefaßt werden.

Findet man mit den linearen fehlerfreien Elementen, den Driftstrecken, Dipolen und Quadrupolen eine optische Lösung, so ist die Bewegung in einer solchen idealen Magnetstruktur stets gebunden. In einer realen Maschine lassen sich jedoch Nichtlinearitäten nicht vermeiden; zum einen lassen sich Quadrupole und Dipole nicht fehlerfrei herstellen und völlig exakt im Ring positionieren, zum anderen müssen Sextupole in die Maschine eingefügt werden, um die chromatischen Fehler, d.h. die energieabhängige Fokussierung der Quadrupole zu kompensieren.

Diese Nichtlinearitäten können sowohl starke Resonanzen als auch eine schwache Instabilität auf Grund vom deterministischen Chaos anregen. Das Ziel dieser Arbeit besteht darin, Methoden zur Bestimmung der Akzeptanzeinschränkung für Protonenbeschleunigern auf Grund dieser chaotischen Bewegung zu entwickeln.

Bei Berücksichtigung aller Nichtlinearitäten der magnetischen Elemente wird der Rechenzeitbedarf schnell sehr groß, so daß bisher nur Kurzzeitsimulationen (10^2 , 10^3 Umläufe) gemacht werden konnten. Für die Berechnung eines Umlaufes in der HERA-Struktur werden ca. 2×10^5 Rechenoperationen benötigt, bei 10^6 Umläufen sind dies bereits 10^{11} Rechenoperationen. Bei DESY standen bis zu sechs Spezialrechner (D. Notz /1/) zur Verfügung mit jeweils etwa 1/6 der Rechengeschwindigkeit der bei DESY benutzten IBM-Großrechenanlage. Mit diesen Rechnern dauert die Berechnung eines Umlaufs eines Teilchens etwa 0,5 sec., so daß für 10^6 Umläufe ca. 150 h (6,3 Tage) Rechenzeit benötigt werden.

Mit dieser Rechengeschwindigkeit (ein gerechneter Umlauf dauert 25 000-mal länger als die tatsächliche Umlaufzahl in HERA) ist somit bei maximalem Aufwand gerade ein Promille der Speicherzeit in HERA berechenbar. Ein wesentliches Ziel dieser Arbeit besteht deshalb darin, eine Methode zu finden, mit der man mit möglichst geringer Umlaufzahl die Akzeptanzgrenze bis auf wenige Prozent genau bestimmen kann.

Folgende Themen möchte ich in dieser Arbeit behandeln.

Im ersten Kapitel werden die Eigenschaften von integrierbaren Bewegungen diskutiert. Es wird skizziert, wie man mit störungstheoretischen Methoden fast integrierbare Systeme behandelt. Schließlich wird das Verhalten der Bewegung in der Nähe von Fixpunkten untersucht. Anhand eines einfachen Beispiels einer linearen Struktur mit einem Sextupol werden dann die Ergebnisse der Störungstheorie erster und zweiter Ordnung mit den Teilchenbahnberechnungen in der Nähe von isolierten Resonanzen verglichen.

Das zweite Kapitel behandelt die Entstehung von chaotischer Bewegung. Es existiert ein wichtiges, nach Kalmogorov, Arnold und Moser benanntes Theorem, das angibt, unter welchen Bedingungen ein System mit kleiner Störung noch integrierbar ist. Sind die Bedingungen des KAM-Theorems erfüllt, so verläuft die Bewegung auf einem mehrdimensionalen Torus, im folgenden KAM-Torus genannt. Andernfalls ist die Bewegung ungebunden oder wird chaotisch. Es wird genauer erläutert, was in diesem Zusammenhang unter beschränkter Instabilität und globalem Chaos zu verstehen ist. Als Konsequenz gibt es drei Stabilitätsbereiche:

Im ersten Bereich ist die Bewegung im wesentlichen regulär und somit stabil. Dort gibt es aber feine chaotische Schichten, aus denen Teilchen in den zweiten Bereich diffundieren können (Arnold-Diffusion). Im Bereich mit mittleren Amplituden überlappen mehrere Resonanzen (globales Chaos) und die Bewegung verweilt in diesem chaotischen Bereich für eine bestimmte Umlaufzahl bis der dritte Bereich erreicht wird. Dort ist wegen der großen Amplituden der Einfluß einer starken Resonanz dominierend, so daß die Amplituden unbegrenzt und schnell anwachsen. Mit dem einfachen Modell einer linearen Struktur mit einem Sextupol, das auch im ersten Kapitel verwendet wird, wird demonstriert, daß die Bewegung im Einflußbereich mehrerer Resonanzen chaotisch wird.

Im dritten Kapitel werden die Simulationstechniken vorgestellt. Zunächst wird das verwendete Teilchenbahnsimulationsprogramm RACETRACK (A. Wrulich /2/) kurz beschrieben. Dies Programm ist erweitert worden auf einen sechsdimensionalen symplektischen Formalismus, um die Synchronschwingung berücksichtigen zu können. Außerdem kann die Geschwindigkeit der Teilchen beliebig gewählt werden und es besteht im Programm die Möglichkeit, diese Teilchen adiabatisch zu beschleunigen.

Im Anhang 1 ist die Herleitung des sechsdimensionalen symplektischen Formalismus skizziert und im Anhang 2 sind die besonderen Schwierigkeiten bei der adiabatischen Beschleunigung erörtert. Es wird genauer untersucht, inwieweit Rundungsfehler bei der großen Anzahl der Rechenoperation die Ergebnisse verfälschen. Die Rundungsfehler führen bei IBM-Rechnern zu einer systematischen Dämpfung der Amplituden, die sich mit einem einfachen Verfahren gut kompensieren läßt (siehe auch Anhang 3). Zur Unterscheidung von regulärer und chaotischer Bewegung wird der charakteristische Lyapunov-Exponent bestimmt, der angibt, wie der Phasenraumabstand zweier ursprünglich eng benachbarter Trajektorien mit der Umlaufzahl anwächst. Bei regulärer Bewegung wächst dieser Abstand linear, während er im chaotischen Fall exponentiell anwächst. Es wird gezeigt, daß der Anfangsabstand der beiden Teilchen einen bestimmten Mindestwert nicht unterschreiten darf, um Verfälschungen durch Rundungsfehler zu vermeiden. Dann wird ein Verfahren angegeben, mit dem sicher und schnell ein linearer Anstieg von einem exponentiellen Anstieg unterschieden werden kann. Ein solches Verfahren ist nützlich, um mit möglichst kleinen Umlaufzahlen die Akzeptanzgrenze bestimmen zu können.

Als nächstes werden Methoden angegeben, die es erlauben, detaillierte Untersuchungen im Phasenraum durchzuführen. Damit kann in vier und sechs Dimensionen festgestellt werden, ob eine Bewegung auf einem unaufgebrochenen KAM-Torus (die Bedingungen des KAM-Theorems sind erfüllt) verläuft oder ob ein Aufbruch eines solchen Torus vorliegt (weitere Untersuchungen im Phasenraum siehe Anhang 4, 5).

Diese Verfahren zusammengenommen (Kapitel 3.6) erlauben die Bestimmung der Akzeptanz in einem Beschleuniger. Schließlich wird erläutert, inwieweit sich die Ergebnisse der Langzeitsimulationen mit einem Teilchen mit den Kurzzeitsimulationen vergleichen lassen, bei denen 16 Teilchen über 100 Umläufe verfolgt werden.

In Kapitel vier werden diese Methoden für HERA angewandt und untersucht, ob die Ergebnisse von der Dimensionalität der Bewegung abhängt. Für zwei unterschiedliche Optiken werden die Akzeptanz nach dem in Kapitel 3.6 angegebenen Verfahren bestimmt. Die Simulationen werden mit und ohne Multipolfelder der Dipole, aber stets mit den zur Chromatikkorrektur notwendige Sextupolen durchgeführt. Zusätzlich werden Sollbahnabweichungen und physische Aperturbegrenzungen berücksichtigt.

In Kapitel 5 werden die Simulationen für den Protonenvorbeschleuniger DESY III vorgestellt. Die dabei verwendeten Multipolkoeffizienten der Magnete sind gemäß Anhang 6 bestimmt worden. Da die Protonen nur eine kurze Beschleunigungsphase von 1,7 sec. in DESY III durchlaufen, kann der gesamte Beschleunigungsvorgang mit der erweiterten Version des Teilchensimulationsprogramms RACETRACK simuliert werden. Kritische Arbeitspunkte werden untersucht im Q-Wertebereich, der auf Grund der Raumladungseffekte überstrichen wird, die Abhängigkeit der Akzeptanz von der Verteilung der Magnete um den Ring herum wird getestet und Simulationen mit Sollbahnabweichungen und physischen Aperturbegrenzungen werden durchgeführt.

Kapitel 1: Vergleich der Simulationen von Teilchenbahnen mit den Resultaten der nichtlinearen Störungstheorie

1.1 Einführung

In diesem Kapitel möchte ich anhand eines einfachen Modells einer Beschleunigerstruktur mit einem Sextupol als einziger Nichtlinearität die Resultate der Störungstheorie erster und zweiter Ordnung mit Simulationen der Teilchenbahnen in einer solchen Struktur vergleichen.

Im Abschnitt 1.2 und 1.3 werden die Eigenschaften von integrierbarer und fast integrierbarer Bewegung erläutert und die wichtigsten Ergebnisse der Störungstheorie angegeben, mit deren Hilfe fast integrierbare Systeme näherungsweise beschrieben werden können. Ich stütze mich dabei auf das Buch von Lichtenberg/Lieberman /3/ und einen Bericht von Chirikov /4/; für die Behandlung der Störungstheorie zweiter Ordnung wird einer Arbeit von Willeke /5/ gefolgt. Diese Ergebnisse der Störungstheorie werden im Abschnitt 1.4 mit der simulierten Teilchenbahnbewegung verglichen. Verwendet wird dafür das Simulationsprogramm RACETRACK (A. Wrulich /2/). Wie im zweiten Kapitel gezeigt wird, ist die Bewegung störungstheoretisch allerdings nur dann beschreibbar, wenn die Bewegung von nur einer einzigen Resonanz dominiert wird. Die Arbeitspunkte im Q_x - Q_z -Diagramm werden deshalb so gewählt, daß die Bedingung einer isolierten Resonanz annähernd gegeben ist.

1.2 Integrierbare Systeme

Zunächst möchte ich an einige wichtige Eigenschaften der Trajektorien erinnern.

1.2.1 Eigenschaften der Trajektorien

Die Bewegung eines N dimensionalen Hamiltonsystems verläuft auf Trajektorien im $2N$ dimensionalen q - p Phasenraum, wobei q , p Orts- bzw. Impulsvektoren eines Systempunktes sind. Drei wichtige Eigenschaften gelten im Phasenraum:

1. Trajektorien sind durch die Anfangsbedingungen völlig determiniert, sie können sich deshalb nicht zum gleichen Zeitpunkt kreuzen. Treffen sich zwei Trajektorien zur gleichen Zeit, so ist ihre Bewegung im weiteren identisch.

2. Umfaßt eine "Fläche" C_1 bei t_1 einen Satz von Anfangsbedingungen, so wird zur Zeit t_2 die transformierte Fläche C_2 den gleichen Satz von Anfangsbedingungen einschließen.

3. Wir betrachten die Dichte D im Phasenraum:

$$D(q, p, t) = \frac{dN}{dV} \quad \begin{array}{l} dN \text{ Anzahl von Systempunkten pro} \\ \text{Volumenelement } dV \end{array} \quad (1.1)$$

Nach dem Liouvilleschen Theorem gilt eine Kontinuitätsgleichung

$$\frac{dD}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial D}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial D}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial D}{\partial t} = 0 \quad (1.2)$$

Dies bedeutet, daß der Fluß im Phasenraum inkompressibel ist.

1.2.2 Integrabilitätsbedingung

Ein System mit N Freiheitsgraden ist integrierbar, wenn die Hamilton-Jakobi-Gleichung separiert werden kann in N unabhängige Gleichungen. Für die Separationskonstanten (Invarianten der Bewegung) gilt paarweise:

$$\sum_i^N \left(\frac{\partial \alpha_k}{\partial q_i} \frac{\partial \alpha_l}{\partial p_i} - \frac{\partial \alpha_l}{\partial q_i} \frac{\partial \alpha_k}{\partial p_i} \right) = [\alpha_k, \alpha_l] = 0 \quad (1.3)$$

Dabei wird die Poissonklammer mit $[]$ bezeichnet.

Damit ist gewährleistet, daß man einen kompletten Satz an Invarianten hat, z.B. sind die Wirkungsvariablen J_i ein solcher Satz.

1.2.3 Winkel-Wirkungsvariablen

Die Wirkungsvariablen sind definiert als:

$$J_i = \frac{1}{2\pi} \oint p_i dq_i = \text{konstant} \quad (1.4)$$

wobei sich die Integration über eine Schwingungsperiode erstreckt. Ein integrierbares Hamiltonsches System läßt sich auf

Winkel-Wirkungsvariable (J, θ) transformieren, so daß die neue Hamilton-Funktion \bar{H} nur von der Wirkung J und nicht von der Winkelvariablen θ abhängt:

$$\begin{aligned}
 H(q_i, p_i) &\longrightarrow \bar{H}(J_i) \\
 \dot{\theta}_i &= \frac{\partial \bar{H}}{\partial J_i} = \omega_i = \text{konstant} \\
 \Rightarrow \theta_i &= \omega_i t + \beta_i \quad (\text{Winkelvariable}) \quad (1.5)
 \end{aligned}$$

Als Beispiel möchte ich kurz den eindimensionalen harmonischen Oszillator behandeln.

$$H(q, p) = \frac{1}{2} \frac{1}{m} p^2 + \frac{1}{2} k q^2 = E_0 \quad (1.6)$$

Damit errechnet man sich die Wirkung:

$$J = \frac{2}{\pi} \int_0^{q_{\max}} (2mE_0 - kmq^2)^{\frac{1}{2}} dq = E_0 \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (1.7)$$

und damit die neue Hamilton-Funktion:

$$\bar{H} = \omega J = \sqrt{\frac{k}{m}} J \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (1.8a)$$

Die alten Variablen sind gegeben durch:

$$q = \sqrt{\frac{2J}{m\omega}} \sin(\omega t + \beta) \quad (1.8b)$$

$$p = \sqrt{2Jm\omega} \cos(\omega t + \beta)$$

Die Wirkung J hat noch eine weitere wichtige Bedeutung, es handelt sich nämlich um eine adiabatische Invariante der Bewegung. Wenn also die Größen E_0 , m und k (z.B. in (1.7)) adiabatisch geändert werden, die Änderungen müssen dabei langsam im Vergleich zur Schwingungsperiode sein, bleibt J konstant, obwohl die Größen E_0 , m , k nach sehr langen Zeiten große Änderungen erfahren haben können. (Siehe Diskussion über adiabatische Beschleunigung in Anhang 2).

1.2.4 Poincaré-Abbildung

Um den Aufwand bei den Untersuchungen von Teilchenbewegungen in einem Kreisbeschleuniger möglichst gering zu halten, beschränkt man sich darauf, die Koordinaten und Impulse der Trajektorie an einem festen Ort zu studieren. Als Beispiel betrachte ich eine Bewegung mit zwei Freiheitsgraden: der Bewegung um den Beschleuniger herum (p_s, s) und einer horizontalen transversalen Bewegung ($p_x = x', x$) (siehe Figur 1.1): Aufgrund der Energieerhaltung findet diese Bewegung in einem dreidimensionalen Raum statt.

$$H(p_x, x, p_s, s) = E \quad (1.9)$$

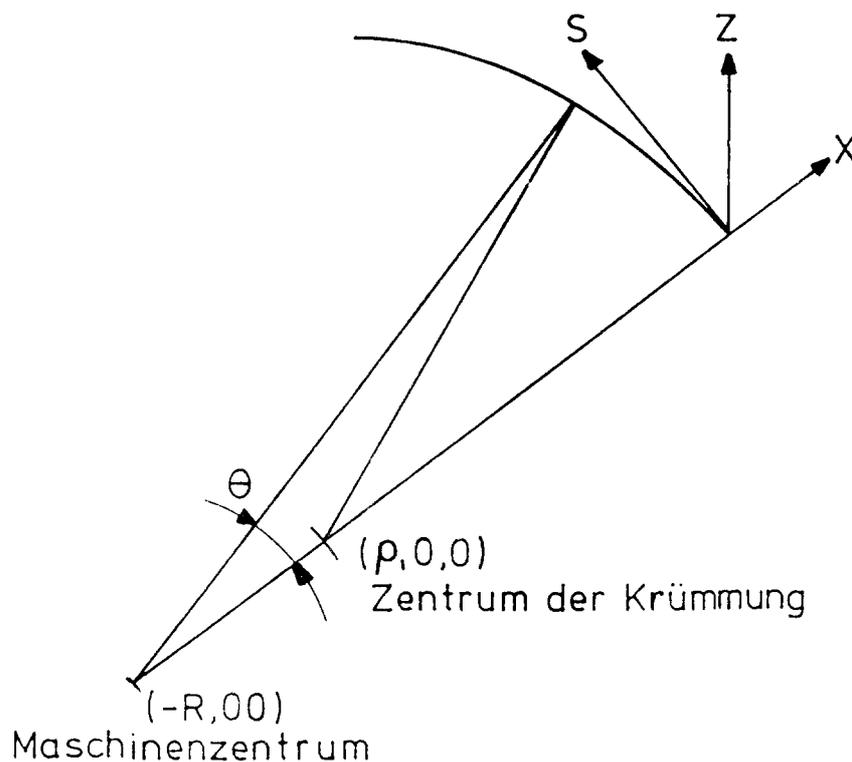
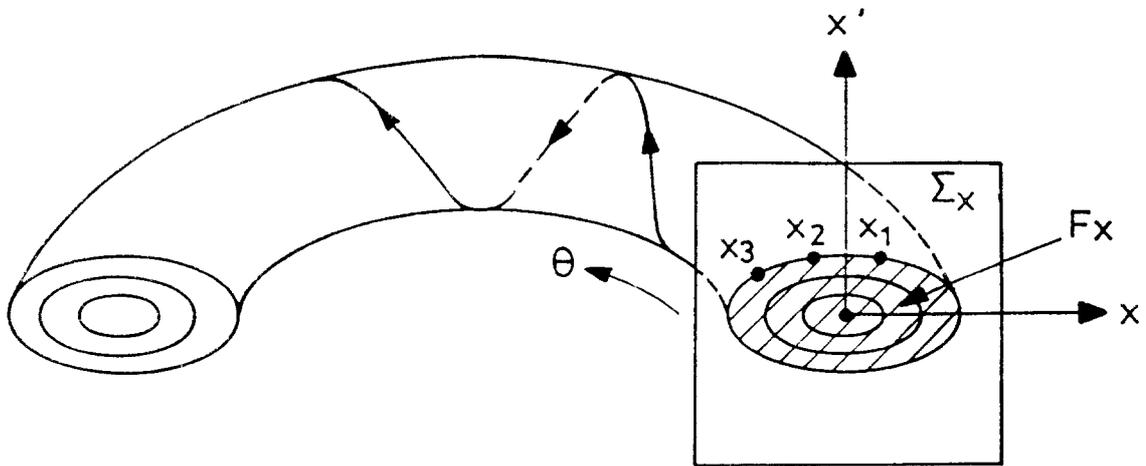


Fig. 1.1: Koordinatensystem des Beschleunigers

Die x-Koordinate liegt in der Beschleunigerebene, die z-Koordinate ist senkrecht zu dieser Ebene. Beide Koordinaten sind von der Sollbahnposition gerechnet, längs deren die Koordinate s verläuft. Der Krümmungsradius wird mit ρ bezeichnet (dessen Wert negativ ist) und der mittlere Maschinenradius ist R.

Allgemein läßt sich zeigen (Lichtenberg/Lieberman /3/), daß ein autonomes (zeitunabhängiges) System mit N Freiheitsgraden (in unserem Fall $N=2$) sich auf ein zeitabhängiges System mit $N-1$ Freiheitsgraden (hier $2-1=1$) reduzieren läßt. Dafür wird der Impuls p_s als neue Hamiltonfunktion und die Koordinate s als neue "Zeit"-Koordinate gewählt, so daß p_x, x explizite Funktion der "Zeit"-Koordinate s sind.

Die Entwicklung der Bewegung wird nun bei konstanter "Zeit" s im $2(N-1)$ Unterraum betrachtet: Figur 1.2 zeigt einen solchen $2 \cdot (N-1)$ dimensionalen Unterraum (Poincaré-Fläche) Σ_x für unser Beispiel mit 2 Freiheitsgraden.



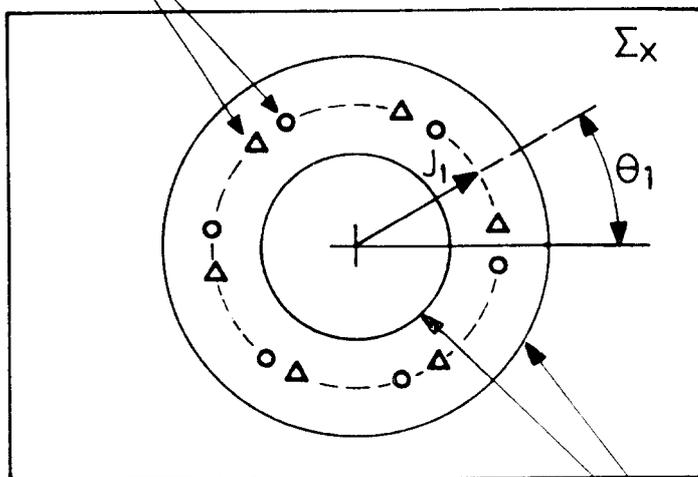
Figur 1.2: Poincaré-Abbildung für die Bewegung in einem Beschleuniger

Dabei wurde vorausgesetzt, daß die Bewegung jeweils integrierbar ist, man also eine weitere Invariante findet, so daß die Bewegung im vierdimensionalen Phasenraum auf konzentrischen Tori verläuft, um die Achse $x=x'=0$. In der zweidimensionalen Poincaré-Fläche Σ_x verläuft die Bewegung somit auf konzentrische Ellipsen um den Punkt $x=x'=0$. Aufeinander folgende Schnittpunkte der Bewegung mit einer solchen $2(N-1)$ Poincaré-Fläche (hier zweidimensional) werden durch symplektische Abbildungen (gleichbedeutend mit kanonischen Transformationen, siehe Goldstein /6/) ineinander überführt. Statt eines kontinuierlichen Hamilton-Systems mit N Freiheitsgraden wird also die symplektische Abbildung in $2(N-1)$ dimensionalen Unterraum untersucht.

Wird zusätzlich die vertikale Bewegung (z, z') betrachtet, wodurch das System drei Freiheitsgrade erhält, so wird neben der Poincaré-Fläche Σ_x die entsprechende Fläche Σ_z bei gleichem s untersucht. Wenn eine Kopplung zwischen beiden Schwingungsebenen besteht, werden in den Poincaré-Flächen Σ_x, Σ_z nicht Kurven, sondern Flächen überstrichen (siehe z.B. Abschnitt 1.4).

Figur 1.3 zeigt noch einmal die Poincaré-Fläche Σ_x , in den Winkel-Wirkungsvariablen (J_1, θ_1). Sukzessive Einträge ($x_1, x_2, x_3 \dots$) liegen auf einem Kreis mit dem Radius J_1 .

zwei Anfangsbedingungen
 (Δ, \circ) mit $m=6$



α irrational

$$\alpha = \frac{\omega_1}{\omega_2}$$

ist α rational:

$$\alpha = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{1}{m}$$

$$\rightarrow m \cdot \frac{\omega_1}{\omega_2} = 1$$

wobei $1, m$ ganze Zahlen ohne gemeinsame Faktoren sein sollen.

Figur 1.3: Einträge in der Poincaré-Fläche mit rationalem bzw. irrationalem Frequenzverhältnis

Bei der Belegung der Kreise unterscheidet man zwei Fälle. Ist das Verhältnis der beiden Frequenzen $\alpha = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ irrational, so werden die Kreise dicht belegt. Ist dieses Verhältnis rational bei einem gewissen J_1 , so gibt es für jede Anfangsbedingung m Einträge. Bei fast integrierbaren Systemen hat das Verhältnis α eine entscheidende Bedeutung für die Integrabilität des Systems (siehe Kapitel 2).

1.3 Fast integrierbare Systeme

Nach der Behandlung der integrierbaren Systeme möchte ich jetzt zu den fast integrierbaren Systemen übergehen.

Fast integrierbar bedeutet, daß die Hamilton-Funktion aus einem integrierbaren Anteil $H_0(J)$ und einem Störanteil $\varepsilon H_1(J, \phi)$ besteht, wobei die Störung als klein angenommen wird ($\varepsilon \ll 1$).

$$H(J, \phi) = H_0(J) + \varepsilon H_1(J, \phi) \quad (1.10)$$

Die Bedingungen, unter denen das fast integrierbare System (1.10) sich als integrierbar erweist und sich somit eine Transformation auf neue Winkelwirkungsvariablen finden läßt: $H(J, \phi) \rightarrow \bar{H}(\bar{J}, \bar{\phi}) = \bar{H}(\bar{J})$ werden im KAM-Theorem angegeben (Kapitel 2). Diese Integrierbarkeit ist die Grundvoraussetzung dafür, die Störungstheorie anwenden zu können.

1.3.1 Störungstheorie

Die Störungstheorie ist zum ersten Mal von Delaunay im 19. Jahrhundert für die Himmelsmechanik eingeführt und später von Poincaré (1892) weiter entwickelt worden. In jüngerer Zeit (1960-66) haben Untersuchungen von Kolmogorov, Arnold und Moser zum KAM-Theorem geführt (siehe Kapitel 2). Der Kontakt Mosers zu CERN führte zur Einführung der Störungstheorie in die Beschleunigerphysik durch Hagedorn /7/ und Schoch /8/.

Ein durch die Hamilton-Funktion (1.10) beschriebenes System soll näherungsweise mit Hilfe der Störungsrechnung behandelt werden. Dazu wird eine kanonische Transformation auf eine neue Hamilton-Funktion K durchgeführt, die nur noch konstante und resonante Terme enthält, wodurch die Beschreibung der Bewegung erheblich vereinfacht wird. Daraus folgt, daß diese Methode am besten funktioniert in der Nähe isolierter Resonanzen. Problematisch wird es jedoch, wenn zwei oder mehrere

Resonanzen einen ungefähr gleich großen Einfluß auf die Bewegung haben (siehe Kapitel 2). Bei der Störungsrechnung werden die Terme nach Potenzen des kleinen Parameters ε geordnet. Der höchste vorkommende Exponent n kennzeichnet die Ordnung der Störungsrechnung. In diesem Abschnitt möchte ich die wesentlichen Schritte dieser Entwicklung skizzieren, soweit sie für diese Arbeit nötig sind. Für eine detaillierte Beschreibung siehe Schoch /8/, Willeke /5/.

Bei der störungstheoretischen Untersuchung treten drei Typen von Termen auf:

- konstante Terme, die unabhängig vom Phasenwinkel ϕ sind.
Diese führen zu den amplitudenabhängigen Frequenzverschiebungen.

- langsam veränderliche Terme:
Diese Terme werden, wenn sie einzeln auftreten, in säkularer Störungstheorie behandelt.

- Schnell variierende Terme:
Der einfachste Ansatz besteht darin, diese Terme zu vernachlässigen, da sie schnell variieren und sich im zeitlichen Mittel wegheben (z.B. Guignard /9/ bei der Herleitung der Resonanzbreiten). In einer weitergehenden Behandlung (siehe Schoch /8/) werden diese Terme durch eine Koordinatentransformation berücksichtigt. Die 1. Ordnung entspricht dabei der Vernachlässigung dieser Terme. Die Störungstheorie 2. Ordnung führt dann zu Resonanztermen höherer Ordnung. Dieses Mittelungsverfahren ist allerdings problematisch, da dadurch stets die Integrierbarkeit eines Systems erzwungen wird. In Kapitel 2 wird jedoch gezeigt, daß gerade die durch die Mittelung vernachlässigte Terme die Bewegung in der Nähe der Separatrix chaotisch machen.

Anfangspunkt der Untersuchung der Bewegung in einem Beschleuniger ist die lineare Optik ohne jede Nichtlinearitäten. Die Hamilton-Funktion dafür lautet:

$$H_0 = \frac{1}{2} x'^2 + \frac{1}{2} z'^2 + K_x(s) x^2 - K_z(s) z^2 \quad (1.11)$$

K_x, K_z = Quadrupolstärken

Die Lösungen der Hamiltonschen Gleichung sind die pseudoharmonischen Betatronschwingungen:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{2 \varepsilon_x \beta_x} \cos(\phi_x(s) + \phi_{x_0}) \quad ; \\ z &= \sqrt{2 \varepsilon_z \beta_z} \cos(\phi_z(s) + \phi_{z_0}) \end{aligned} \quad (1.12)$$

$\varepsilon_x, \varepsilon_z, \phi_{x_0}, \phi_{z_0}$ sind Konstanten der Bewegung

β_x, β_z sind die Betafunktionen

Gestört wird dieses System durch die Nichtlinearitäten, die unvermeidlich in einer realen Maschine auftreten oder sogar eingebaut werden müssen. Diese sind zum einen für die Chromatikkorrektur notwendige Sextupole, zum anderen Multipolkoeffizienten der Dipole, welche aus konstruktiven Gründen, sowie durch Fertigungs- und Aufstellungstoleranzen entstehen.

Der Störanteil der Hamilton-Funktion kann geschrieben werden als

$$\varepsilon H_1 = \sum a_{nm}(s) x^n z^m \quad (1.13)$$

Damit diese Störung gering ist (vergleiche 1.10) müssen die Koeffizienten $a_{nm}(s)$ klein sein. Diese Koeffizienten hängen mit den bekannten Multipolkoeffizienten (a_n, b_n) der Magnete wie folgt zusammen:

$m = \text{gerade, "regulärer" Multipol}$

$$a_{nm}(s) = -(-1)^{\frac{m}{2}} \frac{(n+m-1)!}{n! m!} b_{n+m-1} \cdot r_0^{-(n+m-1)}$$

$m = \text{ungerade, "gedrehter" Multipol}$

$r_0 = \text{Referenzradius der Multipolentwicklung}$

$$a_{nm}(s) = (-1)^{\frac{(m-1)}{2}} \frac{(n+m-1)!}{n! m!} a_{n+m-1} \cdot r_0^{-(n+m-1)} \quad (1.14)$$

Durch eine kanonische Transformation wird εH_1 auf die Winkel-Wirkungsvariablen des ungestörten Problems transformiert, statt der unabhängigen Variablen s wird nun θ verwendet. Außerdem wird die Kosinusfunktion in Exponentialform dargestellt.

$$\begin{aligned} \varepsilon H_1 = R \sum_{nm\nu\mu} \binom{n}{\frac{n-\nu}{2}} \binom{m}{\frac{m-\mu}{2}} a_{nm}(\theta) \left(\frac{\beta_x}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \left(\frac{\beta_z}{2}\right)^{\frac{m}{2}} \\ \cdot \varepsilon_x^{\frac{n}{2}} \varepsilon_z^{\frac{m}{2}} e^{i[\nu(\phi_x(\theta) + \phi_x) + \mu(\phi_z(\theta) + \phi_z)]} \end{aligned} \quad (1.15)$$

Der Skalierungsfaktor R (mittlerer Maschinenradius) stammt vom Wechsel der unabhängigen Variablen.

ν, μ sind ganze Zahlen mit $\nu = \pm n, \pm (n-2), \dots$

$$\mu = \pm m, \pm (m-2), \dots \quad (1.16)$$

Der Phasenvorschub wird nun in einen mittleren und einen fluktuierenden Anteil aufgeteilt:

$$\begin{aligned} \phi_x(\theta) &= \tilde{\phi}_x(\theta) + \theta Q_x \\ \phi_z(\theta) &= \tilde{\phi}_z(\theta) + \theta Q_z \end{aligned} \quad (1.17)$$

Damit läßt sich die Hamilton-Funktion in einem ringperiodischen Anteil (Periode 2π) und einen unperiodischen Anteil faktorisieren.

$$\begin{aligned} \varepsilon H_1 = \sum_{nm\nu\mu} h_{nm\nu\mu} \varepsilon_x^{\frac{n}{2}} \varepsilon_z^{\frac{m}{2}} e^{i[\nu\phi_x + \mu\phi_z + (\nu Q_x + \mu Q_z)\theta]} \\ h_{nm\nu\mu}(\theta) = R \binom{n}{\frac{n-\nu}{2}} \binom{m}{\frac{m-\mu}{2}} a_{nm} \left(\frac{\beta_x}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \left(\frac{\beta_z}{2}\right)^{\frac{m}{2}} e^{i[\nu\tilde{\phi}_x(\theta) + \mu\tilde{\phi}_z(\theta)]} \end{aligned} \quad (1.18)$$

Gesucht wird jetzt die kanonische Transformation zu einer neuen Hamilton-Funktion K, die nur langsam variierende und konstante Terme enthält:

$$K = \sum_{nm\nu\mu} k_{nm\nu\mu} J_x^{\frac{n}{2}} J_z^{\frac{m}{2}} e^{i[\nu\Psi_x + \mu\Psi_z + (\nu Q_x + \mu Q_z)\theta]} \quad (1.19)$$

Dafür setzen wir eine erzeugende Funktion in folgender Form an

$$S(J_x, J_z, \phi_x, \phi_z) = J_x \phi_x + J_z \phi_z + \sigma(J_x, J_z, \phi_x, \phi_z, \theta) \quad (1.20)$$

Die Transformation zwischen der alten und neuen Hamilton-Funktion ist gegeben durch:

$$K = \epsilon H_1 + \frac{\partial S}{\partial \theta} \quad (1.21)$$

und für die Variablen gilt:

$$\psi_x = \frac{\partial S}{\partial J_x} \quad ; \quad \epsilon_x = \frac{\partial S}{\partial \phi_x} \quad (1.22)$$

$$\psi_z = \frac{\partial S}{\partial J_z} \quad ; \quad \epsilon_z = \frac{\partial S}{\partial \phi_z}$$

Für $\sigma(J_x, J_z, \phi_x, \phi_z, \theta)$ wird folgender Ansatz gewählt:

$$\sigma(J_x, J_z, \phi_x, \phi_z, \theta) = \sum_{nm\nu\mu} \sigma_{nm\nu\mu}(\theta) J_x^{\frac{n}{2}} J_z^{\frac{m}{2}} e^{i[\nu\phi_x + \mu\phi_z + (\nu Q_x + \mu Q_z)\theta]} \quad (1.23)$$

Da die Bewegung im wesentlichen durch die linearen Kräfte bestimmt wird (a_{nm} klein) dürfen sich auch die Variablen-Paare (J, ψ) und (ϵ, ϕ) nur geringfügig unterscheiden. Die Größe σ muß deshalb klein sein.

Die Koeffizienten $k_{nm\nu\mu}$ und $\sigma_{nm\nu\mu}$ sollen nun näherungsweise bestimmt werden. Dazu werden die Gleichung (1.18), (1.19) und die Ableitung von S (Gleichung (1.20)) nach θ in Gleichung (1.21) eingesetzt und $\epsilon_x^{\frac{n}{2}}, \epsilon_z^{\frac{m}{2}}$ und die Exponentialfunktion $e^{i[\nu\psi_x + \mu\psi_z + (\nu Q_x + \mu Q_z)\theta]}$ (der Zusammenhang mit $J_x^{\frac{n}{2}}, J_z^{\frac{m}{2}}$ siehe Gleichung (1.22)) in einer Taylorreihe entwickelt. Durch Koeffizientenvergleich kann dann $\sigma_{nm\nu\mu}$ als eine Funktion der alten und neuen Koeffizienten $k_{nm\nu\mu}$ und $k'_{nm\nu\mu}$ angegeben werden. Zudem wird noch die Kreisperiodizität des Beschleunigers genutzt, um die Funktionen $k_{nm\nu\mu}, k'_{nm\nu\mu}, \sigma_{nm\nu\mu}$ durch ihre Fourierkomponenten auszudrücken.

$$h_{nm\nu\mu}^q = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta h_{nm\nu\mu}(\theta) e^{-iq\theta} \quad (1.24a)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{nm\nu\mu}^q &= \frac{k_{nm\nu\mu}^q - h_{nm\nu\mu}^q}{i(\nu Q_x + \mu Q_z + q)} \\ &+ i \sum_{\substack{q' n' m' \nu' \mu' \\ n'' m'' \nu'' \mu''}} \left[\frac{\frac{n' \nu''}{2} (k_{n'' m'' \nu'' \mu''}^{q-q'} \sigma_{n' m' \nu' \mu'}^{q'} - h_{n' m' \nu' \mu'}^{q-q'} \sigma_{n'' m'' \nu'' \mu''}^{q'})}{i(\nu Q_x + \mu Q_z + q)} \right] \\ &+ i \sum_{\substack{q' n' m' \nu' \mu' \\ n'' m'' \nu'' \mu''}} \left[\frac{\frac{m' \mu''}{2} (k_{n'' m'' \nu'' \mu''}^{q-q'} \sigma_{n' m' \nu' \mu'}^{q'} - h_{n' m' \nu' \mu'}^{q-q'} \sigma_{n'' m'' \nu'' \mu''}^{q'})}{i(\nu Q_x + \mu Q_z + q)} \right] \\ &+ \dots \end{aligned} \quad (1.24b)$$

Beim Koeffizientenvergleich ergeben sich folgende Bedingungen für die einfach und doppelt gestrichenen Indizes; (I, II) beziehen sich dabei jeweils auf die Summe, die durch die Taylorentwicklung von (ε_x, ψ_x) bzw. (ε_z, ψ_z) entsteht:

I Summe (ε_x, ψ_x)

II Summe (ε_z, ψ_z)

$$n = n' + n'' - 2$$

$$n = n' + n''$$

$$m = m' + m''$$

$$m = m' + m'' - 2$$

$$\nu = \nu' + \nu''$$

$$\nu = \nu' + \nu''$$

$$\mu = \mu' + \mu''$$

$$\mu = \mu' + \mu''$$

Für das in Abschnitt 1.4.2 behandelte Beispiel der horizontalen Bewegung mit einem Sextupol ergeben sich dadurch folgende Resonanzen durch die Störungstheorie 2. Ordnung:

$$n' = n'' = 3 \quad \nu_{\mu}^i = -3, -1, 1, 3 \quad m = m' = m'' = \mu = \mu' = \mu'' = 0$$

$$\rightarrow n = n' + n'' - 2 = 4$$

$ \nu = \nu' + \nu'' $	Effekt der Störungstheorie entwickelt bis zur zweiten Ordnung
0	Nichtlineare Frequenzverschiebung zweiter Ordnung
2	Resonanz zweiter Ordnung
4	Resonanz vierter Ordnung
6	Resonanz sechster Ordnung

Zum Vergleich führt ein Sextupol in erster Ordnung der Störungstheorie zu Resonanzen erster und dritter Ordnung, während ein Oktupol ($n=4$) in erster Ordnung eine Frequenzverschiebung und eine Resonanz zweiter und vierter Ordnung bewirken kann.

Interessant ist die Tatsache, daß bei der Störungstheorie zweiter Ordnung ein Sextupol neben den Resonanzen ($n=4$), die auch bei einem Oktupol in der ersten Ordnung der Störungstheorie auftreten, die Resonanz sechster Ordnung ($\nu=6$) anregt.

Mit Gleichung (1.24) kann nun iterativ $\sigma_{nm\nu\mu}^q$ und $k_{nm\nu\mu}^q$ als Funktion von $h_{nm\nu\mu}^q$ bestimmt werden. Durch die Transformation enthält die neue Hamilton-Funktion K nur resonante ($\nu Q_x + \mu Q_z + \mu \approx 0$) oder konstante Terme ($\nu = \mu = q = 0$).

Als Startwert für σ wird gewählt:

$$\sigma_{nm\nu\mu}^{q(0)} = 0 \quad (1.25)$$

In erster Ordnung ergibt sich:

$$\sigma_{nm\nu\mu}^{q(I)} = \frac{-k_{nm\nu\mu}^q}{i(\nu Q_x + \mu Q_z + q)} \cdot k_{n_r m_r \nu_r \mu_r}^{q(I)} = k_{n_r m_r \nu_r \mu_r}^{q(I)} \quad (1.26)$$

Der Index r kennzeichnet resonante und konstante Terme.

Der nächste Iterationsschritt liefert $\sigma_{nm\nu\mu}^{q(II)}$ und $k_{nm\nu\mu}^{q(II)}$ der Störungstheorie in zweiter Ordnung (für eine detaillierte Ableitung siehe z.B. Willeke /5/).

1.3.2 Resonanzbreitenberechnung

Wenn die Betatronzahlen Q_x, Q_z rationale Werte annehmen, können Multipole passender Ordnung zu einer Bewegung mit einem resonanzartigen Anwachsen der Amplitude führen. Ein Sextupol führt in der Störungstheorie erster Ordnung wegen $n=3$ und somit $\nu=1,3$ zu einer Resonanzanregung, wenn die Q-Werte ganz- oder drittelzahlig sind. Das unbegrenzte Anwachsen der Amplitude tritt aber nicht nur auf, wenn die Q-Werte exakt den rationalen Werten entsprechen, sondern auch wenn sie sich in hinreichender Nähe befinden. Der Bereich des Q-Wertes, in dem eine Resonanzanregung auftritt, wird Resonanzbreite genannt. Es sollen nun die wesentlichen Schritte der Guignardschen Herleitung dieser Resonanzbreiten in der Störungstheorie erster Ordnung angegeben werden. Der Abstand e zur Resonanz wird wie folgt definiert:

$$e = \nu Q_x \pm \mu Q_z + q \quad q \text{ ganze Zahl} \quad (1.27)$$

Je nach Vorzeichen handelt es sich um Summenresonanzen (+ in 1.27) oder Differenzenresonanzen (- in 1.27). Die Resonanzbreite gibt bei Summenresonanzen an, wie groß der Bereich im Q-Wert-Diagramm ist, innerhalb dessen die Amplituden unbeschränkt anwachsen. Die Bedeutung der Resonanzbreiten im Falle von Differenzresonanzen wird in Abschnitt 1.4.1.2 gegeben. Behandelt werden allerdings nur isolierte Resonanzen, von den unendlichen vielen Fourierkoeffizienten in (1.24b) wird also stets nur eine berücksichtigt. Dies hat natürlich zur Folge, daß im Bereich, in dem mehrere Resonanzen wirksam sind, die hier berechnete Resonanzbreite keine zuverlässigen Aussagen liefert.

Ausgangspunkt ist Gleichung (1.18). Zunächst wird $h_{nm\nu\mu}$ durch seine Fourierkomponenten ausgedrückt:

$$\overline{\mathcal{E} H_1} = \sum_{n m \nu \mu q} h_{n m \nu \mu q} \mathcal{E}_x^{\frac{n}{2}} \mathcal{E}_z^{\frac{m}{2}} e^{i[\nu \phi_x + \mu \phi_z]} e^{i[\nu Q_x + \mu Q_z + q] \theta} \quad (1.28)$$

Ich möchte mich auf die in Abschnitt 1.4.1 untersuchten Summen- und Differenzenresonanzen beschränken. Sextupole führen in Störungstheorie 1. Ordnung nicht zu frequenzverschiebenden Termen. Außerdem werden nur Resonanzen betrachtet, bei denen die Resonanzordnung $N = n + m$ der Multipolordnung entspricht, dies schränkt die Werte von ν und μ ein: $\nu = \pm n$, $\mu = \pm m$. (Für eine detailliertere Untersuchung siehe Guignard /9/.)

Bei resonanten oder langsam variierenden Termen gilt für den Abstand zur Resonanz (1.27): $e = \nu Q_x + \mu Q_z + q \approx 0$. Damit reduziert sich die Hamilton-Funktion auf die Form:

$$\overline{\mathcal{E} H_1} = |\kappa| \mathcal{E}_x^{\frac{|\nu|}{2}} \mathcal{E}_z^{\frac{|\mu|}{2}} \left\{ e^{i[\nu \phi_x + \mu \phi_z + \phi_\kappa + e \theta]} + e^{-i[\nu \phi_x + \mu \phi_z + \phi_\kappa + e \theta]} \right\} \quad (1.29)$$

mit $\kappa = h_{nm\nu\mu q}$; $\phi_\kappa = \nu \tilde{\phi}_x + \mu \tilde{\phi}_z$ komplexe Phase von κ (siehe 1.18)

Mittels der erzeugenden Funktion F :

$$F(\bar{\mathcal{E}}_x, \phi_x, \bar{\mathcal{E}}_z, \phi_z) = \bar{\mathcal{E}}_x \left(\phi_x + \frac{\nu}{\nu^2 + \mu^2} e \theta \right) + \bar{\mathcal{E}}_z \left(\phi_z + \frac{\mu}{\nu^2 + \mu^2} e \theta \right) \quad (1.30)$$

wird zu den neuen Winkelkoordinaten übergegangen:

$$\Psi_x = \phi_x + \frac{\nu}{\nu^2 + \mu^2} e \theta \quad ; \quad \Psi_z = \phi_z + \frac{\mu}{\nu^2 + \mu^2} e \theta \quad ; \quad \bar{\mathcal{E}}_x = \mathcal{E}_x \quad ; \quad \bar{\mathcal{E}}_z = \mathcal{E}_z \quad (1.31)$$

Damit wird die Hamilton-Funktion unabhängig von θ und somit konstant.

Der Realteil der Hamilton-Funktion hat dann die Form:

$$G = \overline{\mathcal{E} H_1} + \frac{\partial F}{\partial \theta} = \frac{\nu}{\nu^2 + \mu^2} e \mathcal{E}_x + \frac{\mu}{\nu^2 + \mu^2} e \mathcal{E}_z + 2 |\kappa| \mathcal{E}_x^{\frac{|\nu|}{2}} \mathcal{E}_z^{\frac{|\mu|}{2}} \cos(\nu \Psi_x + \mu \Psi_z + \phi_\kappa) \quad (1.32)$$

Mittels der Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon_x}{d\theta} &= 2\nu |K| \varepsilon_x^{\frac{|\nu|}{2}} \varepsilon_z^{\frac{|\mu|}{2}} \sin \Psi, \quad \Psi = \nu \Psi_x + \mu \Psi_z + \phi_K \\ \frac{d\Psi_x}{d\theta} &= \frac{\nu}{\nu^2 + \mu^2} e + |\nu| |K| \varepsilon_x^{\frac{(|\nu|-1)}{2}} \varepsilon_z^{\frac{|\mu|}{2}} \cos \Psi \\ \frac{d\varepsilon_z}{d\theta} &= 2\mu |K| \varepsilon_x^{\frac{|\nu|}{2}} \varepsilon_z^{\frac{|\mu|-1}{2}} \sin \Psi \\ \frac{d\Psi_z}{d\theta} &= \frac{\mu}{\nu^2 + \mu^2} e + |\mu| |K| \varepsilon_x^{\frac{|\nu|}{2}} \varepsilon_z^{\frac{(|\mu|-1)}{2}} \cos \Psi \end{aligned} \quad (1.33)$$

läßt sich eine Konstante der Bewegung finden:

$$\mu \frac{d\varepsilon_x}{d\theta} = \nu \frac{d\varepsilon_z}{d\theta} \quad (1.34)$$

Durch Integration erhält man:

$$C_1 = \mu \varepsilon_x - \nu \varepsilon_z \quad (1.35)$$

Bei Summenresonanzen haben μ und ν gleiches Vorzeichen, dies bedeutet bei Erfüllung der Resonanzbedingung ein gleichzeitiges Anwachsen beider Amplituden. Bei Differenzenresonanzen haben μ und ν unterschiedliches Vorzeichen, so daß immer eine Amplitude auf Kosten der anderen Amplitude wachsen wird und somit ein unbegrenztes Wachstum der Amplituden nicht möglich ist.

Mittels (1.35) läßt sich entweder ε_x oder ε_z aus der Hamilton-Funktion (1.32) eliminieren.

$$\begin{aligned} \nu G = C_2^x &= e \varepsilon_x + 2\nu |K| \varepsilon_x^{\frac{|\nu|}{2}} \left(\frac{\mu}{\nu} \varepsilon_x - \frac{C_1}{\nu} \right)^{\frac{|\mu|}{2}} \cos(\nu \Psi_x + \mu \Psi_z + \phi_K) \\ \mu G = C_2^z &= e \varepsilon_z + 2\mu |K| \left(\frac{\nu}{\mu} \varepsilon_z + \frac{C_1}{\mu} \right)^{\frac{|\nu|}{2}} \varepsilon_z^{\frac{|\mu|}{2}} \cos(\nu \Psi_x + \mu \Psi_z + \phi_K) \end{aligned} \quad (1.36)$$

Die Auswertung von (1.36) liefert (siehe Guignard /9/) die Resonanzbreiten für Summen- und Differenzenresonanzen:

$$\begin{aligned} \text{Summenresonanz} \quad \Delta e &= 2|K| \epsilon_x^{\frac{\nu-2}{2}} \epsilon_z^{\frac{\mu-2}{2}} \left[\nu^2 \epsilon_z + \mu^2 \epsilon_x \right] \\ \text{Differenzenresonanz} \quad \Delta e &= 2|K| \epsilon_x^{\frac{|\nu|-2}{2}} \epsilon_z^{\frac{|\mu|-2}{2}} \left[|\nu| \epsilon_z + |\mu| \epsilon_x \right] \end{aligned} \quad (1.37)$$

1.3.3 Stabilitätsuntersuchungen von Fixpunkten

Als nächstes möchte ich die Bewegung in der Nähe von Fixpunkten untersuchen. Die Fixpunkte der Hamilton-Funktion (1.37) lassen sich wie folgt bestimmen:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d\Psi_y}{d\theta} = \frac{\partial C_z^*}{\partial \epsilon_y} \\ 0 &= \frac{d\epsilon^*}{d\theta} = -\frac{\partial C_z^*}{\partial \Psi_y} \end{aligned}$$

y bedeutet x oder z (1.38)

Für die in Abschnitt 1.4.1 untersuchten Fälle möchte ich die Werte für ϵ_x, ϵ_z nach (1.38) bestimmen:

$$\epsilon_z = \frac{\pm e}{|K|} \sqrt{\epsilon_x \left(\pm 4|K| \epsilon_x \right)} \begin{cases} \text{- Summenresonanz } Q_x + 2Q_x - p = e \\ \text{+ Differenzenresonanz } Q_x - 2Q_z - p = e \end{cases} \quad (1.39)$$

Bei der horizontalen Bewegung nimmt die Hamilton-Funktion G in (1.32) die Form an:

$$\begin{aligned} G &= \frac{e}{\nu} \epsilon_x + 2|K| \epsilon_x^{\frac{|\nu|}{2}} \cos \Psi \\ \text{Fixpunktbedingung} \quad \longrightarrow \quad 0 &= \frac{d\Psi}{d\theta} = \frac{e}{\nu} + 2|K| \frac{|\nu|}{2} \epsilon_x^{\left(\frac{|\nu|}{2}-1\right)} (\pm 1) \\ 0 &= \frac{d\epsilon_x}{d\theta} = 2|K| \epsilon_x^{\frac{|\nu|}{2}} \sin \Psi \Rightarrow \Psi = 0, \pi \end{aligned} \quad (1.40)$$

In einem solchen Fall erhält man damit folgenden Wert für ε_x :

$$\sqrt{\varepsilon_x} = \pm \frac{e}{9|R|} \quad \text{horizontale Resonanz } 3Q_x - p = e \quad (1.41)$$

Stabilitätsuntersuchungen lassen sich einfach in zwei Dimensionen durchführen: (siehe Lichtenberg/Lieberman /3/). Wir betrachten dazu statt der Hamiltonfunktion die symplektische Transformation T , welche die Koordinaten $(x, x') = y$ in der Poincaréfläche (siehe Abschnitt 1.2.4) abbildet. Ist die Resonanzbedingung (1.40) erfüllt, so wird ein solcher Fixpunkt y_0 nach ν Abbildungen in sich selbst überführt.

$$y_0 = T^{\nu} y_0 \quad (1.42)$$

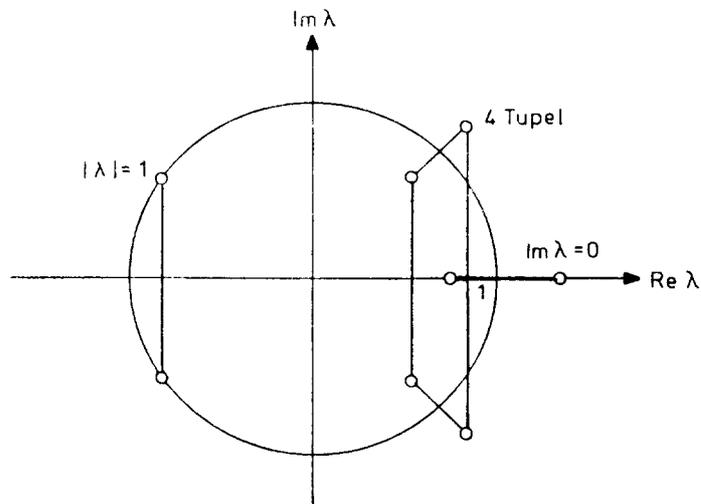
Die Bewegung in der Nähe eines solchen Fixpunktes ($y = y_0 + x; x \ll y_0$) wird linearisiert:

$$\bar{x} = /A x \quad (1.43)$$

wobei $/A$ wie T eine symplektische Matrix ist.

Am Eigenwertspektrum läßt sich das Stabilitätsverhalten eines solchen Fixpunktes ablesen.

Ist λ ein Eigenwert einer symplektischen Matrix $/A$ so sind auch $(\lambda^*, \frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^*})$ Eigenwerte dieser Matrix. Figur 1.4 zeigt die möglichen Paare von Eigenwerten. Stabilität liegt dann vor, wenn die Eigenwerte auf dem Einheitskreis in Figur 1.4 liegen.



Figur 1.4: Paare von Eigenwerten einer symplektischen Abbildung

In zwei Dimensionen lassen sich nun drei Fälle unterscheiden:

1. komplex konjugiert auf den Einheitskreis

$$\lambda_{1,2} = e^{\pm i\sigma} \quad (1.44)$$

mit $\text{Sp } A = 2 \cos \sigma$ und $|\text{Sp } A| < 2$ (1.45)

2. beide reell und reziprok

$$\lambda_2 = \lambda_1^{-1}; \quad |\lambda_{1,2}| = e^{\pm \sigma} \quad (1.46)$$

und

$$|\text{Sp } A| = |2 \cosh \sigma| > 2 \quad (1.47)$$

Es gibt somit eine anwachsende und eine schrumpfende Lösung. In diesem Fall gibt es noch eine zweite Unterscheidungsmöglichkeit:

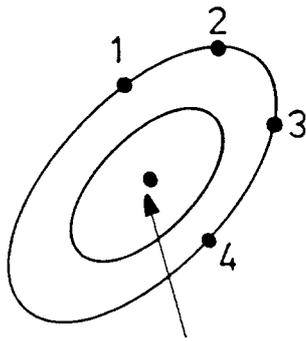
normaler hyperbolischer Fixpunkt: $\text{Sp } A > 2$ ($\lambda_1 > 1$)

reflektierender hyperbolischer

Fixpunkt: $\text{Sp } A < -2$ ($\lambda_1 < -1$) (1.48)

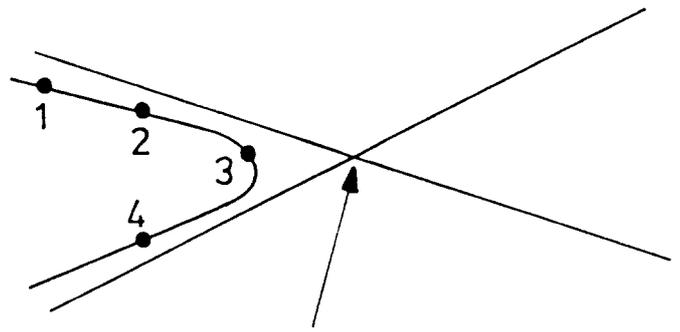
3. Gleiche Lösung $\lambda_1 = \lambda_2 = \pm 1$

Figur 1.5 zeigt die Bewegung für die verschiedenen Fälle.



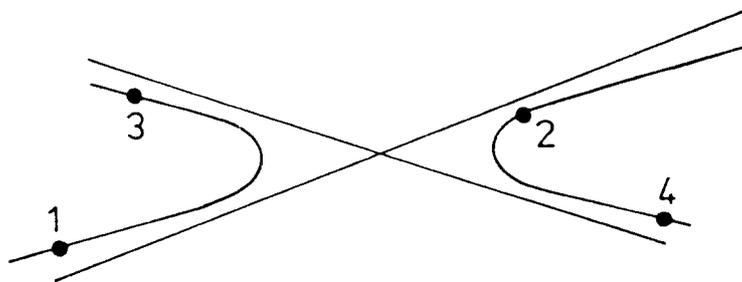
elliptischer Fixpunkt

Fall 1: stabile Bewegung



hyperbolischer Fixpunkt

Fall 2a: normal hyperbolisch



Fall 2b: reflektierend hyperbolisch

Figur 1.5: Bewegung in der Nähe von Fixpunkten

Im ersten Fall ist die Bewegung stabil und auf Ellipsen um den elliptischen Fixpunkt; im zweiten Fall ist die Bewegung in der Regel instabil (außer bei Resonanzstabilisierung!) und auf Hyperbeln in der Nähe der instabilen Fixpunkte. Interessant ist die Bewegung in der Nähe eines reflektierenden hyperbolischen Fixpunktes. Die Koordinaten sind abwechselnd auf gegenüberliegenden Hyperbeln (Figur 1.5). Im Fall 3 handelt es sich gerade um den Übergang von stabiler zu instabiler Bewegung. Die Untersuchung dieses dritten Bereiches führt zu den interessanten Phänomenen der Bifurkation, die von MacKay /10/ ausführlich behandelt worden sind.

Ein solches Beispiel ist in Kapitel 2 zu finden. Die Stabilitätsuntersuchung in vier Dimensionen ist von MacKay/10/ durchgeführt worden. Hier möchte ich auf einen anderen Punkt hinweisen, daß nämlich in vier Dimensionen neben Fixpunkten häufig Fixlinien vorkommen (siehe Kapitel 3.5 und Anhang 5). Dazu betrachten wir die Resonanzbedingung:

$$\nu Q_x + \mu Q_z - p = 0 \quad (1.49)$$

Nur wenn zusätzlich die Bedingung:

$$\begin{aligned} \nu Q_x &= p_1 & ng &= \text{gemeinsamer Teiler von } \nu \text{ und } \mu \\ \mu Q_z &= p_2 \end{aligned} \quad (1.50)$$

erfüllt ist, gibt es $\frac{\nu \cdot \mu}{ng}$ Fixpunkte. In den meisten Fällen aber ist die Bedingung (1.50) nicht erfüllt, dies führt dann zu den erwähnten Fixlinien.

1.3.4 Poincaré-Birkhoff-Theorem

Dieses Theorem gilt in zwei Dimensionen für fast integrierbare Systeme vom Typ (1.10). Es sagt aus, daß für vorgegebene Amplitude von den unendlich vielen Fixpunkten der Periode m lediglich $2km$ ($k=1,2,\dots$) Fixpunkte übrig bleiben (s. Fig. 1.3). In der Regel ist $k=1$. Diese $2km$ "Poincaré-Fixpunkte" sind abwechselnd elliptischer und hyperbolischer Natur (siehe oben). Beispiele für diese sich abwechselnden Fixpunkte sind in Abschnitt 1.4 und in Anhang 4 zu finden.

In vier Dimensionen (siehe Kapitel 3.5) findet man ein ähnliches Phänomen: Dort sind es Fixlinien, die abwechselnd elliptisch und hyperbolisch sind. Es ist deshalb anzunehmen, daß sich dieses Theorem auf höherdimensionale Systeme verallgemeinern läßt.

1.4 Vergleich der Resultate der Störungstheorie erster und zweiter Ordnung mit Simulationen am Beispiel einer linearen Struktur mit Sextupolfeldern

In diesem Abschnitt möchte ich zeigen, daß die Störungstheorie in erster und zweiter Ordnung die Bewegung in der Nähe isolierter Resonanzen sehr gut beschreiben kann. In Abschnitt 1.4.1 wird die transversale Bewegung in horizontaler und vertikaler Richtung mit der Störungstheorie erster Ordnung verglichen. Als lineare Struktur wurden 10 FODO-Zellen (der HERA FODO-Struktur ähnlich) gewählt, bestehend aus zwei 20 m langen Dipolen und sich jeweils abwechselnden fokussierenden und defokussierenden Quadrupolen. Ein Sextupol mit typischer Stärke, um die Chromatik bei HERA zu kompensieren, wurde als einzige Nichtlinearität verwendet: $m_s = 7.5 \cdot 10^{-2} \left[\frac{1}{m^2} \right]$ (vergleiche (1.14)). Dieser Sextupol wurde in die Mitte eines der Dipole gesetzt und die Simulationen wurden an dieser Stelle gestartet. Durch die Wahl der Position des Sextupols sind die beiden Betafunktionswerte β_x und β_z ungefähr gleich groß und die relativ große Länge der linearen Struktur führt zu einer geringen Abhängigkeit dieser Betafunktionswerte von der Wahl der Q_x - Q_z -Werte.

An dieser Stelle möchte ich darauf hinweisen, daß es im Abschnitt 1.4 lediglich um den generellen Vergleich von Simulation mit der Störungstheorie geht und deshalb Details der verwendeten Magnetstruktur irrelevant sind. Die errechneten Amplituden skalieren mit der Stärke der Nichtlinearität.

Es wurde deshalb nicht der Versuch gemacht, die gleiche Magnetstruktur für den Vergleich der Simulationen der rein horizontalen transversalen Bewegung mit Störungstheorie zweiter Ordnung in Abschnitt 1.4.2 zu verwenden. Denn für diesen Vergleich wurde das Programm CANOL von Willeke /5/ benutzt, das speziell für einen solchen Vergleich konzipiert werden ist und mit dem man am einfachsten mit folgenden Werten der Parameter arbeiten kann:

$$\beta_x = 100 \quad ; \quad m_s = 4.65 \times 10^{-3} \left[\frac{1}{m^2} \right] \quad (1.51)$$

1.4.1 Störungstheorie erster Ordnung

Durch die Wahl des Startpunktes der Simulation an der Stelle des Sextupoles vereinfachen sich die störungstheoretischen Gleichungen

$$\theta = \phi_k = 0 \Rightarrow \begin{aligned} \Psi_x &= \phi_x \\ \Psi_z &= Q_z \end{aligned} \quad (1.52)$$

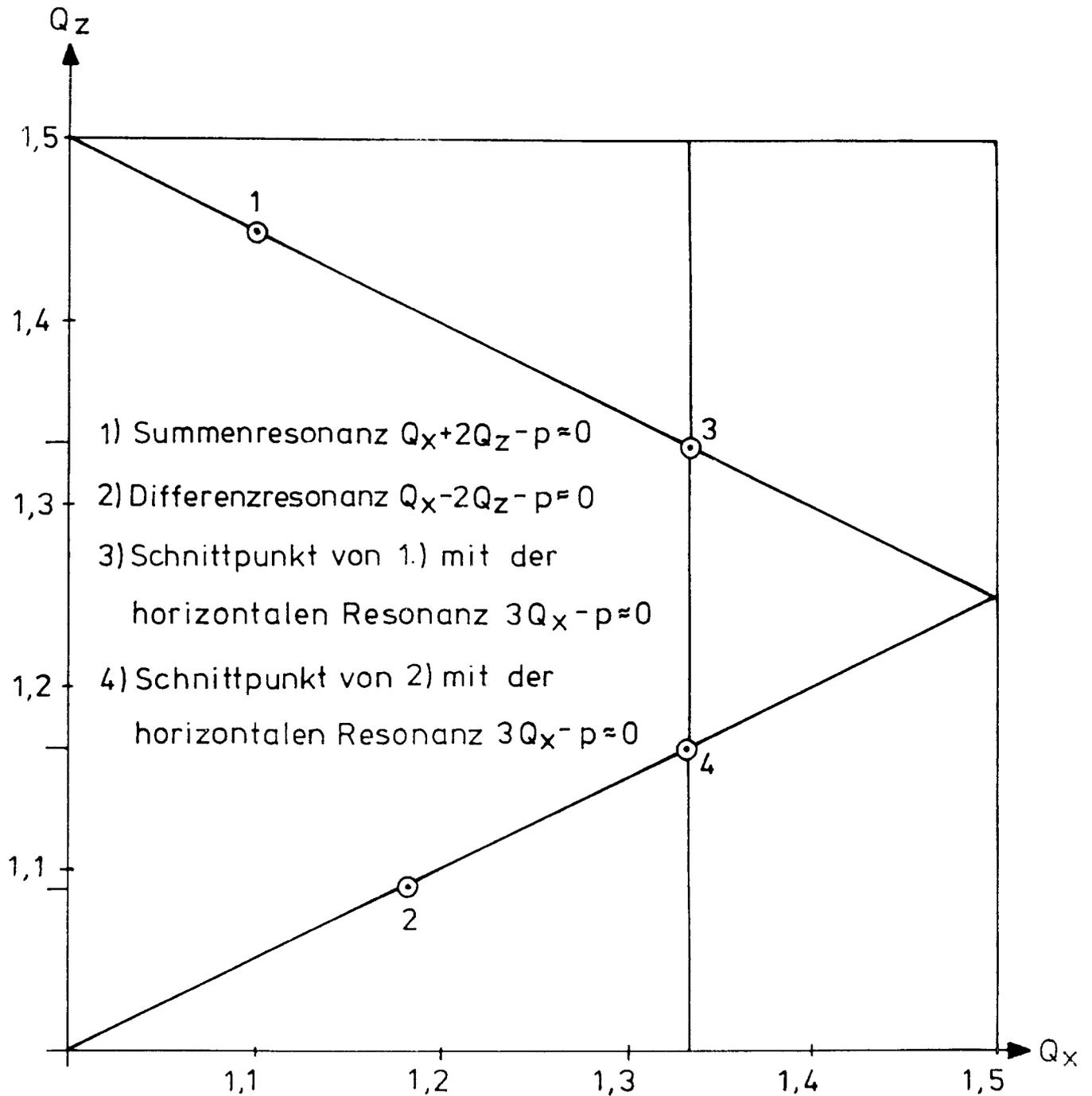
Durch den Einfluß des Sextupoles werden horizontale und vertikale Bewegungen gekoppelt. Dies bedeutet, daß statt einfacher Kurven in der horizontalen und vertikalen Projektion des Phasenraumes aufgeweitete Ringe entstehen. Durch eine Einschränkung der Phase ϕ_z (bzw. ϕ_x) auf ein kleines Intervall läßt sich die Bewegung in x- (z-) Richtung stroboskopisch betrachten. Die Bewegung verläuft auf einer Linie, wodurch Einflüsse von Resonanzen, wie zum Beispiel die Anzahl der Fixpunkte, sichtbar werden. Der Flächeninhalt, der durch diese Linie eingeschlossen wird, entspricht außerdem der Invarianten dieser Bewegung (siehe Brinkmann, Willeke /11/ und Kapitel 3.7).

Horizontale Phasenraumprojektion: $|\phi_z| \leq \Delta \phi_z \approx 0,01$

Vertikale Phasenraumprojektion: $|\phi_x| \leq \Delta \phi_x \approx 0,01 \quad (1.53)$

Die Größe der Intervalle in (1.53) ist dabei so gewählt, daß zum einen genügend Simulationsdaten (bei 50 000 Umläufen) in diese Intervalle fallen, zum anderen die durch diese Intervalle bedingten Aufweitung der Einträge der Simulationsdaten gering bleibt.

Wie oben erwähnt, muß die Bewegung im Einflußbereich einer isolierten Resonanz verlaufen, damit sie mit der Störungstheorie zu beschreiben ist. In Figur 1.6 sind die Q-Wertepaare der in Abschnitt 1.4.1.1 und 1.4.1.2 untersuchten Summen- und Differenzenresonanzen eingetragen (Punkt 1 und 2 in Figur 1.6). Die Q-Werte werden dabei sehr nahe an die Resonanzlinie gesetzt, so daß der Abstand zu diesen Linien in Figur 1.6 nicht aufzulösen ist. Außerdem sind die Q-Wertepaare 3 und 4 jeweils in der Nähe eines Schnittpunktes zweier Resonanzen eingetragen, die in Kapitel zwei untersucht werden.



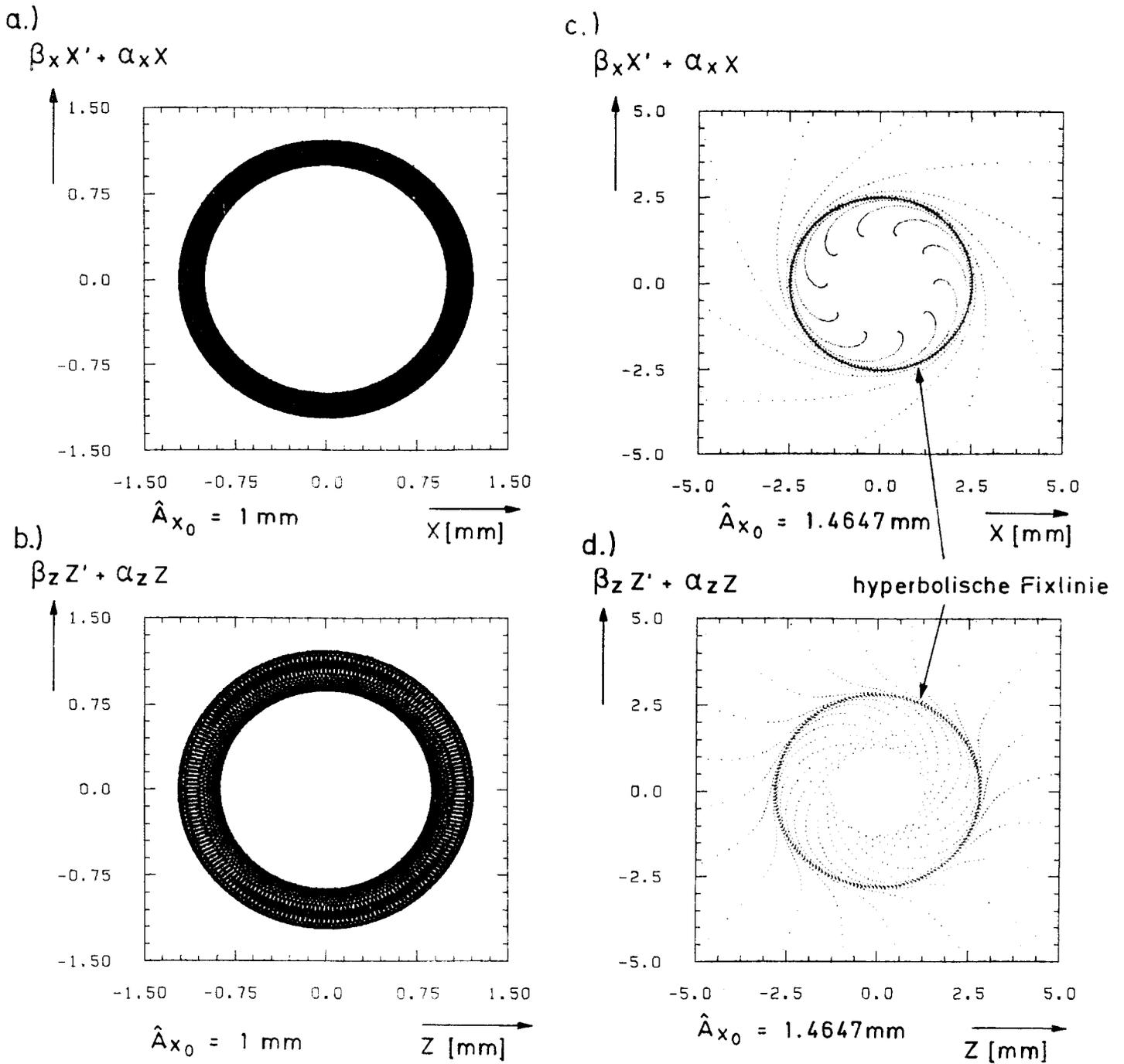
Figur 1.6: Wahl der Arbeitspunkte im Q_x - Q_z Diagramm

Die untersuchten Fälle liegen nicht exakt auf den Resonanzlinien, der Abstand zu diesen Linien ist jedoch so gering, daß er in der gezeigten Auflösung nicht erkennbar ist.

1.4.1.1 Summenresonanz $Q_x+2Q_z=p$

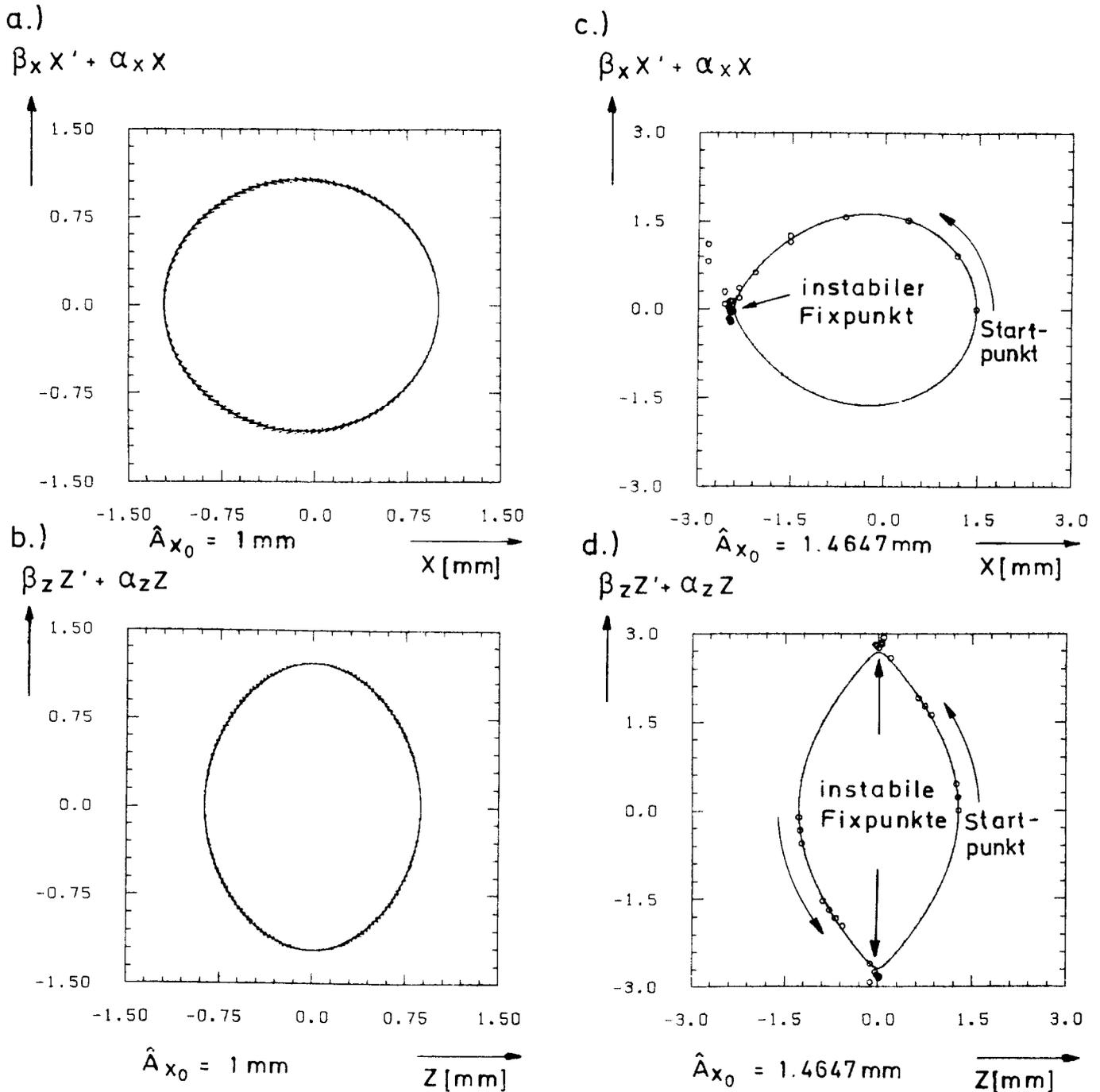
Als erstes wird das Verhalten in der Nähe der annähernd isolierten Resonanz $Q_x+2Q_z=4=e$ mit $Q_x=1.1$; $Q_z=1.449$; $e = -2 \times 10^{-3}$ studiert.

Figur 1.7 zeigt die horizontale und vertikale Phasenraumprojektion für Anfangsamplituden von $\hat{A}_{x_0} = 1$ mm und $\hat{A}_{z_0} = 1.4647$ mm. Die zweite Anfangsamplitude ergibt eine Bewegung gerade außerhalb der Separatrix. Wie oben beschrieben, werden in den Projektionen des Phasenraums durch die Kopplung der Bewegung statt geschlossenen Kurven Flächenbereiche eingenommen, was die Interpretation dieser Simulationsdaten sehr erschwert. Erst durch die Einschränkung des Phasenwinkels ϕ_z oder ϕ_x in der jeweils anderen Projektion (Figur 1.8) gemäß (1.53) läßt die Struktur der Summenresonanz mit einem Fixpunkt in der normierten $(x, \bar{x}' = \beta_x x' + \alpha_x x)$ -Projektion und zwei Fixpunkten in der normierten $(z, \bar{z}' = \beta_z z' + \alpha_z z)$ -Projektion erkennen. Bei kleiner Amplitude ist die Deformation der geschlossenen Kurven der Trajektorien gering, diese Deformation wird aber für größere Amplituden sehr ausgeprägt. Die instabilen Fixpunkte sind deutlich an der Häufung der Simulationsdatenpunkte zu erkennen. Wie im letzten Abschnitt erwähnt, liegen die instabilen Fixpunkte auf Linien (Fixlinien) und zwar in den normierten Projektionen (x, \bar{x}') , (z, \bar{z}') auf Kreisen. In beiden Fällen ist die Übereinstimmung der Störungstheorie (durchgezogene Linien) mit den Simulationsergebnissen (Punkte) fast perfekt, wobei kleinere Abweichungen in der Nähe der instabilen Fixpunkte besonders deutlich hervortreten.



Figur 1.7: Bewegung in der Nähe der Summenresonanz $Q_x + 2Q_z = p$

Teil a und b zeigen die horizontale und vertikale Projektion des Phasenraums einer Bewegung mit kleiner Amplitude. In Teil c und d sind die Projektionen des Phasenraumes einer Bewegung gerade außerhalb der Separatrix gezeigt.



Figur 1.8: Vergleich der Störungstheorie mit den Simulationsdaten

Teil a und b zeigt den Vergleich bei kleiner Amplitude und Teil c und d für die Bewegung in der Nähe der Separatrix. Die durchgezogenen Linien sind die Kurven der Störungstheorie, während die Punkte durch die Einschränkung der Simulationsdaten gemäß (1.53) gewonnen wurden. Leichte Abweichungen zeigen sich in der Nähe der instabilen Fixpunkte. In Teil c und d sind außerdem die Startpunkte eingetragen und die zeitliche Abfolge der Einträge durch Pfeile angedeutet.

Für die Summenresonanz $Q_x + 2Q_z = p$ gilt gemäß (1.35), wobei die Anfangsemittanzen gleich gewählt sein sollen ($\varepsilon_{x_0} = \varepsilon_{z_0}$):

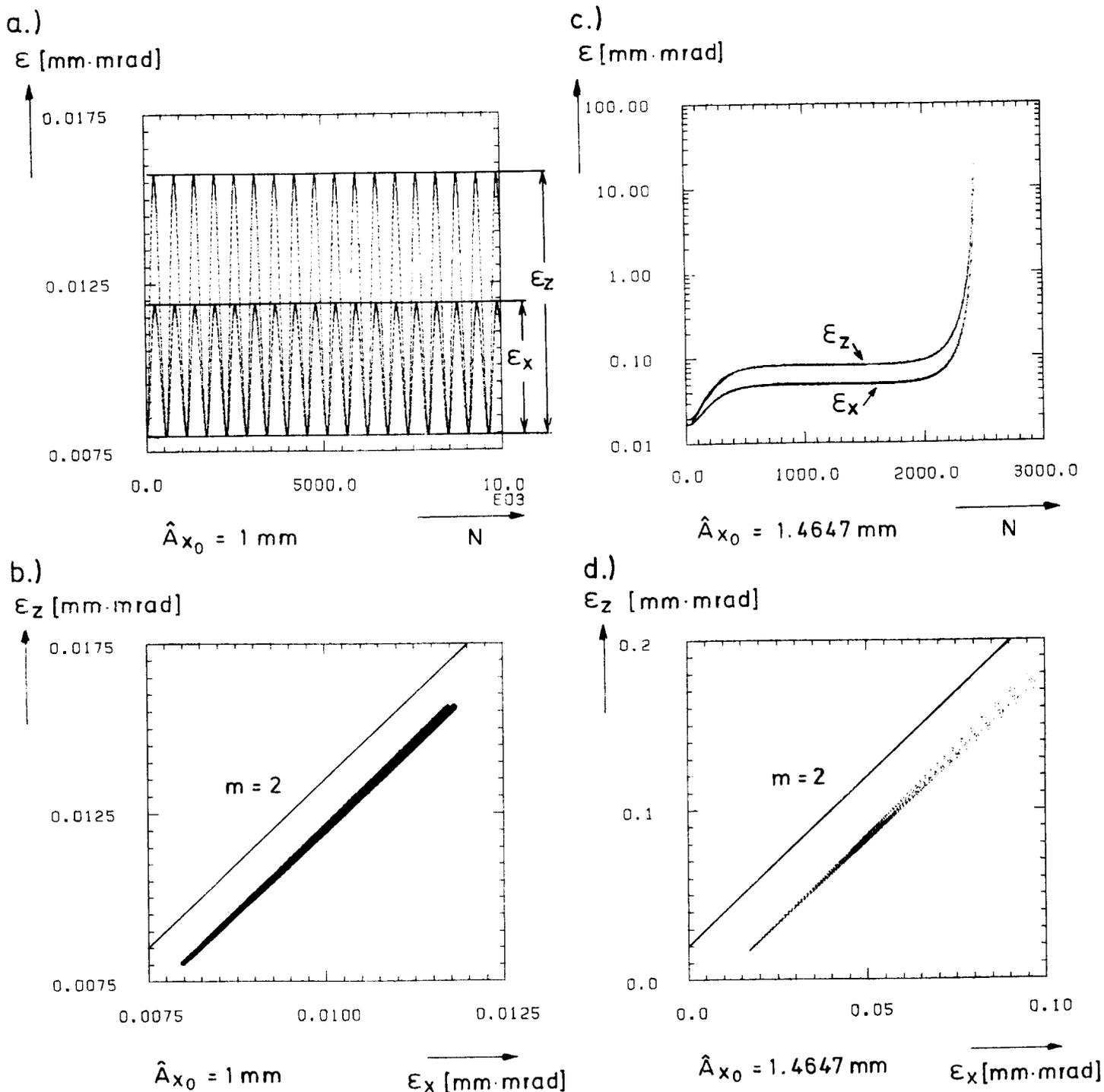
$$C_1 = \mu \varepsilon_{x_0} - \nu \varepsilon_{z_0} = \varepsilon_{x_0} \quad (1.54)$$

Während der Teilchenumläufe ändern sich die Emittanzen ($\varepsilon_x = \varepsilon_{x_0} + \Delta\varepsilon_x$), ($\varepsilon_z = \varepsilon_{z_0} + \Delta\varepsilon_z$) aufgrund des Resonanzeinflusses. Gemäß Gleichung (1.35) gilt für die Änderungen:

$$2 \Delta\varepsilon_x = \Delta\varepsilon_z \quad (1.55)$$

Für die beiden untersuchten Anfangsamplituden ist in Figur 1.9 die Entwicklung der Emittanzen zu sehen, einmal als Funktion der Umlaufzahl N , zum anderen im $\varepsilon_z - \varepsilon_x$ -Diagramm. Bei kleiner Amplitude oszilliert die Emittanz zwischen ihrem Maximal- und Minimalwert, wobei entsprechend Gleichung (1.55) die Einträge im $\varepsilon_z - \varepsilon_x$ -Diagramm auf einer Geraden der Steigung $m=2$ liegen. Gerade außerhalb der Separatrix wird beim Annähern an den instabilen Fixpunkt über 1500 Umläufe ein nahezu konstantes Emittanzenverhältnis erreicht, beim Entfernen vom instabilen Fixpunkt streben dann beide Emittanzen gegen Unendlich, wobei jedoch Gleichung (1.55) erfüllt ist. In beiden Fällen liegen die Daten jedoch nicht exakt auf einer Geraden. Die beobachtete Aufweitung läßt sich auf den Einfluß der vernachlässigten übrigen Resonanzen zurückführen.

Figur 1.10 zeigt den Phasenraumabstand $d(N)$ zweier zunächst eng benachbarter Teilchen ($d_0 = d(N=0) = 10^{-6}$ mm) als Funktion der Umlaufzahl N für die Amplituden innerhalb und gerade außerhalb der Separatrix. Für die kleine Amplitude ist nur ein sehr schwaches lineares Ansteigen des Abstandes zu verzeichnen, während außerhalb der Separatrix der Abstand sehr stark anwächst. Hierbei handelt es sich jedoch um eine ungebundene Bewegung und nicht um den für chaotische Bewegungen charakteristischen exponentiellen Anstieg. Die Bestimmung des Lyapunov-Exponenten ist somit außerhalb der Separatrix nicht sinnvoll. Aufgrund der Existenz anderer Resonanzen gibt es im Prinzip auch in diesem Beispiel in der Nähe der Separatrix einen chaotischen Bereich. Dieser Bereich ist in dem hier gewählten Beispiel kleiner als 10^{-6} mm.

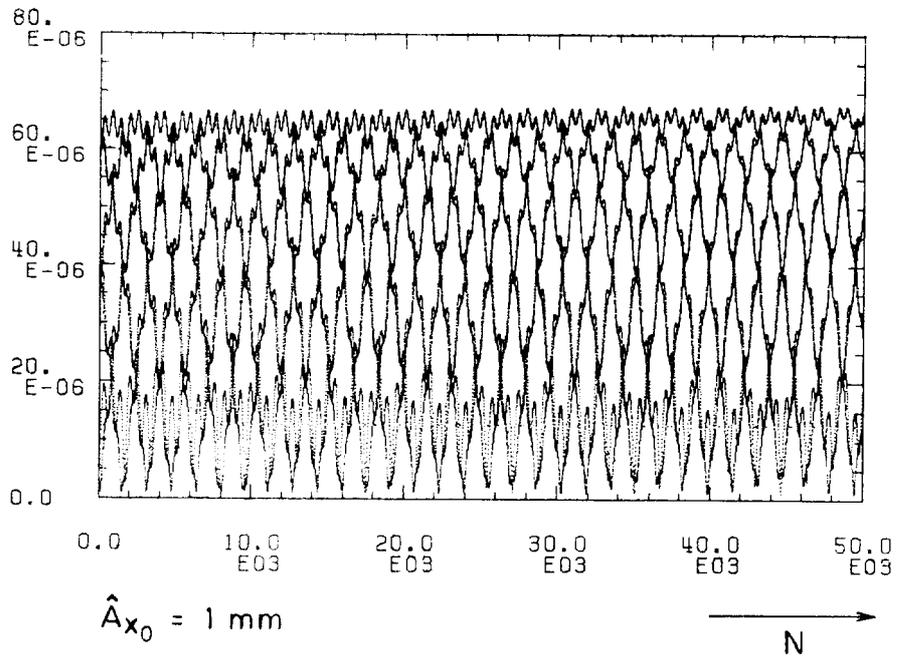


Figur 1.9: Einfluß der Summenresonanz auf die Emittanzen

Bei kleiner Amplitude (Teil a, b) schwingen beide Emittanzen in regelmäßigen Abständen zwischen den Extremwerten. Gemäß (1.55) ist die Steigung im ϵ_x - ϵ_z -Diagramm ($m=2$). Im Falle der Bewegung knapp außerhalb der Separatrix bleibt das Emittanzenverhältnis bei Annäherung an die instabilen Fixpunkte konstant. Nach dem Passieren der Fixpunkte setzt ein rasches Anwachsen der Emittanzen ein, wobei die Steigung ($m=2$) (Teil d) beibehalten wird.

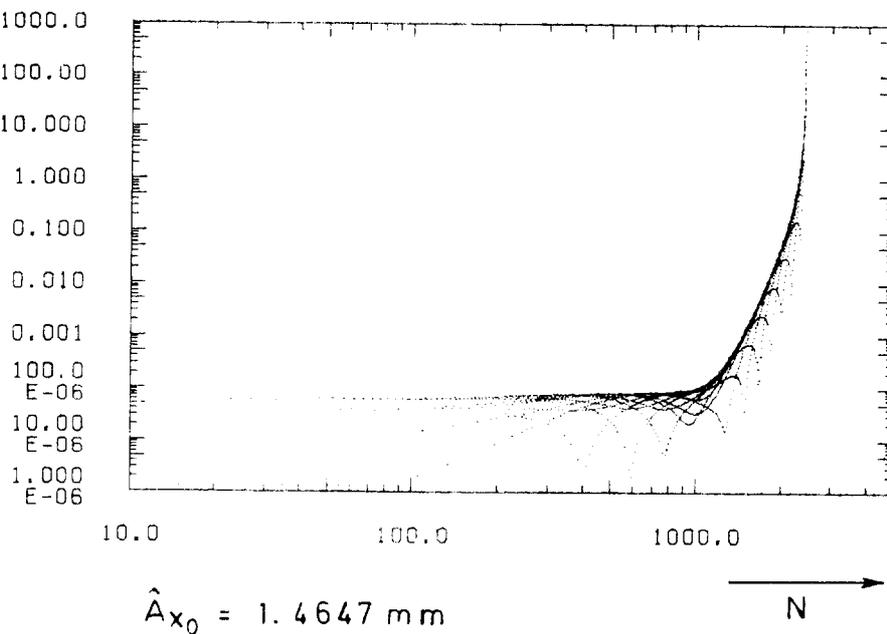
a.)

$d(N)$ [mm]



b.)

$d(N)$ [mm]



Figur 1.10: Abstand im Phasenraum zweier zunächst eng benachbarter Teilchen

Bei kleinen Amplituden (Teil a) bleibt der Abstand annähernd konstant. Wie die Amplituden so wächst auch der Abstand nach dem Passieren der instabilen Fixpunkte (Teil b) für die Bewegung außerhalb der Separatrix rasch an.

Mit der Oszillation der Emittanzen geht auch eine Veränderung des Q-Wertes einher. Figur 1.11 zeigt die Phasenvorschübe für beide Amplituden, eingetragen ist jeweils die Resonanzlinie von $Q_x + 2Q_z = 4$. Es sind keine weiteren Resonanzen bis zur 9. Ordnung in unmittelbarer Nähe, so daß in guter Näherung eine isolierte Resonanz vorliegt.

Eine Mittelung der Q-Werte über 1000 Umläufe ist eine nützliche Methode, um die nichtlineare Q-Wertverschiebung durch Resonanzen zu bestimmen.

Die Mittelung der Q-Werte bei der kleinen Amplitude ergibt eine geringfügige Verschiebung in Richtung auf die Resonanz, während bei der großen Amplitude die Q-Werte auf die Resonanzlinie geschoben werden, wenn man sich der instabilen Fixlinie nähert.

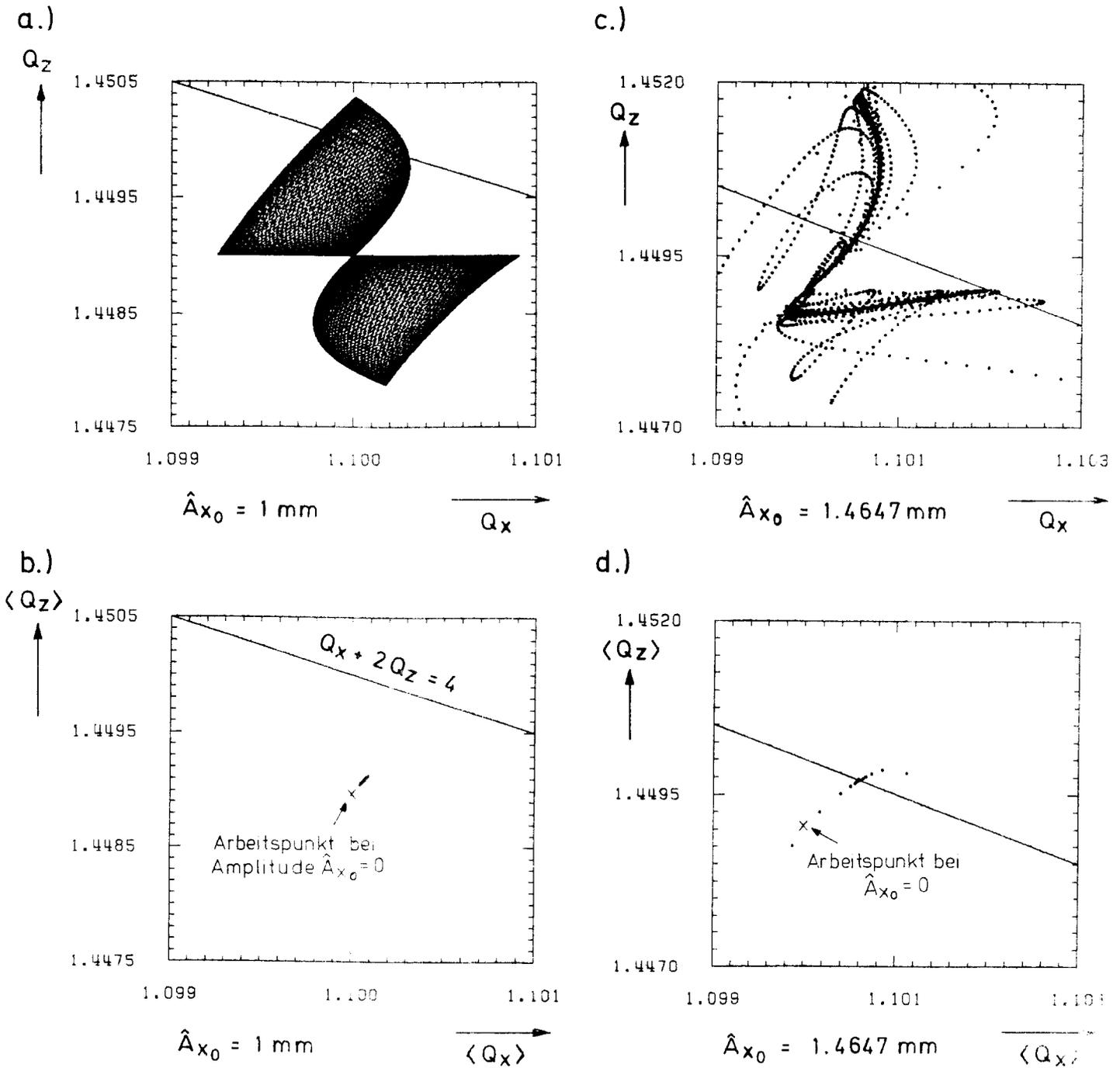
1.4.1.2 Differenzenresonanz $Q_x - 2Q_z = p$

Als zweite annähernd isolierte Resonanz wird die Differenzenresonanz $Q_x - 2Q_z + 1 = 2 \times 10^{-4}$ untersucht, mit $Q_x = 1.185$; $Q_z = 1.0924$ (siehe Punkt 2 in Figur 1.6). Der Abstand zur Resonanz ist hier einen Faktor 10 kleiner als im Falle der Summenresonanz, es ist deshalb anzunehmen, daß die Bedingung für eine isolierte Resonanz hier noch besser erfüllt ist. Die Differenzenresonanz ist weniger gefährlich als die Summenresonanz, da kein unbegrenztes Wachsen beider Amplituden möglich ist. Wie in Kapitel zwei gezeigt wird, kann jedoch auch eine Differenzenresonanz zu einer deutlichen Akzeptanzverringerung führen, wenn gleichzeitig eine Summenresonanz wirksam ist.

Auch die Differenzresonanz führt zu einer Kopplung der horizontalen und vertikalen Bewegung, wobei sich die Emittanzen ϵ_x , ϵ_z nun gemäß (1.56) verhalten.

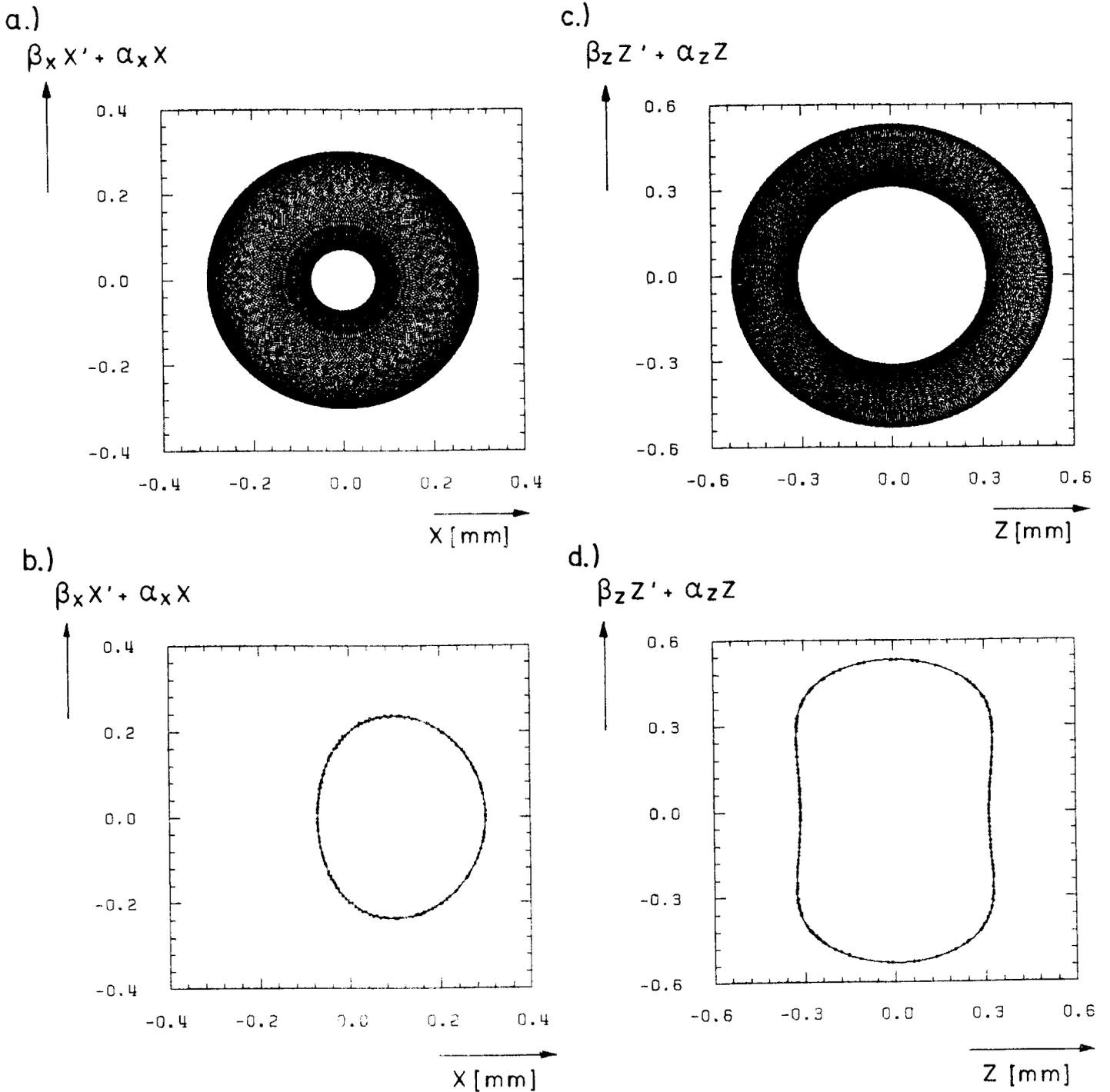
$$2 \Delta \epsilon_x = -\Delta \epsilon_z \quad (1.56)$$

Deshalb werden auch bei Differenzenresonanzen in den Projektionen statt der geschlossenen Kurven Flächenbereiche überstrichen werden, wie in Figur 1.12 a, c zu sehen ist. Wiederum wird der Resonanzeffekt deutlich sichtbar, wenn in der jeweils anderen Projektion die Phase ϕ_x (bzw. ϕ_z) auf ein kleines Intervall gemäß (1.53) eingeschränkt wird. Figur 1.12 b, d zeigt die so reduzierten Simulationsdaten. Sie stimmen gut mit der Störungstheorie überein.



Figur 1.11: Variation der Q-Werte

Teil a zeigt die Variation der Q-Werte bei kleiner Amplitude, wobei in Teil b diese Variation über 1000 Umläufe gemittelt worden ist. Teil c und d zeigen die Q-Wert-Variation im Falle der Bewegung in der Nähe der Separatrix. Die gemittelten Q-Werte (Teil d) laufen auf die Resonanzlinie zu, solange die Bewegung sich auf die instabile Fixpunktlinie zu bewegt, außerhalb der Separatrix können starke Schwankungen der mittleren Q-Werte auftreten. Im Falle mit kleiner Amplitude ist ein deutlicher Abstand zur Resonanzlinie festzustellen.



Figur 1.12: Bewegung in der Nähe der Differenzenresonanz $Q_x - 2Q_z = p$

Teil a und c zeigen die horizontale und vertikale Phasenraumprojektion einer Bewegung mit kleiner Amplitude. Die Übereinstimmung mit der Störungstheorie (durchgezogene Linie in Teil b,d) mit den durch die Einschränkung der Phasen ϕ_x (bzw. ϕ_z) in der jeweils anderen Projektion des Phasenraums gewonnenen Simulationsdaten (Punkte in Teil b,d) ist nahezu perfekt.

Ein Sonderfall ist der stabile Fixpunkt $x=x'=0$. Ist dies der Startpunkt für die horizontale Bewegung, so bleibt $x=x'=0$ für alle Zeiten und die vertikale Bewegung ist völlig ungestört, also erwartet man einen Kreis in der vertikalen Phasenraumprojektion. Die Separatrix ist bei Differenzenresonanzen gerade die Bewegung bei der im horizontalen Phasenraum gerade der stabile Fixpunkt erreicht wird und im vertikalen Phasenraum der Kreisradius der ungestörten Bewegung. Im Gegensatz zur Separatrix der Summenresonanz trennt die Separatrix der Differenzenresonanz zwei Bereiche gebundener Bewegung.

Für Differenzenresonanzen kann man eine Resonanzbreite dadurch definieren, daß gerade die Separatrix der Differenzenresonanz erreicht wird. Setzt man in Gleichung (1.36) $C_2=0$, so lassen sich die Emittanzen bestimmen, für die diese Bedingung erfüllt ist:

$$0 = C_2^x = e \varepsilon_x \pm 2 \nu |H| \varepsilon_x^{\frac{|D|}{2}} \left(\frac{\mu}{\nu} \varepsilon_x - \frac{C_1}{\nu} \right)^{\frac{|D|}{2}} \quad (1.57)$$

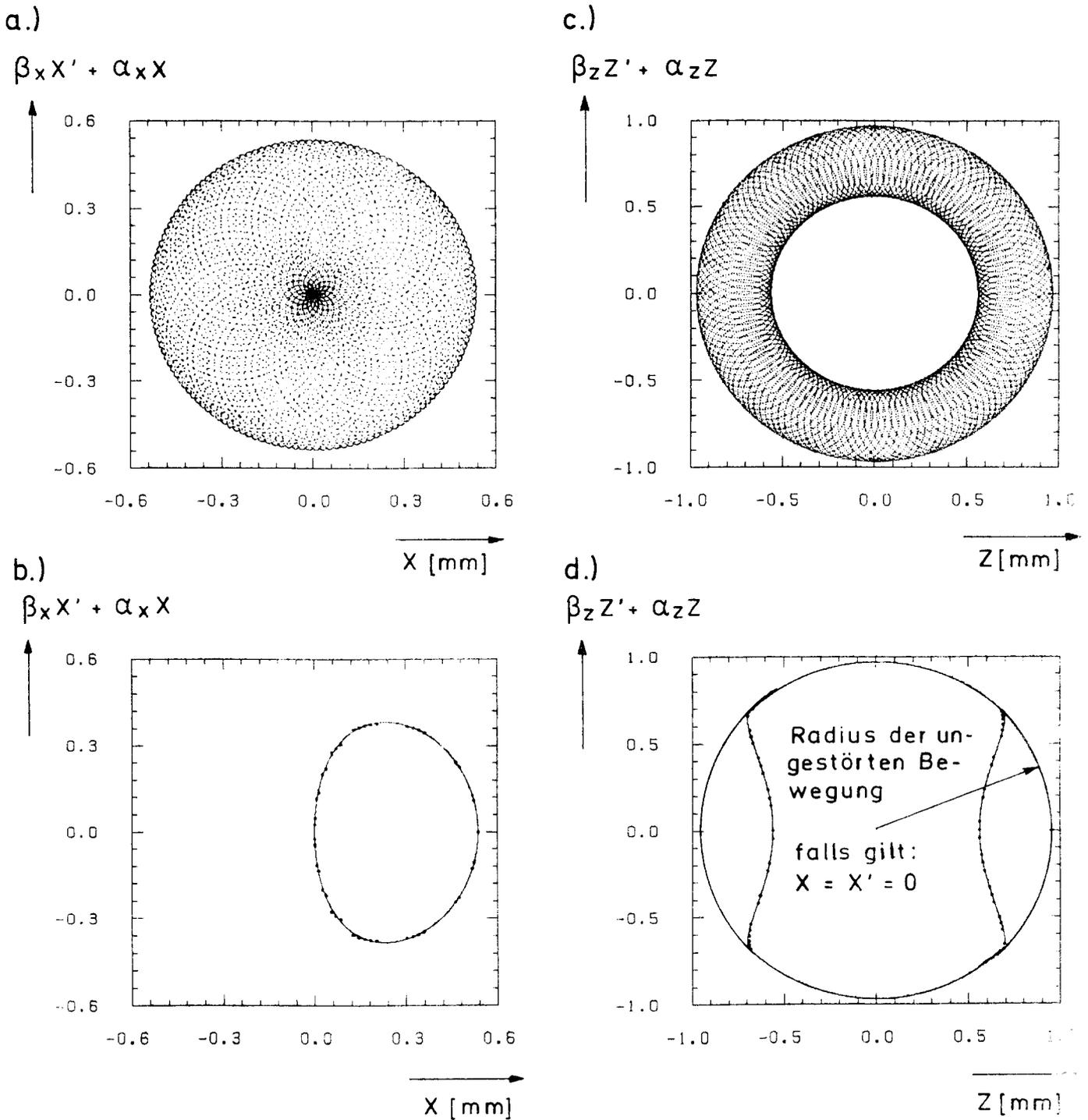
Für die untersuchte Differenzresonanz führt dies zu folgenden Emittanzen ($\varepsilon_{x_0} = \varepsilon_{z_0}$):

$$\sqrt{\varepsilon_{x_0}} = \pm \frac{e}{2|R|} \quad (1.58)$$

Diese Definition weicht etwas von der von Guignard /9/ ab. Gleichung (1.37) liefert wiederum mit der Anfangsbedingung ($\varepsilon_{x_0} = \varepsilon_{z_0}$):

$$\sqrt{\varepsilon_{x_0}} = \frac{\pm e}{3|R|} \quad (\Delta e = 2e) \quad (1.59)$$

Figur 1.13 zeigt ein Beispiel bei dem die Separatrix knapp erreicht worden ist. In der horizontalen Projektion des Phasenraumes wird der stabile Fixpunkt gerade noch umschlossen, in der vertikalen Phasenraumprojektion wird der Kreis der ungestörten Bewegung fast erreicht. Dieser Kreis ist zusätzlich eingetragen, damit ist gleichzeitig klar, daß die Bewegung jenseits der Separatrix auf zwei Inseln stattfindet.



Figur 1.13: Die Separatrix der Differenzenresonanz

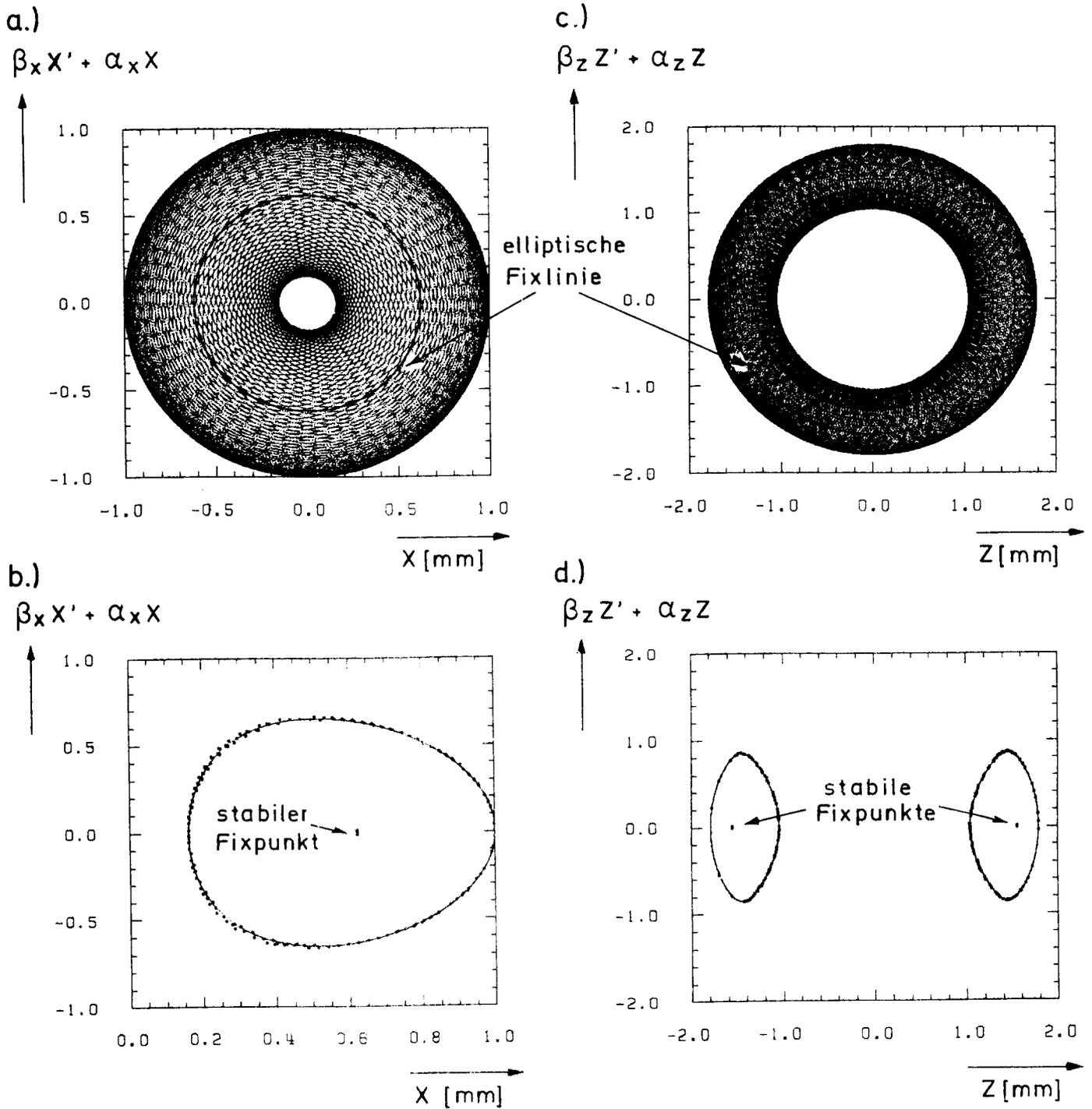
Gezeigt wird eine Bewegung (Teil a,c) die in der horizontalen Phasenraumprojektion fast den Nullpunkt ($x=x'=0$) erreicht. Teil b und d zeigt die gute Übereinstimmung von Störungstheorie und Simulationsdaten. Zusätzlich ist im Teil d der Kreis der ungestörten vertikalen Bewegung eingetragen, auf den sie in der vertikalen Projektion des Phasenraums (Teil c) reduziert ist, wenn man $x=x'=0$ als Startpunkt der Simulation wählt.

Dies ist bei noch größerer Amplitude gegeben (Figur 1.14). In diesem Falle ist dann der Abstand zur Resonanz kleiner als die Resonanzbreite. Die Kurve der Störungstheorie umschließt in der horizontalen Projektion nicht mehr den Fixpunkt $x=x'=0$, sondern einen neuen Fixpunkt. Gemäß (1.38) berechnen sich die Fixpunkte der Differenzenresonanz $Q_x - 2Q_z = p$ zu:

$$\xi_x = \frac{2e^2}{12^2 |K|^2} - \frac{C_1}{6} + \frac{2(\pm c)}{12 |K|} \sqrt{\frac{e^2}{12^2 |K|^2} - \frac{C_1}{6}} \quad (1.60)$$

Wählt man diese Fixpunkte als Anfangskoordinaten für eine Simulation, so erhält man die als elliptische Fixlinien gekennzeichneten Kurven in Fig. 1.14 a,c.

Figur 1.15 zeigt die Emittanzen ε_z als Funktion von ε_x . Gemäß der ersten Invarianten (1.35) liegen die Datenpunkte längs einer Geraden mit negativer Steigerung ($m=-2$).



Figur 1.14: Bewegung um eine Fixlinie

Bei noch größerer Amplitude als in Figur 1.13 ist die Bewegung innerhalb der Resonanzbreite der Differenzenresonanz und verläuft um eine Fixlinie, die in Teil a und c als Kreis eingetragen ist. Teil b und d zeigt die gute Übereinstimmung zwischen Störungstheorie und Simulationsdaten: die horizontale Bewegung umschließt nicht mehr den Nullpunkt $x=x'=0$ und in der vertikalen Phasenraumprojektion verläuft die Bewegung auf zwei Inseln.

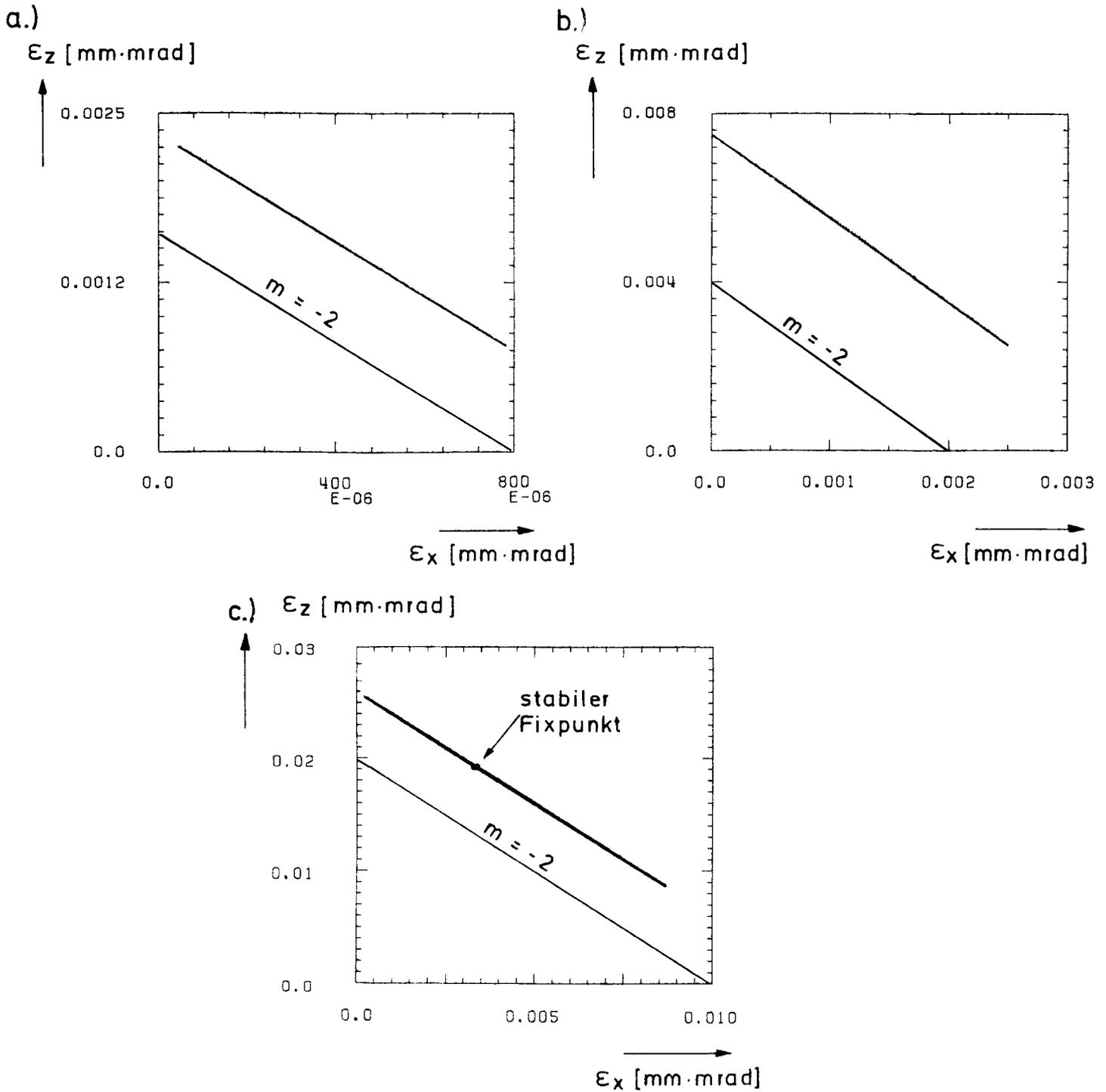


Fig. 1.15: Entwicklung der Emittanzen bei einer Differenzenresonanz

Bei kleiner Amplitude (Teil a) wird der Nullpunkt nicht erreicht, in Teil b liegt dieser Fall annähernd vor, während bei noch größerer Amplitude (Teil c) dieser Nullpunkt wieder nicht erreicht wird. Zusätzlich ist in Teil c die Lage des stabilen Fixpunktes eingetragen. Bei Differenzenresonanzen ist die Steigung im ϵ_x - ϵ_z -Diagramm gemäß (1.56) negativ ($m=-2$).

1.4.2 Störungstheorie zweiter Ordnung

Mit der gleichen einfachen Beschleunigerstruktur mit leicht variierten Parametern (siehe Bemerkungen am Anfang von Abschnitt 1.4) möchte ich nun Simulationen mit der Störungstheorie zweiter Ordnung vergleichen. Dabei lassen sich für die rein horizontale Bewegung Resonanzen vierter und sechster Ordnung behandeln.

1.4.2.1 Resonanz vierter Ordnung $4Q_x = p$

Die transformierte Hamilton-Funktion K für die Resonanz vierter Ordnung nimmt gemäß (1.19) folgende Form an:

$$K = eJ + A J^2 + B J^2 \cos (4 \psi_x)$$

$$e = 4Q_x - p$$

$$A = - \frac{9 a^2}{\pi} \left[\cot (3\pi Q_x) + 3 \cot (\pi Q_x) \right]$$

$$B = - \frac{9 a^2}{\pi} \left[3 \cot (3\pi Q_x) + \cot (\pi Q_x) \right]$$

$$a = - \left(\frac{\beta_x}{2} \right)^2 m_s, \quad a' \equiv \frac{9 a^2}{\pi}$$

$$\beta_x \bar{=} \text{Betafunktion} \quad (1.61)$$

$$m_s \bar{=} \text{Sextupolstärke (siehe Einleitung zum Abschnitt 1.4).}$$

Der erste Term in (1.61) stammt von der Transformation des Typs (1.30)(1.31), die die Hamilton-Funktion unabhängig von θ macht. Wichtig ist der konstante zweite Term, der zu einer nichtlinearen Frequenzverschiebung führt, und der für die Resonanz vierter Ordnung wesentliche dritte Term.

Mit dem Programm CANOL (Willeke / 5 /) können Rechnungen der Störungstheorie 2. Ordnung mit Simulationen verglichen werden. Dazu werden die Koordinaten (j, ψ_x) gemäß (1.61) bestimmt und durch eine generierende Funktion (1.20) in die ursprünglichen Koordinaten (ε_x, ϕ_x) zurücktransformiert.

Die so berechneten Werte werden mit dem Symbol X graphisch eingetragen, während die Simulationsergebnisse mit Punkten (•) dargestellt werden.

Figur 1.16 zeigt den Vergleich der theoretischen Berechnungen der Störungstheorie 2. Ordnung mit Simulation bei $Q_x = 0,251$, also in unmittelbarer Nähe der Resonanz vierter Ordnung. In den durch die 4 Fixpunkte definierten nahezu quadratischen Phasenraumbereich ist die Übereinstimmung nahezu perfekt (Figur 1.16a). Außerhalb zeigen sich deutliche Abweichungen (Fig. 1.16b): Die Simulation zeigt, daß die Resonanz vierter Ordnung stabilisiert ist, während die störungstheoretischen Kurven ungebundene Bewegung andeuten. Um diesen Unterschied verständlich zu machen, betrachten wir die Größe a' in (1.61).

Für $e \geq 0$ gilt:

$$\begin{aligned} A &> -2a' \\ &\rightarrow |A| < |B| \\ B &> 2a' \end{aligned} \quad (1.62)$$

Die möglichen Fixpunkte von (1.61) lassen sich gemäß (1.38) bestimmen.

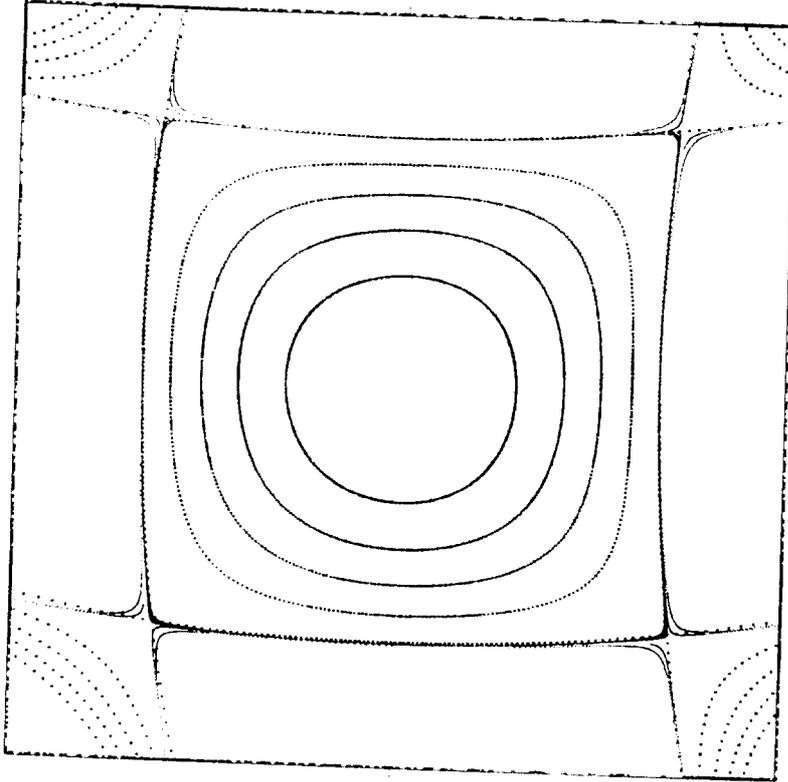
$$\begin{aligned} J_1 &= -\frac{e}{2(A-B)} \\ J_2 &= -\frac{e}{2(A+B)} \end{aligned} \quad (1.63)$$

Unter der Bedingung (1.62) gilt:

$$J_1 > 0, \quad J_2 < 0 \quad (1.64)$$

a.)

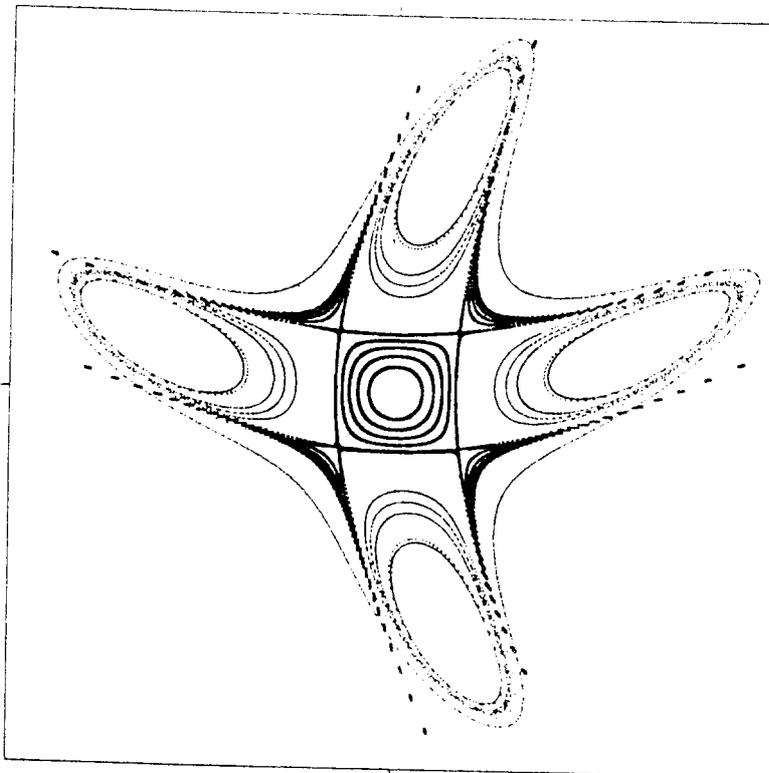
$$(X \times \text{ALFA} + X_P \times \text{BETA}) / \text{MM} = 3.6\text{E}+02$$



$$X / \text{MM} = 3.6\text{E}+02$$

b.)

$$(X \times \text{ALFA} + X_P \times \text{BETA}) / \text{MM} = 1.5\text{E}+03$$



$$X / \text{MM} = 1.5\text{E}+03$$

Figur 1.16: Resonanz 4. Ordnung der zweiten Ordnung Störungstheorie

Teil a zeigt, daß die Störungstheorie (in der Figur durch X gekennzeichnet) und die Simulation (•) bis zu den instabilen Fixpunkten bei $Q = 0,251$ fast perfekt übereinstimmen. Bei größeren Amplituden jedoch (Teil b) soll die Bewegung nach der Störungstheorie ungebunden sein, während die Simulationen zeigen, daß die Resonanz stabilisiert ist.

Nur für J_1 kann es somit Fixpunkte geben und zwar die vier instabilen Fixpunkte in Figur 1.16a. Die elliptischen Fixpunkte können wegen $J_2 < 0$ in den störungstheoretischen Berechnungen nicht auftauchen. In der Störungsrechnung ist jedoch die nichtlineare Frequenzverschiebung höherer Ordnung nicht berücksichtigt worden, das heißt in die Größen A, B von Gleichung (1.61) geht der Q_x -Wert bei Amplitude Null ein. Berücksichtigt man die Q -Wert-Verschiebung $Q_x \rightarrow Q'_x = Q_x + 2 A \bar{J}_2$, so kann man iterativ neue Werte der Parameter $A(Q_x) \rightarrow A'(Q'_x)$; $B(Q_x) \rightarrow B'(Q'_x)$; $\bar{J}_2(Q_x) \rightarrow \bar{J}'_2(Q'_x)$ berechnen (F. Willeke /34/).

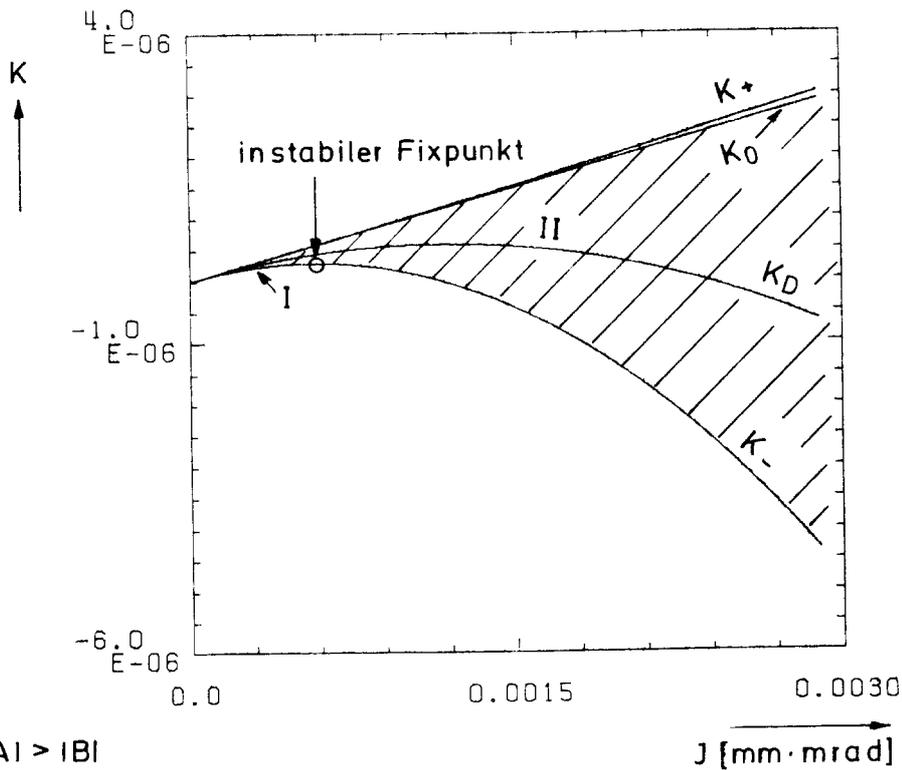
Bei günstiger Wahl des Startwertes \bar{J}_2 konvergiert diese Iteration und liefert die Werte $(A_i, B_i, \bar{J}_{2i}, Q_{xi})$.

Der Einfluß dieser Berücksichtigung der nichtlinearen Frequenzverschiebung höherer Ordnung läßt sich in Figur 1.17 studieren, in der die Komponenten der Hamilton-Funktion (1.61) für diese beiden Fälle dargestellt sind. Dabei werden die folgenden Anteile gezeigt:

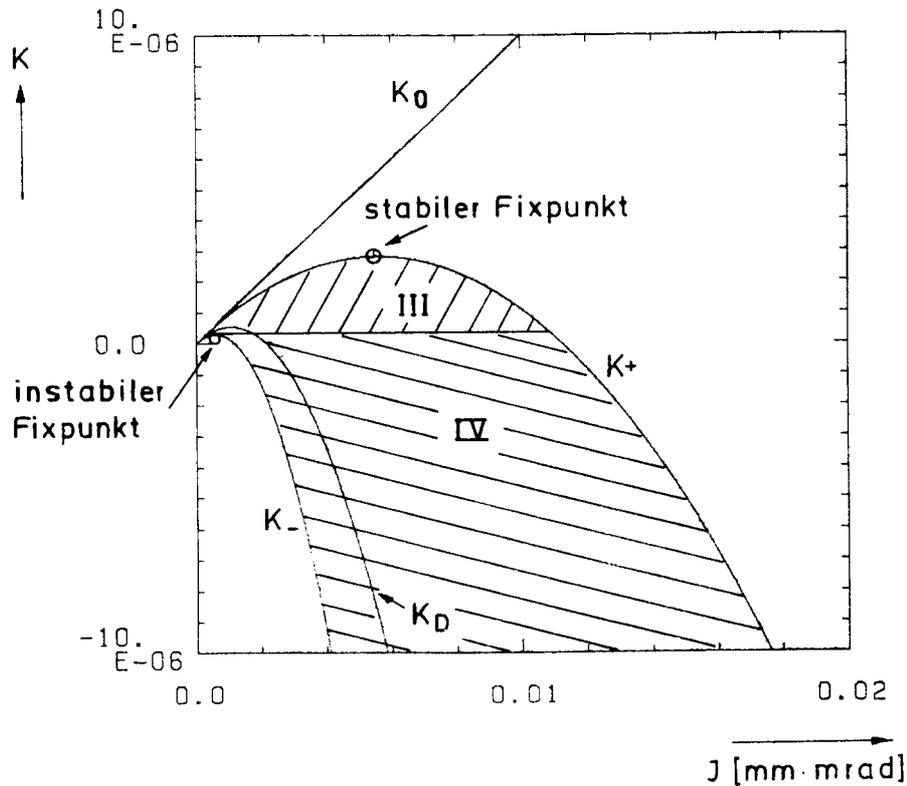
1. $K_0 = e J$
2. $K_D = e J + A J^2$
3. $K_{\pm} = e J + (A \pm B) J^2$ (1.65)

Bei unveränderlichem Q -Wert liegt die Kurve K_+ stets oberhalb der Geraden K_0 , so daß von einem bestimmten Wert von K an die Bewegung stets ungebunden ist (Bereich II). Erst bei Berücksichtigung der nichtlinearen Frequenzverschiebung höherer Ordnung (Figur 1.17b) ist die Kurve K_+ wegen der Umkehrung der Bedingung (1.62) ($|A| > |B|$) nach unten gekrümmt. Dadurch ergeben sich drei unterschiedliche Bereiche: Im ersten Bereich I ist die Bewegung innerhalb der Separatrix (dieser Bereich ist auch in Figur 1.17a eingetragen). Die Bewegung verläuft im Bereich III auf Inseln um die stabilen Fixpunkte und im Bereich IV ist die Bewegung um die Inselstrukturen herum und weiterhin gebunden. Figur 1.18 zeigt Ergebnisse der Störungstheorie mit nichtlinearer Frequenzverschiebung und der Simulation wieder bei $Q_x = 0,251$. Die Ergebnisse stimmen bis zu sehr großen Amplituden recht gut überein. Für eine noch bessere Übereinstimmung bei solcher großen Amplitude muß die Störungstheorie zu höherer Ordnung getrieben werden. Wenn man einen größeren Abstand zur Resonanz wählt, wird erwartungsgemäß die Übereinstimmung zwischen Störungstheorie und Simulation schlechter. Fig. 1.19 illustriert dies für $Q_x = 0,255$.

a.) $|A| < |B|$



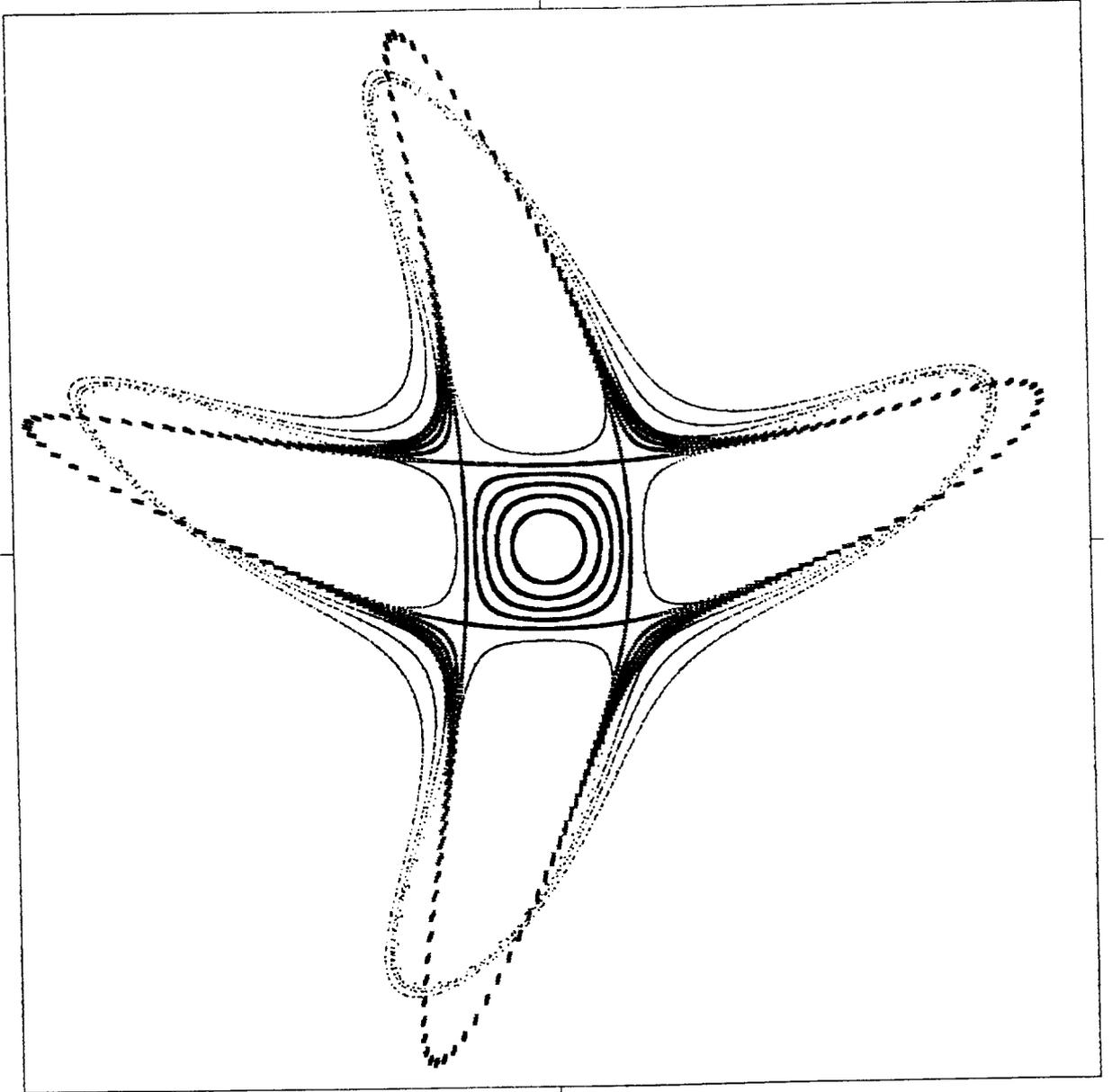
b.) $|A| > |B|$



Figur 1.17: Bedingung für eine Resonanzstabilisierung durch Berücksichtigung der nichtlinearen Frequenzverschiebung

Betrachtet wird die Hamilton-Funktion $K = eJ + AJ^2 \cos 4\psi_x$ mit $A < 0$; $B > 0$. Gemäß (1.65) werden die Anteile definiert: $K_0 = eJ$; $K_D = eJ + AJ^2$; $K_+ = eJ + (A+B)J^2$. Solange $|A| < |B|$ gilt (Teil a), ist die Resonanz nicht stabilisiert. Die Bewegung ist im Bereich I bis zum instabilen Fixpunkt gebunden und außerhalb im Bereich II ungebunden. Gilt jedoch $|A| > |B|$ (Teil b), gibt es den ungebundenen Bereich nicht. Statt dessen gibt es den Inselbereich III um den stabilen Fixpunkt, und außerhalb der Inselstruktur wieder gebundene Bewegung (Bereich IV).

$$(X * ALFA + XP * BETA) / MM = 1.6E+03$$



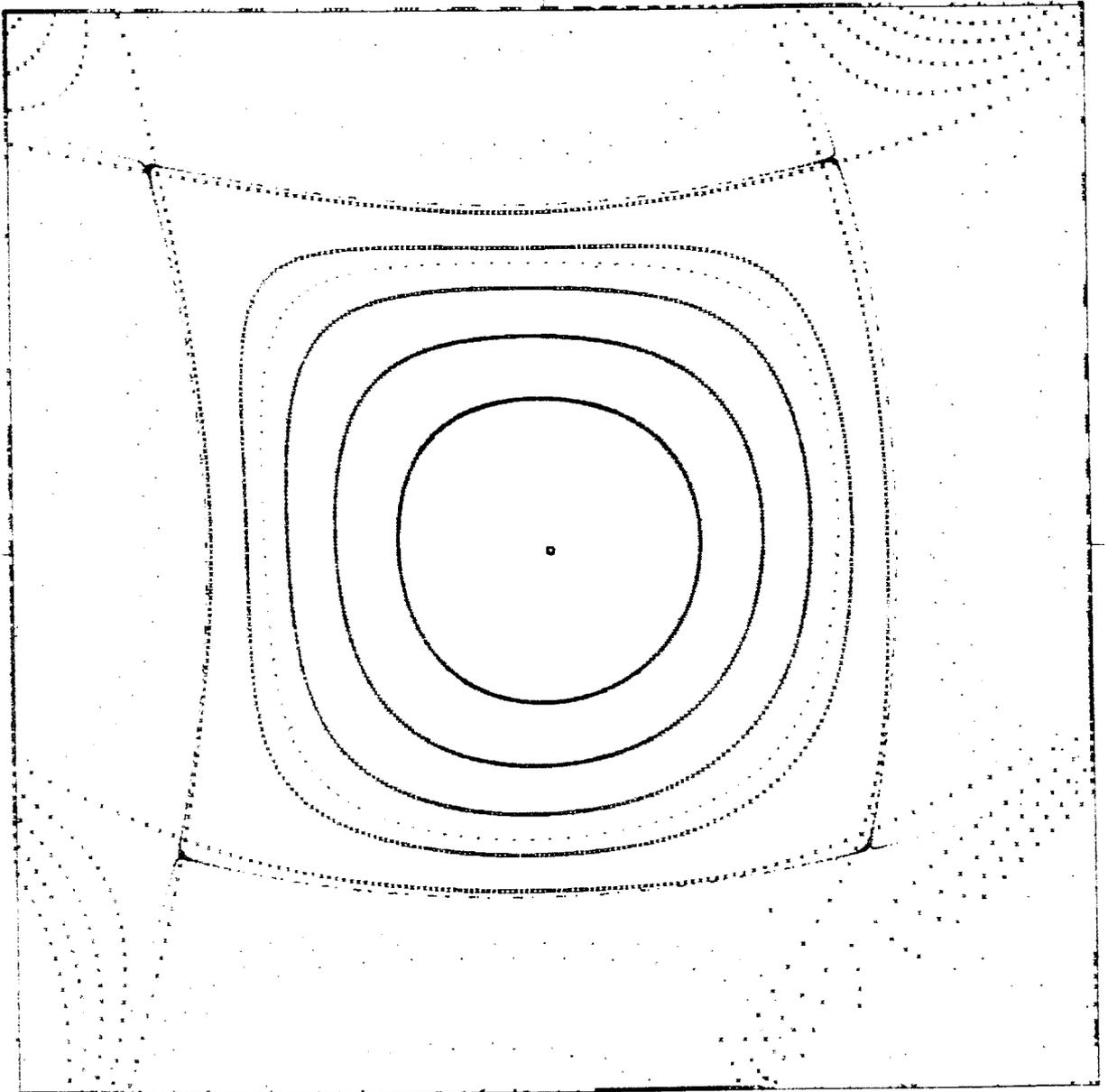
$$X/MM = 1.6E+03$$

Figur 1.18: Einfluß nichtlinearer Frequenzverschiebung höherer Ordnung

Wird die nichtlineare Frequenzverschiebung höherer Ordnung berücksichtigt, so zeigt auch die Störungstheorie die Stabilisierung der Resonanz (vergleiche Figur 1.17b)

X -> Störungstheorie
(•) -> Simulationen

$(\alpha \times \text{ALFA} + \beta \times \text{BETHA}) / \text{MM} = 8.5\text{E}+02$



$X/\text{MM} = 8.5\text{E}+02$

Figur 1.19: Resonanz 4. Ordnung
bei $Q_x = 0,255$

Mit zunehmendem Abstand zur Resonanz zeigen sich immer stärker Abweichungen der Ergebnisse der Störungstheorie mit der Hamilton-Funktion (1.61) zu den Simulationsergebnissen (vergleiche Figur 1.16a).

X -> Störungstheorie
(•) -> Simulationen

1.4.2.2 Resonanz sechster Ordnung $6Q_x = p$

Als nächstes wird der Einfluß einer Resonanz sechster Ordnung auf die Bewegung behandelt. Die Hamilton-Funktion nimmt nun die Form an:

$$K = e J + A J^2 + B J^2 \cos (6 \psi_x)$$
$$A = - \frac{9 a^2}{\pi} \left[\cot (3 \pi Q_x) + 3 \cot (\pi Q_x) \right]$$
$$B = + \frac{9 a^2}{\pi} \cot (3 \pi Q_x) \quad (1.66)$$
$$a' \equiv \frac{9 a^2}{\pi}$$

Für einen positiven Resonanzabstand $e \geq 0$ gilt bei $Q_x = 0,175$.

$$A \approx - 5 a'$$
$$\rightarrow |A| \gg |B| \quad (1.67)$$
$$B \approx 0.08 a'$$

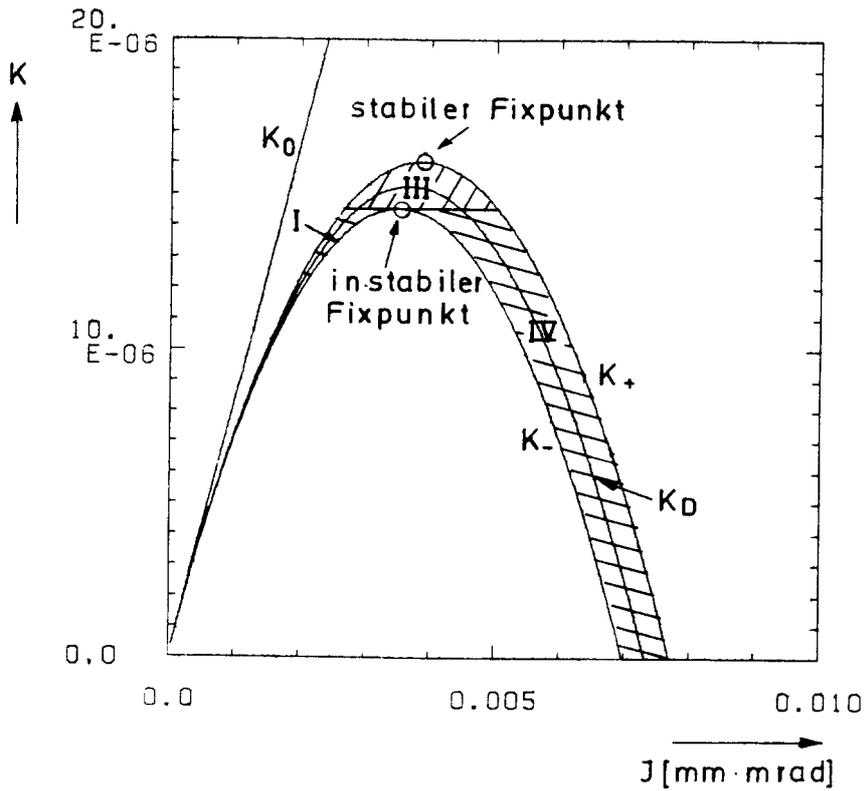
Hier ist also $|A|$ immer sehr viel größer als $|B|$. Dies hat zwei Auswirkungen: Zum einen ist die Resonanz wegen der starken nichtlinearen Frequenzverschiebung stets stabilisiert. Zum anderen findet man diese Resonanz wegen der starken nichtlinearen Frequenzverschiebung und wegen $A < 0$ bei Q -Werten, die wesentlich größer als $Q_x = 1/6$ sind. In unserem Beispiel ist deshalb $Q_x = 0,175$ gewählt worden.

Auch in diesem Beispiel ist das oben beschriebene Iterationsverfahren angewandt worden, um die nichtlinearen Frequenzverschiebung höherer Ordnung zu berücksichtigen. Figur 1.20 zeigt die Komponenten der Hamilton-Funktion (1.66).

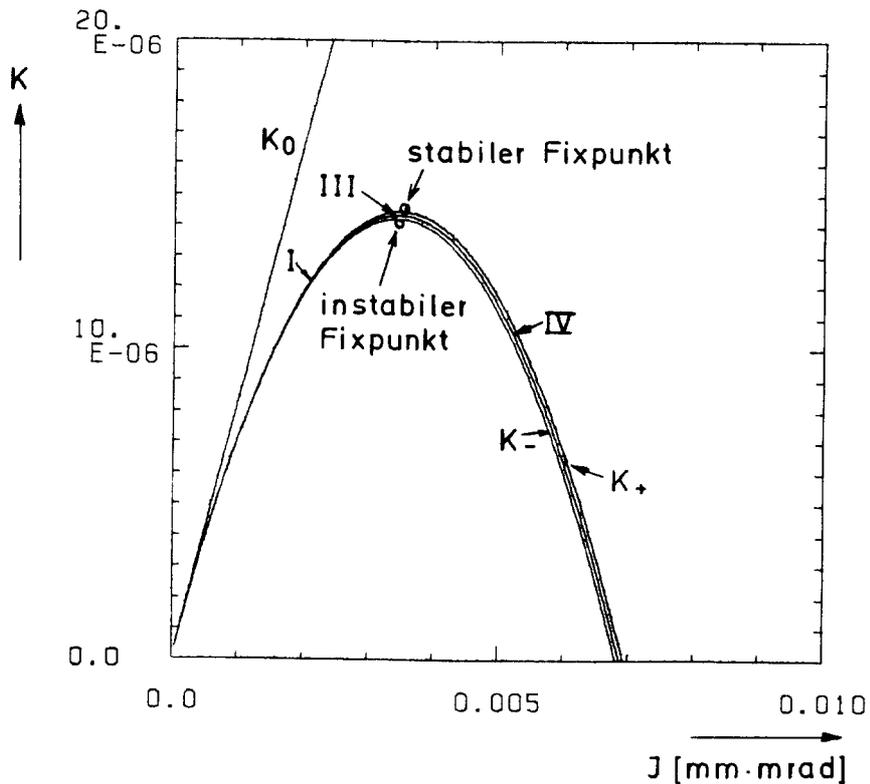
Bei Berücksichtigung der nichtlinearen Frequenzverschiebung wird der stabile Fixpunkt zu kleineren Werten von J verschoben und der Bereich III der Inselbewegung insgesamt verringert, während die Position des instabilen Fixpunktes nur unwesentlich geändert wird. Figur 1.21 zeigt den Vergleich der Störungstheorie mit den Simulationen. Bei unveränderlichem Q_x (Figur 1.21a) zeigen sich deutliche Unterschiede, während sich bei der Berücksichtigung der nichtlinearen Q -Verschiebung eine sehr gute Übereinstimmung ergibt.

a.)

- 52 -



b.)

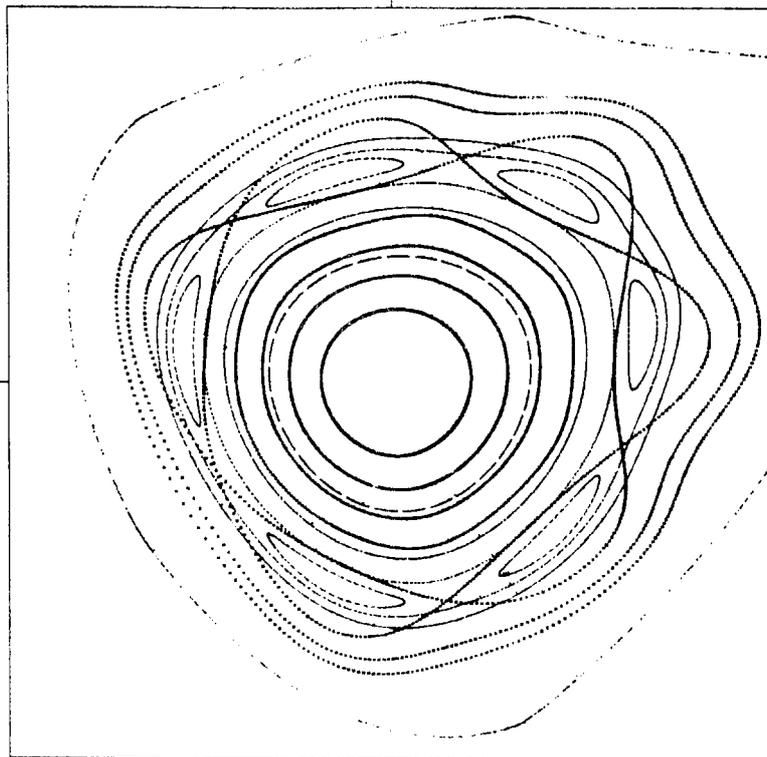


Figur 1.20: Einfluß der nichtlinearen Frequenzverschiebung höherer Ordnung auf die Stabilitätsbereiche der Resonanz sechster Ordnung

Aufgrund von $|A| \gg |B|$ ist die Resonanz sechster Ordnung auch ohne nichtlinearer Frequenzverschiebung höherer Ordnung in der Störungstheorie stabilisiert. Aber die nichtlineare Frequenzverschiebung hat auch in diesem Fall einen starken Einfluß: der Inselbereich III wird deutlich kleiner, wobei der stabile Fixpunkt zu kleineren Werten von J verschoben wird, während die Position des instabilen Fixpunktes fast unverändert bleibt.

a.)

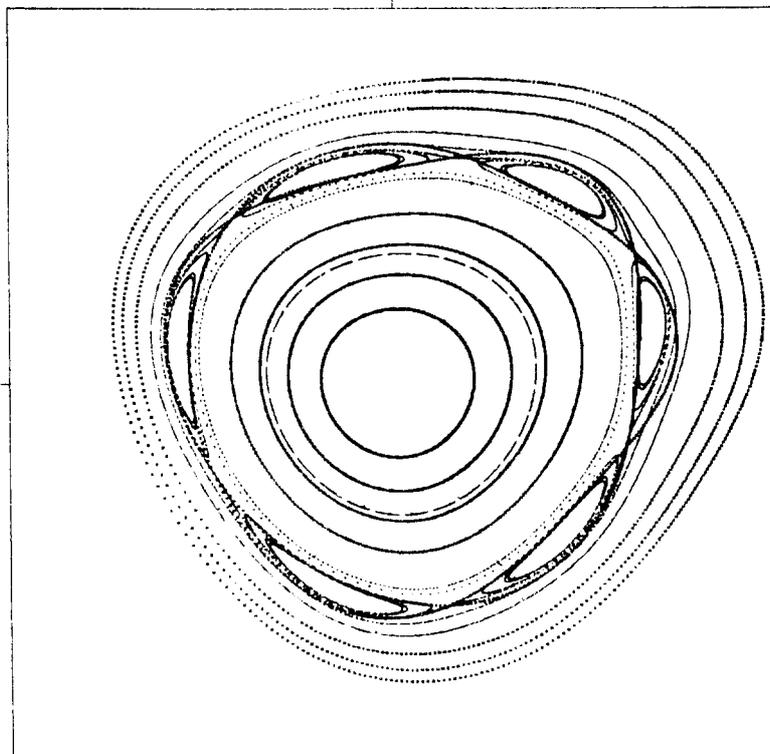
$$(X \times \text{ALFA} + X_P \times \text{BETA}) / \text{MM} = 1.4\text{E}+03$$



$$X / \text{MM} = 1.4\text{E}+03$$

b.)

$$(X \times \text{ALFA} + X_P \times \text{BETA}) / \text{MM} = 1.4\text{E}+03$$



$$X / \text{MM} = 1.4\text{E}+03$$

Figur 1.21: Vergleich der Störungstheorie und der Simulationen für die Resonanz sechster Ordnung

Teil a zeigt den Vergleich bei $Q_x = 0,175$ ohne nichtlineare Frequenzverschiebung höherer Ordnung. Wegen $A < 0$ ist bei einem bestimmten Wert von J die Resonanzbedingung $Q_x = 1/6$ erfüllt. Die Lage der Fixpunkte werden durch die Störungstheorie gut reproduziert, allerdings sind die Inseln viel zu groß. Erst bei einer Berücksichtigung der nichtlinearen Frequenzverschiebung höherer Ordnung stimmt auch die Inselgröße überein (Teil b).

Kapitel 2: Chaotische Bewegung

2.1 Einführung

In diesem Kapitel möchte ich beschreiben, unter welchen Bedingungen die Bewegung von Protonen in einem Beschleuniger chaotisch werden kann. Bei dieser Beschreibung stütze ich mich auf das Buch von Lichtenberg und Lieberman /3/ und die Arbeit von Chirikov /4/.

In Abschnitt 2.2.1 wird dazu zunächst das KAM-Theorem vorgestellt, welches Aussagen darüber macht, unter welchen Bedingungen ein System mit nichtlinearer Störung integrierbar und die Bewegung somit regulär bleibt. Diese Bedingungen des KAM-Theorems sind zum einen bei Bewegung in der Nähe der Separatrix nicht erfüllt, zum anderen dann nicht, wenn sich zwei oder mehrere Resonanzen überlappen. In beiden Fällen ist die Bewegung dann nicht integrierbar und deshalb chaotisch.

Als nächstes wird ein Kriterium angegeben, um reguläre von chaotischer Bewegung unterscheiden zu können, nämlich die Bestimmung des charakteristischen Lyapunov-Exponenten. Es wird dann das Phänomen der Arnold-Diffusion erläutert. Die Existenz dieser Diffusion ist von besonderer Bedeutung für die Stabilität eines Systems mit mehr als zwei Freiheitsgraden, da diese eine strenge Definition der Akzeptanz in solchen Systemen unmöglich macht. Schließlich wird erläutert, welche Stabilitätsbereiche der Bewegung der Protonen in einem Beschleuniger sich aufgrund dieser Phänomene ergeben.

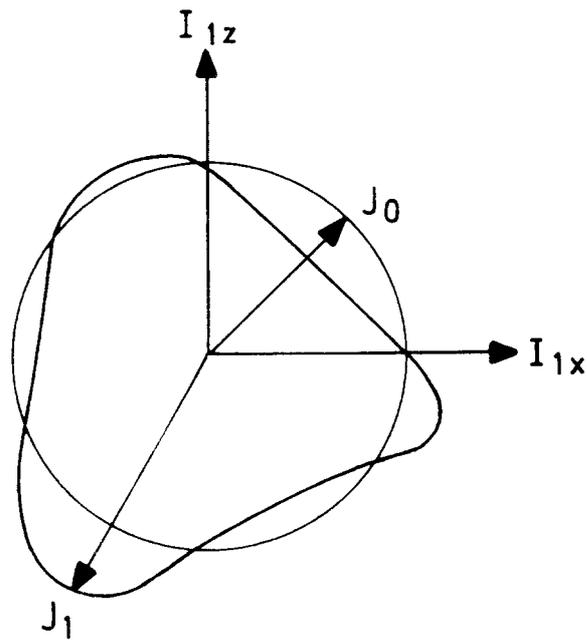
In Abschnitt 2.3 wird gezeigt, wie die Bewegung unter dem Einfluß mehrerer Resonanzen chaotisch wird. Dabei wird wieder das einfache System einer linearen Struktur mit einem Sextupol verwendet, welches auch in Kapitel 1 behandelt worden ist.

2.2 Chaotische Bewegung in nichtlinearen Systemen

2.2.1 KAM-Theorem

Als erstes möchte ich das KAM-Theorem behandeln, das auf die Arbeiten von Kalmogorov, Arnold und Moser zurückgeht. Ein System werde durch eine Hamiltonfunktion H beschrieben, die aus einem integrierbaren Anteil H_0 und einem kleinen Störanteil ϵH_1 besteht. Das KAM-Theorem

besagt, daß die durch H beschriebene Bewegung regulär ist und auf sogenannten KAM-Tori verläuft, sofern drei Bedingungen erfüllt sind, die weiter unten diskutiert werden. Figur 2.1 zeigt ein Beispiel: Ohne Störung verläuft die Bewegung auf einem Kreis mit Radius J_0 , ist die Bewegung jedoch leicht gestört und die Bedingungen des KAM-Theorems erfüllt, so verläuft die gestörte Bewegung auf einer deformierten Kurve mit winkelabhängigen Radius J_1 .



Figur 2.1: Nichtlineare Deformation (J_1) der ungestörten Bewegung (J_0)

Sind die Bedingungen des KAM-Theorems erfüllt, gibt es für jeden Freiheitsgrad eine Invariante, so daß die Bewegung mit einem, zwei und drei Freiheitsgraden auf Kurven, Flächen und Volumina beschränkt ist. Diese Bereiche, auf denen die reguläre Bewegung verläuft, werden als KAM-Tori bezeichnet.

Die drei Bedingungen des KAM-Theorems möchte ich nun kurz behandeln:

- 1. Lineare Unabhängigkeit der Frequenzen

$$\sum_i m_i \omega_i(J) \neq 0 \quad (2.1)$$

über einen gewissen Bereich der Wirkungsvariablen J , wobei ω_i die Frequenzkomponenten $\omega_i = \frac{\partial H}{\partial J_i}$ und m_i ganze Zahlen sind, also zum

Beispiel 1, m in Figur 1.3. Dies bedeutet also, daß das ungestörte System hinreichend nichtlinear sein muß. An einem einfachen System mit zwei Freiheitsgraden zeigt Chirikov, daß dies bedeutet, daß die Amplitude ε der Störung klein gegen die Nichtlinearität α_N der ungestörten Hamilton-Funktion H_0 sein muß.

$$\varepsilon \ll \alpha_N \quad (2.2)$$

Mit ε ist die Störstärke in (1.10) gemeint und α_N ist die Nichtlinearität des ungestörten Systems H_0 :

$$\alpha_N = \frac{J}{\omega_0} \frac{\partial^2 H_0}{\partial J^2} \quad (2.3)$$

- 2. Glattheits-Bedingung der Störung (hinreichende Zahl stetiger Ableitungen von H_1)

Diese Bedingung ist bei Chirikov ausführlich behandelt worden. Ich möchte hier nur anschaulich beschreiben, was darunter zu verstehen ist. Der Kreis in Figur 2.1 zerfällt in Inseln, wenn eine Resonanzbedingung erfüllt ist. Ob nun zwischen zwei Resonanzen der Störungstheorie erster Ordnung (z.B. bei Sextupolen $3Q_x=p$, $Q_x=p$) bei entsprechenden Frequenzen eine KAM-Torus existiert, hängt davon ab, ob die Resonanzen in den höheren Ordnungen der Störungstheorie den ganzen Frequenzbereich ausfüllen oder nicht. Es läßt sich zeigen, daß die Summe der Resonanzbreiten der Resonanzen relativ zum Frequenzabstand zwischen den Resonanzen in Störungstheorie erster Ordnung einen Wert von $\mu \leq 1$ ergibt, wenn eine bestimmte Anzahl M von stetigen Ableitungen von H_1 existiert:

notwendige Bedingung (Chirikov 1979): $M \geq 2N-2$

(exakte)hinreichende Bedingung (Moser 1966): $M \geq 2N+2$ (2.4)

- 3. Die Anfangsbedingungen müssen hinreichend von einer Resonanz entfernt sein.

Es läßt sich ein Abstand zu einer solchen Resonanz im allgemeinen Fall in Abhängigkeit von der Stärke ε und der Nichtlinearität α_N angeben (siehe Lichtenberg/Lieberman /3 /). Für ein einfaches Beispiel mit zwei Freiheitsgraden hat Chirikov folgende Beziehung abgeleitet:

$$\alpha_N = \ll \frac{1}{\varepsilon} \frac{\omega_{m_1 m_2}^2}{m_1^2 \omega_0^2} \quad (2.5)$$

Die erste und dritte Bedingung (2.2), (2.5) lassen sich zur Bedingung der "mäßigen" Nichtlinearität zusammenfassen

$$\varepsilon \ll \alpha_N \ll \frac{1}{\varepsilon} \frac{\omega_{m_1 m_2}^2}{m_1^2 \omega_0^2} \quad (2.6)$$

Das KAM-Theorem ist also nur dann anwendbar, wenn die Nichtlinearität α_N des ungestörten Systems relativ zur Stärke der Störungen ε weder zu klein noch zu groß ist.

2.2.2 Verletzung der Bedingungen des KAM-Theorems

In diesem Abschnitt möchte ich beschreiben, welche Auswirkungen es auf die Bewegung hat, wenn nicht alle Bedingungen des KAM-Theorems erfüllt sind.

2.2.2.1 Ungebundene Bewegung

Die Auswirkung einer zu kleinen Nichtlinearität des ungestörten Systems möchte ich anhand der Bewegung in der Nähe von elliptischen Fixpunkten erklären. Betrachten wir eine reguläre Bewegung (Figur 1.21), bei der die erste Bedingung des KAM-Theorems erfüllt ist. Die große Nichtlinearität des Systems führt dazu, daß die Resonanzbedingung nur in einem kleinen Bereich J um die Amplitude J_r herum wirksam ist (Resonanzstabilisierung) (J_r entspreche einem der elliptischen Fixpunkte und somit der Resonanzbedingung)

$$\Delta J \ll J_r \quad (2.7)$$

Die Bedingung (2.2) führt somit zu gebundener Bewegung. Ist jedoch Bedingung (2.2) nicht erfüllt, so ist die Resonanzbedingung nicht mehr auf einen kleinen Bereich in J eingeschränkt und in der Regel setzt ein unbegrenztes Wachsen der Amplituden ein (siehe zum Beispiel Figur 1.7, 1.8). Es gibt jedoch Fälle, bei denen zwar die Bedingung (2.7) nicht erfüllt ist ($\Delta J \sim J_r$), die Bewegung aber trotzdem gerade noch gebunden ist (siehe z.B. Figur 1.18).

2.2.2.2 Bewegung in der Nähe der Separatrix

Bei Annäherung an die Separatrix kann die Nichtlinearität α_N so groß werden, daß die 3. KAM-Bedingung (2.5) nicht erfüllt ist.

Die Bewegung in der Umgebung der Separatrix ist von Chirikov für die Bewegung eines Pendels mit kleiner Störung gerechnet worden, ich möchte hier die wesentlichen Ergebnisse vorstellen.

$$H(p, \varphi, \tau) = H_0(p, \varphi) + \varepsilon V(\varphi, \tau); \quad H_0 = \frac{1}{2} p^2 - \omega_0^2 \cos \varphi$$

$$\varepsilon V = \frac{1}{2} \varepsilon \omega_0^2 [\cos(\varphi - \tau) + \cos(\varphi + \tau)]; \quad \tau = \Omega t + \tau_0 \quad (2.8)$$

Durch Integration der Gleichung $\frac{dH}{dt} = \varepsilon \frac{\partial V}{\partial t}$ erhält man die Energieänderung pro halber Rotationsperiode, dabei wird die Bewegung in der Nähe der Separatrix (φ) angenähert durch die Bewegung auf der Separatrix (φ_{SX}) und das Integrationsintervall wird auf unendlich erweitert. Zunächst wird nur der Term $\cos(\varphi - \tau)$ betrachtet:

$$\Delta H \approx \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{\varepsilon \omega_0^2 \Omega}{2} \sin(\varphi_{SX} - \tau) \quad (2.9)$$

Dies ist ein Integral von Typ Melnikov-Arnold (siehe Anhang Chirikov / 4/). Unter der Bedingung $\lambda = \frac{\Omega}{\omega_0} \gg 1$ zeigt sich nun, daß die Auswertung dieses Integrals für den Term $\cos(\varphi - \tau)$ nur bei $\dot{\varphi}_{SX} > 0$ einen nennenswerten Beitrag ergibt, während bei $\dot{\varphi}_{SX} < 0$ gerade der sonst immer vernachlässigte Term $\cos(\varphi + \tau)$ genau den gleichen Beitrag liefert wie $\cos(\varphi - \tau)$ bei $\dot{\varphi}_{SX} > 0$. Die Änderung der relativen Schwingungsenergie $w = \frac{H_0}{\omega_0} - 1$ von Nulldurchgang zu Nulldurchgang der Phase φ , läßt sich bezogen auf den resonanten Wert w_r mittels einer Abbildung darstellen:

$$\bar{I} = I + K \sin \tau_0; \quad \bar{\tau}_0 = \tau_0 + \bar{I}$$

$$I = -\frac{1}{w_r} (w - w_r); \quad K = \frac{4\tilde{\mu}\varepsilon\lambda^3}{w_r} e^{-\frac{\tilde{\mu}}{2}}; \quad |w_r| = 32 e^{-\frac{2\tilde{\mu}}{3}}; \quad n = (1, 2, 3, \dots) \quad (2.10)$$

Die Abbildung, die somit die Bewegung in der Nähe der Separatrix beschreibt, ist die sogenannte Standardabbildung. Die Standardabbildung

hat die wichtige Eigenschaft, daß für $K \geq 1$ die Bewegung globale Instabilität zeigt. Diese Bedingung ist aber in (2.10) stets erfüllbar, denn für beliebig großes ϵ und beliebig kleines ϵ findet man stets ein n_0 , so daß für alle $n \geq n_0$ die Bedingung $K \geq 1$ erfüllt ist. Es gibt also immer einen Bereich um die Separatrix $|w_{p_0}| = 32 e^{-\frac{2\epsilon n_0}{\lambda}}$ innerhalb dessen die Bewegung chaotisch ist, unabhängig davon wie klein ϵ ist. Die eben beschriebene Instabilität ist in der Nähe der Separatrizen auf ein geringes Volumen im Phasenraum beschränkt, es wird deshalb von 'beschränkter Instabilität' gesprochen. Aber diese Instabilität wird im Zusammenhang mit der Arnold-Diffusion wichtig.

2.2.2.3 Überlappung von Resonanzen

Noch wichtiger ist das Einsetzen einer globalen Instabilität, bei der in großen Teilen des Phasenraumes die Bewegung chaotisch ist. Mit den Chirikovschen Überlappkriterium gibt es eine einfache Methode, die Stärke ϵH_1 zu bestimmen, bei der die Grenze der Stabilität erreicht wird und diese globale Instabilität einsetzt. Wird die Stärke der Störung so stark, daß sich die Resonanzen verschiedener Ordnung überlappen, so kann eine Trajektorie von Resonanz zu Resonanz wandern. Die Bewegung wird dabei chaotisch. Es handelt sich hierbei also um die Verletzung der zweiten Bedingung des KAM-Theorems. Für die oben erwähnte Standardabbildung hat Chirikov dieses Kriterium umfangreich getestet. Die numerische Rechnung zeigt, daß die Standardabbildung (2.10) bereits ab $K \geq 0,99$ ein globales chaotisches Verhalten aufweist.

Chirikov hat nun versucht, dieses Einsetzen von globalem Chaos durch die Überlappung von Resonanzen zu erklären. Die einfachste Bedingung ist das Überlappen der Resonanzbreiten gemäß der Störungstheorie erster Ordnung. Diese entsprechen den $3Q_x = p$ und $Q_x = p$ Resonanzen bei einer Beschleunigerstruktur mit Sextupolen. Dies führt zu einer theoretischen Stärke von $K = 2.5$, welche noch relativ weit vom empirischen Wert entfernt liegt. Die Berücksichtigung der Resonanzen der Störungstheorie zweiter Ordnung bringt eine Verminderung auf $K = 1.46$, Resonanzen der Störungstheorie dritter Ordnung bringen den Wert auf $K = 1.35$. Wird zusätzlich die Breite der chaotischen Schichten in der Nähe der Separatrizen berücksichtigt, so folgt $K = 1.2$; zusätzliche heuristische Korrekturen ergeben schließlich:

$$K = 1.06$$

$$(2.11)$$

Die Grenze der Stabilität kann daher mit dieser einfachen Methode auf ca. 6 % genau bestimmt werden. In Abschnitt 2.3 werden Beispiele vorgestellt, bei denen das Überlappkriterium für zwei Sextupolresonanzen recht gute Ergebnisse liefert.

2.2.3 Der charakteristische Lyapunov-Exponent

Um KAM-Tori von stochastischen Gebieten zu unterscheiden, braucht man eine Methode, um den Grad von Stochastizität zu messen. Diese Unterscheidung ist bei der zweidimensionalen Bewegung einfach, denn KAM-Tori sind geschlossene Kurven in der Poincaré-Fläche, während chaotische Bewegung flächenhafte Bereiche überstreicht. Bei vier- und sechsdimensionaler Bewegung versagt diese visuelle Unterscheidung. Statt dessen hat sich die Bestimmung des Lyapunov-Exponenten als eine zuverlässige Methode erwiesen, mit der der Grad der Stochastizität bestimmt und somit reguläre von chaotischer Bewegung unterschieden werden kann. Der Koeffizient beschreibt, wie rasch sich zwei anfangs eng benachbarte Trajektorien von einander entfernen. Im folgenden möchte ich angeben, wie dieser charakteristische Lyapunov-Exponent definiert wird. In Kapitel 3.4 wird gezeigt, wie dieser Exponent numerisch bestimmt wird.

Ich betrachte eine Trajektorie $\frac{d\vec{x}}{dt}$ im Phasenraum eines autonomen Hamiltonsystems mit N Freiheitsgraden:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{d(\vec{q}, \vec{p})}{dt} = \left(-\frac{\partial H}{\partial q_1}, \dots, -\frac{\partial H}{\partial q_N}, \frac{\partial H}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial p_N} \right) = \vec{V} \quad (2.12)$$

Wie in Figur 2.3 für zwei Dimensionen gezeigt, wird am Beobachtungspunkt im Phasenraum \vec{x}_0 ein Tangentialraum aufgespannt. Mit dem Vektor $\vec{\omega}$ in diesem Tangentialraum wird eine eng benachbarte Trajektorie bei \vec{x} definiert:

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{\omega} \quad (2.13)$$

Mit der euklidischen Norm:

$$d(\vec{x}_0, t) = \|\vec{\omega}(\vec{x}_0, t)\| \quad (2.14)$$

Die zeitliche Entwicklung des Abstandsvektors $\vec{\omega}$ erhält man durch Entwicklung von (2.14) nach $\vec{\omega}$:

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = /M(\vec{x})\vec{\omega} ; /M = \frac{dV}{d\vec{x}} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial H}{\partial q_1^2} & \dots & -\frac{\partial H}{\partial q_1 \partial p_N} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial H}{\partial p_N \partial q_1} & \dots & \frac{\partial H}{\partial p_N^2} \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

Die mittlere exponentielle Rate der Divergenz der beiden eng benachbarten Trajektorien wird jetzt eingeführt:

$$L(x_0, \vec{\omega}) = \lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ d(x_0, 0) \rightarrow 0}} \left[\frac{1}{t} \ln \frac{d(x_0, t)}{d(x_0, 0)} \right] \quad (2.16)$$

Im $2N$ -dimensionalen Tangentialraum hat $\vec{\omega}$ eine $2N$ -dimensionale Basis $\{\hat{e}_i\}$. Für jede Richtung im Tangentialraum gibt es somit einen charakteristischen Lyapunov-Exponenten $L(\hat{e}_i) = L_i$, diese lassen sich der Größe nach ordnen:

$$L_1 \geq L_2 \geq \dots \geq L_{2N} \quad (2.17)$$

Ist \vec{x}_0 eine periodische Bahn der Periode τ , so lassen sich die Eigenschaften des charakteristischen Lyapunov-Exponenten L leicht verstehen. Nach der Periode τ hat die Trajektorie \vec{x}_0 wieder exakt erreicht, (2.15) beschränkt sich somit auf eine lineare Abbildung:

$$\vec{\omega}_{n+1} = /A \vec{\omega}_n \quad (2.18)$$

Das lineare Gleichungssystem (2.18) läßt sich mit $2N$ Eigenwerte λ_i ; und den dazugehörigen Eigenvektoren \hat{e}_i lösen (siehe Kapitel 1.3.3):

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_{2N}| \quad (2.19a)$$

mit λ_i sind auch: $\frac{1}{\lambda_i}, \lambda_i^*, \frac{1}{\lambda_i^*}$ Eigenwerte (2.19b)

Wählt man einen solchen Eigenvektor als Startabstand zum Zwillingssteilchen ($\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{\omega}_0$; $\vec{\omega}_0 = \hat{e}_i$), so führt dies nach n Abbildungen (2.18) zum Abstand $\vec{\omega}_n$ mit dem Abstand d_n :

$$\vec{\omega}_n = \lambda_i^n \hat{e}_i \quad ; \quad d_n = \|\lambda_i^n \hat{e}_i\| = |\lambda_i|^n \quad (2.20)$$

Damit berechnen sich die Lyapunov-Exponenten zu:

$$L(\hat{e}_i) = \frac{1}{\tau} \ln |\lambda_i| = L_i \quad (2.21)$$

Berücksichtigt man zudem (2.19a, b) gilt zusätzlich:

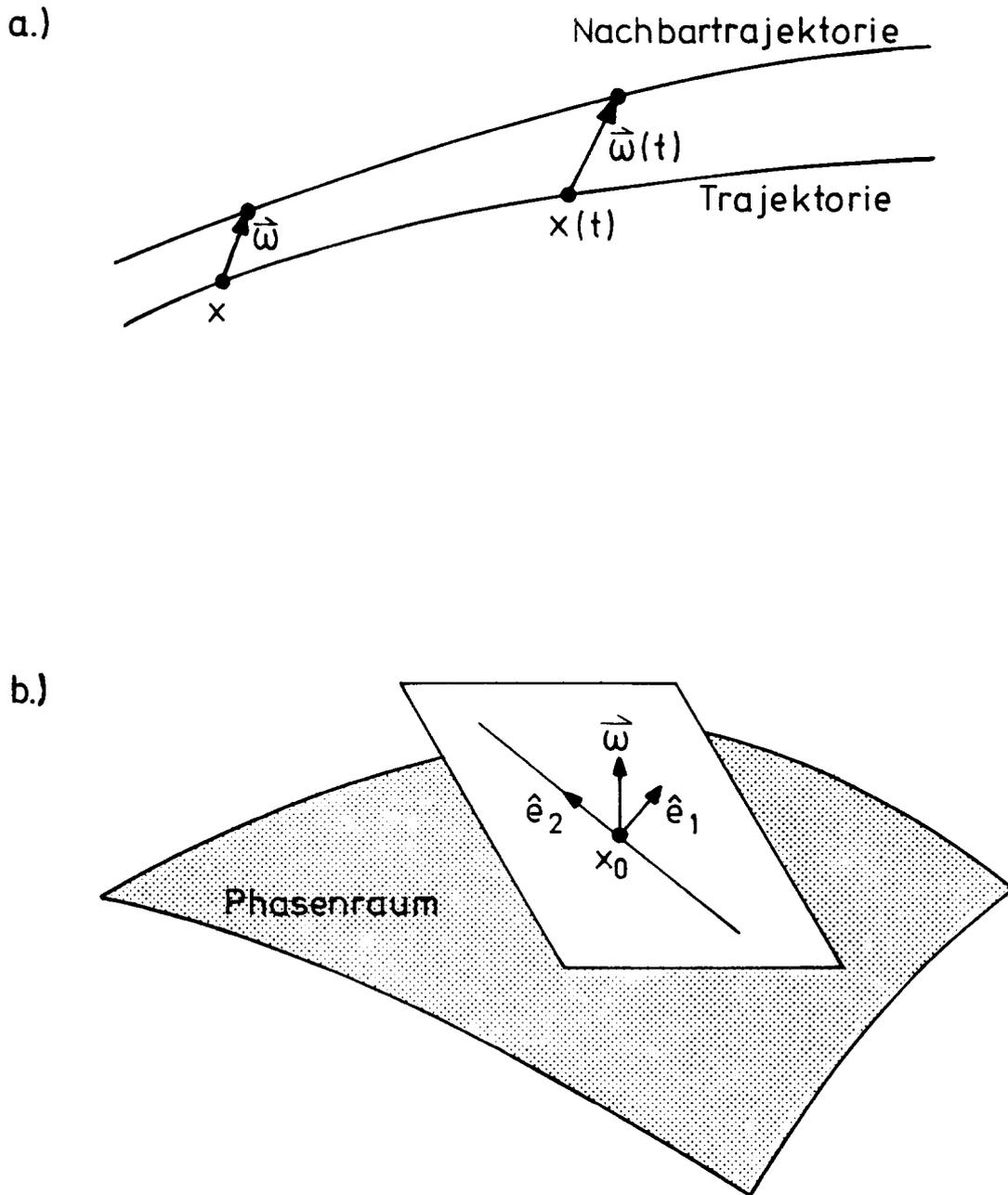
$$L_i = -L_{(2N-i+1)} \quad (2.22)$$

Ist \vec{x}_0 ein elliptischer Fixpunkt, so ist die Bewegung in dessen Nähe stabil. Die Eigenwerte sind in diesem Falle $\lambda_{1,2} = e^{\pm i\sigma}$ (vergleiche 1.44). Diese liegen auf dem Einheitskreis von Figur 1.5 und haben somit den Betrag $|\lambda_{1,2}| = 1$. Durch Einsetzen in Gleichung (2.21) erhalten wir damit einen Lyapunov-Exponenten vom Werte Null. Ist \vec{x}_0 hingegen ein hyperbolischer Fixpunkt, so erwartet man chaotische Bewegung in der Nähe dieses Fixpunktes. Die Eigenwerte sind dann reell $\lambda_{1,2} = e^{\pm\sigma}$ (s.1.46), so daß Gleichung (2.21) in diesem Falle von Null verschiedene Werte liefert. Interessant ist hier zu sehen, daß man mit Gleichung (2.20) einen expandierenden und einen kontrahierenden Zweig erhält, je nach dem ob $e^{\pm\sigma}$ größer oder kleiner als 1 ist. Dies sind die beiden Arme der Separatrix, die sich vom instabilen Fixpunkt entfernen oder sich ihm nähern.

Der anfängliche Abstand $\vec{\omega}_0$ ist jedoch eine Linearkombination aller Eigenvektoren \hat{e}_i :

$$\vec{\omega}_0 = c_1 \hat{e}_1 + \dots + c_{2N} \hat{e}_{2N} \quad (2.23)$$

Der erste nichtverschwindende Koeffizient c_i wird also die weitere Entwicklung von $\vec{\omega}_n$ bestimmen, solange $c_1 \neq 0$ gilt, ist $L(\vec{\omega}_0) = L_1$. Ist $c_1 = 0$ aber $c_2 \neq 0$, so ist der Lyapunov-Exponent $L(\vec{\omega}_0) = L_2$ etc. Dies bedeutet aber, daß der jeweils kleinere Lyapunov-Exponent auf einem Raum existiert, dessen Dimension um eins kleiner ist als der des jeweils größeren Exponenten. Am Beispiel eines zweidimensional Phasenraums ist dies in Figur 2.2b gezeigt.



Figur 2.2: Definition des charakteristischen Lyapunov-Exponenten
 $\vec{\omega}$ ist ein Tangentenvektor

- a) Die Entwicklung des Abstandes zweier eng benachbarter Trajektorien
- b) zeigt den Tangentenraum eines zweidimensionalen Phasenraums.
Solange $\vec{\omega}$ nicht in Richtung \hat{e}_2 zeigt, ist der charakteristische Lyapunov-Exponent $L(\vec{\omega}) = L_1$, nur wenn $\vec{\omega}$ der Richtung von \hat{e}_2 entspricht, ist $L(\vec{\omega}) = L_2$. L_1 existiert also auf dem zweidimensionalen Tangentenraum, außer der Richtung \hat{e}_2 . Auf diesem eindimensionalen Raum bestimmt L_2 die Bewegung.

Die Tatsache, daß die Lyapunov-Exponenten auch negativ sein können (2.22), somit der Abstand zweier eng benachbarter Trajektorien kleiner wird, beruht darauf, daß die Hamilton-Funktion invariant gegen Zeitumkehr ist. Dreht man nämlich bei einem bestimmten Zeitpunkt die Bewegungsrichtung beider Trajektorien um, so wird wieder das ursprüngliche $\vec{\omega}_0$ erreicht und das vorherige Anwachsen des Abstandes führt bei Zeitumkehr zur Schrumpfung des Abstandes. Es ist deshalb nicht verwunderlich, daß in vielen Fällen der Abstand zunächst kleiner wird und nach Erreichen eines minimalen Wertes wieder anwächst (Kapitel 4).

Für jeden Fluß gibt es wenigstens einen Lyapunov-Exponenten, der gleich Null sein muß, denn in der Richtung der Trajektorie wächst $\vec{\omega}$ nur linear mit der Zeit. Für Hamiltonsche Systeme gibt es auf Grund von Gleichung (2.22) sogar mindestens zwei Werte die gleich Null sind.

Bisher sind nur periodische \vec{x}_0 behandelt worden, auf Grund der Tatsache, daß eine nichtperiodische Bewegung sich beliebig gut durch periodische Bewegungen (mit entsprechend großer Periode) annähern läßt, lassen sich auch Lyapunov-Exponenten für nicht periodische Bahnen definieren (Oseledec 1968 /12/).

2.2.4 Arnold-Diffusion

Hat ein System mehr als zwei Freiheitsgrade, dann gibt es eine neue Form von Instabilität: die sogenannte Arnold-Diffusion. Ich möchte hier grob beschreiben, was man darunter versteht. Diese Form der Instabilität ist deshalb von Bedeutung, weil sie für beliebig kleine Störungen existiert und im Prinzip Trajektorien mit sehr kleinen Amplituden in Bereiche des Phasenraumes bringen kann, in denen die Bewegung ungebunden ist.

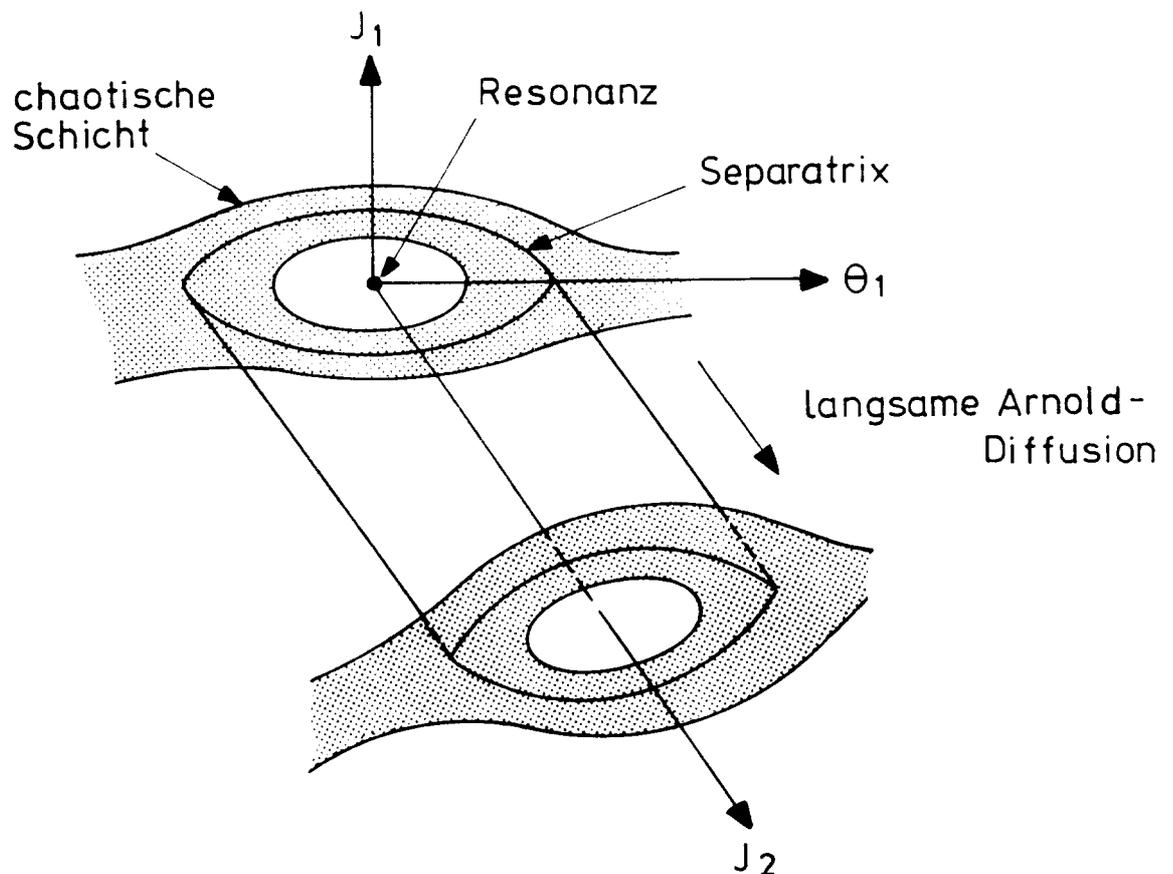
Bei einem autonomen Hamiltonschen System mit zwei Freiheitsgraden ($N=2$) hat die Hyperfläche der Trajektorien mit fester Energie die Dimension 3 im vierdimensionalen Phasenraum. Ein KAM-Torus ist zweidimensional und kann ein Volumen einschließen. Dies führt dazu, daß chaotische Bewegung auf kleine durch KAM-Tori umschlossene Bereiche im Phasenraum beschränkt ist. Nur wenn starke Resonanzen existieren und die dazwischenliegenden KAM-Tori zerstören, kann ein globales Chaos entstehen. Anders ist dies in Systemen mit mehr als zwei

Freiheitsgraden. Mit $N=3$ ist die Phasenraumdimension $2N=6$, die Energieflächendimension $2N-1=5$ und die Dimension des KAM-Torus $N=3$. Da ein Volumen kein fünfdimensionales Gebiet umschließen kann, folgt, daß die chaotischen Bereiche ein überall dichtes Netz im Phasenraum bilden. Arnold (1964) /13/ hat diese Vernetzung der chaotischen Bereiche für eine nichtlineare Hamilton-Funktion bewiesen. Es existiert dann eine Art Diffusionsbewegung entlang der chaotischen Vernetzung. Für die Praxis sind zwei Fragen von Bedeutung:

1. Wie groß ist das relative Maß der chaotischen Bereiche im interessanten Bereich des Phasenraums.
2. Wie schnell ist die Diffusion in den dünnen Fäden des chaotischen Netzes bei gegebenen Anfangsbedingungen. (2.24)

Beide Fragen lassen sich für einfache Systeme beantworten (Chirikov 1979 /4 /, Tennyson et.al. 1979 /14/.

Anhand von Figur 2.3 möchte ich nun das Prinzip der Arnold-Diffusion erläutern.



Figur 2.3: Arnold-Diffusion

Das gemeinsame Wirken von mindestens drei Resonanzen ist notwendig um Arnold-Diffusion zu erzeugen. Die erste und stärkste, die 'führende' Resonanz ist die Resonanz, an der die Diffusion stattfindet. Die nächst schwächere treibende Resonanz führt zu einer chaotischen Schicht in der Ebene (J_1, θ_1) bei zunächst konstanten J_2 . Erst die dritte und schwächste Resonanz treibt die Bewegung langsam längs der Resonanzschicht und J_2 in Figur 2.3. Durch diese langsame Diffusion kann ein Schnittpunkt mit anderen Resonanzen erreicht werden, von wo aus die Bewegung möglicherweise längs einer anderen führenden Resonanz getrieben wird. Damit kommt aber eine Trajektorie im Prinzip an jeden Punkt des chaotischen Netzes und damit auch zu großen Amplituden.

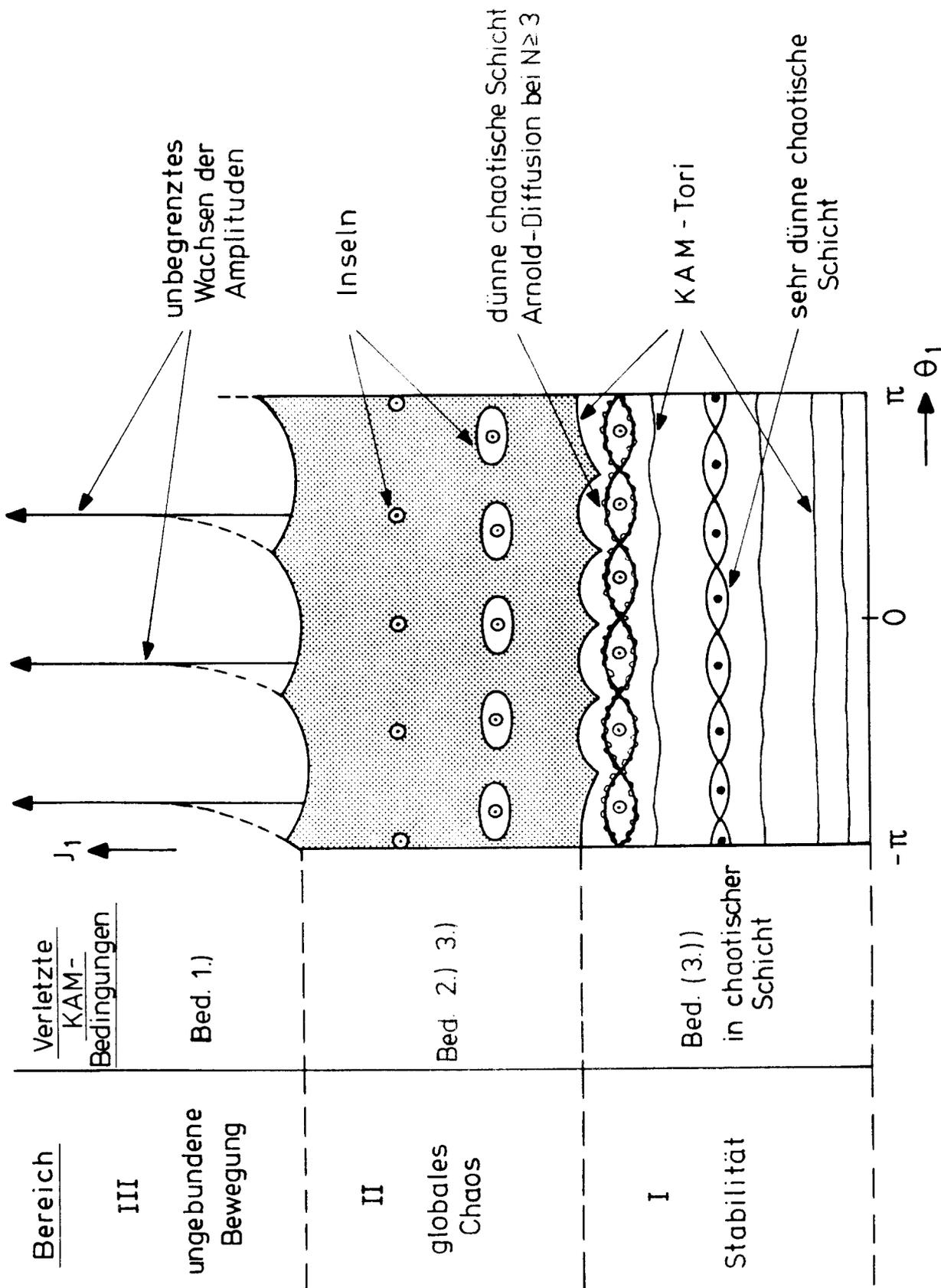
Um aber Bedeutung für die Stabilität von Beschleunigern zu haben, müssen die Fragen (2.24) geklärt werden.

2.2.5 Konsequenzen für die Bewegung in einem Beschleuniger

Wir können jetzt qualitativ die verschiedenen Bewegungstypen in einem Beschleuniger klassifizieren. In Figur 2.4 ist dies qualitativ für $N=2$, also für eine zweidimensionale Poincaré-Fläche (J_1, θ_1) dargestellt. Die vertikale Achse entspricht der Amplitude J_1 , die horizontale dem aufgefalteten Winkel θ_1 . Es lassen sich drei Bereiche unterscheiden:

- I. Stabilitätsbereich: Im wesentlichen verläuft die Bewegung auf stabilen KAM-Tori, nur vereinzelt gibt es dünne chaotische Schichten um Inseln herum, die dort entstehen, wo das Frequenzverhältnis $\alpha = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ rational wird. In diesen dünnen chaotischen Schichten ist die 3. Bedingung des KAM-Theorems nicht erfüllt. Hat die Bewegung wie in Figur 2.4 nur zwei Freiheitsgrade, so bleibt die Bewegung innerhalb des KAM-Torus mit größter Amplitude ("letzter" KAM-Torus) gebunden. Es gibt in diesen Systemen mit zwei Freiheitsgraden keine Arnold-Diffusion. Wird ein weiterer Freiheitsgrad hinzugenommen, z.B. die vertikale Bewegung, dann sind alle chaotischen Schichten im Bereich I untereinander und mit dem globalen Chaos in Bereich II verbunden (siehe weiter unten). Die Trajektorien in solchen Schichten können deshalb durch Arnold-Diffusion den Bereich mit unbegrenztem Amplitudenwachstum erreichen.

- II. Resonanzüberlappbereich: In einem bestimmten Amplitudenbereich sind die Resonanzen so stark, daß sie überlappen und die Bewegung globales Chaos zeigt; die Bedingungen 2 und 3 des KAM-Theorems sind nicht erfüllt. Nach einer gewissen Verweildauer in diesem chaotischen Überlappbereich wird schließlich der Bereich III (siehe unten) mit ungebundener Bewegung erreicht. In diesem Bereich gibt es neben chaotischer Bewegung auch reguläre Bewegung um elliptische Fixpunkte (Linien, Flächen, etc.) herum. Die chaotische Bewegung kann von Startamplituden aus, die kleiner sind, als die der regulären Bewegung um solche Fixpunkte herum, den Bereich mit unbegrenztem Amplitudenwachstum erreichen. Als Akzeptanzgrenze ist aber nur die Amplitude sinnvoll, bei der die Bewegung gerade noch auf unaufgebrochenen KAM-Tori verläuft, so daß innerhalb dieses Bereiches die Bewegung höchstens noch durch Arnold-Diffusion instabil werden kann. Man braucht deshalb ein Verfahren, mit dem diese verschiedenen Typen von regulärer Bewegung unterschieden werden können (siehe Kapitel 3.5).
- III. Bereich ungebundener Bewegung: Die Q-Werte werden auf den Resonanzwerten festgehalten, so daß die Amplituden unbegrenzt anwachsen können. Die erste KAM-Bedingung (2.1) ist nicht erfüllt.



Figur 2.4: Schematische Beschreibung der Bewegung in einem Beschleuniger mit $N=2$

2.3 Simulationsbeispiele für die Entstehung von chaotischer Bewegung

In diesem Abschnitt möchte ich anhand von Beispielen zeigen, wie chaotische Bewegung durch den Einfluß mehrerer Resonanzen entstehen kann. Im ersten Beispiel überlappen sich die Summenresonanz $Q_x + 2Q_z = p_1$ und die Resonanz $3Q_x = p_2$. In einem zweiten Beispiel wird der gleichzeitige Einfluß der Differenzenresonanz $Q_x - 2Q_z = p_1$ und der Resonanz $3Q_x = p_2$ untersucht. Im dritten Beispiel behandle ich chaotische Bewegung, die auftritt in der Nähe der Separatrix einer Resonanz der Störungstheorie zweiter Ordnung $4Q_x = p$.

2.3.1. Überlappung der Summenresonanz $Q_x + 2Q_z = p_1$ und der Resonanz $3Q_x = p_2$

Nach dem Kriterium von Chirikov erwartet man chaotische Bewegung, wenn die Breiten von mindestens zwei Resonanzen sich überlappen. Zunächst muß deshalb geklärt werden, wie bei gegebener Sextupolstärke die Q -Werte und die Anfangsamplituden \hat{A}_{x_0} gewählt werden müssen, damit beide Resonanzbedingungen gleichzeitig erfüllt sind. Bei der Berechnung der Resonanzbreiten wird immer von isolierten Resonanzen ausgegangen, obwohl dies hier nicht erfüllt ist. Die berechneten Resonanzbreiten entsprechen deshalb nur näherungsweise den tatsächlichen Breiten.

Vorgegeben sind am Ort des Sextupoles

$$\begin{aligned} \beta_x &= 51.698 \quad [\text{m}] \\ \beta_z &= 51.604 \quad [\text{m}] \\ m_s &= 7.488 \times 10^{-2} \left[\frac{1}{\text{m}^2} \right] \end{aligned} \quad (2.25)$$

Für $\varepsilon_{x_0} = \varepsilon_{z_0}$ ergibt sich mit Gleichung (1.37): ($\hat{A}_{x_0} = \sqrt{2 \varepsilon_{x_0} \beta_x}$)

$$Q_x + 2Q_z - p_1 = e_1: \hat{A}_{x_0} = \frac{\delta \tilde{\eta} e_1}{5 m_s \beta_z} \quad (2.26a)$$

$$3Q_x - p_2 = e_2: Q_x = \frac{p_2}{3} + \frac{m_s \beta_x}{8 \tilde{\eta}} \hat{A}_{x_0} \quad (2.26b)$$

$$p_1 = p_2 = 4$$

Der Abstand zur Summenresonanz e_1 wird willkürlich auf ($e_1 = 2 \times 10^{-3}$) gesetzt. Man erhält folgende Werte für \hat{A}_{x_0} und den Abstand e_2 zur Drittelresonanz $e_2 = 3Q_x^{-4}$:

$$\hat{A}_{x_0} = 2.6017 \text{ mm}$$

$$e_2 = -1.20218 \times 10^{-3} \rightarrow Q_x = 1.33293$$

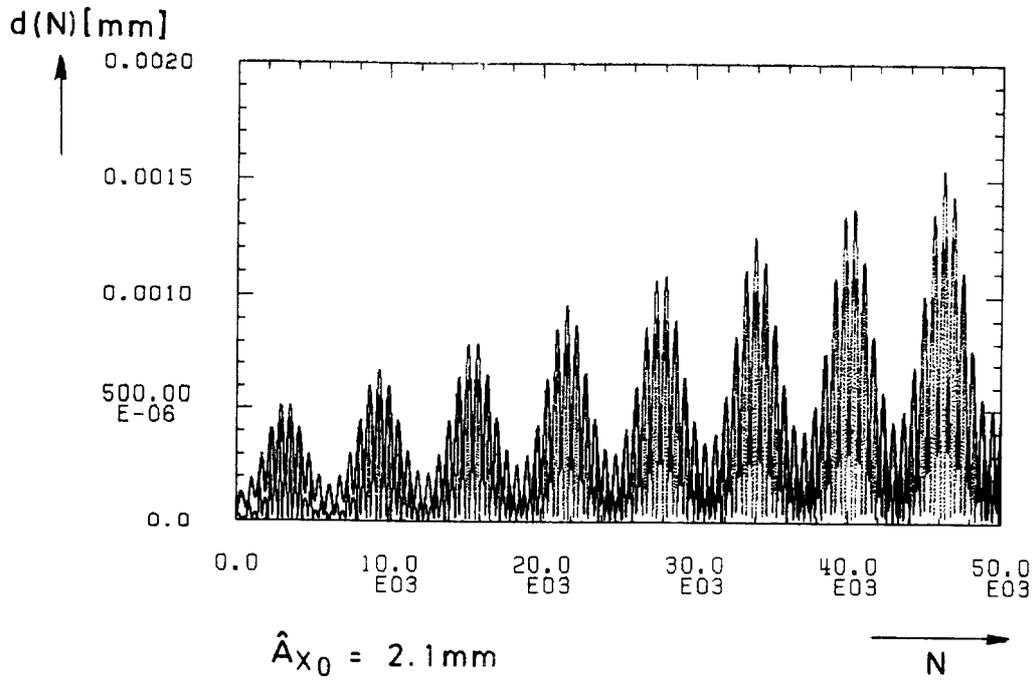
$$\text{mit } e_1 \rightarrow Q_z = 1.33453 \quad (2.27)$$

Dieser Arbeitspunkt ist als Punkt 3 in Figur 1.6 gekennzeichnet.

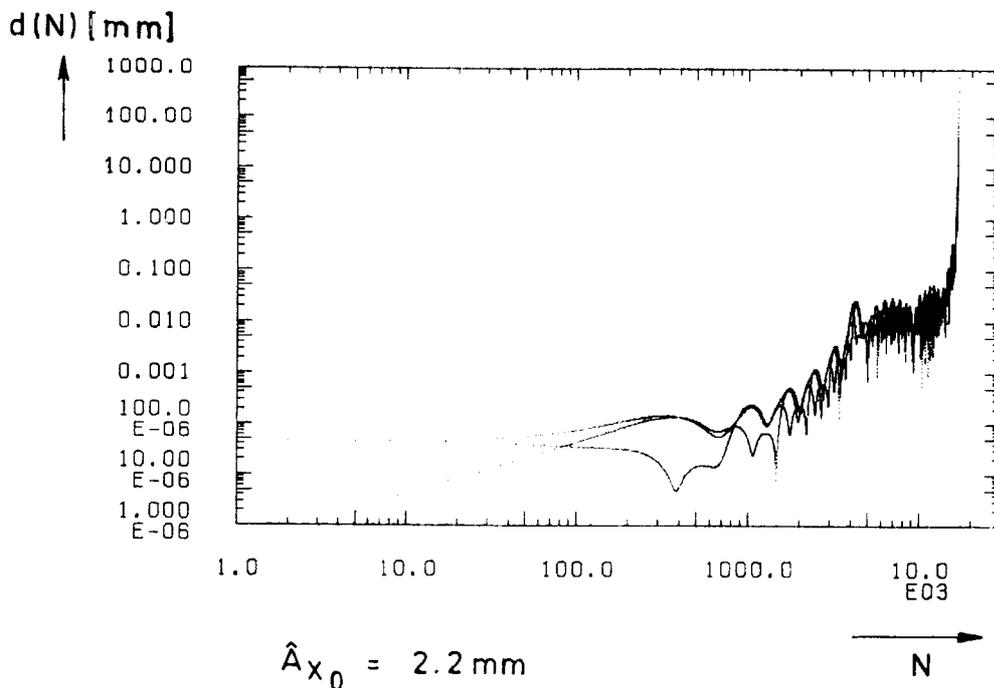
Chaotische Bewegung tritt nicht erst bei $\hat{A}_{x_0} = 2.60$ mm, sondern bereits bei kleineren Amplituden auf. Die Figuren 2.5 - 2.8 zeigen, daß die Bewegung bei einer Anfangsamplitude von 2.1 mm regulär ist und bei 2.2 mm chaotisch wird. In Figur 2.5 wird der Phasenraumabstand zweier zunächst eng benachbarter Trajektorien als Funktion der Umlaufzahl N gezeigt. Bei $\hat{A}_{x_0} = 2.1$ mm zeigt er starke Oszillationen, wächst aber im wesentlichen linear mit N an, während bei $\hat{A}_{x_0} = 2.2$ mm ein exponentielles Anwachsen für Umlaufzahlen zwischen 1000 und 5000 beobachtet wird, gefolgt von einem relativ flachen Verlauf bis $N = 15000$, daraus erkennt man das chaotische Verhalten. Der sehr starke Anstieg für $N > 15000$ weist darauf hin, daß die Bewegung ungebunden wird. In Figur 2.6 ist in der horizontalen Phasenraumprojektion der Einfluß der Drittelresonanz deutlich erkennbar. Schränkt man die Phase ϕ_z auf ein kleines Intervall ein, so erhält man bei regulärer Bewegung eine nahezu geschlossene Kurve, die annähernd der Separatrix der Drittelresonanz entspricht. Im chaotischen Fall hingegen werden getrennte flächenartige Bereiche eingenommen, da es in diesem Falle keine Invarianten der Bewegung gibt. Figur 2.6c zeigt deutlich, daß die chaotische Bewegung schließlich in ungebundene Bewegung übergeht.

Die Bewegung in der vertikalen Phasenraumprojektion (Fig. 2.7) läßt entsprechend den Einfluß der Summenresonanz erkennen. Im regulären Fall ($\hat{A}_{x_0} = 2.1$ mm) wird bei Einschränkung des Phasenwinkels ϕ_x nahezu die gesamte Separatrix überstrichen, im chaotischen Fall wiederum nur ein Teil davon, der zudem zu einer Fläche aufgeweitet ist.

a.)

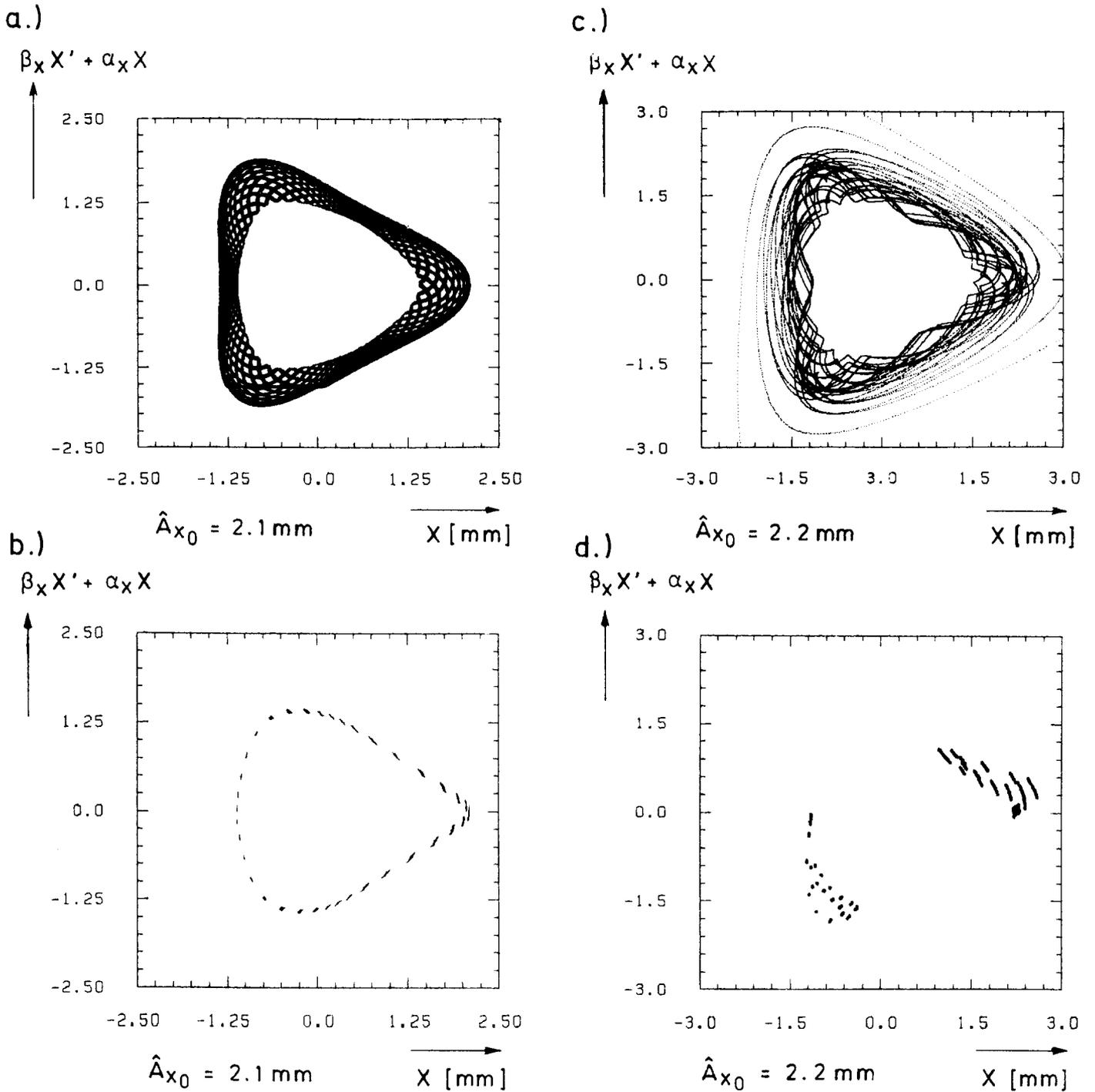


b.)



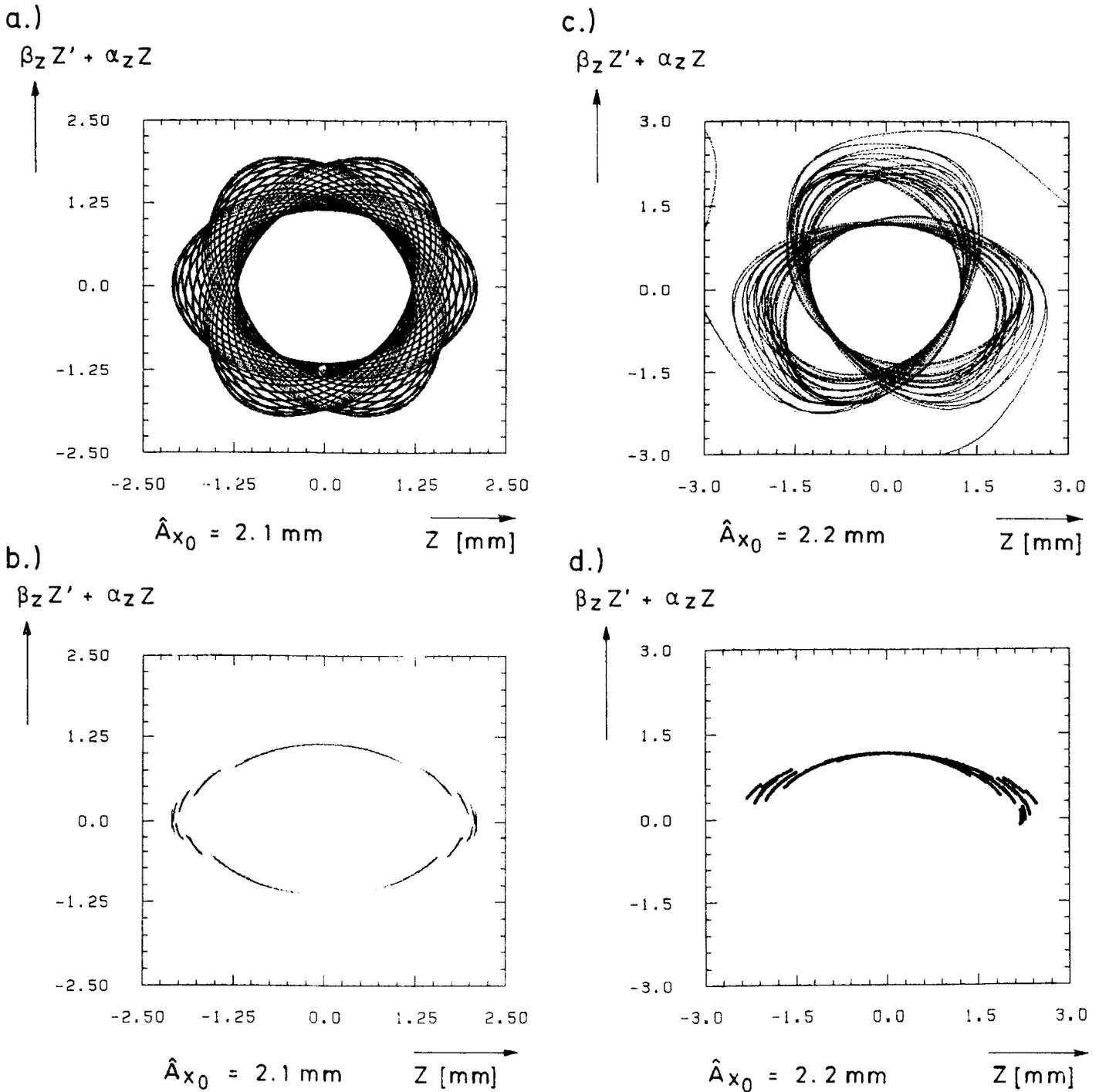
Figur 2.5: Abstand im Phasenraum als Funktion der Umlaufzahl N der Bewegung unter dem Einfluß der Summenresonanz $Q_x + 2Q_z = p_1$ und der horizontalen Resonanz $3Q_x = p_2$

Teil a zeigt den linearen Anstieg des Abstands der regulären Bewegung bei $\hat{A}_{x_0} = 2.1 \text{ mm}$, während bei einer Amplitude von $\hat{A}_{x_0} = 2.2 \text{ mm}$ die Bewegung chaotisch ist und deshalb der Abstand exponentiell anwächst.



Figur 2.6: Horizontale Phasenraumprojektion der Bewegung unter dem Einfluß der Summenresonanz $Q_x + 2Q_z = p_1$ und der horizontalen Resonanz $3Q_x = p_2$

Teil a, b zeigt den regulären Fall, Teil c, d den chaotischen, wobei in Teil b, d die Simulationsdaten durch den Schnitt (1.53), also die Einschränkung des Winkels der jeweils anderen Projektion des Phasenraumes auf ein kleines Winkelintervall, reduziert sind. Die reguläre Bewegung ist nahe der Separatrix. In Teil b deutlich an der Verformung im Phasenraum zu sehen. Bei der chaotischen Bewegung (Teil d) sind nur Teile der Separatrix vorhanden, die zudem zu Flächen aufgeweitet sind.



Figur 2.7: Vertikale Phasenraumprojektion der Bewegung unter dem Einfluß der Summenresonanz $Q_x + 2Q_z = p_1$ und der horizontalen Resonanz $3Q_x = p_2$

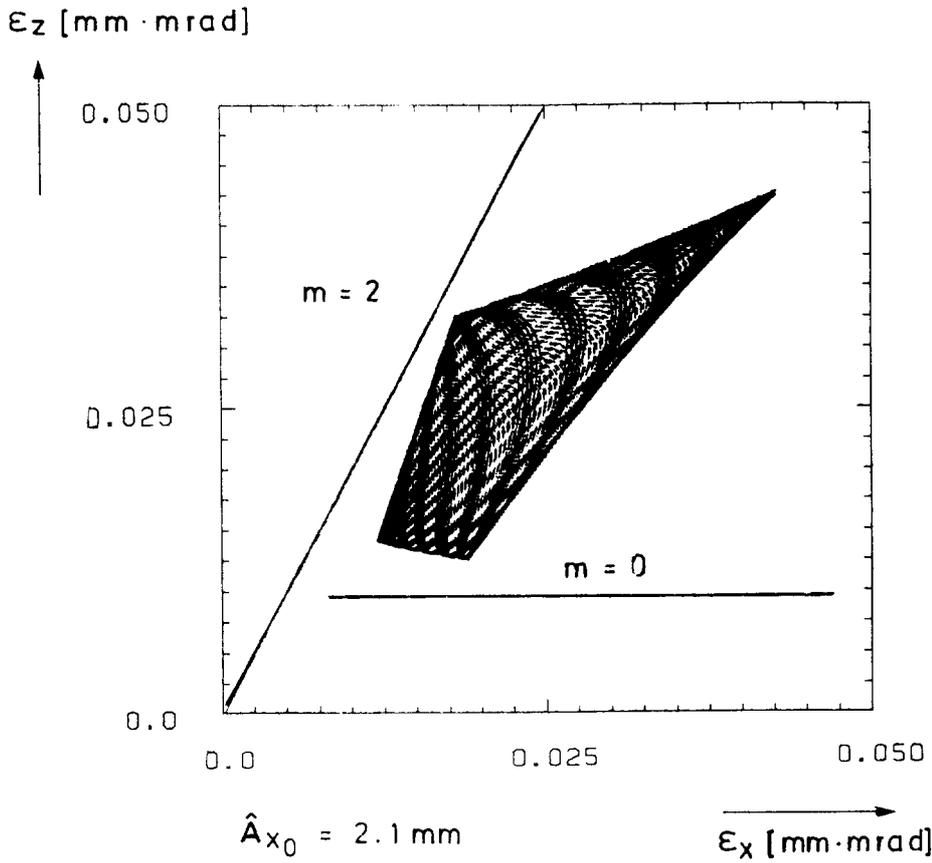
Teil a, b zeigen wieder die reguläre Bewegung und Teil c, d die chaotische Bewegung. Bei der chaotischen Bewegung (Teil d) ist nur ein Arm der Separatrix in der reduzierten Projektion des Phasenraums vorhanden, der außerdem in einen flächenartigen Bereich aufgeweitet ist.

Figur 2.7c zeigt ebenfalls den Übergang von chaotischer zu ungebundener Bewegung.

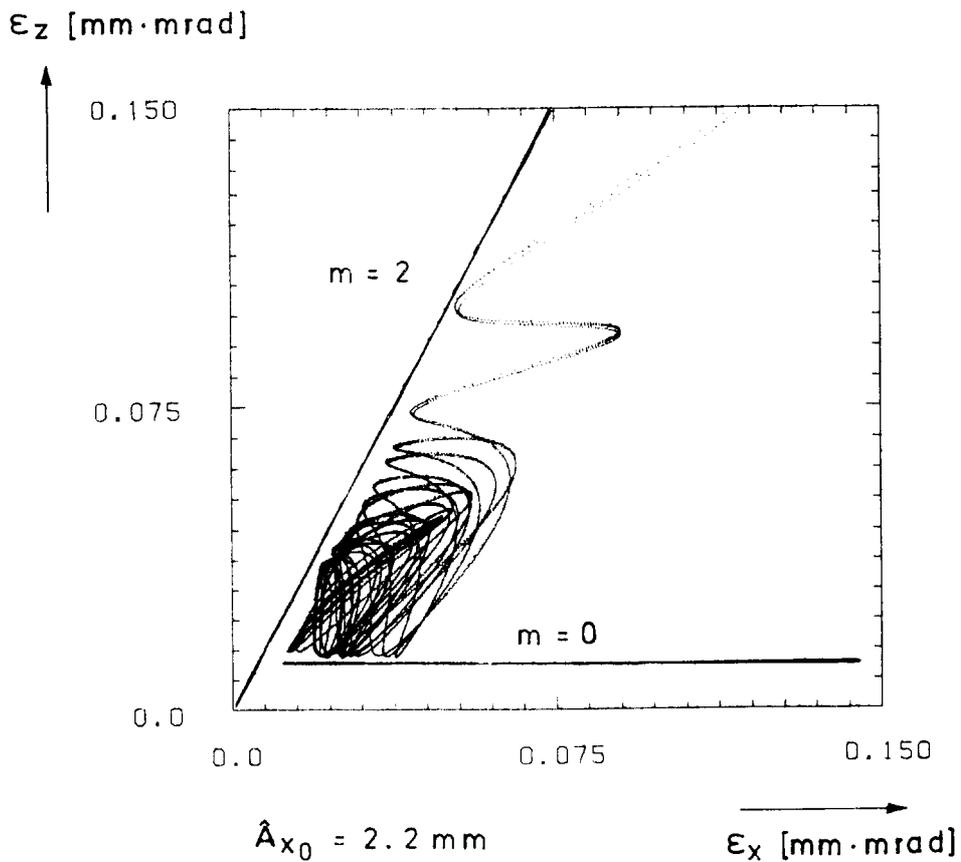
Interessant ist der Einfluß zweier Resonanzen auf die zeitliche Änderung der Emittanzen. Figur 2.8 zeigt ε_z als Funktion von ε_x und zwar wieder für den regulären und den chaotischen Fall. Es zeigt sich eine Überlagerung der Steigung $m=2$ der Summenresonanz und der Steigung $m=0$ der Resonanz $3Q_x=p$, wobei es zusätzlich eine starke amplitudenabhängige Verformung gibt. Im chaotischen Fall verhalten sich die Emittanzen zunächst ähnlich wie bei der regulären Bewegung, und erst später beginnt ein unbegrenztes Anwachsen, wobei im Mittel eine Steigung von etwa 2 vorliegt.

Schließlich zeigt Figur 2.9 Q_z als Funktion von Q_x . Im regulären Fall (Figur 2.9a) wird ganz regelmäßig ein bestimmter Bereich immer dichter überstrichen, während im chaotischen Falle die Q -Werte wild zwischen den Resonanzen pendeln.

a.)

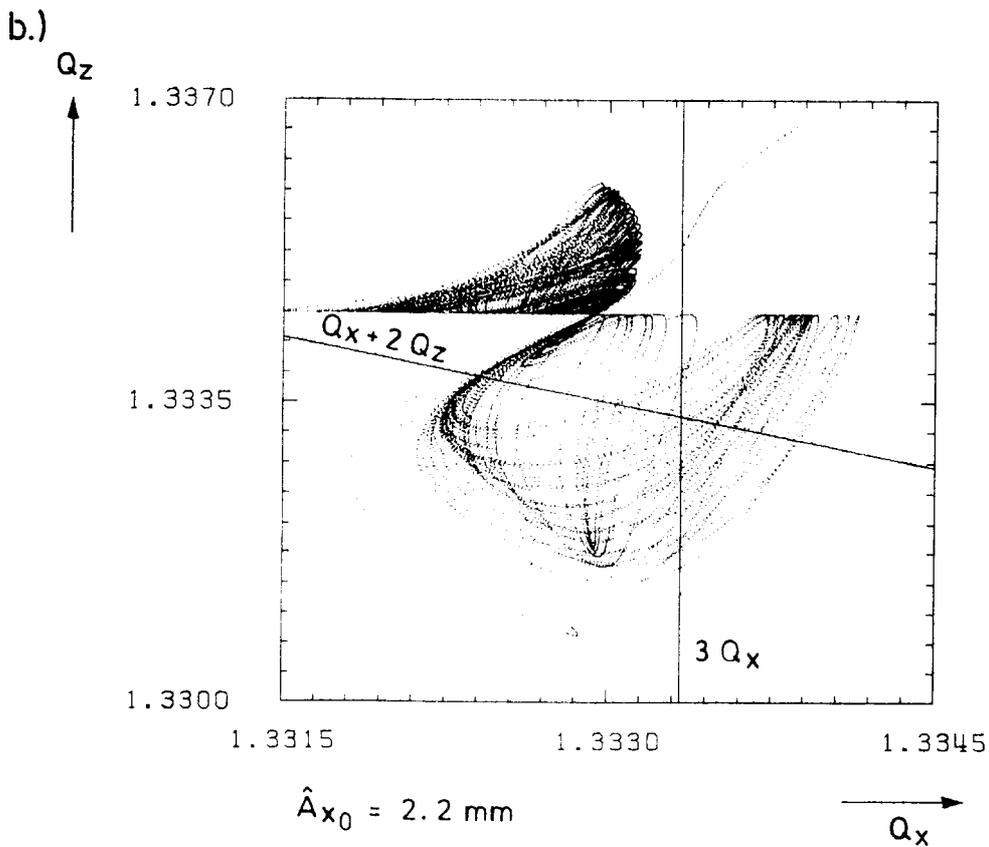
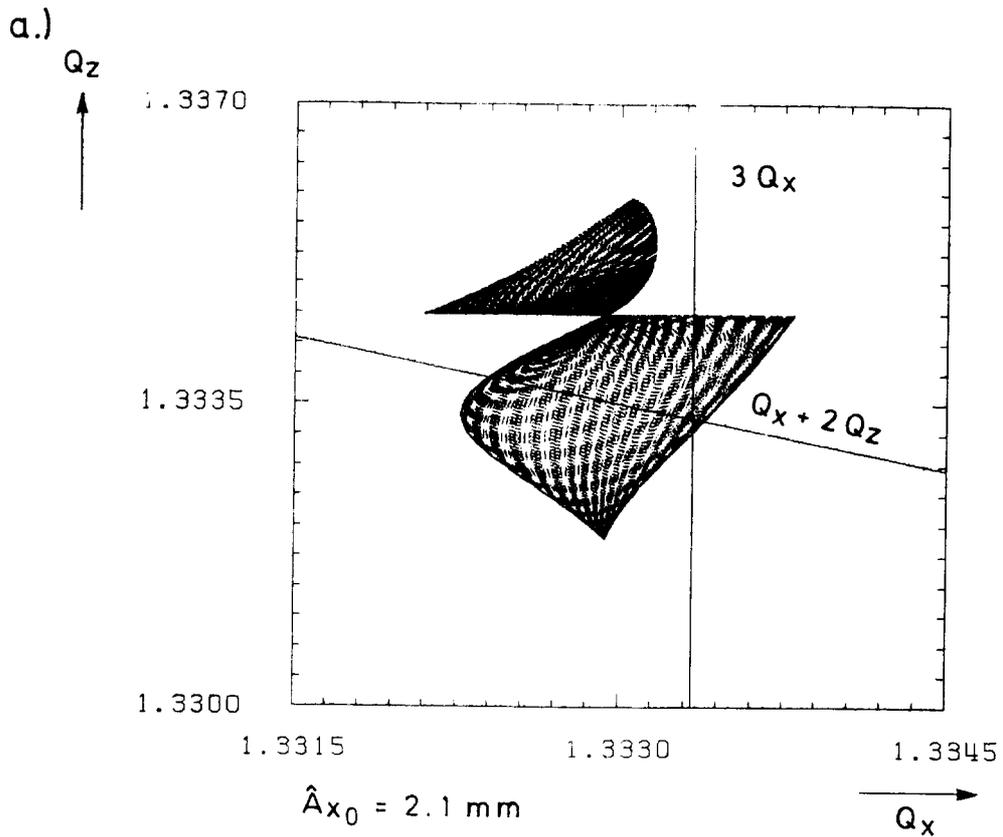


b.)



Figur 2.8: ϵ_x - ϵ_z -Diagramm

Teil a entspricht der regulären Bewegung und Teil b zeigt die chaotische Bewegung. In beiden Teilen ist deutlich die Überlagerung der Steigung $m=2$ durch die Summenresonanz $Q_x + 2Q_z = p_1$, und der Steigung $m=0$ der Drittelresonanz $3Q_x = p_2$, mit einer zusätzlichen amplitudenabhängigen Verformung zu sehen. Im chaotischen Fall setzt ab einem bestimmten Emittanzenverhältnis ein unbegrenztes Wachstum der Emittanzen ein, wobei die Steigung beibehalten wird.



Figur 2.9: Q_x - Q_z -Diagramm

Die Figur zeigt den Verlauf der Q -Werte für den regulären Fall (Teil a) und die chaotische Bewegung (Teil b). Im regulären Fall wird ein fester Bereich systematisch überstrichen, während bei chaotischer Bewegung die Q -Werte unregelmäßig zwischen den Resonanzen pendeln.

2.3.2 Überlappung der Differenzenresonanz $Q_x - 2Q_z = p_1$ und der horizontalen Resonanz $3Q_x = p_2$

Als nächstes möchte ich ein Q-Wertepaar untersuchen, das in der Nähe der Resonanzen $Q_x - 2Q_z - p_1 = 0$ und $3Q_x - p_2 = 0$ liegt (Punkt 4 in Figur 1.6): Die gewählten Parameter sind: $Q_x = 1.333$; $Q_z = 1.166$; $e_1 = Q_x - 2Q_z + 1 = 10^{-3}$; $e_2 = 3Q_x - 4 = -10^{-3}$.

Die Bedingung für einen instabilen Fixpunkt der Drittelresonanz ist gemäß Gleichung (1.41) für die folgende Amplitude erfüllt:

$$\hat{A}_{x_0} = \frac{-8e_2 \tilde{\Pi}}{3\beta_x m_s} = 2.1765 \text{ mm} \quad \beta_x = 51,40 \text{ [m]} \quad (2.28)$$

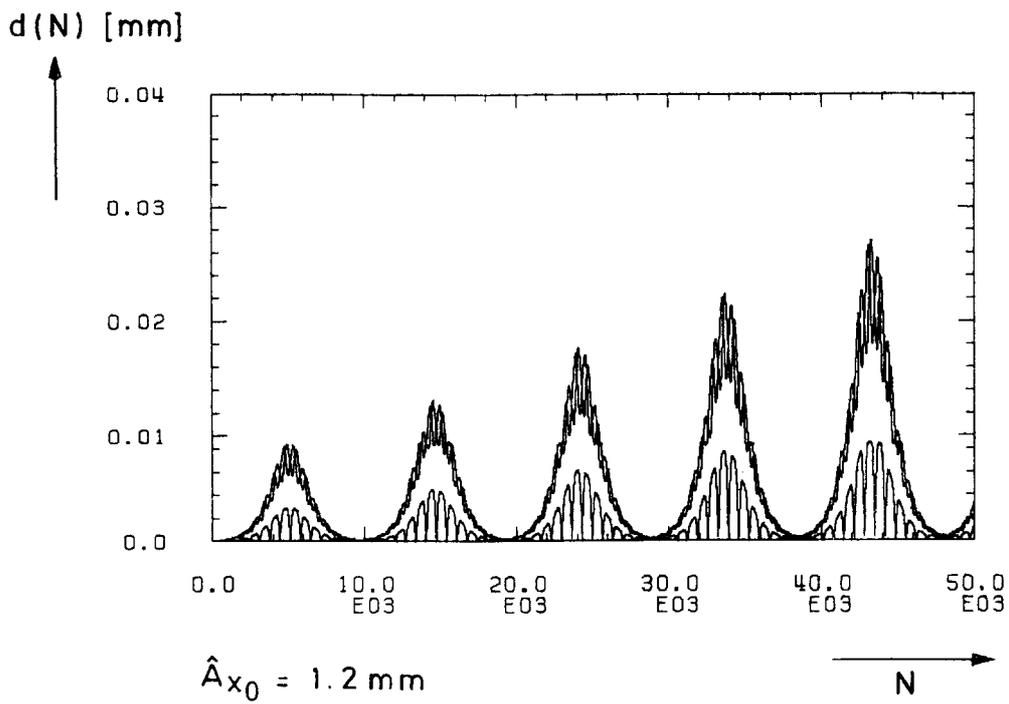
Mit Hilfe der Simulation mit $z=0$ findet man die Separatrix bei einer Amplitude von $\hat{A}_x = 2.165 \text{ mm}$, also nahezu für denselben Wert. Jetzt soll auch vertikale Bewegung berücksichtigt werden.

$$\varepsilon_{x_0} = \varepsilon_{z_0}; \quad \hat{A}_{x_0} = \sqrt{2\varepsilon_{x_0}\beta_x}; \quad \hat{A}_{z_0} = \sqrt{2\varepsilon_{z_0}\beta_z}; \quad \beta_z = 58.84 \text{ [m]} \quad (2.29)$$

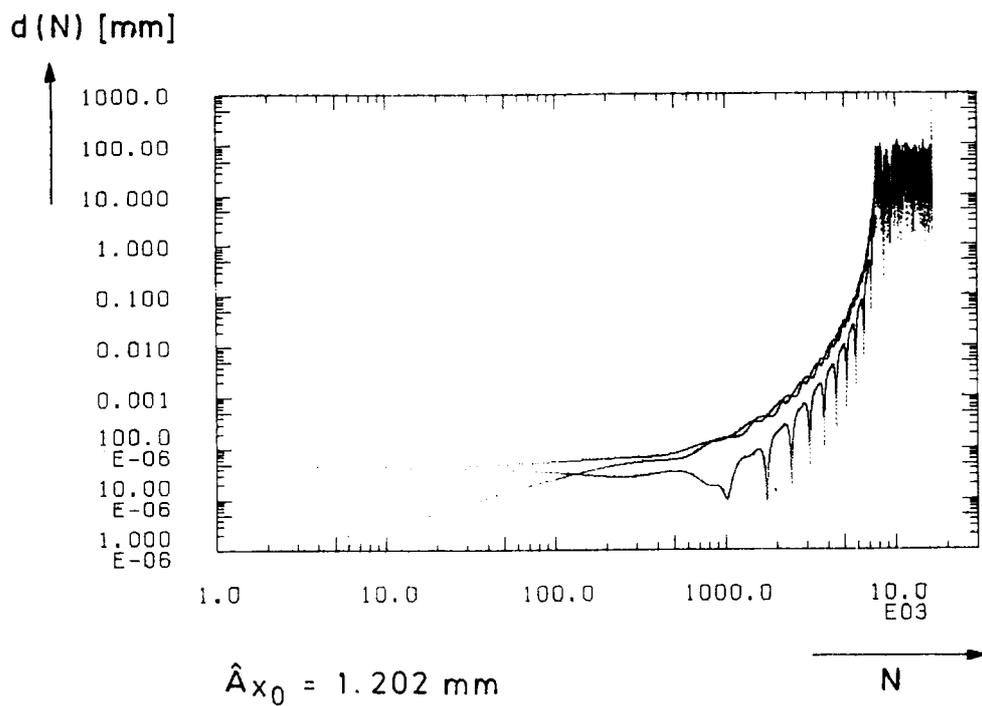
Wieder soll eine gerade noch reguläre Bewegung mit einer chaotischen Bewegung verglichen werden. Figur 2.10 zeigt die Phasenraumabstände. Chaotische Bewegung tritt bereits bei $\hat{A}_{x_0} = 1,2 \text{ mm}$ auf, also bei wesentlich kleinerer Amplitude als der Separatrix der reinen Drittelresonanz entspricht.

Figur 2.11 zeigt, daß die Bewegung in der horizontalen Phasenraumprojektion durch die Drittelresonanz dominiert wird; der Einfluß der Differenzresonanz wirkt sich so aus, daß aus dem Fixpunkt annähernd elliptische Kurven werden. Bei $\hat{A}_{x_0} = 1.200 \text{ mm}$ (regulärer Fall) bleibt die Bewegung innerhalb der Separatrix, bei $\hat{A}_{x_0} = 1.202$ (chaotischer Fall) sieht man deutlich einen Übergang zu sehr großen Amplituden. Figur 2.13 zeigt einen erheblich größeren Bereich des Phasenraums. Es ist zu erkennen, daß man im chaotischen Fall zunächst gebundene Bewegung, aber mit sehr viel größeren Amplituden als bei der Überlappung der Drittel- und Summenresonanzen erhält und erst später den Übergang in die ungebundene Bewegung beobachtet.

a.)

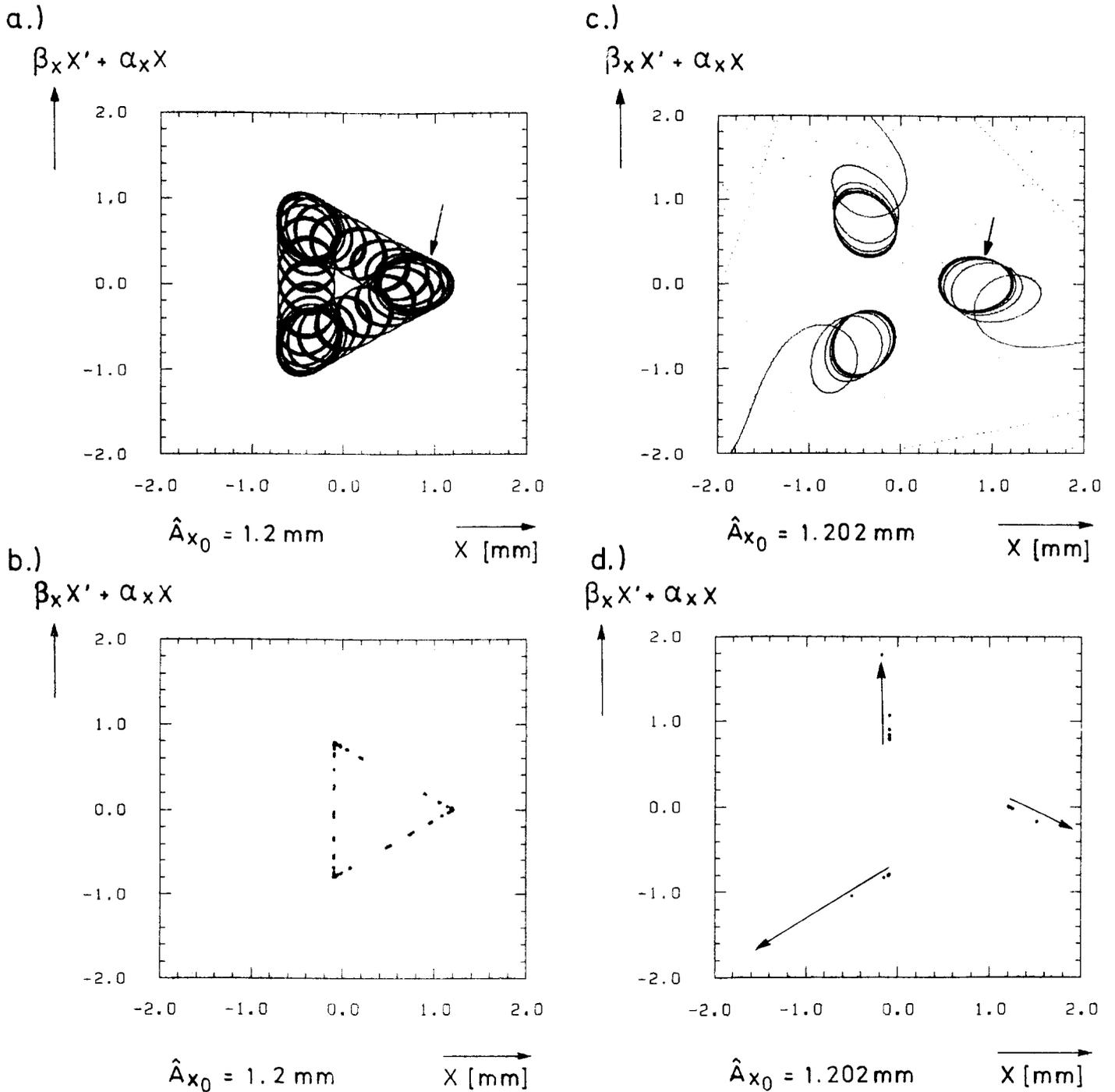


b.)



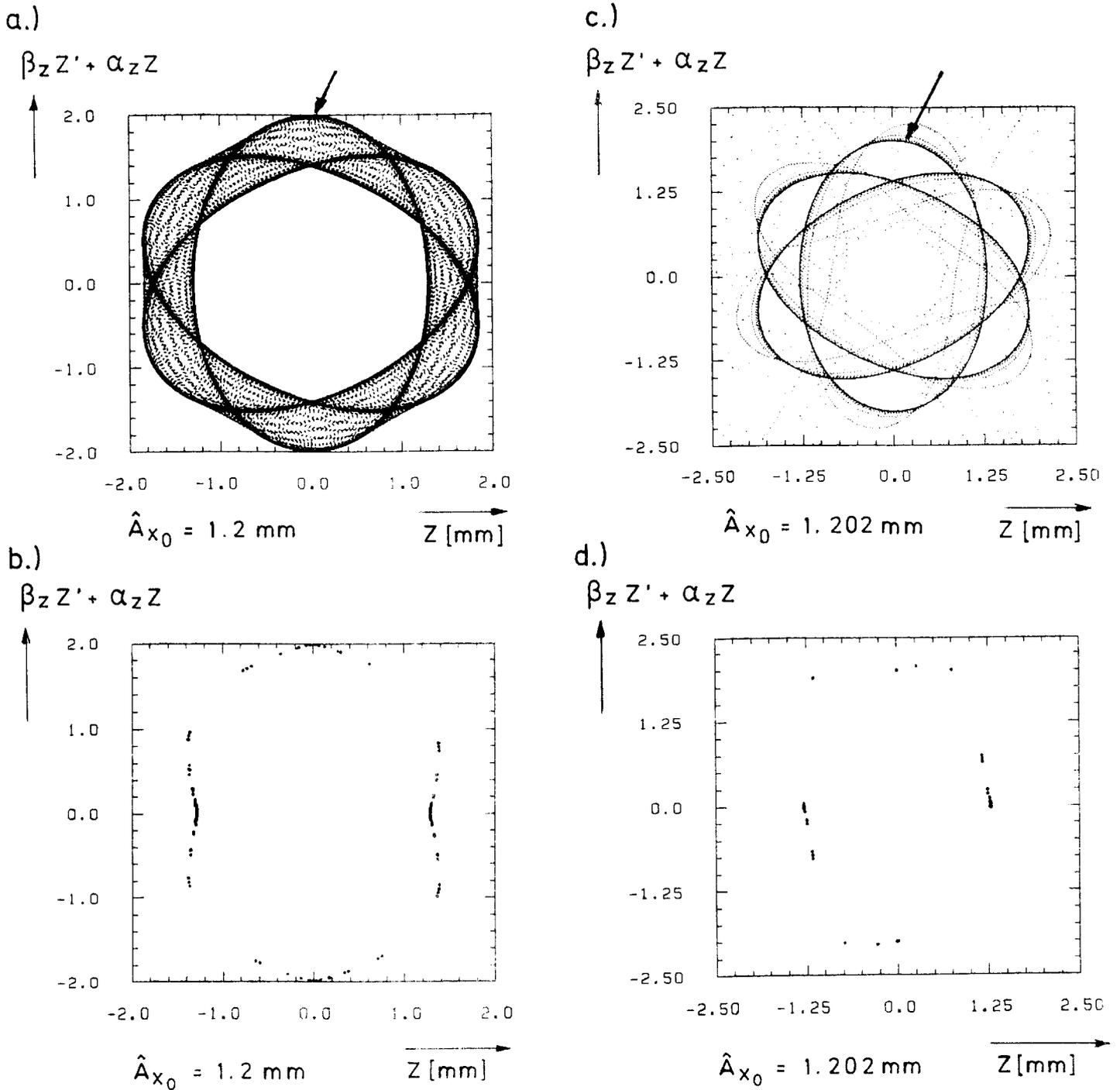
Figur 2.10: Abstand im Phasenraum der Bewegung unter dem Einfluß der Differenzenresonanz $Q_x - 2Q_z = p_1$ und der Drittelresonanz $3Q_x = p_2$
 a) $\hat{A}_{x_0} = 1.200 \text{ mm}$, b) $\hat{A}_{x_0} = 1.202 \text{ mm}$.

Man sieht, daß die Bewegung bei $\hat{A}_{x_0} = 1.200 \text{ mm}$ noch regulär ist, aber schon bei 1.202 mm chaotisch wird.



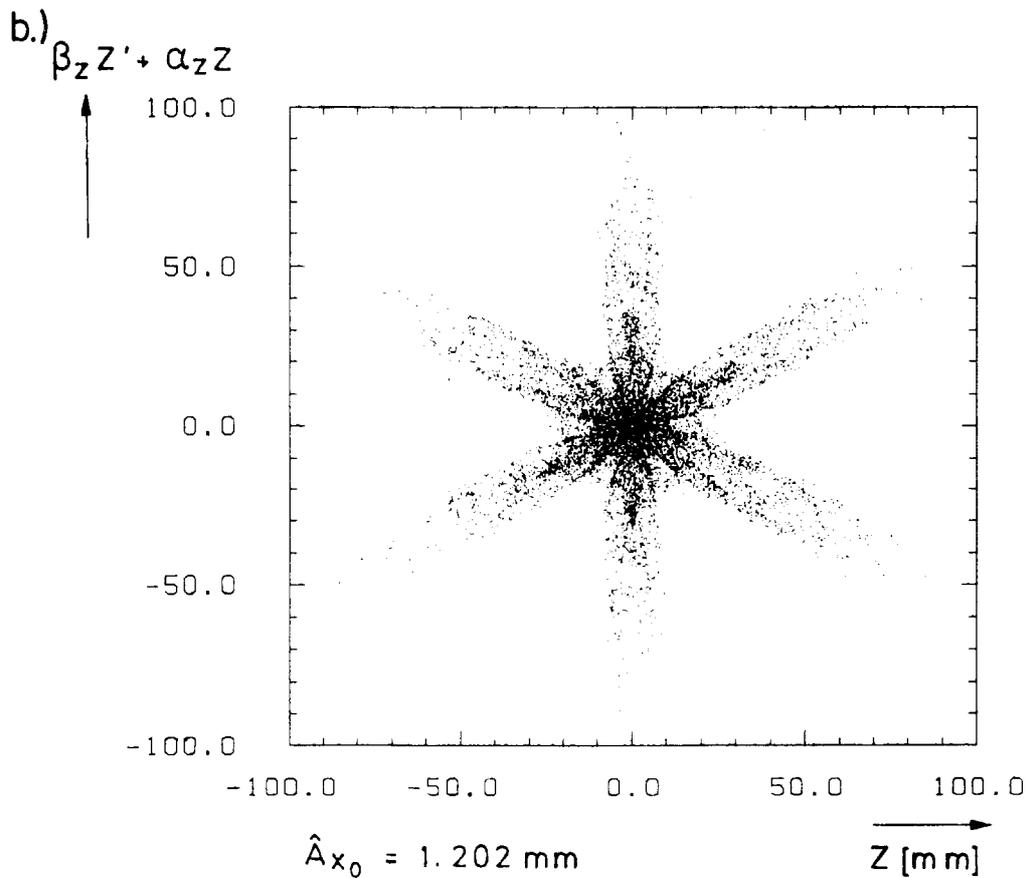
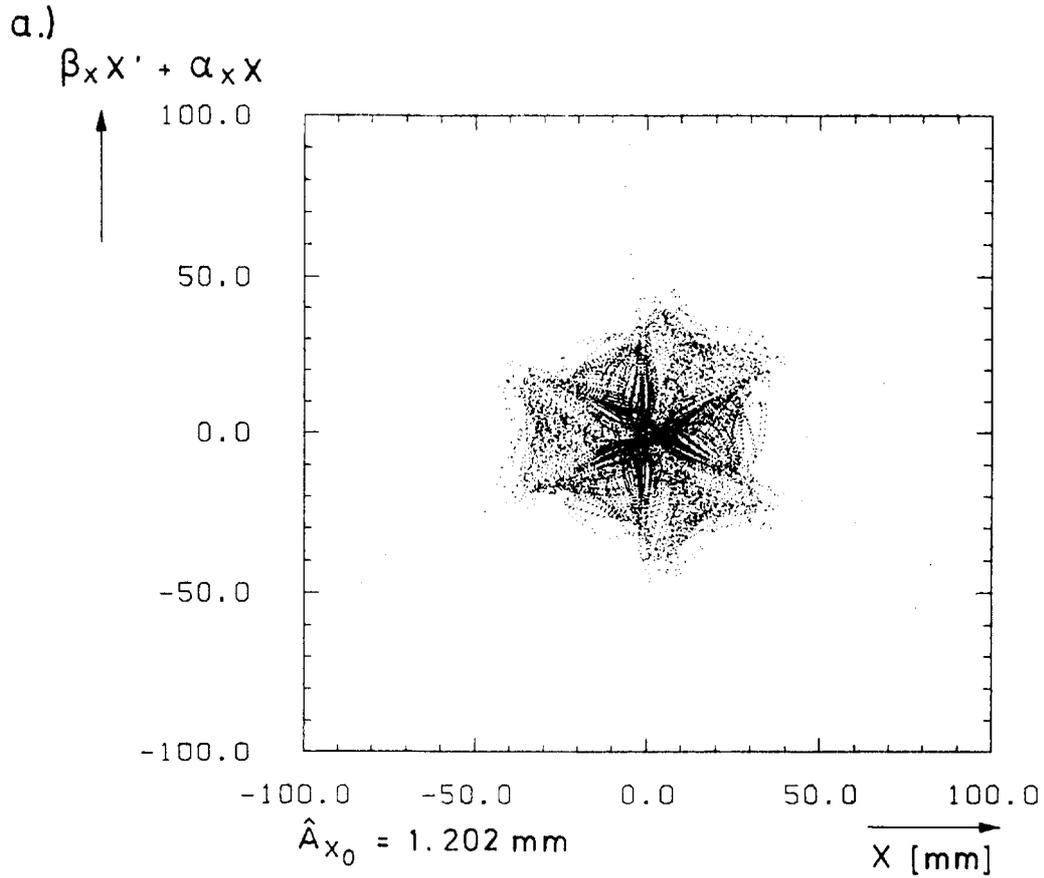
Figur 2.11: Horizontale Phasenraumprojektion der Bewegung unter dem Einfluß der Differenzenresonanz $Q_x - 2Q_z = p_1$ und der Drittelresonanz $3Q_x = p_2$

In Teil a,b wird die reguläre Bewegung in der horizontalen Projektion des Phasenraumes gezeigt. Die Dreiecksform in der gemäß (1.53) reduzierten Projektion des Phasenraumes (Teil b) bedeutet, daß die Separatrix der Drittelresonanz annähernd erreicht ist, während die Resonanzbedingung der Differenzenresonanz noch nicht erfüllt ist (siehe Text). Teil c,d zeigt einen Ausschnitt des Phasenraums der chaotischen Bewegung: zwar ist die Bewegung jenseits der Separatrix der Summenresonanz (das Teilchen verläßt den stabilen Bereich auf drei Achsen - Teil d), aber die Differenzenresonanz führt die Bewegung wieder in den ursprünglichen Bereich des Phasenraums zurück (Teil c).



Figur 2.12: Vertikale Phasenraumprojektion der Bewegung unter dem Einfluß der Differenzenresonanz $Q_x - 2Q_z = p_1$ und der Drittelresonanz $3Q_x = p_2$

Der reguläre Fall ist in Teil a,b zu sehen, ein Ausschnitt der chaotischen Bewegung wird in Teil c,d gezeigt. Die (durch die Einschränkung des Winkels der jeweils anderen Projektion des Phasenraums auf ein kleines Winkelintervall) reduzierte Projektion des Phasenraumes (Teil b,d) zeigt deutlich, daß die Bewegung noch innerhalb der Separatrix der Differenzenresonanz ist (vergleiche Kapitel 1.4.1.2). Die Anhäufung der Simulationsdatenpunkte in Teil a,c (siehe Pfeile) ist auf das Erreichen der instabilen Fixpunkte in der horizontalen Phasenraumprojektion zurückzuführen (je eine Ellipse in Teil a,c entspricht einer Ellipse in Figur 2.11a,c). Auch in der vertikalen Phasenraumprojektion kehrt im chaotischen Fall (Teil c) das Teilchen in den ursprünglichen Bereich des Phasenraums zurück.



Figur 2.13: Chaotische Bewegung durch den Einfluß der Differenzresonanz $Q_x - 2Q_z = p_1$ und der horizontalen Resonanz $3Q_x = p_2$

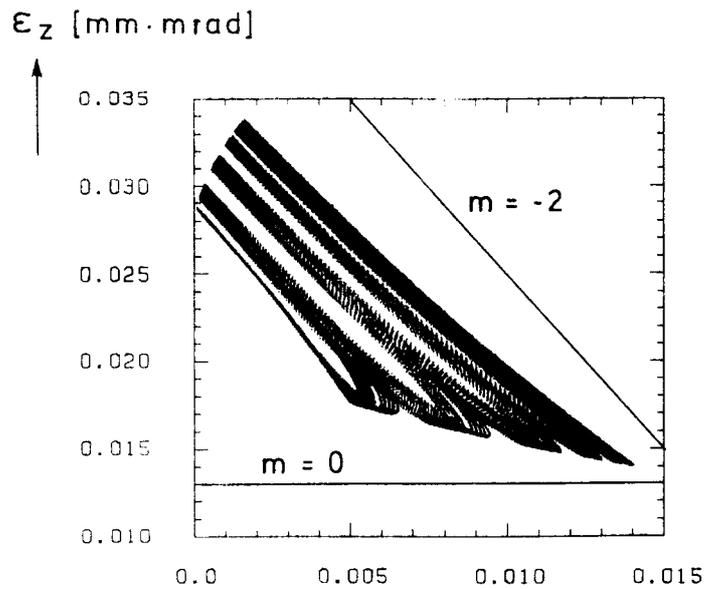
Teil a zeigt die gesamte horizontale Phasenraumprojektion der chaotischen Bewegung aus Figur 2.11c,d und Teil b die gesamte vertikale Phasenraumprojektion dieser Bewegung (Figur 2.12c,d). In beiden Phasenraumprojektionen werden sehr große Werte der Koordinaten erreicht.

Die vertikale Phasenraumprojektion zeigt, daß mit den gewählten Parametern die Separatrix der Drittelresonanzen noch nicht ganz erreicht ist (Figur 2.12b). In den nicht eingeschränkten Phasenraumdarstellungen (Fig. 2.12a,c) erkennt man Kurven mit besonders starker Belegung. Dies ist aber lediglich eine Konsequenz der Tatsache, daß sich die Teilchen besonders lang an den Fixlinien in der horizontalen Phasenraumprojektion aufhalten.

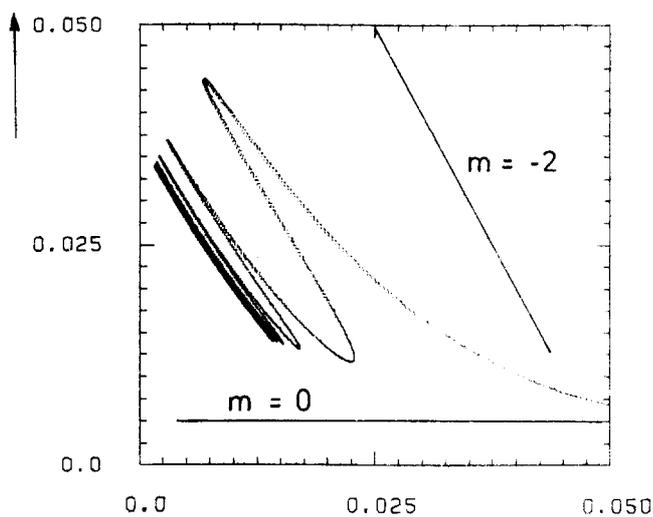
In Figur 2.14 sind die Emittanzen aufgetragen. Wie zu erwarten, gibt es eine Überlagerung der Steigung $m=0$ der Drittelresonanz und der Steigung $m=-2$ der Differenzenresonanz; auch hier zeigen sich zusätzliche amplitudenabhängige Deformationen. Während im regulären Fall nur ein beschränkter Bereich eingenommen wird, werden im chaotischen Fall sehr große Werte erreicht. Durch das Wirken der Differenzenresonanz werden die sehr großen Werte von ε_x immer wieder zu kleinen Werten gebracht, und dies bremst das unbeschränkte Wachsen der Emittanzen durch die horizontale Resonanz. Bei einem bestimmten Emittanzenverhältnis wird jedoch der Einfluß der horizontalen Resonanz dominant, so daß die Emittanzen in wenigen Umläufen große Werte erreichen. Durch das gewählte Anfangsemittanzenverhältnis $K = \frac{\varepsilon_{z_0}}{\varepsilon_{x_0}} = 1$ wird die Bewegung hauptsächlich von der horizontalen Resonanz bestimmt. Dies läßt sich an den Q-Werten in Figur 2.15a,b zeigen, hier am Beispiel der regulären Bewegung. Nach einer Mittelung über tausend Umläufe zeigt sich eindeutig, daß die Q-Werte im Bereich der Drittelresonanz liegen. Von welcher Resonanz die Bewegung dominiert wird, läßt sich mit dem Emittanzenverhältnis K einstellen. Wählt man dieses Verhältnis zu $K=2$, also die vertikale Anfangsemittanz ε_{z_0} doppelt so groß wie die horizontale ε_{x_0} , so überwiegt nun die Differenzenresonanz $Q_x - 2Q_z$, wie in Figur 2.15c, d zu sehen ist.

a.)

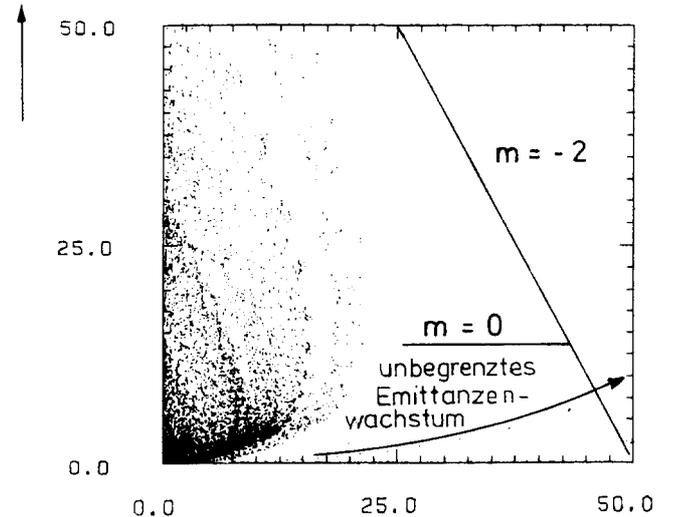
- 83 -



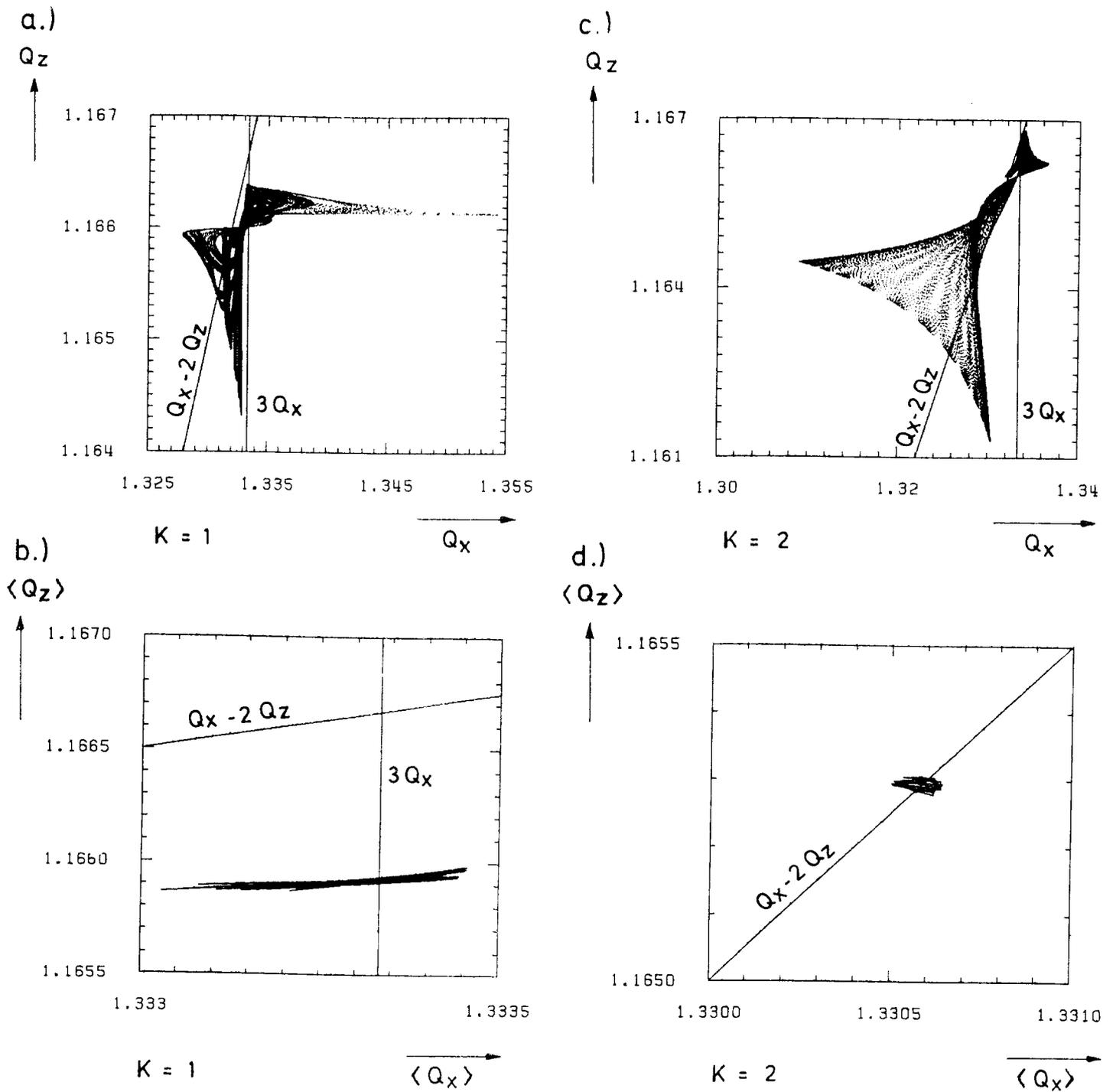
b.)

 $\hat{A}_{x_0} = 1.2 \text{ mm}$
 ϵ_z [mm·mrad] $\hat{A}_{x_0} = 1.202 \text{ mm}$ ϵ_x [mm·mrad]

c.)

 ϵ_z [mm·mrad] $\hat{A}_{x_0} = 1.202 \text{ mm}$ ϵ_x [mm·mrad]Figur 2.14: ϵ_x - ϵ_z -Diagramm

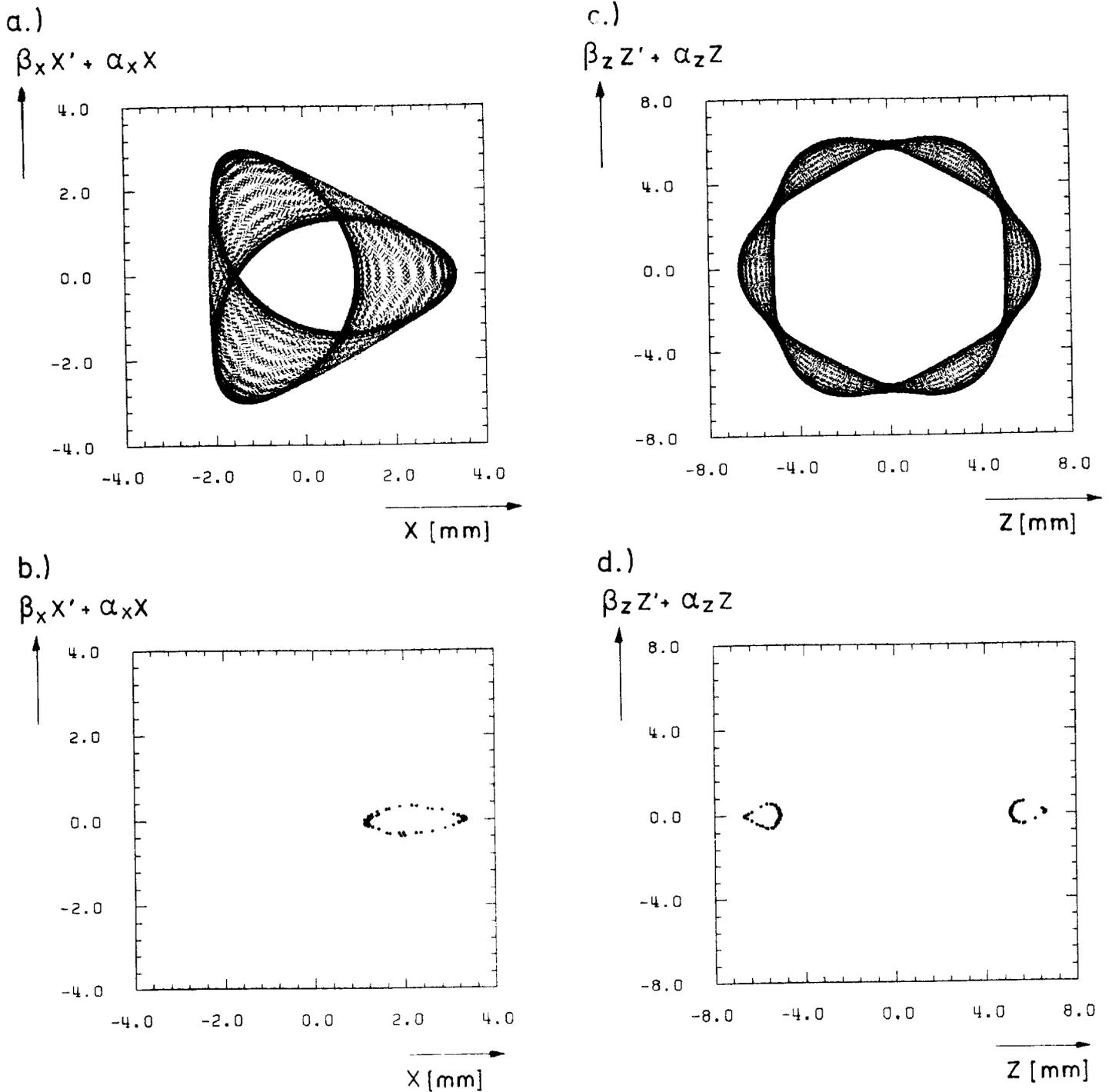
Der reguläre Fall ist in Teil a gezeigt. Teil b und c zeigen den chaotischen Fall. In Teil a und b ist die Überlagerung der Steigung $m=-2$ der Differenzenresonanz und der Steigung $m=0$ der horizontalen Resonanz und eine zusätzliche amplitudenabhängige Verformung zu sehen. Teil c zeigt, daß selbst bei sehr großen Emittanzen aufgrund der Differenzenresonanz immer wieder der Bereich kleiner Emittanzen erreicht wird, bis schließlich ab einem bestimmten Verhältnis der Emittanzen unbegrenzttes Wachstum dieser Emittanzen einsetzt.



Figur 2.15: Q_x - Q_z -Diagramm für die reguläre Bewegung

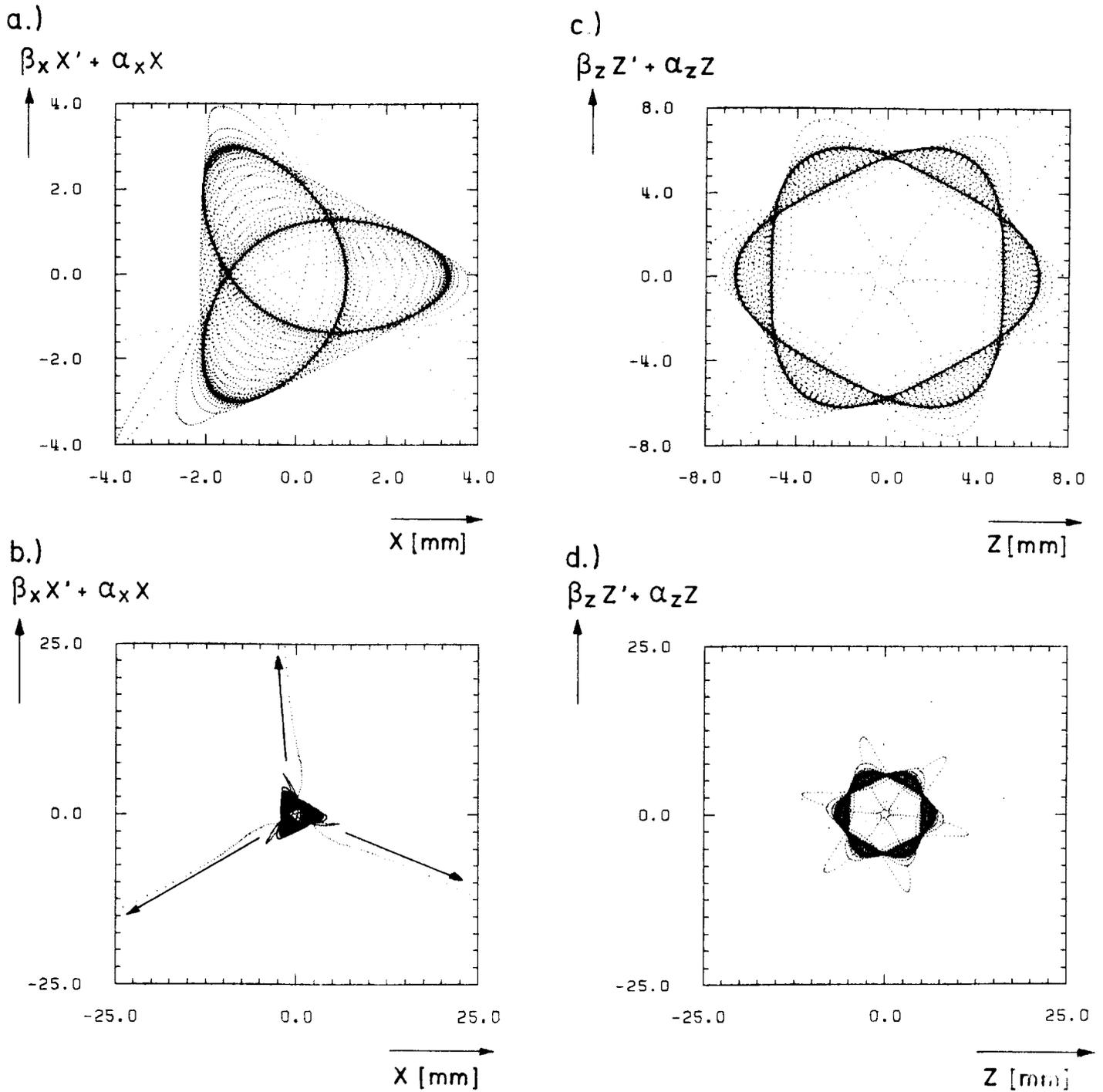
Gezeigt wird der Vergleich der Bewegung bei einem Anfangsemittanzverhältnis $K = \frac{\epsilon_{z0}}{\epsilon_{x0}} = 1$ (siehe Fig. 2.11-2.14) (Teil a,b) mit der Bewegung bei $K=2$. Die Mittelung der Phasenvorschübe über 1000 Umläufe zeigt, daß bei $K=1$ (Teil b) die Bewegung im Einflußbereich der horizontalen Resonanz liegt, während bei $K=2$ (Teil d) die Differenzenresonanz dominiert.

Der Fall $K=2$ soll genauer untersucht werden. Bei einer gerade noch regulären Bewegung kann man die Inselstruktur der Differenzenresonanz erkennen (Fig. 2.16), aber auch der Einfluß der horizontalen Resonanz ist an den Spitzen der Inseln zu sehen. Da die Differenzenresonanz dominant ist, ist im Vergleich zu $K=1$ die Bewegung noch bei wesentlich größeren Anfangsamplituden regulär: $\bar{A}_{x_0} = 3.36$ mm; $\bar{A}_{z_0} = 5.09$ mm. Bei noch größeren Amplituden wird auch hier die Bewegung chaotisch, siehe Figur 2.17. Die Bewegung verläuft lange Zeit in dem in Figur 2.16 gezeigten Bereich der regulären Bewegung. Manchmal verläßt das Teilchen diesen Bereich, kehrt aber immer wieder zurück. Erst nach sehr hohen Umlaufzahlen setzt sich die Drittelresonanz durch und führt zu unbegrenztem Amplitudenwachstum in der horizontalen Phasenraumprojektion (Fig. 2.17b). In Figur 2.18a sind die Ergebnisse von Simulationsläufen mit sechs verschiedenen Emittanzverhältnissen K zusammengefaßt. Gezeigt ist die Abhängigkeit der maximalen regulären Anfangsemittanzen ε_{x_0} , ε_{z_0} vom Emittanzverhältnis K , als Vergleich ist die Anfangsemittanz für $K=0$ mit eingetragen. Bei kleineren Werten von K ist die Bewegung im Einflußbereich der horizontalen Resonanz $3Q_x$, mit steigendem K wird dieser Einfluß geringer, bis bei einem bestimmten K -Wert die Differenzenresonanz überwiegt. Der Einfluß dieser Resonanz macht die Bewegung stabiler, so daß beide Startemittanzen einen Sprung zu höheren Werten machen. Durch Bestimmung der Fläche F in den Phasenraumprojektionen (z.B. Figur 2.11) lassen sich mittlere Emittanzen $\bar{\varepsilon}_x = F_x / 2\pi$; $\bar{\varepsilon}_z = F_z / 2\pi$ bestimmen. Diese sind für die Fälle, in denen die horizontale Resonanz überwiegt, in Figur 2.18b als Funktion von K aufgetragen. Im Vergleich zu Figur 2.18a wächst das mittlere $\bar{\varepsilon}_z$ sehr stark an, so daß insgesamt die Summe $\bar{\varepsilon}_x + \bar{\varepsilon}_z$ ansteigt mit größer werdendem K . Zusammenfassend läßt sich sagen: mit wachsendem Emittanzverhältnis K nehmen die maximalen regulären horizontalen Emittanzen (ε_{x_0} , $\bar{\varepsilon}_x$) ab, die vertikalen Emittanzen (ε_{z_0} , $\bar{\varepsilon}_z$) vergrößert sich so, daß die Summe $\bar{\varepsilon}_x + \bar{\varepsilon}_z$ größer wird ($\varepsilon_{x_0} + \varepsilon_{z_0}$ wird größer, wenn die Differenzenresonanz überwiegt). Zudem kann die Differenzenresonanz zu einer langen Verweildauer im chaotischen Bereich mit großen Ausdehnungen führen und damit Stabilität vortäuschen, wenn nicht genügend lange simuliert wird.



Figur 2.16: Phasenraumprojektionen einer regulären Bewegung unter dem Einfluß der Differenzenresonanz $Q_x - 2Q_z = p_1$ und der Drittelresonanz $3Q_x = p_2$ bei $K=2$

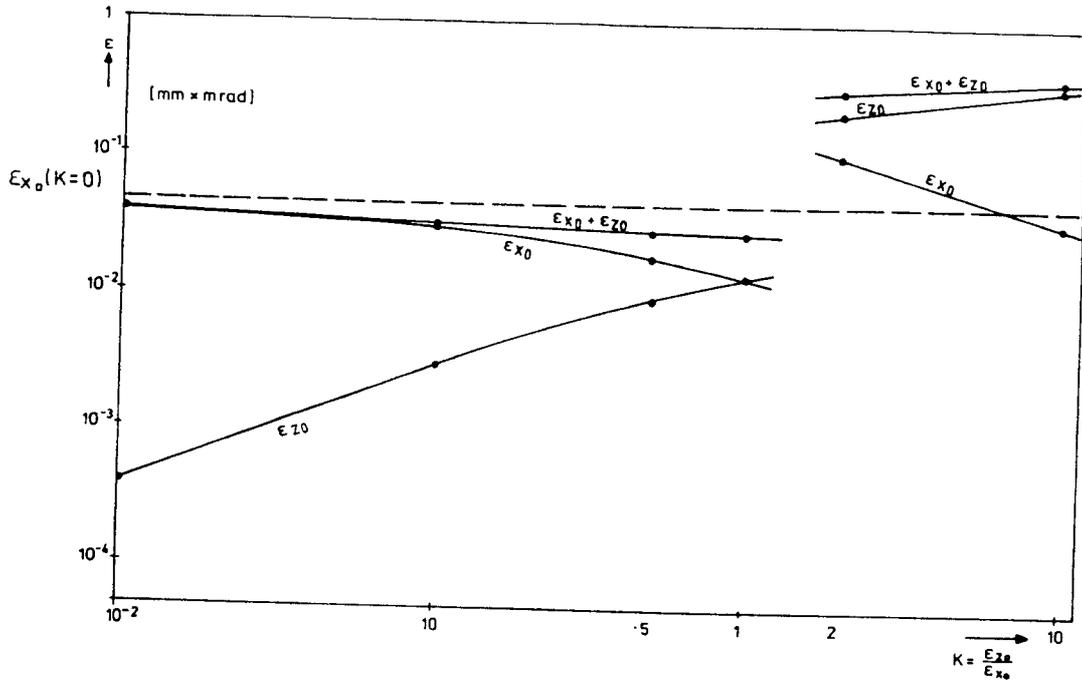
Teile a,b zeigen die horizontale Projektion und Teil c,d die vertikale Projektion des Phasenraums. In den durch den Schnitt (1.53) reduzierten Projektionen des Phasenraumes (Teil b,d) wird nun deutlich, daß die Resonanzbedingung der Differenzenresonanz erfüllt ist (vergleiche Fig. 2.11b-2.12b). Die Verformung in Teil b,d lassen aber auch den Einfluß der Summenresonanz erkennen.



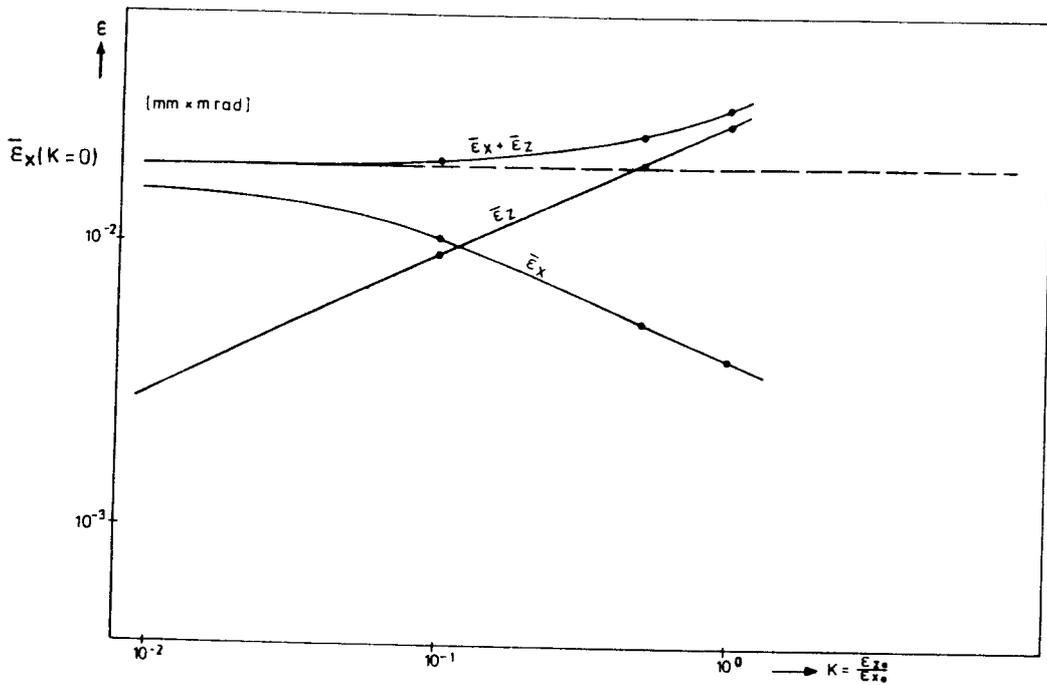
Figur 2.17: Projektionen des Phasenraums einer chaotischen Bewegung unter dem Einfluß der Differenzresonanz $Q_x - 2Q_z = p_1$ und der Drittelresonanz $3Q_x = p_2$ bei $K=2$

Bei etwas größerer Amplitude als bei der Bewegung von Figur 2.16 wird die Bewegung chaotisch. Teil a,b zeigt die horizontale, Teil c,d die vertikale Projektion des Phasenraums. Wie im Falle mit $K=1$ wird der ursprüngliche Bereich im Phasenraum wieder erreicht (Teil a,c) bis die Bewegung schließlich von der horizontalen Resonanz dominiert wird (Teil b).

a.)



b.)



Figur 2.18: Stabile Anfangsemittanzen und mittlere Emittanzen als Funktion des Anfangsemittanzenverhältnisses $K = \frac{\epsilon_{z0}}{\epsilon_{x0}}$

Teil a: Für sechs K-Werte sind die stabilen Anfangsemittanzen berechnet worden. Deutlich ist der Sprung zu größeren Werten der Anfangsemittanzen zwischen $K=1$ und $K=2$ zu erkennen. Unterhalb dieses Sprunges dominiert die horizontale Resonanz oberhalb ist die Differenzresonanz stärker.

Teil b: Die Summe der mittleren Emittanzen $\bar{\epsilon}_x + \bar{\epsilon}_z$ nimmt mit wachsendem K zu, und zwar nimmt $\bar{\epsilon}_z$ stärker zu als $\bar{\epsilon}_x$ reduziert wird.

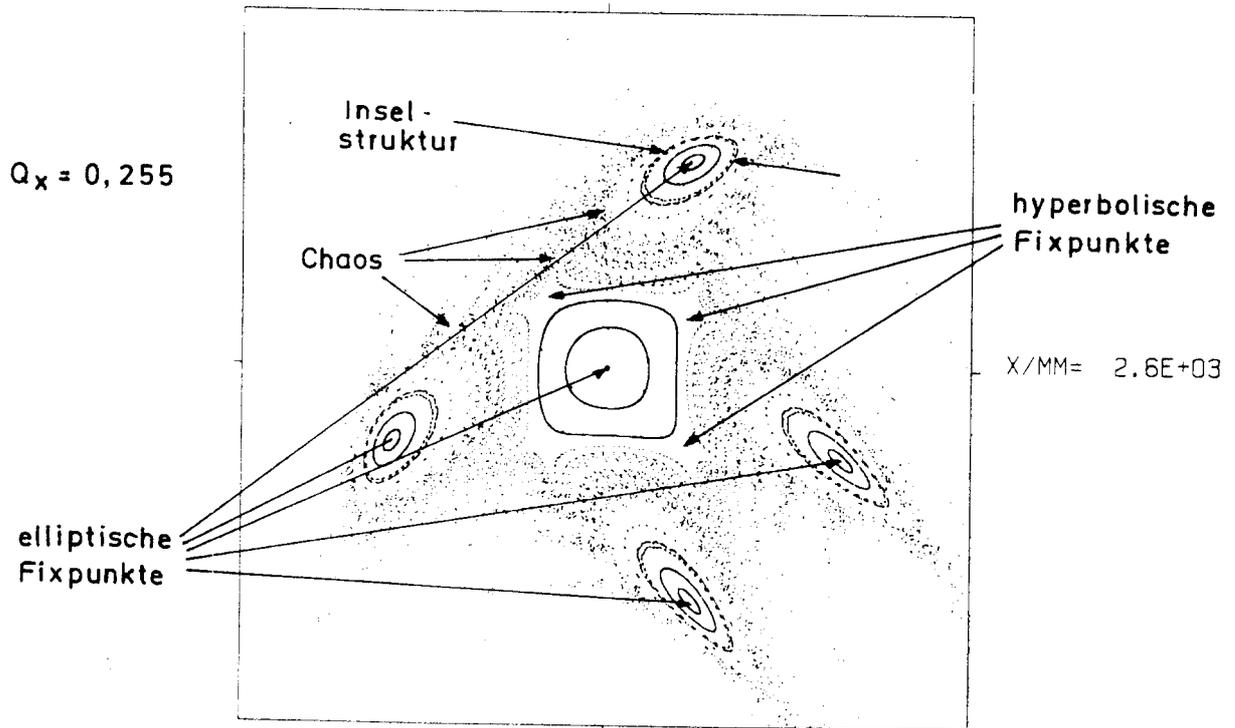
Man kann aus diesem Beispiel erkennen, daß bei Berücksichtigung von horizontaler und vertikaler Bewegung die maximale stabile Amplitude auch durch die Differenzenresonanzen deutlich kleiner werden kann. Weiter muß man damit rechnen, daß durch das Zusammenwirken mehrerer Resonanzen der zweite Bereich in Figur 2.4 wesentlich breiter wird als bei der reinen horizontalen Bewegung.

2.3.3 Chaotische Bewegung in der Nähe der Separatrix einer stabilisierten Resonanz $4Q_x = p$

Als letztes möchte ich ein Simulationsbeispiel in der Nähe der Resonanz vierter Ordnung untersuchen. In Kapitel 1 haben wir dieses Beispiel für einen Q-Wert von 0,251 betrachtet. Das gleiche Beispiel bei $Q_x = 0,255$ ist in Figur 2.19a zu sehen. Deutlich ist der breite chaotische Bereich um die Inseln der vier stabilen Fixpunkte zu sehen. Dieser Bereich entsteht dadurch, daß mit zunehmendem Abstand zu einer Resonanz diese nicht mehr als isoliert angesehen werden darf, sondern daß auch Effekte anderer Resonanzen wichtig werden. Bei einem Q-Wert von $Q_x = 0,26$ (Figur 2.19b) sind die Inselstrukturen deutlich kleiner geworden und bei $Q_x = 0,261$ (Figur 2.19c) sind die Inseln fast auf Null geschrumpft, wachsen jedoch bei einer weiteren Vergrößerung auf 0,262 wieder an (Figur 2.19d). Wir sehen hier den Effekt einer Bifurkation (siehe weiter unten). Eine weitere Erhöhung des Q-Wertes auf $Q_x = 0,263$ (Figur 2.19e) läßt die Inselgröße wieder schrumpfen und bei $Q_x = 0,264$ (Figur 2.19f) läßt sich im Rahmen der Auflösung keine reguläre Inselbewegung mehr feststellen. Das hier auftretende Beispiel einer Bifurkation möchte ich jetzt vorstellen. Eine umfangreiche theoretische Behandlung der Bifurkation ist bei MacKay /10/ zu finden. Bifurkation tritt immer dann auf, wenn bei einer Variation eines Parameters Fixpunkte erzeugt oder zerstört werden oder aufeinandertreffen. Betrachten wir also die Zerstörung eines elliptischen Fixpunktes (Figur 2.20), nämlich eines der vier stabilen Fixpunkte der Resonanz $4Q_x = p$. Diese Zerstörung kann dadurch geschehen, daß durch Änderung des Parameters Q die Spur der Matrix /A (Kapitel 1.3.3), die die Bewegung in der Nähe eines Fixpunktes beschreibt, einen Wert von +2 oder -2 annimmt.

a.)

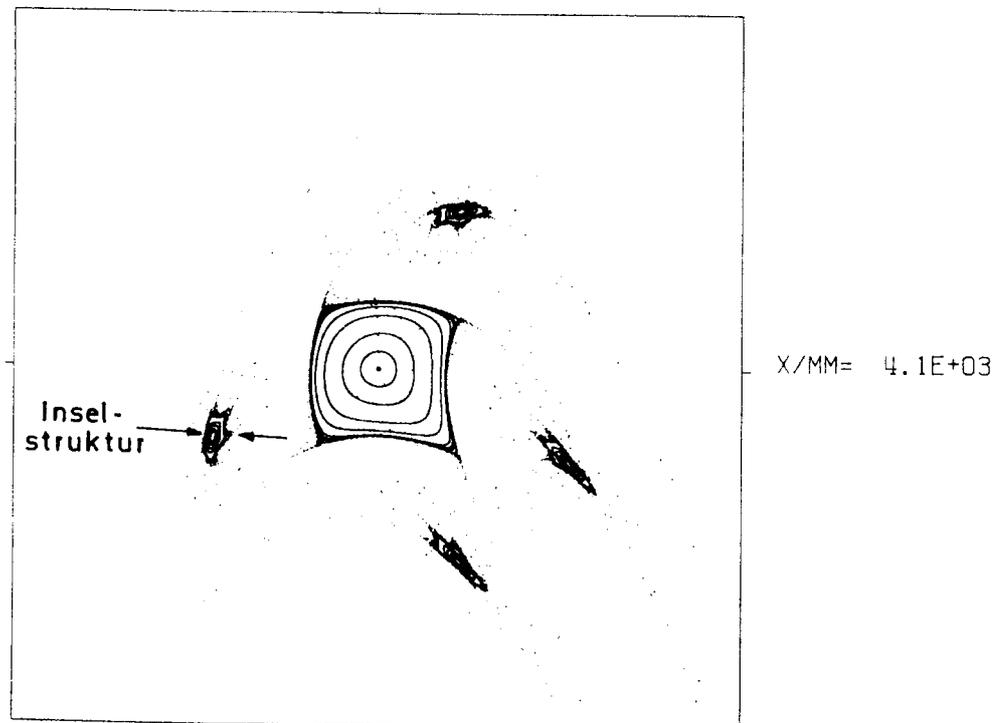
$$(X \cdot \text{ALFA} + X_P \cdot \text{BETA}) / \text{MM} = 2.6\text{E}+03$$



b.)

$$(X \cdot \text{ALFA} + X_P \cdot \text{BETA}) / \text{MM} = 4.1\text{E}+03$$

$Q_x = 0,260$



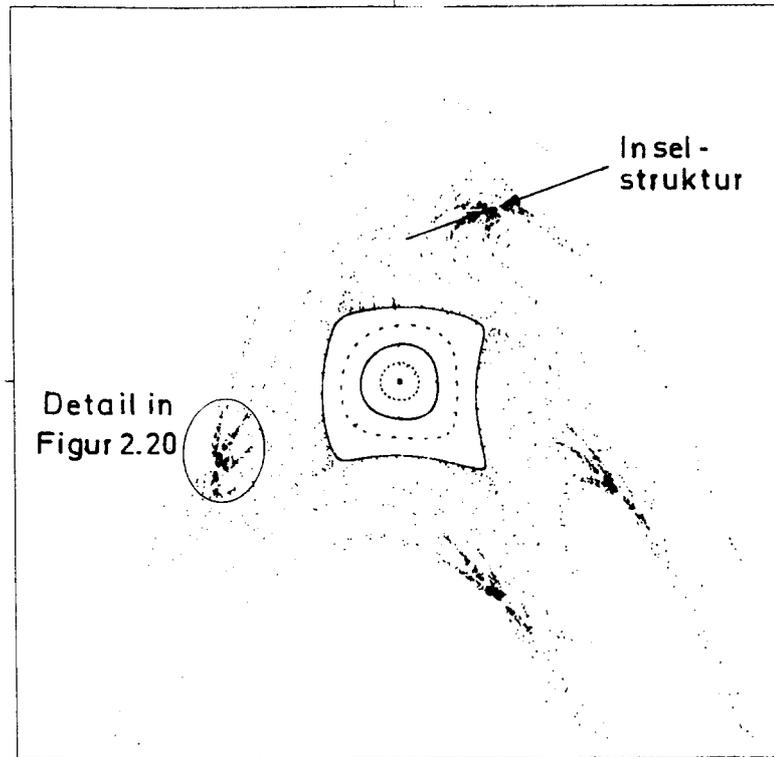
Figur 2.19a,b: Horizontale Bewegung unter dem Einfluß der Resonanz vierter Ordnung $4Q_x = p$

Teil a zeigt die Bewegung bei $Q_x = 0,255$ und in Teil b ist der Q_x -Wert: $Q_x = 0,260$. Die stabilen und instabilen Fixpunkte sind mit wachsendem Q_x -Wert, also größerer Entfernung zur Resonanz bei $Q_x = 0,25$, bei größeren Amplituden zu finden. Dabei verringert sich die Größe der vier Inselbereiche.

c.)

$$(X \cdot \text{ALFA} + X_P \cdot \text{BETA}) / \text{MM} = 4.0\text{E}+03$$

$$Q_x = 0,261$$



d.)

$$(X \cdot \text{ALFA} + X_P \cdot \text{BETA}) / \text{MM} = 3.9\text{E}+03$$

$$Q_x = 0,262$$

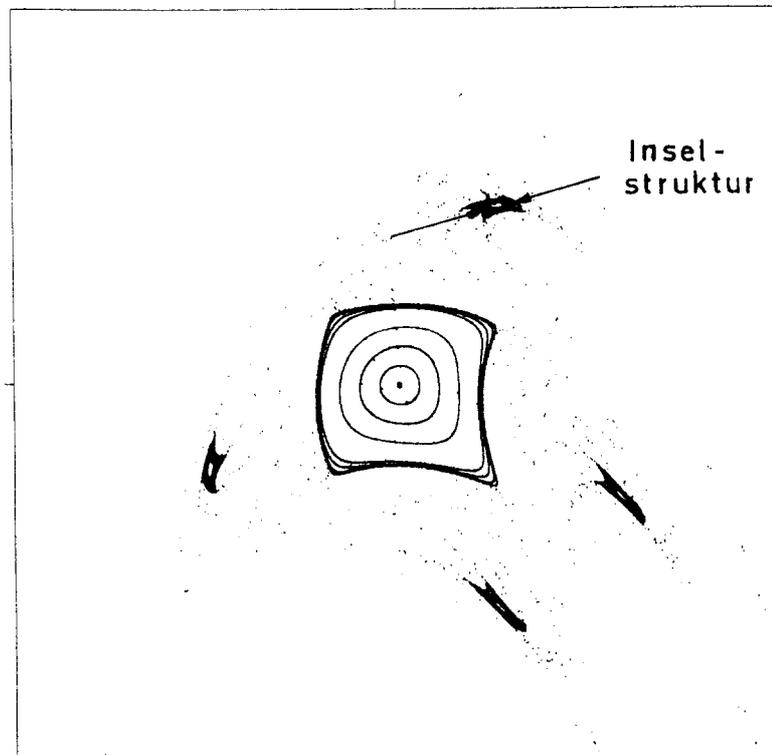


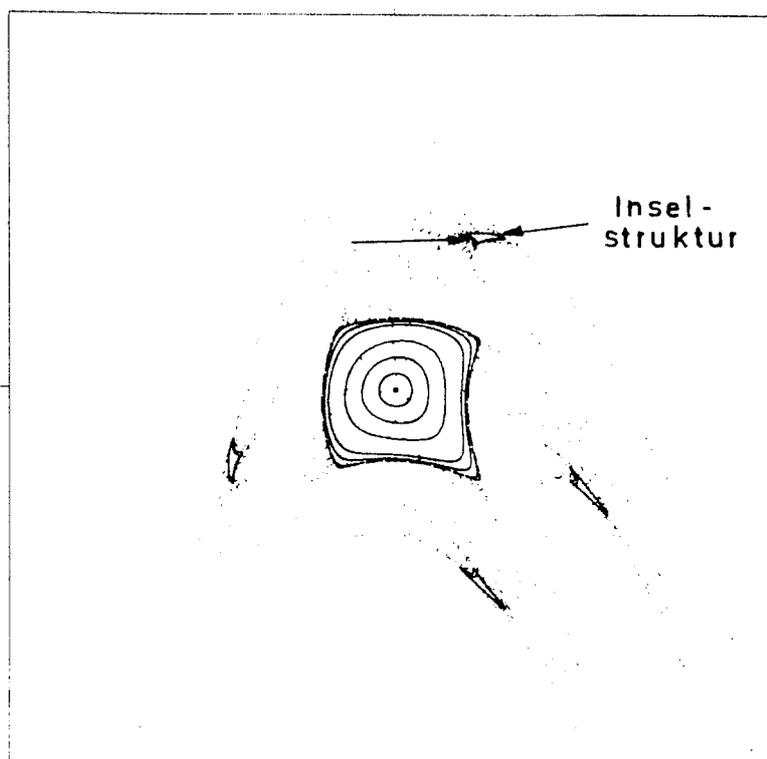
Fig. 2.19c,d: Horizontale Bewegung unter dem Einfluß der Resonanz vierter Ordnung $4Q_x = p$

Bei weiter Vergrößerung des Q_x -wertes auf $Q_x = 0,261$ (Teil c) ist die Inselgröße im Vergleich zu Figur 2.19b fast Null. Bei $Q_x = 0,262$ nimmt die Inselgröße wieder zu. Das Verschwinden der Inseln zwischen $Q_x = 0,260$ und $Q_x = 0,262$ ist ein Bifurkationsvorgang (Detail siehe Figur 2.20).

e.)

$$(X \times \text{ALFA} + X_P \times \text{BETA}) / \text{MM} = 4.6\text{E}+03$$

$$Q_x = 0,263$$

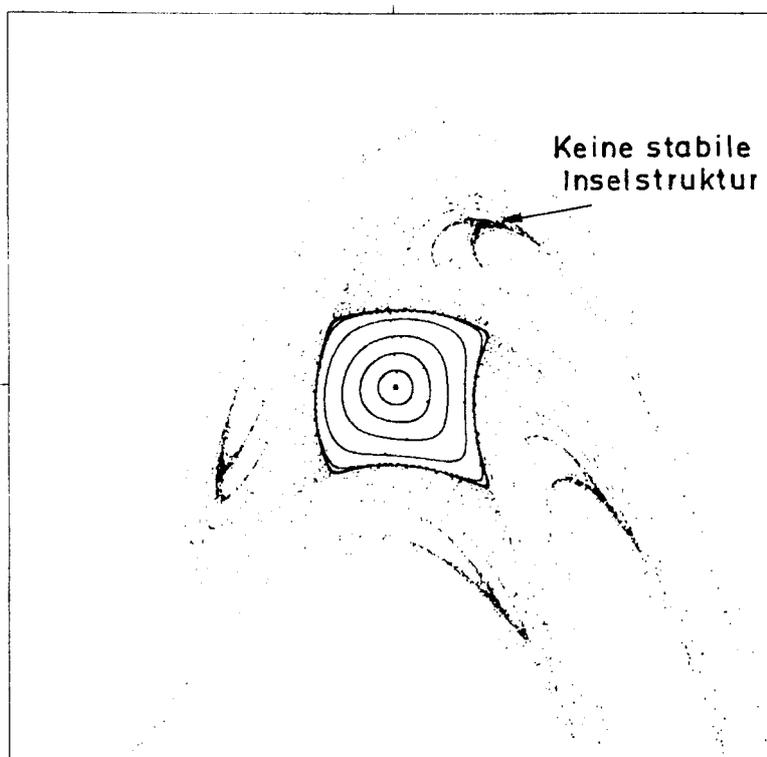


$$X / \text{MM} = 4.6\text{E}+03$$

f.)

$$(X \times \text{ALFA} + X_P \times \text{BETA}) / \text{MM} = 4.4\text{E}+03$$

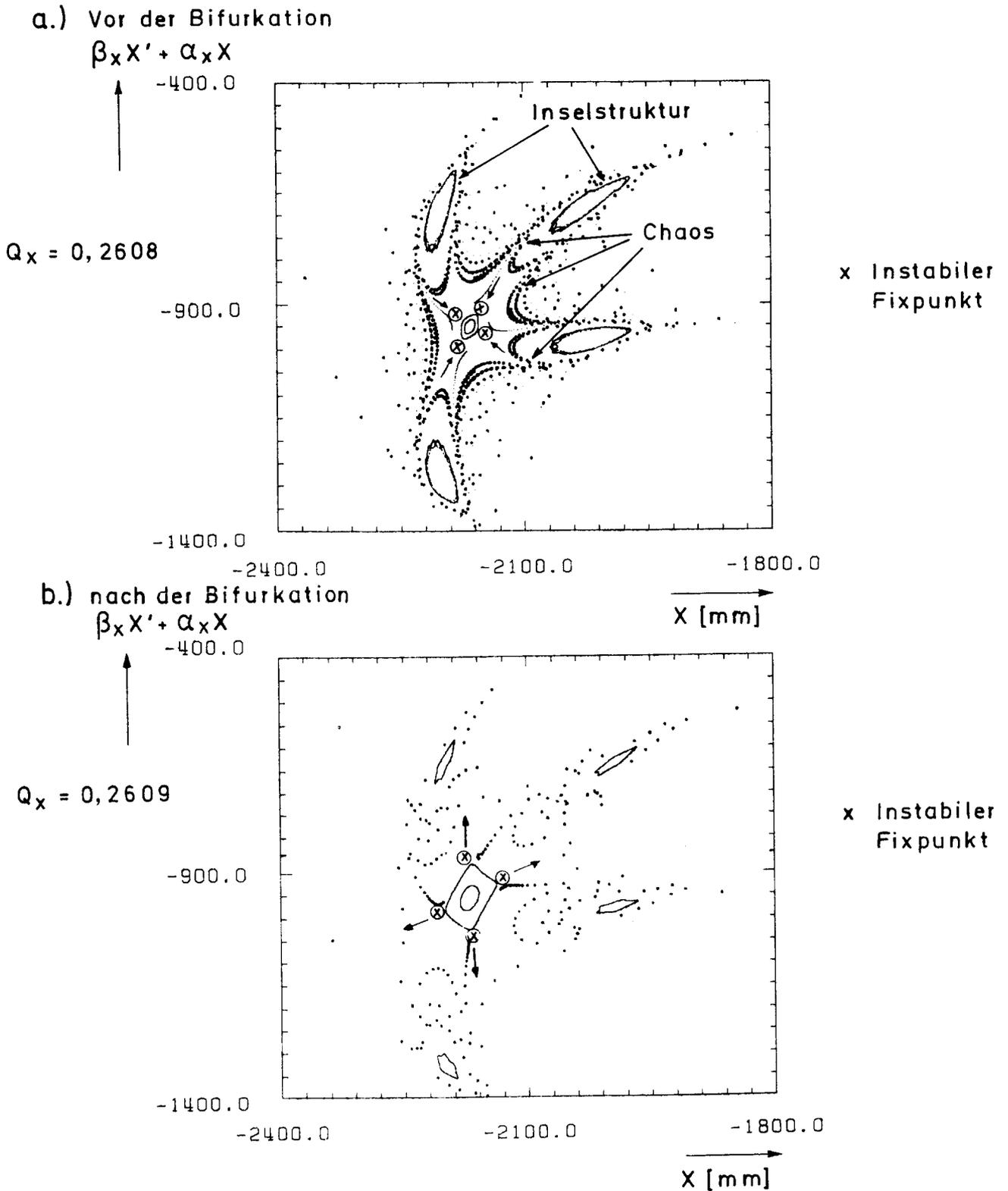
$$Q_x = 0,264$$



$$X / \text{MM} = 4.4\text{E}+03$$

Figur 2.19e,f: Horizontale Bewegung unter dem Einfluß der Resonanz vierter Ordnung $4Q_x = p$

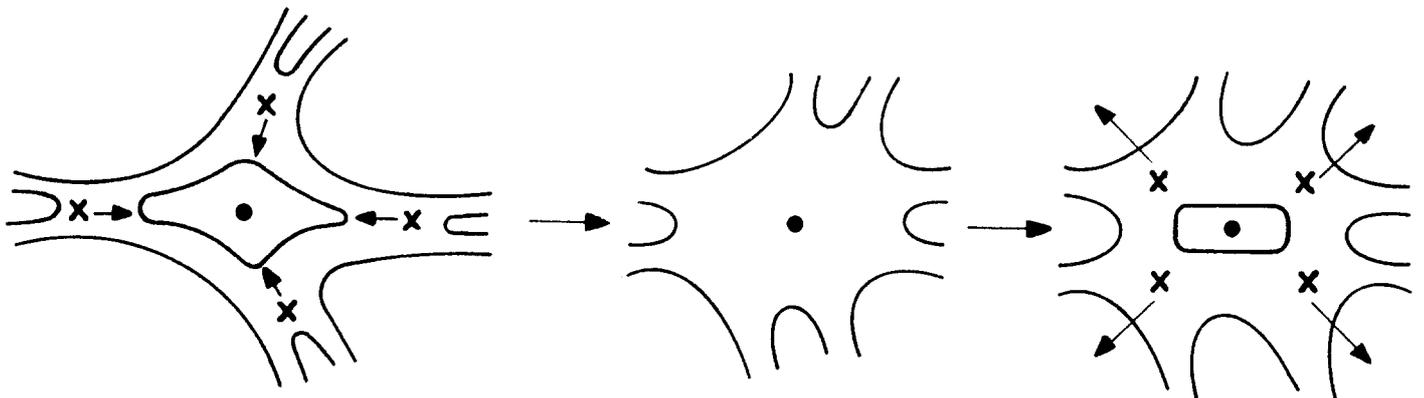
Bei $Q_x = 0,263$ (Teil e) sind die Inseln wieder kleiner geworden als bei $Q_x = 0,262$ (Figur 2.19d). Schließlich verschwinden die Inseln ganz ab $Q_x = 0,264$ (Teil f).



Figur 2.20: Bifurkationsvorgang

Die Figur zeigt eine der vier Inselbereiche der Figur 2.19c. Teil a zeigt die Situation bei $Q_x=0,2608$ kurz vor der Bifurkation. Während der Bifurkation treffen die vier instabilen Fixpunkte mit den stabilen Fixpunkten (des Zentrums der Inseln) zusammen. Nach der Bifurkation bei $Q_x=0,2609$ (Teil b) entfernen sich die vier instabilen Fixpunkte 45° phasenverschoben wieder vom elliptischen Fixpunkt.

Im Falle $\text{Spur } A = -2$ ergibt sich eine Bifurkation mit Periodenverdopplung, also nach der Bifurkation gibt es statt des zerstörten elliptischen Fixpunktes zwei neue elliptische Fixpunkte mit einem invers hyperbolischen dazwischen. Für $\text{Spur } A = +2$ entsteht nur wieder ein neuer elliptischer Fixpunkt ohne Periodenverdopplung. In unserem obigen Beispiel handelt es sich um eine Bifurkation des zweiten Typs. Figur 2.20a zeigt bei $Q_x = 0,2608$ einen der vier Inselbereiche im vergrößerten Maßstab kurz vor der Bifurkation. Um den Inselbereich des stabilen Fixpunktes hat sich ein Unterinsel-System herausgebildet mit vier instabilen Fixpunkten und vier stabilen Fixpunkten mit vier Unterinseln. Die Bifurkation läuft nun folgenderweise ab: Durch Variation des Q -wertes bewegen sich die neuen vier instabilen Fixpunkte auf den ursprünglichen elliptischen Fixpunkt zu, bis sie zusammenfallen und somit die Inselgröße gleich Null ist. Bei weiterer Vergrößerung des Q -wertes entfernen sich die vier instabilen Fixpunkte wieder vom elliptischen Fixpunkt, jetzt jedoch 45° phasenverschoben. Figur 2.20b zeigt diese phasenverschobenen instabilen Fixpunkte bei einem Q -wert von $Q_x = 0,2609$ kurz nach der Bifurkation. Figur 2.21 zeigt noch einmal schematisch den Bifurkationsvorgang.



Figur 2.21: Bifurkationsvorgang der Ordnung 1/4
schematisch; nach MacKay/10/

Kapitel 3: Simulationstechniken

3.1 Einführung

In diesem Kapitel werden die Simulationstechniken vorgestellt, die in dieser Arbeit zur Anwendung kommen.

In Abschnitt 3.2 wird das Teilchenbahnsimulationsprogramm RACETRACK (A. Wrulich /2/) beschrieben. Um Synchrotronschwingungen berücksichtigen zu können, wurde der RACETRACK-Code gemäß einer Arbeit von G. Ripken /15/ auf einen sechsdimensionalen symplektischen Formalismus erweitert. In Anhang 1 ist die Ableitung der Bewegungsgleichungen zu finden. Zusätzlich gibt es im Programm die Möglichkeit, die Energie adiabatisch zu ändern. Die besonderen Schwierigkeiten bei der Berücksichtigung der Beschleunigung werden im Anhang A2 behandelt.

In Abschnitt 3.3 wird der Einfluß von Rundungsfehlern auf die Simulationsergebnisse untersucht und ein heuristisches Verfahren zur Korrektur dieser Fehler angegeben.

Der in Kapitel 2 eingeführte charakteristische Lyapunov-Exponent wird in Abschnitt 3.4 mit zwei unterschiedlichen Methoden berechnet. Ausführlich wird dabei untersucht, inwieweit sich Rundungsfehler auf das Ergebnis auswirken. Schließlich wird eine Methode angegeben, die es erlaubt, schon mit geringen Umlaufzahlen eine sichere Unterscheidung zwischen regulärer und chaotischer Bewegung zu treffen.

In Abschnitt 3.5 werden Untersuchungen von höherdimensionalen Phasenräumen durchgeführt. Der vierdimensionale Phasenraum kann mit Hilfe eines graphischen Systems veranschaulicht werden, bei dem drei Dimensionen perspektivisch und die vierte durch Farbwerte dargestellt wird.

Dann wird gezeigt, wie man in vier und sechs Dimensionen die Bewegung auf einem KAM-Torus von der Bewegung auf Untersystemen unterscheiden kann, die beim Aufbruch des KAM-Torus entstehen.

Mit Hilfe der betrachteten Simulationstechniken wird in Abschnitt 3.6 erläutert, wie sich die Akzeptanz eines Beschleunigers bestimmen läßt.

Schließlich wird in Abschnitt 3.7 erläutert, inwieweit sich Simulationen über wenige Umläufe mit mehreren Teilchen mit Langzeitsimulationen mit nur einem Teilchen vergleichen lassen.

3.2 Das Teilchenbahnsimulationsprogramm RACETRACK

Das Teilchenbahnsimulationsprogramm RACETRACK ist speziell dafür ausgelegt, die Akzeptanzeinschränkungen zu bestimmen, die durch die Feldfehler der Dipol- und Quadrupolmagnete verursacht werden. Zur Charakterisierung der Feldfehler führt man eine Multipolentwicklung durch. Das Programm kann Multipolkoeffizienten dieser Entwicklung bis zur Ordnung 20 berücksichtigen.

Wie die Chromatik-Sextupole sind die höheren Multipolfelder nichtlineare Elemente. Sie werden als dünne Linsen in der Mitte des jeweiligen Dipol- oder Quadrupolmagneten angeordnet, so daß sie lediglich die Steigungen der Teilbahnen ändern (Kick-Code).

Neben den magnetischen Elementen können im Programm eine Reihe von Anfangsparameter gewählt werden:

- Start- und Beobachtungspunkt in der Magnetstruktur
- Anzahl der Teilchen (bis zu 256)
- Verteilung dieser Teilchen in den Projektionen des Phasenraums
- feste relative Impulsabweichungen
- Anzahl der Umläufe
- Aperturbegrenzungen

Bevor die eigentlichen Umlaufrechnungen gestartet werden, können einige vorbereitende Rechnungen durchgeführt werden:

- Einstellung des Arbeitspunktes in Q_x - Q_z -Diagramm
- Chromatikkorrektur durch Sextupole

- Einstellung einer Sollbahnabweichung mit wählbaren rms-Werten
- Wahl einer Multipolstatistik: Um eine longitudinale Variation der Stärke der Nichtlinearitäten zu berücksichtigen, können neben den mittleren Multipolkoeffizienten auch rms-Werte angegeben werden. Aus einer Anzahl von verschiedenen Multipolstatistiken wird eine mit mittlerer Akzeptanz ausgewählt und für alle weiteren Simulationen beibehalten.
- Bestimmung der Beta-, Alpha- und Dispersionsfunktionswerte der linearen Optik an diskreten Positionen der longitudinalen Koordinate s
- Kompensation von Resonanzen beliebiger Ordnung durch nichtlineare Elemente der entsprechenden Ordnungen.

Um Synchrotronschwingungen berücksichtigen zu können, mußten im Programm einige Änderungen vorgenommen werden: Beschleunigungsstrecken werden als Elemente der Länge Null in die Struktur eingefügt. Da die Stärken der magnetischen Elemente impulsabhängig sind, müssen bei jedem Durchgang durch die Beschleunigungsstrecke alle Stärken neu berechnet werden. Für jedes Teilchen gibt es somit entsprechend seiner momentanen relativen Impulsabweichung einen eigenen Satz von Feldstärken der magnetischen Elemente. Um den Bedarf an Speicherplatz gering zu halten, werden nur zwei Teilchen gleichzeitig verfolgt.

Da die Weglängenordnung $\sigma = s - v_0 t$ sich nichtlinear mit jedem Element, also auch bei Driftstrecken, Dipolen und Quadrupolen ändert (siehe Anhang 1) macht es keinen Sinn, die linearen Elemente zwischen zwei nichtlinearen Elementen zu einem Block zusammenzufassen. Dies wirkt sich allerdings nur geringfügig auf die benötigte Rechenzeit aus, da der Hauptteil der Rechenzeit für die Berechnung der nichtlinearen Kicks benötigt wird. Die sechsdimensionalen Rechnungen mit einer Beschleunigungsstrecke benötigen etwa 50 % mehr Rechenzeit als die rein transversalen vierdimensionalen Simulationen. Die Energie kann pro Umlauf um einen wählbaren Betrag verändert werden. Die Anzahl der Umläufe vor, während und nach einer solchen Beschleunigung kann angegeben werden. Mit dieser erweiterten RACETRACK-Version lassen

sich die Ergebnisse der linearen Theorie der Synchrotronschwingungen sehr genau reproduzieren, wenn die Amplituden in den transversalen Phasenraumprojektionen extrem klein gewählt werden und somit die Kopplung zwischen transversaler und longitudinaler Bewegung gering gehalten wird. Außerdem besteht die Möglichkeit, die Bewegungsrichtung bei den Simulationen umzudrehen mit einer wählbaren Anzahl der Umläufe in Vorwärts- und Rückwärtsrichtung. Damit können Rundungsfehler untersucht werden und von einem Satz von Anfangsbedingungen in beide Richtungen simuliert werden. Dadurch kann die benötigte Bearbeitungszeit dieses Satzes von Anfangsbedingungen um den Faktor zwei reduziert werden kann.

3.3 Rundungsfehler

In dieser Arbeit sollen Langzeitsimulationen der Teilchenbewegung in einem Beschleuniger durchgeführt werden. In Simulationen für den HERA-Protonenring werden dabei für 10^6 Umläufe 10^{11} Rechenoperationen benötigt. In diesem Abschnitt wird untersucht, wie sich Rundungsfehler bei einer so großen Zahl von Rechenoperationen auswirken.

3.3.1 Methoden zur Bestimmung von Rundungsfehlern

Die einfachste aber rechenzeitaufwendige Methode ist der Vergleich zweifach und vierfach genauer Rechnungen. Als Rundungsfehler wird dabei der Abstand d_{1R} der Koordinaten der zweifach genauen Rechnung (x_z, x'_z, z_z, z'_z) zu den Koordinaten der vierfach genauen Rechnung (x_v, x'_v, z_v, z'_v) genommen:

$$d_{1R} = \sqrt{(x_z - x_v)^2 + [\beta_x (x'_z - x'_v) + \alpha_x (x_z - x_v)]^2 + (z_z - z_v)^2 + [\beta_z (z'_z - z'_v) + \alpha_z (z_z - z_v)]^2} \quad (3.1)$$

Da eine IBM 3081 für lange Rechnungen zur Verfügung stand, sind einige Fälle vierfach genau gerechnet worden, obwohl sie um einen Faktor 20 langsamer sind. So waren z.B. für einen Simulationslauf von 50 000 Umläufen für HERA ca. 46 Stunden Rechenzeit notwendig.

Die zweite Methode nutzt die Tatsache aus, daß die Hamilton-Funktion invariant gegen Zeitumkehr ist (siehe Kapitel 1). Ein Umkehren der Bewegungsrichtung nach N_0 Umläufen und eine Rücksimulation um wiederum N_0 Umläufe sollte zu den Anfangskoordinaten zurückführen.

Der Rundungsfehler ist in diesem Fall der Abstand d_{2R} der Anfangskoordinaten (x_0, x'_0, z_0, z'_0) zu den rücksimulierten Koordinaten (x_R, x'_R, z_R, z'_R) :

$$d_{2R} = \sqrt{(x_R - x_0)^2 + \left[\beta_X (x'_R - x'_0) + \alpha_X (x_R - x_0) \right]^2 + (z_R - z_0)^2 + \left[\beta_Z (z'_R - z'_0) + \alpha_Z (z_R - z_0) \right]^2} \quad (3.2)$$

Im Programm wurde die Rücksimulation dadurch erreicht, daß die Struktur rückwärts durchlaufen wird, wobei die Matrizen linearer Elemente invertiert sind und die Kicks der nichtlinearen Elemente subtrahiert statt addiert werden.

3.3.2 Entwicklung der Rundungsfehler mit der Umlaufzahl N

Petra Wilhelms /16/ Untersuchungen ergaben, daß die Rundungsfehler einer rein linearen Maschine linear mit N anwachsen, während bei einer nichtlinearen Maschine die Fehler mit N^2 anwachsen. Wie im weiteren gezeigt wird, bezieht sich dieses quadratische Anwachsen auf einen Fehler in der Phase. Dies hat zur Folge, daß die Rundungsfehler bei der Bestimmung der Akzeptanzgrenze praktisch keine Rolle spielen. Das unterschiedliche Verhalten im linearen und nichtlinearen Fall läßt sich auf zwei Ursachen zurückführen: Erstens ist bei numerischen Rechnungen die Abbildung von Umlauf zu Umlauf nie exakt symplektisch und zweitens sind die Phasenvorschübe pro Umlauf im nichtlinearen Fall amplitudenabhängig, während diese im linearen Fall stets konstant sind.

Die Abweichung von der Symplektizität bedeutet, daß die Determinante der Abbildung $/A$ von eins verschieden ist.

Da bei den IBM-Rechnern die Zahlen stets auf Maschinengenauigkeit abgeschnitten werden ("truncated"), stellt sich in der Regel eine Dämpfung ein, so daß meistens $\det /A < 1$ ist. Dieser Determinanten-

fehler verkleinert systematisch die Amplituden. Dies führt bei einer linearen Beschleunigungsstruktur zu einer linearen Verringerung der Koordinaten und somit zu einem linearen Anwachsen des Rundungsfehlers. Im nichtlinearen Fall ist der Q-Wert eine Funktion der Amplitude. In erster Näherung ist die Abhängigkeit quadratisch:

$$Q_{x_0} = Q_0 (1 + b \hat{A}_{x_0}^2); \quad Q_0 = Q_{x_0} (\hat{A}_x = 0)$$

$$\hat{A}_{x_0} = \sqrt{2 \varepsilon_{x_0} \beta_x}$$

b = konstant (3.3)

Nun verringert sich aber die Amplitude \hat{A}_{x_0} systematisch:

$$\hat{A}_x(N) = \hat{A}_{x_0} (1 + aN) \quad a \approx -10^{-13} \quad (3.4)$$

Eingesetzt in (3.3) erhält man:

$$Q_x(N) = Q_0 (1 + b \hat{A}_{x_0}^2 (1 + 2aN + a^2N^2))$$

$$\approx Q_{x_0} + 2abQ_0 \hat{A}_{x_0}^2 N \quad (3.5)$$

Dabei ist die Näherung gemacht worden $a \cdot N \ll 1$, dies ist mit (3.4) selbst bei der maximal interessierenden Umlaufzahl von 2×10^9 (dies entspricht 10 Stunden Speicherzeit in HERA) noch erfüllt.

Der Phasenvorschub ψ_x nach N Umläufen entspricht nun der Summe über die Q-Werte

$$\Psi_x(N) = \sum_i^N Q_x(N) = Q_{x_0} N + abQ_0 \hat{A}_{x_0}^2 (N^2 + N)$$

$$= \Psi_{x_0} + abQ_0 \hat{A}_{x_0}^2 (N^2 + N); \quad \Psi_{x_0} = Q_{x_0} N \quad (3.6)$$

Die Einflüsse der Rundungsfehler sind wesentlich geringer als das quadratische Anwachsen zunächst vermuten läßt. Nach 10^6 Umläufen erreicht zwar der Rundungsfehler eine relative Abweichung von 10^{-3} , diese Phasenfehler können aber nur einen maximalen Wert erreichen, wenn nämlich gegenüberliegende Bereiche im Phasenraum erreicht sind. (Siehe Figur 3.15).

Danach werden die Phasendifferenzen wieder geringer. Der eigentliche für die dynamische Apertur wichtige Rundungsfehler ist das Schrumpfen der Amplituden (3.4) und diese Schrumpfung ist selbst bei 10^9 Umläufen in der Größenordnung 10^{-4} des Startwertes.

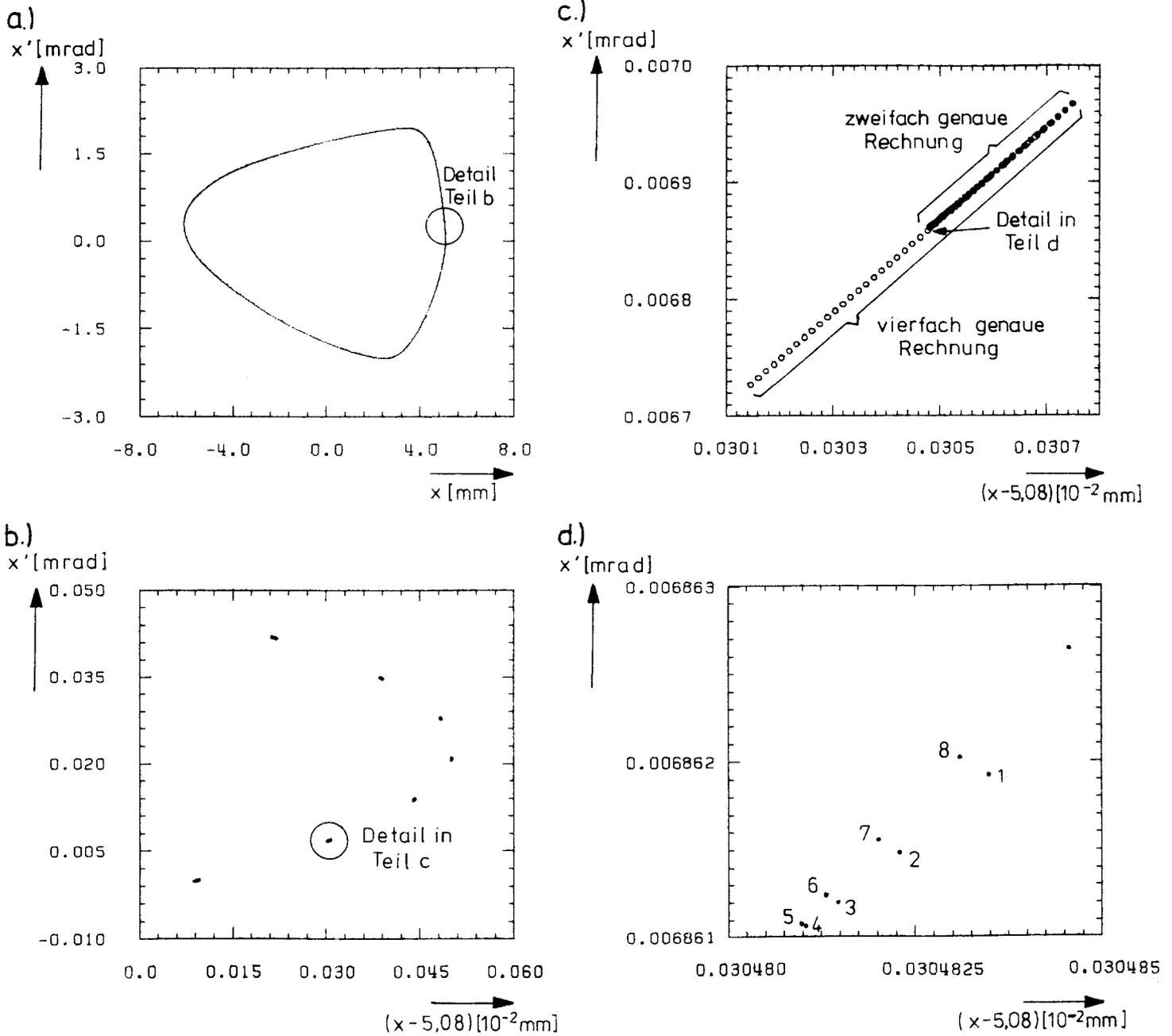
Zusammenfassend läßt sich also sagen, daß die Rundungsfehler einen starken Effekt tangential zu KAM-Tori haben, und zwar ein quadratisches Anwachsen des Fehlers in der Phase bewirken, während senkrecht zu diesen Tori sich nur eine minimale Abweichung, nämlich ein lineares Schrumpfen der Amplitude zeigt (siehe J. Greene /17/ mit ähnlichen Ergebnissen).

Petra Wilhelm hat zwei- und vierdimensionale Fälle untersucht. Die Ergebnisse lassen sich aber auch auf den sechsdimensionalen Fall mit Synchrotronschwingungen übertragen, auch in diesem Fall wachsen die Rundungsfehler quadratisch mit der Umlaufzahl an und wieder sind dies im wesentlichen Fehler in der Phase.

3.3.3 Auswirkungen der Rundungsfehler auf die Bewegung im Phasenraum

3.3.3.1 Reguläre Bewegung auf einem KAM-Torus

Als erstes möchte ich die Auswirkungen der Rundungsfehler auf die reguläre Bewegung auf einem KAM-Torus demonstrieren. Figur 3.1a zeigt die horizontale Phasenraumprojektion einer zweidimensionalen Bewegung. In den Figuren 3.1b-d werden sukzessiv kleinere Ausschnitte aus diesem Phasenraum dargestellt. Figur 3.1c nimmt die vierfach genaue Rechnung (mit o gekennzeichnet) die volle Diagonale ein, während bei der zweifach genauen Rechnung (mit • gekennzeichnet) nur etwa die Hälfte der Diagonalen überstrichen wird. Ein Detailausschnitt (Teil d) von Figur 3.1c zeigt zudem, daß bei der zweifach genauen Rechnung ein Umkehrpunkt (instabiler Fixpunkt) erreicht wird, so daß im folgenden die Einträge in umgekehrter Richtung auf der Diagonalen eingetragen werden. In diesem Beispiel läßt sich also der große Rundungsfehler in der Phase deutlich erkennen, während nur eine minimale Reduktion der Amplitude auftritt. Die mittlere Reduktion a der Amplitude pro Umlauf soll nun bestimmt werden.



Figur 3.1: Auswirkung von Rundungsfehlern auf die reguläre Bewegung auf einem KAM-Torus

Teil a zeigt die ganze horizontale Phasenraumprojektion. Teil b zeigt einen Ausschnitt. In Teil c ist der Vergleich der zweifach genauen mit vierfach genauen Rechnung zu sehen, wobei wiederum ein Ausschnitt von Teil b betrachtet wird. Deutlich ist der große Fehler in der Phase zu erkennen, während die Amplitude nur minimal reduziert wird. Teil d zeigt neun Einträge der zweifach genauen Rechnung aus Teil c. Damit (siehe Text) läßt sich die mittlere Reduktion der Amplitude pro Umlauf berechnen.

Dazu wird der Abstand vom Eintrag 8 in Figur 3.1d zur Verbindungslinie vom Eintrag 1 und 2 (in Figur 3.1d) bestimmt.

$$\Delta x = -9.598 \times 10^{-9} \text{ mm}$$

$$d \approx \sqrt{x^2 + \beta_x^2 x'^2} \approx 9,642 \times 10^{-9} \text{ mm}$$

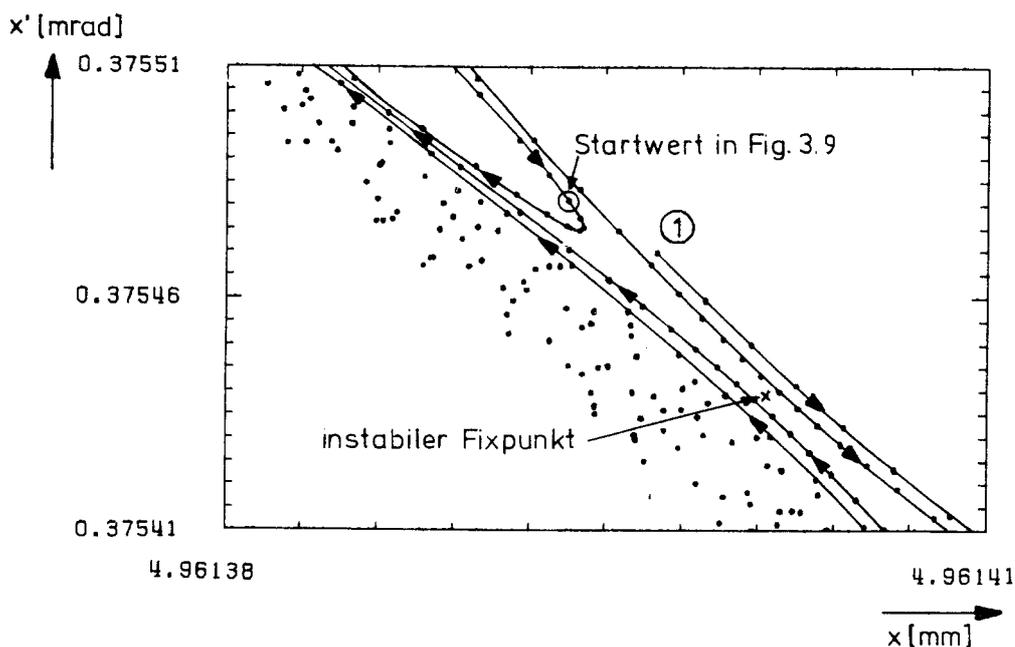
$$\Delta x' = 3.13 \times 10^{-10} \quad (3.7)$$

Da alle NE = 1162 Umläufe ein Eintrag in Figur 3.1d erfolgt und der Abstand nach NU = 7 Einträgen berechnet wurde, läßt sich die Reduktion a berechnen (vergleiche (3.4)): mit $\bar{A}_{x_0} = 5.08 \text{ mm}$

$$a = - \frac{d}{NE \cdot NU \cdot \bar{A}_{x_0}} \approx - 2.33 \times 10^{-13} \quad (3.8)$$

3.3.3.2 Reguläre Bewegung in der Nähe eines instabilen Fixpunktes

In der Nähe der Separatrix und des instabilen Fixpunktes gibt es verschiedene Bewegungsformen wie bei einem Pendel: Schwingungen entsprechen einer Bewegung auf Inselstrukturen und Rotationen entsprechen Bewegung auf unaufgebrochenen KAM-Linien um die Inselstruktur herum. Der Startpunkt einer regulären Trajektorie liege außerhalb der Separatrix (siehe Figur 3.2) und in unmittelbarer Nähe zum instabilen Fixpunkt. Durch die Reduktion a der Amplituden (3.8) wird die Separatrix überquert. Die Bewegung verläuft dann auf Inseln, bis erneut die Separatrix zu kleineren Amplituden hin überschritten wird.



Figur 3.2: Auswirkung von Rundungsfehlern auf die Bewegung in der Nähe eines instabilen Fixpunktes

Durch Rundungsfehler wird die Bewegung, die zunächst außerhalb der Fixpunktstruktur verläuft (Eintrag ① ist der Startpunkt der Simulationen), hin zu einer Bewegung um die stabilen Fixpunkte verschoben. Schließlich wird die Amplitude weiter reduziert, so daß die Bewegung innerhalb der Fixpunktstruktur verläuft. Eingetragen ist zudem der Startpunkt für die Simulation mit der Rundungsfehlerkorrektur.

Mit der oben bestimmten relativen Amplitudenreduktion a (3.8) einem typischen Amplitudenwert von $\tilde{A}_{x_0} \approx 5$ mm und einer Umlaufzahl von $N_0 = 10^5$ läßt sich eine Grenze d_G bestimmen, bis zu der es Sinn macht, Details im Phasenraum zu untersuchen:

$$d_G = a N_0 \tilde{A}_{x_0} \approx 10^{-7} \text{ mm} \quad (3.9)$$

Solange also Phasenraumbereiche untersucht werden, die groß gegen d_G sind, läßt sich ein Wechseln der Bewegungsformen einer Trajektorie nicht beobachten.

Dies hat auch Konsequenzen für die Beurteilung von chaotischer Bewegung. Ist chaotische Bewegung eingeschränkt auf einen Bereich der kleiner als d_G ist, so läßt sich diese chaotische Bewegung mit zweifacher Genauigkeit nicht mehr nachweisen. Da die Rundungsfehler stets eine Reduktion der Amplituden bewirken (3.8), kann der bloße Wechsel der Bewegungsformen durch die Rundungsfehler leicht von einem chaotischen Verhalten unterschieden werden. Denn eine chaotische Trajektorie pendelt zwischen den verschiedenen Bewegungsformen hin und her, also erreicht abwechselnd kleine und große Amplituden.

3.3.3.3 Chaotische Bewegung

Bisher sind nur Rundungsfehler in regulären Simulationsläufen untersucht worden. In den nächsten beiden Beispielen möchte ich nun demonstrieren, daß sich die Rundungsfehler in chaotischen Fällen exponentiell entwickeln.

Als erstes möchte ich einen Fall untersuchen, bei dem schon nach wenigen Umläufen der ungebundene Bereich erreicht ist. Für die gewählte Anfangsbedingung ist sowohl vorwärts als auch rückwärts simuliert worden in doppelter und vierfacher Genauigkeit. Es zeigt sich, daß das Teilchen in beiden Bewegungsrichtungen schnell den ungebundenen Bereich erreicht. Tabelle 3.1 enthält die Anzahl der Umläufe bis das Teilchen den ungebundenen Bereich erreicht.

Bewegungsrichtung	zweifache Genauigkeit	vierfache Genauigkeit
vorwärts	506	507
rückwärts	304	304
504 Umläufe vorwärts, dann Umkehrung der Bewegungsrichtung	1530	1312

Tabelle 3.1: Anzahl der Umlaufzahl bis zum Teilchenverlust in zweifach und vierfach genauer Rechnung

In Vorwärts- und Rückwärtsrichtung sind die Umlaufzahlen bis zum Teilchenverlust fast gleich. Bei einer Umkehr der Bewegungsrichtung nach 504 Umläufen bleibt bei zweifach genauer Rechnung das Teilchen erheblich länger im gebundenen Bereich, als es der Summe $1008+304=1312$ entspricht. Die vierfache Genauigkeit reicht aber aus, diese Anzahl zu reproduzieren. In Figur 3.3 sind die Rundungsfehler d_{2R} der beiden Genauigkeiten, bestimmt durch den Vergleich von Vorwärts- und Rückwärtssimulation, gezeigt. Der Verlauf der Kurven ist praktisch identisch, nur daß die vierfach genaue Rechnung um den Faktor $2^{56} \approx 7,2 \times 10^{16}$ kleinere Abweichungen zeigt, die auf die um 56 Bit längere Mantisse zurückzuführen ist (siehe auch P. Wilhelm /16/).

Figur 3.4 zeigt für die beiden Genauigkeiten den Anstieg des Abstandes im Phasenraum und die horizontale Phasenraumprojektion der Bewegung. Bis auf einige Einträge kurz vor dem Erreichen des ungebundenen Bereiches der Bewegung ist die Übereinstimmung in der gezeigten Auflösung perfekt. Mit der Bestätigung des exponentiellen Anstiegs des Abstandes im Phasenraum kann man also davon ausgehen, daß es sich tatsächlich um chaotische Bewegung handelt. In Figur 3.5 wird schließlich bei zweifacher Genauigkeit gezeigt, daß nach etwa 300 Rückwärtssimulationen die Abstände im Phasenraum anfangen, auseinanderzulaufen und der Anfangsabstand nicht wieder erreicht wird. Die Symmetrie des Bildes läßt sich darauf zurückführen, daß beim Annähern an einen instabilen Fixpunkt durch Rundungsfehler statt eines kontrahierenden Arms der Separatrix ein divergierender (oder umgekehrt) erreicht wird.

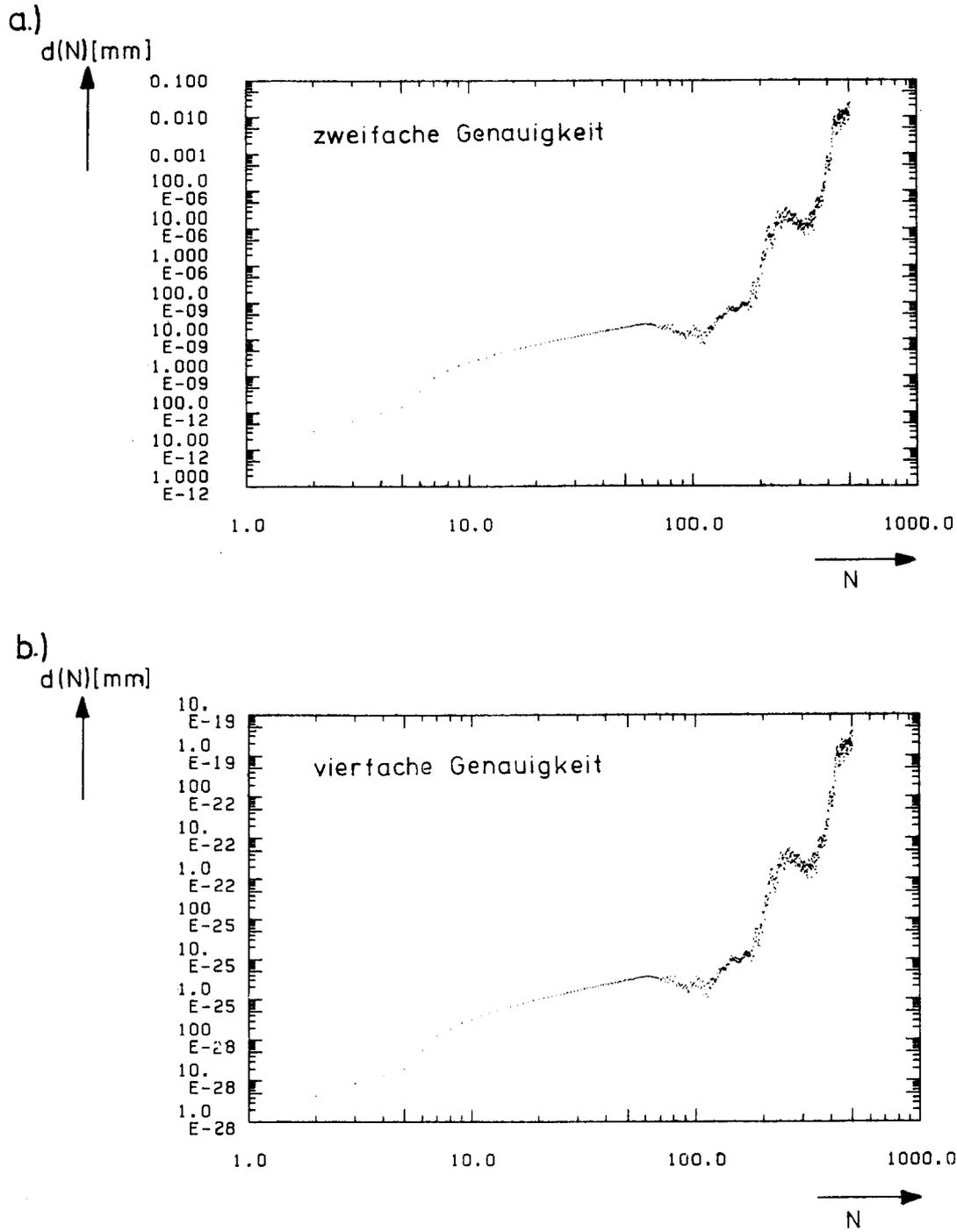
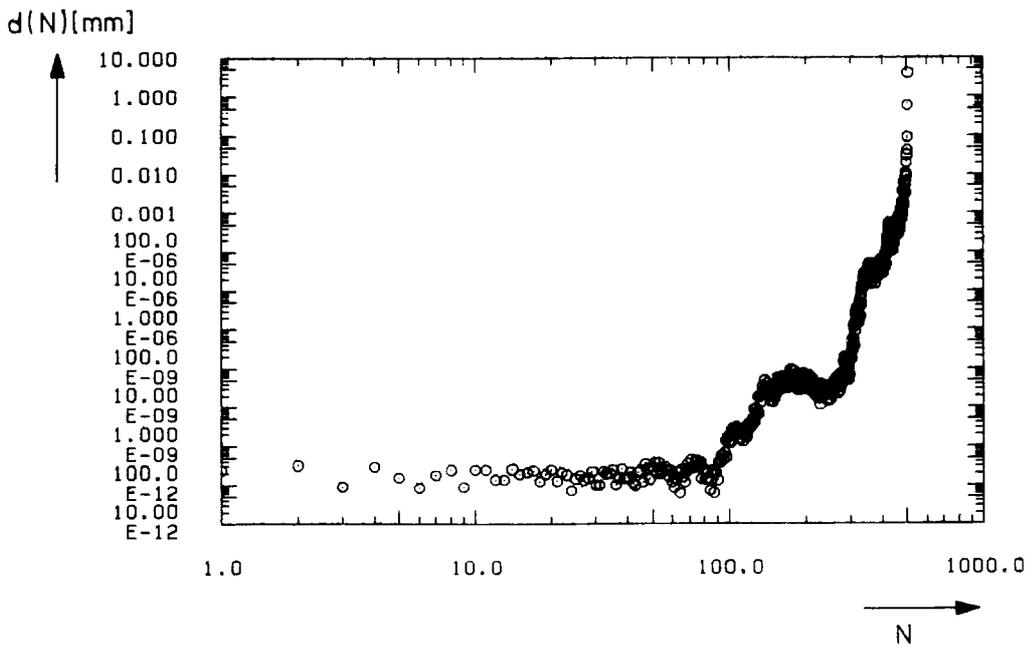


Fig. 3.3: Simulation von Vorwärts- und Rückwärtsbewegung

Aufgetragen ist die Differenz von Anfangs- und Endkoordinaten. Der Verlauf der Rundungsfehler in den beiden Genauigkeitsstufen ist qualitativ gleich, außer daß im vierfach genauen Fall die Fehler um den Faktor $7 \cdot 10^{16}$ kleiner sind, gemäß der um 56 Bit längeren Mantisse.

a.)



b.)

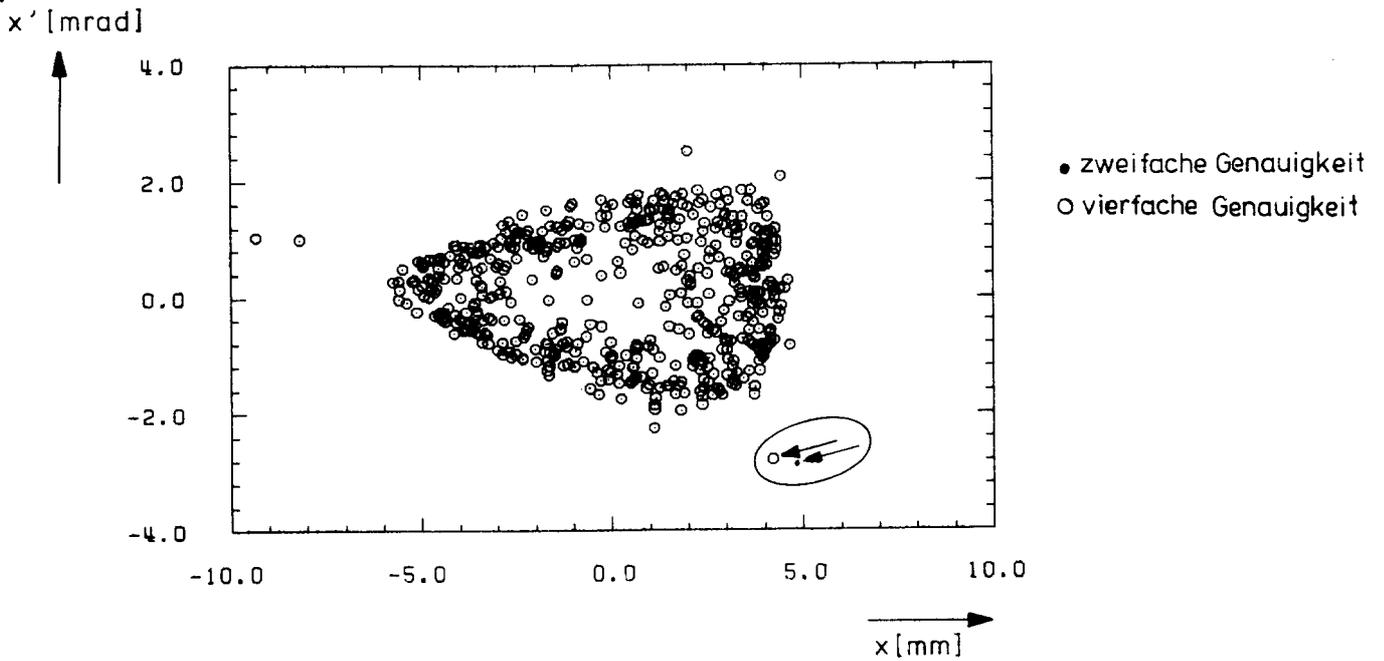


Fig. 3.4: Vergleich einer chaotischen Bewegung in zwei- und vierfach genauer Rechnung

Die Ergebnisse stimmen im Rahmen der gezeigten Auflösung überein, insbesondere der exponentielle Anstieg des Abstandes im Phasenraum (Teil a), was die chaotische Natur der Bewegung bestätigt. Erst bei großen Amplituden (siehe Pfeile) zeigen sich Abweichungen.

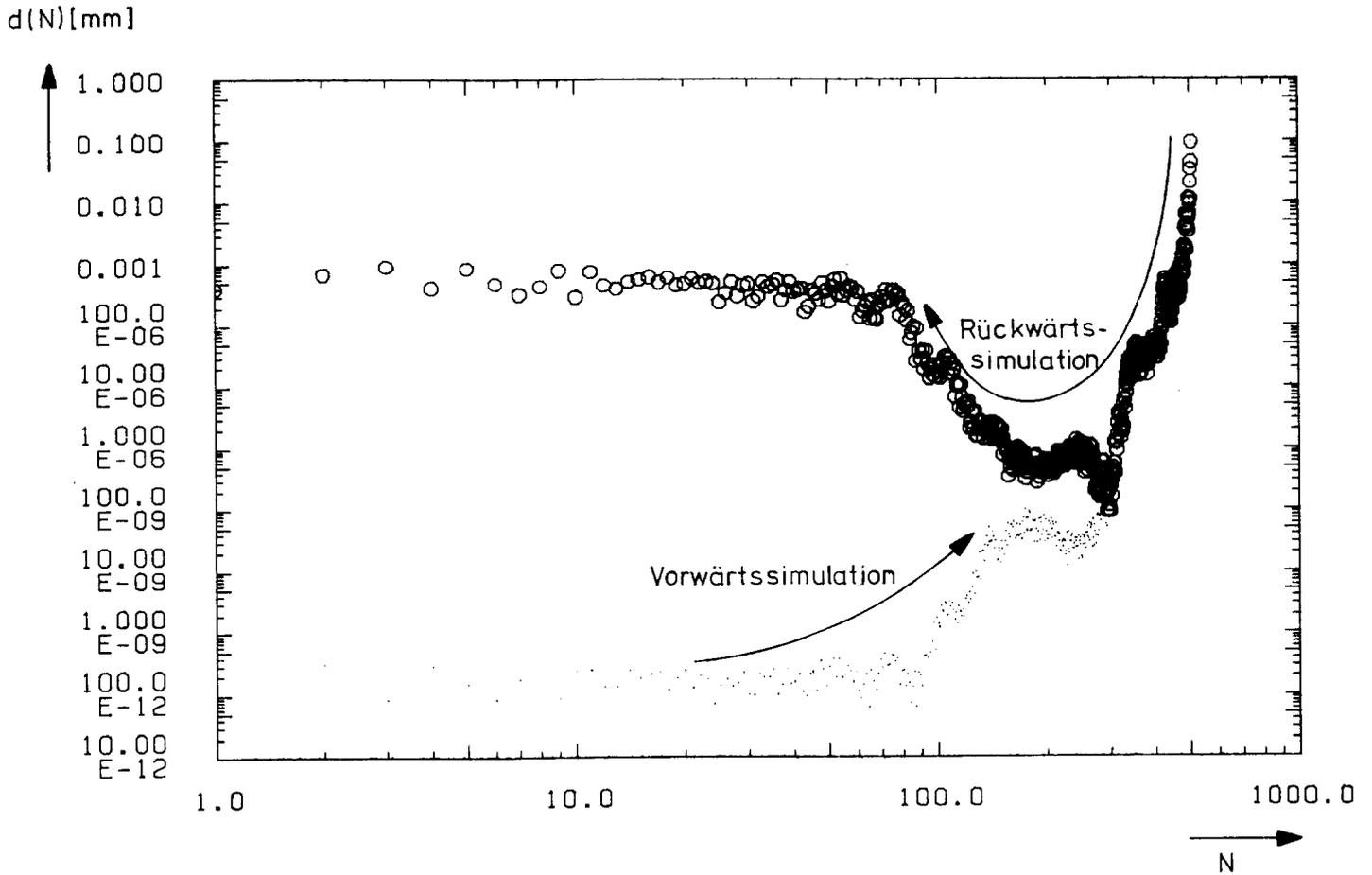
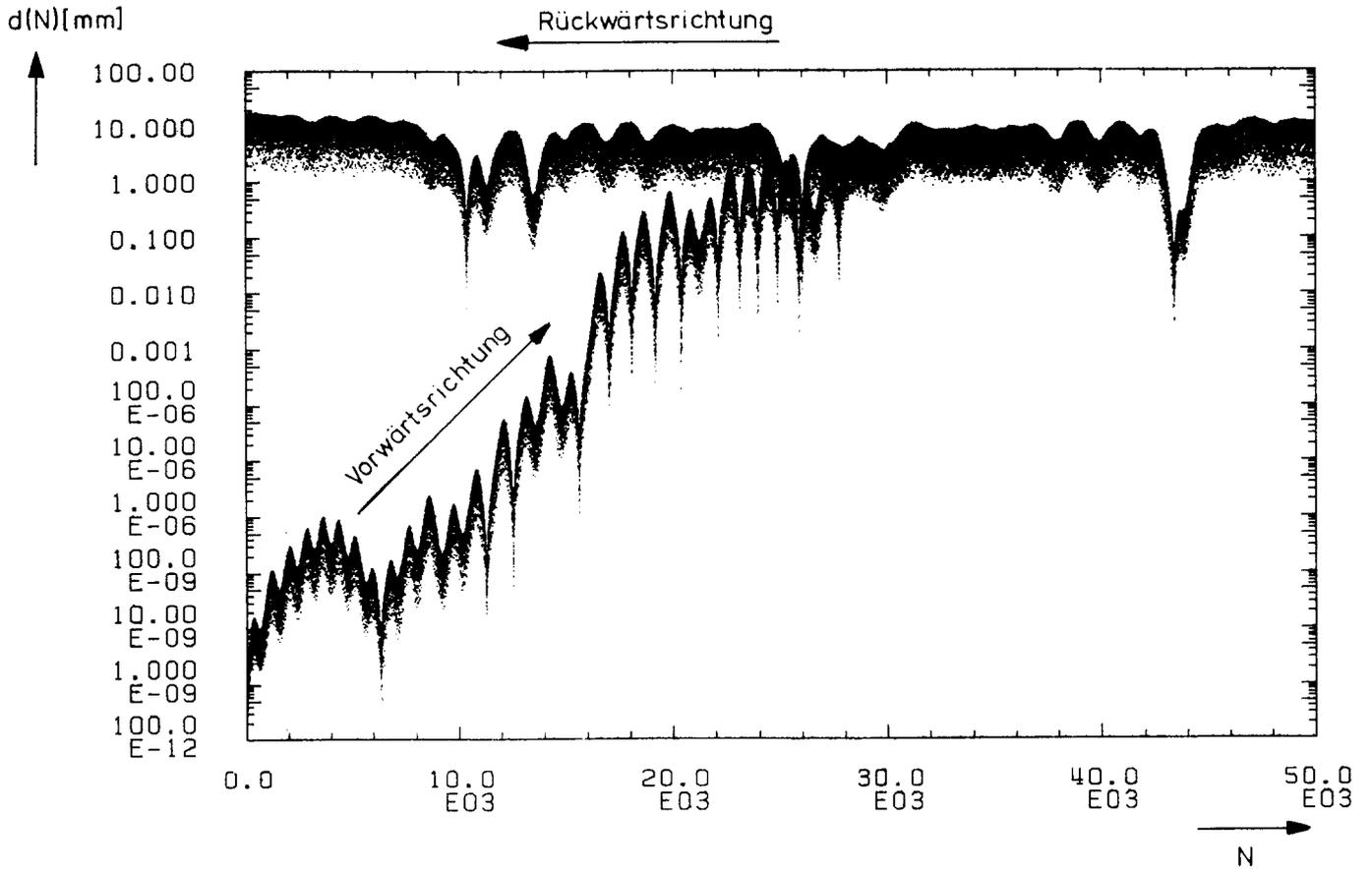


Fig. 3.5: Rückwärtssimulation bei zweifach genauer Rechnung

Bei der Rückwärtssimulation wird aufgrund von Rundungsfehlern ein kontrahierender statt eines expandierenden Arms (bzw. umgekehrt) einer Separatrix erreicht, so daß der ursprüngliche Abstand nicht wieder erreicht wird.

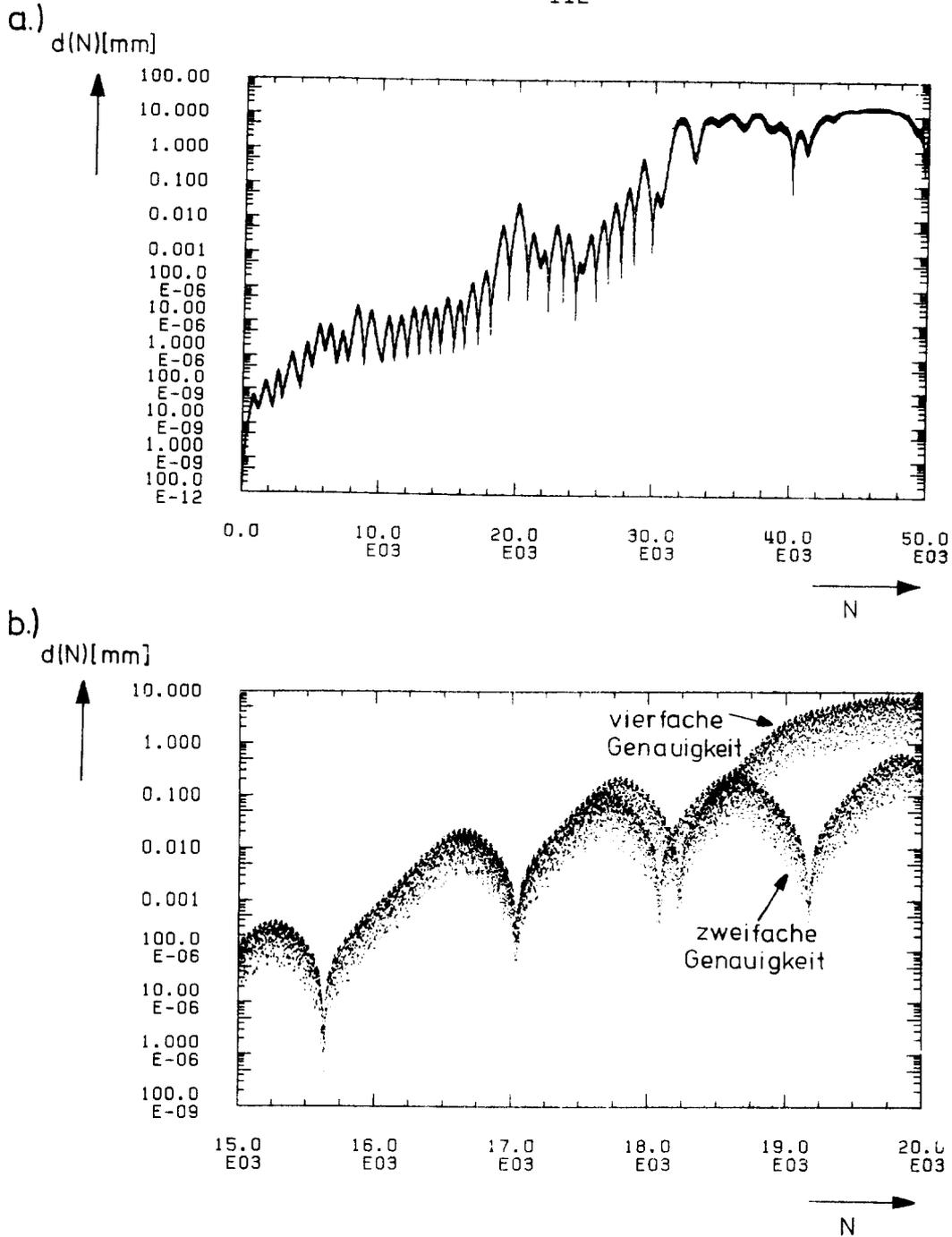
Als nächstes möchte ich einen chaotischen Fall behandeln, bei dem das Anwachsen des Abstandes im Phasenraum wesentlich langsamer verläuft. Erst nach ca. 30 000 Umläufen ist der maximale Phasenraumabstand erreicht und selbst nach 50 000 Umläufen ist der Bereich unbegrenzten Amplitudenwachstums noch nicht erreicht. Figur 3.6 zeigt das Anwachsen des Abstandes zweier zunächst eng benachbarter Teilchen im Phasenraum, nach 50 000 Umläufen wird die Bewegungsrichtung umgedreht und die Bewegung zurücksimuliert. Nach etwa 20 000 zurücksimulierten Umläufen zeigen sich Abweichungen vom Verlauf, so daß der ursprüngliche kleine Abstand nicht erreicht wird, sondern der Abstand im Sättigungsbereich bleibt. Die Entwicklung des Rundungsfehlers Figur 3.7a verläuft mit demselben Lyapunov-Exponente, so daß ebenfalls nach etwa 30 000 Umläufen der Sättigungswert erreicht ist. Dies hat wesentliche Konsequenzen: Da der Rundungsfehler exponentiell anwächst, ist nach einer bestimmten Umlaufzahl N_0 (hier 30 000 Umläufe) der maximale Phasenfehler erreicht, der im Mittel beibehalten wird. Mit Simulationen in chaotischen Bereichen können prinzipiell keine Aussagen über die Phasenlage des simulierten Teilchens gemacht werden, wenn die Umlaufzahl N_0 überschritten wird. Auch die Erhöhung der Rechengenauigkeit ist kein Ausweg (siehe Figur 3.3), denn nach ungefähr doppelt so großer Umlaufzahl ($2 N_0$) ist der Fehler in der Phase ebenfalls maximal. Einzig eine ungefähre mittlere Verweildauer im chaotischen Bereich läßt sich den Simulationen entnehmen.

Figur 3.7b zeigt schließlich im Vergleich von zwei- und vierfacher Genauigkeit, daß erst bei etwa 17 500 Umläufen deutliche Abweichungen im Anwachsen des Abstands im Phasenraum auftreten.



Figur 3.6: Effekt von Rundungsfehlern auf den Verlauf des Abstands im Phasenraum einer chaotischen Bewegung mit kleinem Lyapunov-Exponenten

Bei der Rückwärtssimulation entspricht der Verlauf bis etwa 20 000 Umläufen dem ursprünglichen. Dann zeigen sich Abweichungen, so daß der Abstand im Sättigungsbereich bleibt und der anfänglich kleine Abstand nicht erreicht wird.



Figur 3.7: Auswirkungen von Rundungsfehlern bei kleinem Lyapunov-Exponenten

Teil a zeigt die Entwicklung des Rundungsfehlers: nach etwa 30 000 Umläufen ist der maximale Rundungsfehler erreicht, nämlich dann, wenn der maximale Phasenraumabstand erreicht ist (vergleiche Figur 3.6). In Teil b ist der Verlauf des Abstands im Phasenraum für zwei und vierfache genaue Rechnung gezeigt. Erst nach etwa 17 500 Umläufen zeigen sich Abweichungen, so daß auch in diesem Fall die chaotische Natur der Bewegung bestätigt wird.

Die Ergebnisse der Fortpflanzung der Rundungsfehler in chaotischen Bereichen möchte ich noch einmal zusammenfassen: Rundungsfehler chaotischer Bewegung wachsen exponentiell an und zwar mit den gleichen Lyapunov-Exponenten, mit dem auch der Abstand im Phasenraum anwächst. Dieser Rundungsfehler ist wieder ein Fehler in der Phase; wenn der maximale Phasenfehler einmal erreicht ist, gibt es kein weiteres Anwachsen des Fehlers. In chaotischen Bereichen lassen sich also prinzipiell nach einer gewissen Umlaufzahl N_0 keine Aussagen über Phasenlagen eines Teilchens machen, da dazu unendliche Genauigkeit notwendig wäre.

Eine wichtige Frage ist, ob chaotische Bewegung sich auf Rundungsfehler zurückführen läßt. Ich möchte drei Punkte aufführen, die gegen diese These sprechen:

1. Die Rundungsfehler führen zu einer systematischen Reduktion der Amplituden, wodurch die Trajektorie verschiedene Bewegungsformen durchlaufen. Dies läßt sich aber leicht von chaotischem Verhalten unterscheiden. Denn chaotische Trajektorien pendeln zwischen diesen Bewegungsformen hin und her und erreichen nach unregelmäßigen Abständen immer wieder große und kleine Amplituden.
2. Die Nichtintegrität der Bewegung läßt sich am unstrukturierten Erscheinungsbild der Phasenraumprojektionen erkennen. Außerdem lassen sich die Einträge in den Phasenraumprojektionen bis zu einer bestimmten Umlaufzahl (vergleiche Figur 3.4b) mit erweiterter Rechengenauigkeit reproduzieren.
3. Das Kriterium für chaotische Bewegung (Kapitel 2 und nächster Abschnitt) ist ein von Null verschiedener Lyapunov-Exponent. Wie in beiden Beispielen gezeigt, läßt sich dieser Lyapunov-Exponent mit den beiden Rechengenauigkeiten gut reproduzieren.

3.3.4 Methoden zur Korrektur von Rundungsfehlern

Da es sich bei den Rundungsfehlern im wesentlichen um Fehler der Phasen handelt, während die Amplituden nur unwesentlich (3.8) reduziert werden, spielen diese Rundungsfehler bei Umlaufzahlen von $10^6 - 10^7$ sicher eine untergeordnete Rolle. Zumal für diese Arbeit hauptsächlich eine Akzeptanzbestimmung im Zehntelmillimeterbereich von Interesse ist. Für noch größere Umlaufzahlen und Detailuntersuchungen in der Nähe der Grenze d_G (3.9) kann es notwendig sein, diese Rundungsfehler zu verringern. Die einfachste Möglichkeit ist natürlich die Erhöhung der Rechengenauigkeit, von zwei- auf vierfache Genauigkeit. Es muß dann aber eine 20-fache Rechenzeit in Kauf genommen werden. Ich möchte deshalb ein Verfahren angeben, mit dem man zumindest bei regulärer Bewegung eine deutliche Verringerung der Rundungsfehler erzielen kann. Die einfachste Methode, die Rundungsfehler zu kompensieren, besteht darin, direkt den Determinantenfehler zu kompensieren. Die besten Ergebnisse erhielt ich dadurch, daß für jede Matrix eines Elementes die Determinante vierfach genau berechnet worden ist und jedes einzelne Matrixelement daraufhin durch den Determinantenwert dividiert worden ist.

$$\begin{aligned}
 |M^D| = \begin{pmatrix} M_{11}^D & M_{12}^D \\ M_{21}^D & M_{22}^D \end{pmatrix} &\xrightarrow[\substack{\text{4-fache} \\ \text{Genauigkeit}}]{\substack{\text{2-fache} \\ \text{auf}}} |M^V| = \begin{pmatrix} M_{11}^V & M_{12}^V \\ M_{21}^V & M_{22}^V \end{pmatrix} \Rightarrow \det(|M^V|) = (M_{11}^V M_{22}^V - M_{12}^V M_{21}^V) \\
 \Rightarrow \bar{M}_{ij}^V = \frac{1}{\det |M^V|} \cdot M_{ij}^V &\xrightarrow[\substack{\text{2-fache} \\ \text{Genauigkeit}}]{\substack{\text{4-fache} \\ \text{auf}}} \bar{M}_{ij}^D
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

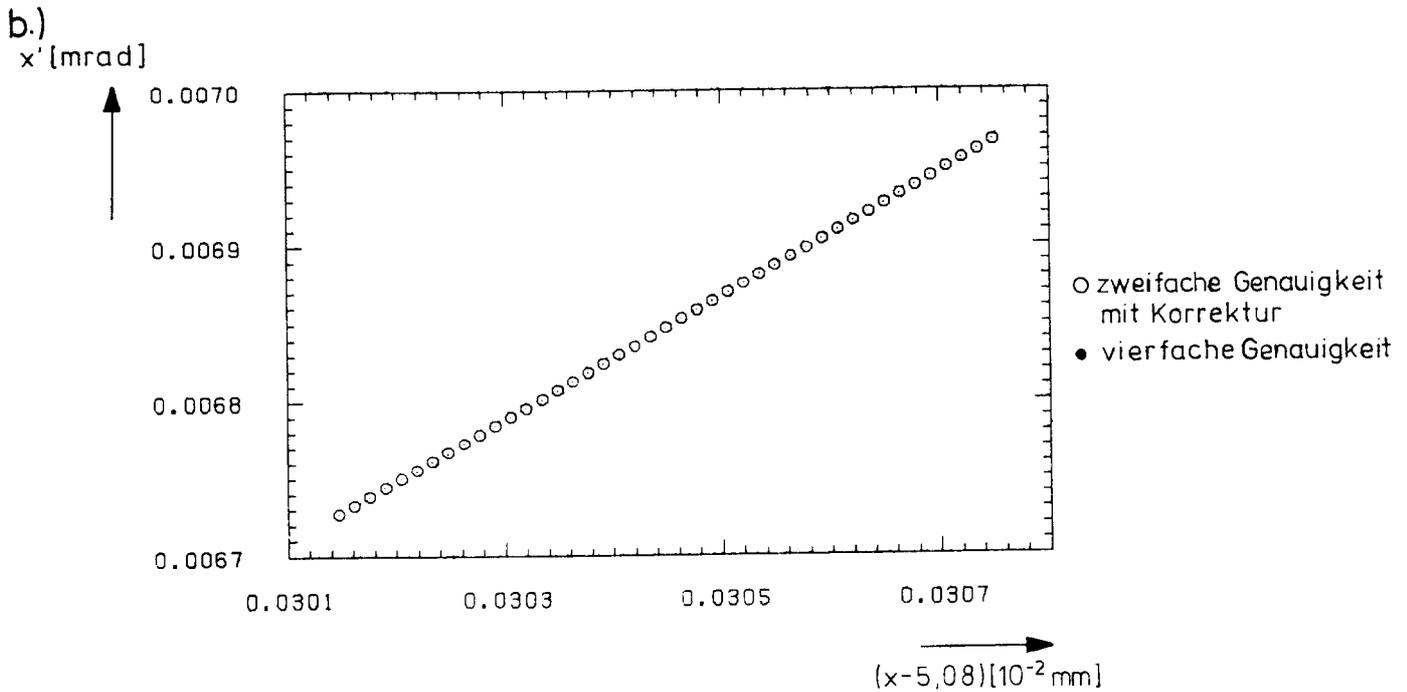
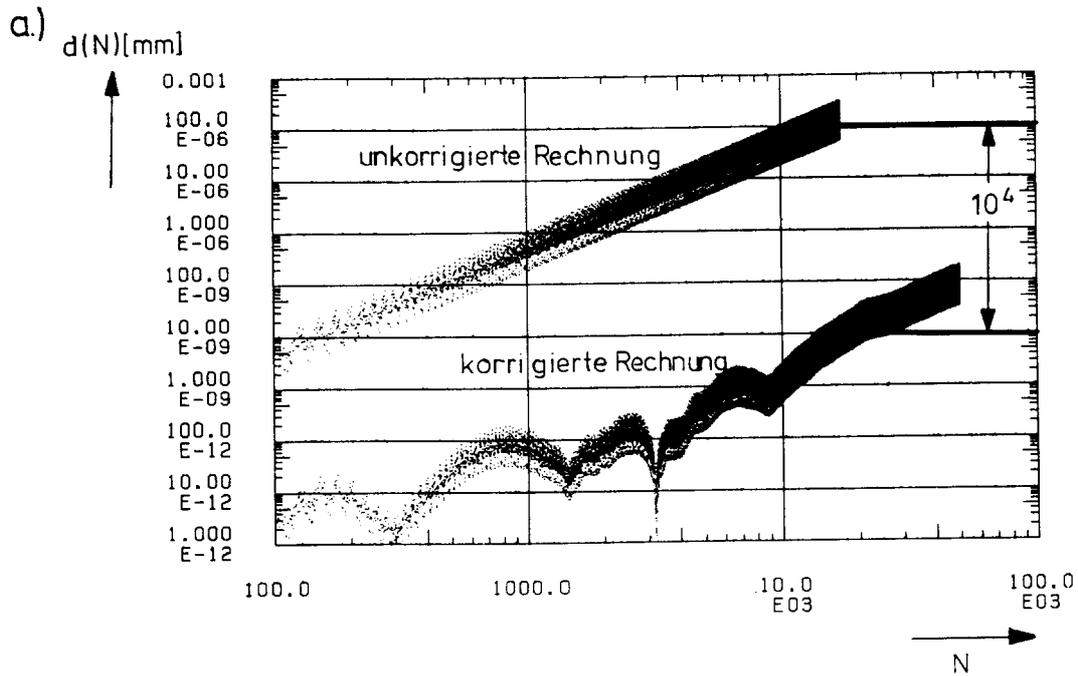
In Simulationen mit dieser Determinantenkorrektur läßt sich aber der Rundungsfehler lediglich um den Faktor 10 drücken. Dies hat zwei Gründe. Erstens entsteht natürlich bei der letzten Umwandlung von vierfacher auf zweifache Genauigkeit erneut ein Determinantenfehler.

Zweitens gibt es neben dem Determinantenfehler auch einen Phasenfehler, der durch das Abschneiden der Matrixelemente entsteht.* Um diesen zweiten Fehler im Programm zu berechnen, müßte man zunächst alle Matrixelemente vierfach genau bestimmen und diese dann in zweifache Genauigkeit überführen. Es verbliebe dann immer noch der erste Fehler. Statt dieser unpraktikablen Methode möchte ich ein heuristisches Verfahren vorstellen, mit dem man die Rundungsfehler um viele Zehnerpotenzen verringern kann, ohne vierfach genau rechnen zu müssen. Bei gegebenen Anfangsbedingungen werden zwei Parameter (a_c, ϕ_c) optimiert, a_c vergrößert die Amplitude eines Teilchens systematisch bei jedem Umlauf, während ϕ_c die Phase des Teilchens um einen festen Betrag dreht (siehe Anhang 3).

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{x}' \end{pmatrix} = a_c \begin{pmatrix} \cos \phi_c & \sin \phi_c \\ -\sin \phi_c & \cos \phi_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

Die Optimierung wird dadurch durchgeführt, daß sich bei einer Vorwärts- und Rückwärtssimulation von jeweils 1 000 Umläufen die Koordinaten möglichst wenig unterscheiden. Figur 3.8a zeigt die Rundungsfehler mit und ohne Korrektur des Beispiels mit regulärer Bewegung in Figur 3.1. Mit der Korrektur erscheint der Verlauf der Rundungsfehler zunächst statistisch (auch der Anstieg ist geringer als quadratisch), bis sich schließlich ein quadratisches Anwachsen einstellt. Dies läßt darauf schließen, daß ein kleiner Rest des systematischen Effekts letztlich den Anstieg bestimmt. Insgesamt ist aber eine Verbesserung der Rundungsfehler um den Faktor 10^4 erzielt worden. Natürlich muß sich diese Verbesserung auch im Phasenraum zeigen. Tatsächlich liegen die Einträge der korrigierten Rechnung (o in Figur 3.8b) innerhalb der Auflösung exakt auf denen der vierfach genauen Rechnung (• in Figur 3.8b) von Figur 3.1c. Damit ist gezeigt, daß es sich bei den Rundungsfehlern tatsächlich um einen systematischen Effekt handelt, der ebenso systematisch kompensiert werden kann. Eine empirische Bestimmung von (a_c, ϕ_c) über lediglich 1000 Umläufe ermöglicht also eine Verbesserung des Rundungsfehlers

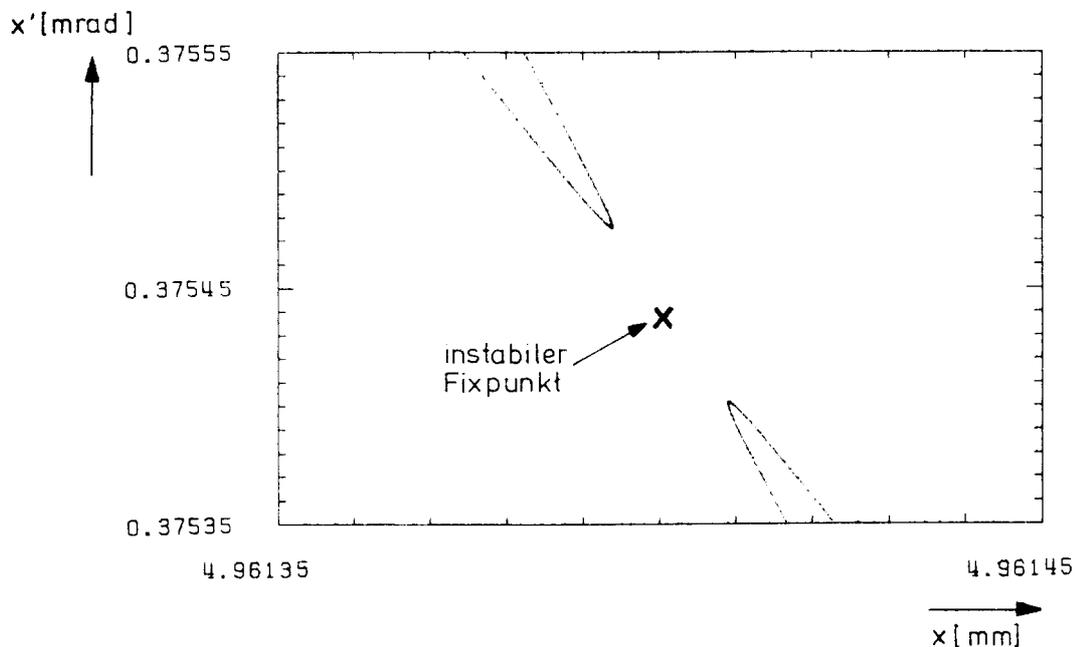
*) Es reicht also in unserem Fall nicht, lediglich den Determinantenfehler und somit die Abweichung von der Symplektizität zu korrigieren (wie bei Furmann /18/). Wie zusätzlich der Phasenfehler im zweidimensionalen Fall korrigiert wird, ist im Anhang 3 gezeigt.



Figur 3.8: Korrektur von Rundungsfehlern

Nach dem Korrekturverfahren (siehe Text) sind die Rundungsfehler um den Faktor 10^4 reduziert (Teil a). Nach der Korrektur entspricht die korrigierte Rechnung (mit o gekennzeichnet) innerhalb der Auflösungsgrenze der vierfach genauen Rechnung (mit • gekennzeichnet)(vergleiche Figur 3.1c).

um 10^4 bei 50 000 Umläufen, da die Rundungsfehler quadratisch weiterwachsen, wird es natürlich ab einer bestimmten Umlaufzahl wieder Abweichungen von der vierfach genauen Rechnung geben. Das Verfahren ist allerdings aufwendig und hat den Nachteil, daß die Parameter (a_c, ϕ_c) abhängig sind von den Koordinaten, der Rechengenauigkeit und der Rechenmaschine. Sie ist deshalb nur für besondere Fälle anzuwenden, wenn man z.B. Detailuntersuchungen im Phasenraum machen möchte und nicht vierfach genau rechnen kann. Als Beispiel möchte ich die reguläre Bewegung in der Nähe eines instabilen Fixpunktes wählen, bei dem der Einfluß der Rundungsfehler (Figur 3.2) oben untersucht wurde. Ein Eintrag in Figur 3.2 ist als Startwert verwendet worden. Mit dem oben vorgestellten Korrekturverfahren für die Rundungsfehler ist mit diesem Startwert ein neuer Simulationslauf durchgeführt worden. Figur 3.9 zeigt, daß die Bewegung nun auf der regulären Inselstruktur verläuft und keine Veränderung durch Rundungsfehler mehr auftreten. Dieses Korrekturverfahren ist bisher nur in zwei Dimensionen (Dimensionszahl der Poincaréflächen) angewendet worden, es läßt sich aber leicht auf höhere Dimensionen erweitern.

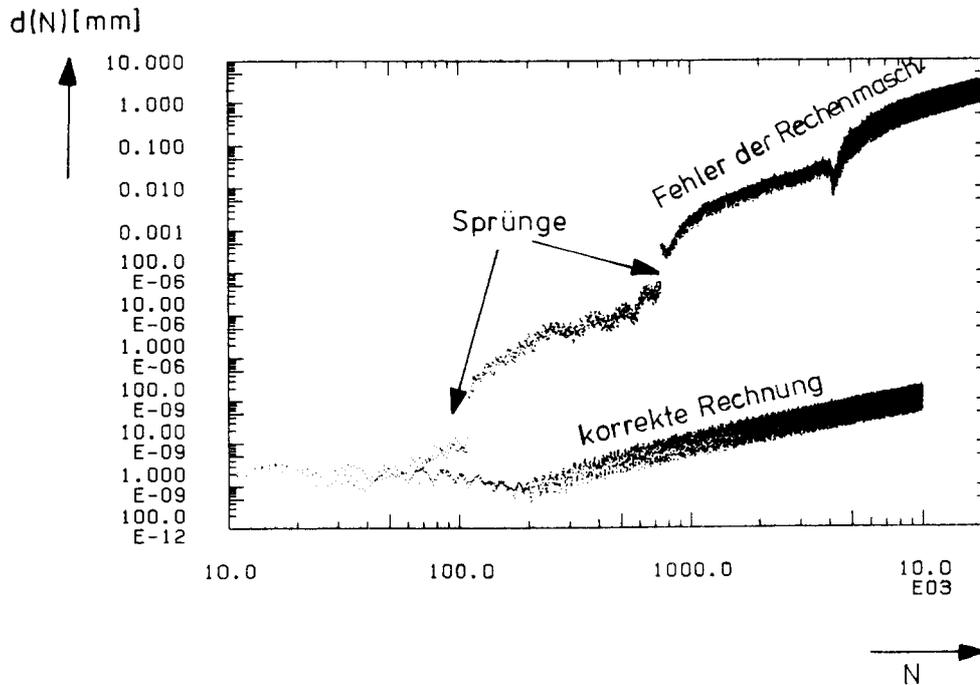


Figur 3.9: Simulation mit Rundungsfehlerkorrektur

3.3.5 Erratische Fehler der Rechenmaschine

Neben den unvermeidlichen systematischen Rundungsfehlern ist es bei Rechenzeiten in der Größenordnung von Wochen notwendig zu untersuchen, ob die verwendete Rechenmaschine über so große Zeiten stabil bleibt. Mit dem Auftragen des Abstandes im Phasenraum als Funktion von N (siehe Kapitel 3.4) gibt es die Möglichkeit, selbst kleine Fehler der Rechenmaschine aufzufinden.

Bei einer an sich regulären Bewegung zeigen sich unphysikalische Sprünge im Verlauf des Abstandes im Phasenraum (Figur 3.10).



Figur 3.10: Fehler der Rechenmaschine

An unphysikalischen Sprüngen des Abstandes im Phasenraum lassen sich Fehler der Rechenmaschine aufdecken, die sehr klein sind und erst nach Minuten oder Stunden Rechenzeit auftreten.

Dabei sind die Fehler jedoch so klein, daß nach deren Auftreten richtig weitergerechnet wird. Die Phasenraumbilder zeigen keine großen Veränderungen, so daß man auf einen chaotischen Fall mit kleinem Lyapunov-Exponenten schließen könnte. Tatsächlich konnten die Sprünge auf Timing-Probleme der Rechenmaschine zurückgeführt werden. Bemerkenswert ist dabei, daß die Fehler nicht mit den Testprogrammen gefunden wurden, da diese Fehler erst nach Minuten oder Stunden ununterbrochener Rechenzeit auftraten.

3.4 Numerische Berechnung des charakteristischen Lyapunov-Exponenten

In Kapitel 2.2.3 ist der charakteristische Lyapunov-Exponent als Unterscheidungsmerkmal von regulärer und chaotischer Bewegung eingeführt worden. In diesem Abschnitt wird gezeigt, wie sich der Lyapunov-Exponent numerisch bestimmen läßt. Hier zunächst noch einmal die Definition des charakteristischen Lyapunov-Exponenten (2.16):

$$L = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ d_0 \rightarrow 0}} \left[\frac{1}{N} \ln \left(\frac{d(N)}{d_0} \right) \right] \quad d_0 = d(N=0) \quad (3.12)$$

Es werden zwei numerische Methoden vorgestellt. Bei der ersten Methode wird der Abstand $d(N)$ als Funktion der Umlaufzahl N aufgetragen, bei linearem Anwachsen des Abstandes handelt es sich um reguläre Bewegung, während ein exponentielles Wachsen chaotische Bewegung anzeigt. In der zweiten Methode wird durch wiederholte Rücknormierung des Abstandes nach festen Umlaufzahlen ein mittlerer Wert für den Lyapunov-Exponenten gewonnen. Die zweite Methode liefert somit genauere Zahlenwerte für den Lyapunov-Exponenten. In dieser Arbeit ist jedoch die erste Methode verwendet worden. Denn zur Bestimmung einer Akzeptanzgrenze reicht die bloße Unterscheidung von regulärer und chaotischer Bewegung und dies läßt sich mit der ersten Methode einfacher und zuverlässiger durchführen. Außerdem können mit der ersten Methode Fehler der Rechenmaschine aufgedeckt werden (siehe Abschnitt 3.3.5).

3.4.1 1. Methode - Untersuchung des Abstandes im Phasenraum

3.4.1.1 Definition

Die einfachste Methode zur Bestimmung des Lyapunov-Exponenten besteht darin, den Abstand zwischen zwei zunächst eng benachbarten Zwillingsteilchen bei jedem Umlauf zu bestimmen und gegen N aufzutragen; in vier Dimensionen gilt (sechsdimensionale Fälle weiter unten):

$$d(N) = \sqrt{(x_1(N) - x_2(N))^2 + (x'_1 - x'_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 + (z'_1 - z'_2)^2} \quad (3.13)$$

Figur 3.11a zeigt ein typisches Beispiel des Abstandes im regulären Fall. Die großen Schwankungen lassen sich auf zwei Ursachen zurückführen. Erstens ist der Abstand in Gleichung (3.13) nicht im normierten Phasenraum bestimmt worden. Figur 3.11b zeigt die Verringerung der Schwankungen, wenn die einzelnen Koordinaten normiert werden:

$$d(N)_{\text{Norm}} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{x_{\text{max}}}\right)^2 + \left[\frac{1}{x_{\text{max}}} (\beta_x \Delta x' + \alpha_x \Delta x)\right]^2 + \left(\frac{\Delta z}{z_{\text{max}}}\right)^2 + \left[\frac{1}{z_{\text{max}}} (\beta_z \Delta z' + \alpha_z \Delta z)\right]^2} \quad (3.14)$$

Der Rest der Schwankungen ist auf die Deformationen des KAM-Torus der Bewegung im Phasenraum durch die Nichtlinearitäten zurückzuführen. Besonders deutlich wird dies, wenn die Bewegung in die Nähe eines instabilen Fixpunktes führt. Figur 3.12 zeigt eine Bewegung, bei der ein instabiler Fixpunkt fast erreicht wird, dabei nimmt der Abstand zwischen beiden Teilchen um sechs Zehnerpotenzen ab. Es gibt zwei Möglichkeiten, diese Ortsabhängigkeit des Abstandes zu unterdrücken. Zum einen kann man diese unterdrücken, indem die Entwicklung des Abstandes in einem bestimmten Bereich des Phasenraums betrachtet wird. Der Abstand wird nur dann bestimmt, wenn mindestens eines der Zwillingsteilchen innerhalb dieses Bereiches ist. In Figur 3.13 ist z.B. der Abstand auf einen sehr schmalen Bereich eingeschränkt worden, indem nur x-Koordinaten zwischen $5.0800 < x < 5.0806$ berücksichtigt worden sind. Zum anderen kann man natürlich durch Mittelung in Figur 3.14 über 10^3 und 10^4 Umläufe die Schwankungen beseitigen.

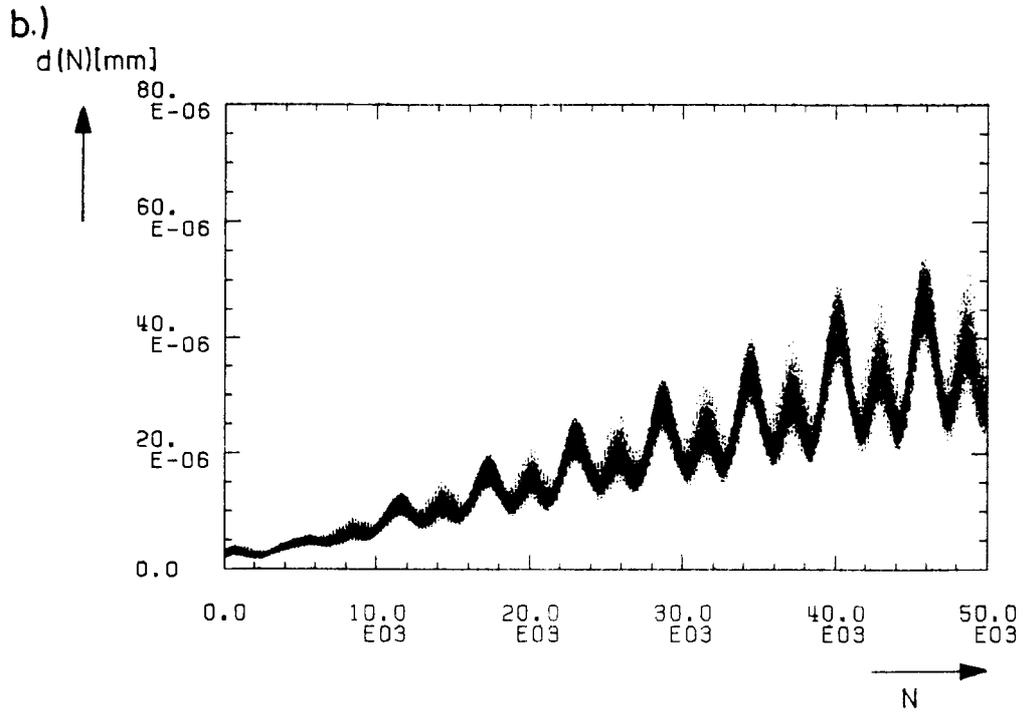
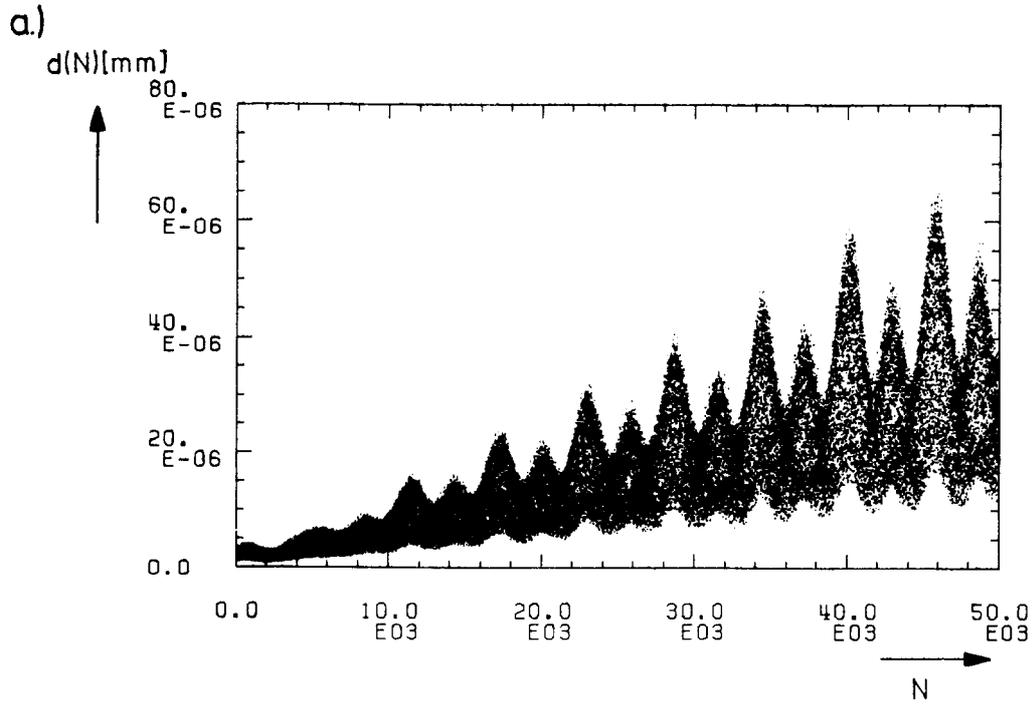
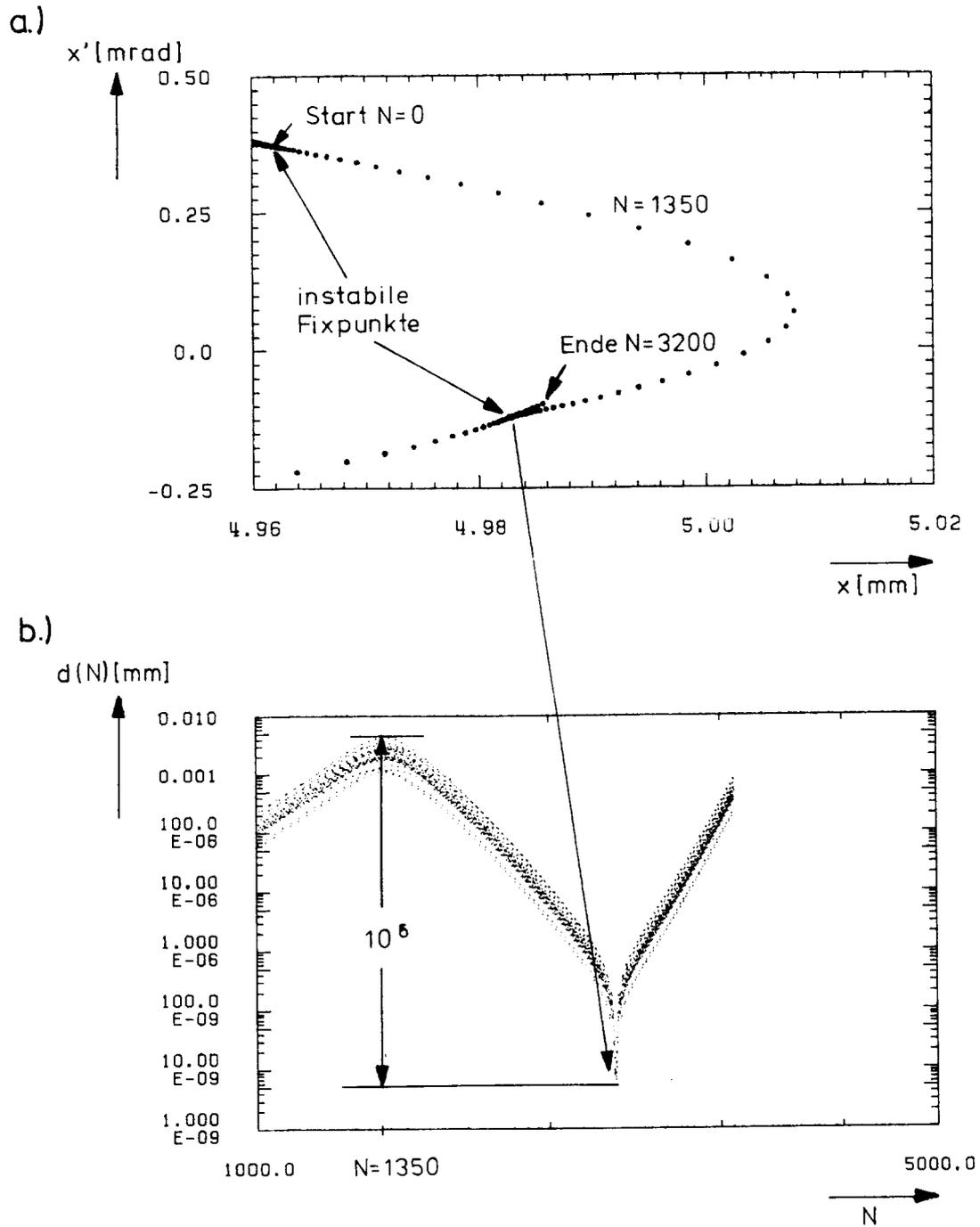
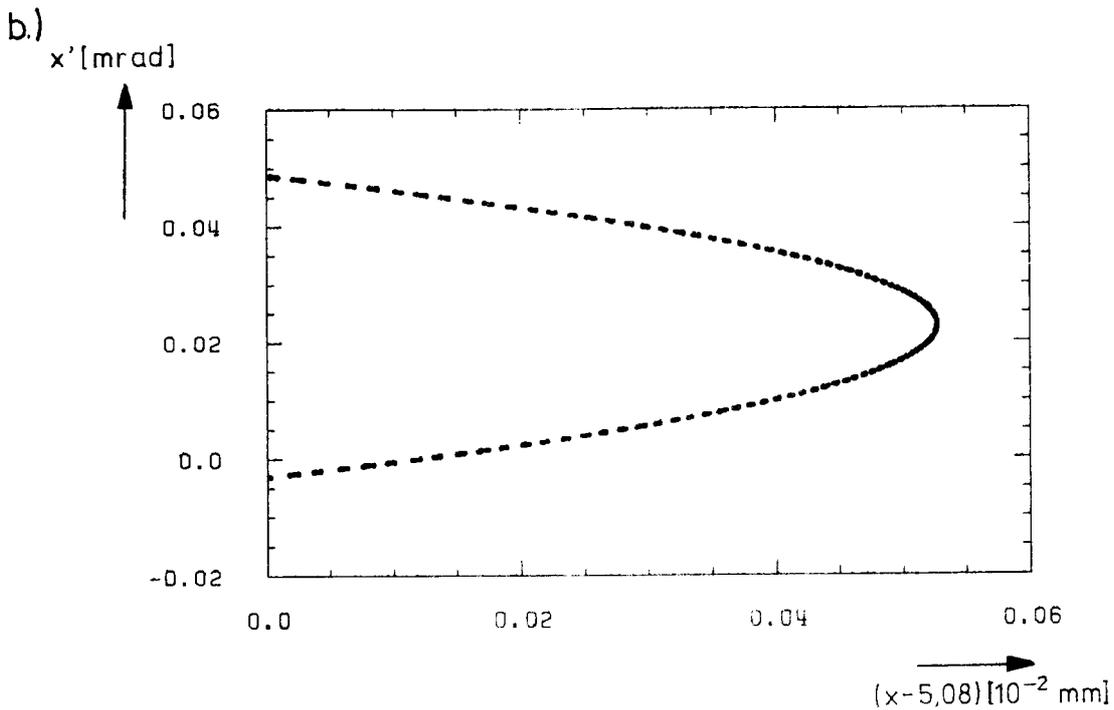
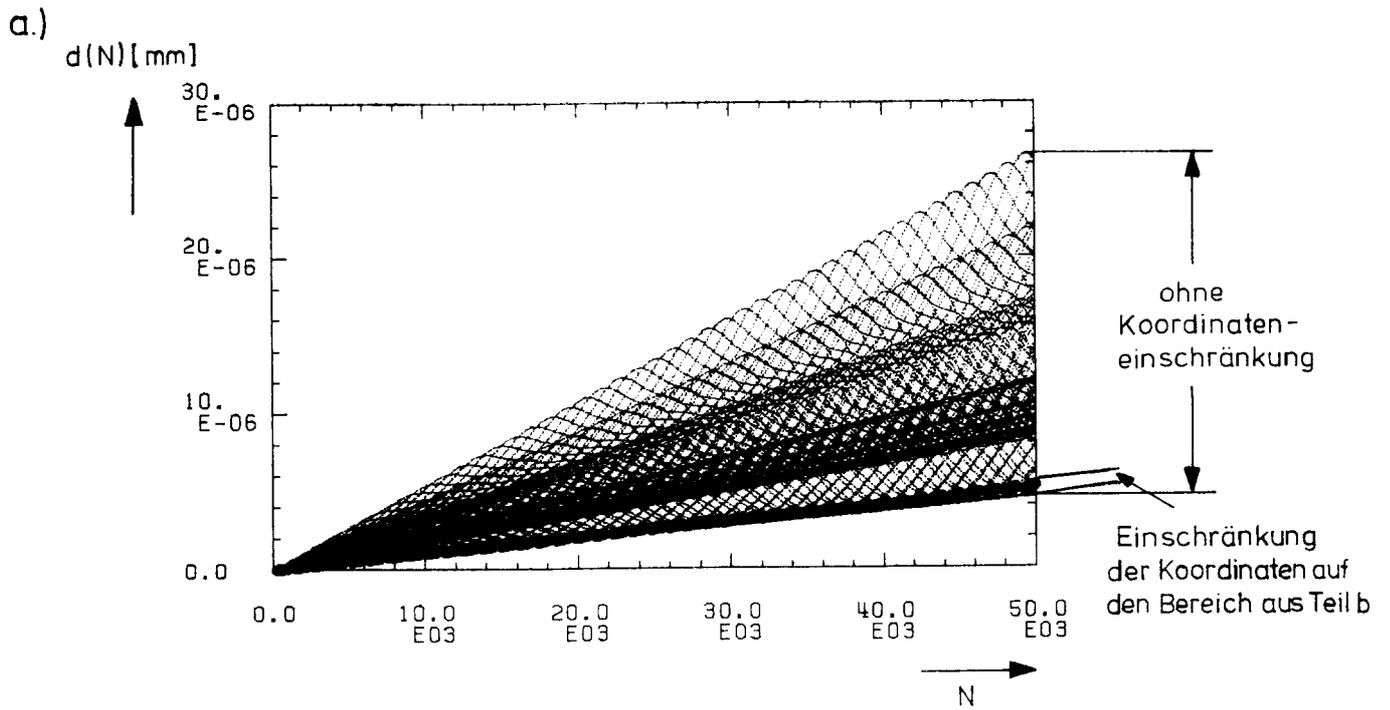


Fig. 3.11: Reduktion der Schwankungen des Abstandes im Phasenraum aufgrund der Normierung (3.14)



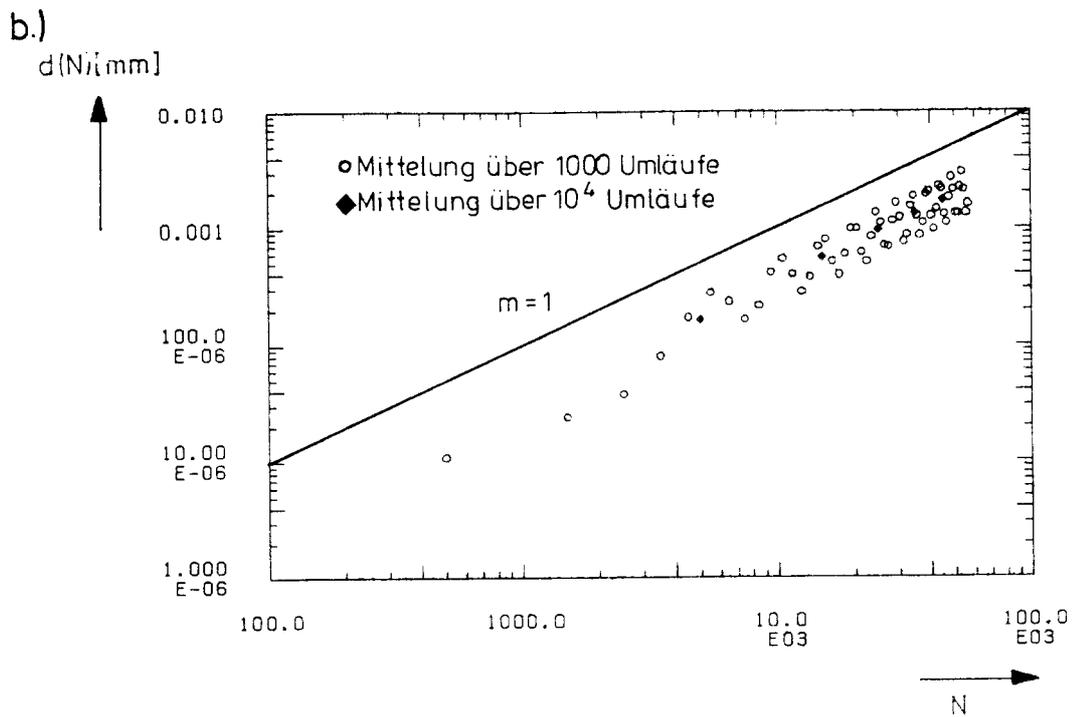
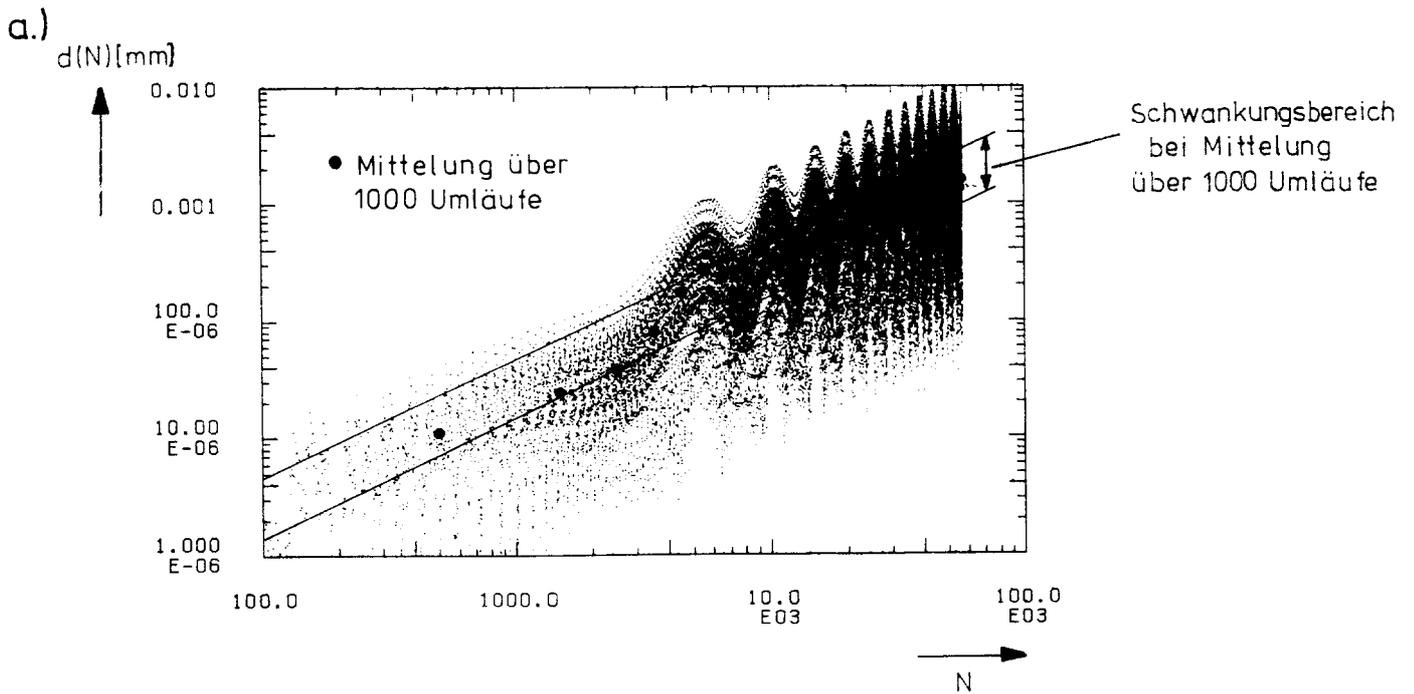
Figur 3.12: Abstand im Phasenraum in der Nähe eines instabilen Fixpunktes

Wird im Verlauf der Bewegung ein instabiler Fixpunkt annähernd erreicht, kann der Abstand um viele Zehnerpotenzen (in diesem Beispiel um 10^6) kleiner werden.



Figur 3.13: Reduktion der Schwankungen des Abstandes im Phasenraum durch eine Einschränkung auf einen gewissen Bereich im Phasenraum

Werden nur Einträge des Abstandes im Phasenraum betrachtet, wenn mindestens eines der Zwillingsteilchen sich in einen bestimmten Bereich im Phasenraum (Teil b) befindet, so lassen sich die Schwankungen des Abstandes im Phasenraum deutlich reduzieren.



Figur 3.14: Reduktion der Schwankungen des Abstandes im Phasenraum durch eine Mittelung

Durch Mittelung des Abstandes im Phasenraum über 10^3 bzw. 10^4 Umläufen (Teil b) lassen sich die Schwankung des Abstandes im Phasenraum (Teil a) reduzieren.

Den linearen Anstieg des Abstands im Phasenraum einer regulären Bewegung möchte ich noch etwas näher untersuchen. Betrachten wir dazu den Abstand d_0 der Trajektorien A und B in Figur 3.16. Dieser Abstand setzt sich aus zwei Anteilen zusammen: Einem Anteil senkrecht zum KAM-Torus d_{os} und einem parallelen Anteil d_{op} . Sei der Anfangsabstand so gewählt, daß $d_0 = d_{op}$ gilt, also kein senkrechter Abstand besteht und somit die Trajektorien A und B auf demselben KAM-Torus liegen. In diesem Falle wird der Abstand, außer einer Schwankung bedingt durch die Verformung des KAM-Torus der Bewegung im Phasenraum (siehe Figur 3.12), im Mittel konstant bleiben, denn auch die Q-Werte sind im Mittel konstant. In der Regel gilt jedoch: $d_{os} \neq 0$. Nun liegen die Trajektorien A und B auf unterschiedlichen KAM-Tori und somit sind aufgrund der amplitudenabhängigen Q-Werte auch die mittleren Q-Werte unterschiedlich. Es ergibt sich also eine mittlere Q-Werte-Differenz ΔQ .

$$\overline{\Delta Q} (d_{os}) = \overline{Q_{x_A}} - \overline{Q_{x_B}} \quad (3.15)$$

Diese mittlere Q-Werte-Differenz, welche von d_{os} abhängt, führt also zum mittleren linearen Anstieg des Abstandes im Phasenraum, wobei der senkrechte Anteil d_s im Mittel konstant bleibt, während der parallele Anteil d_p im Mittel anwächst.

$$\begin{aligned} \overline{d_s(N)} &= \text{konstant} \\ \overline{d_p(N)} &= \bar{a} (\overline{\Delta Q}) N + d_{op} \end{aligned} \quad (3.16)$$

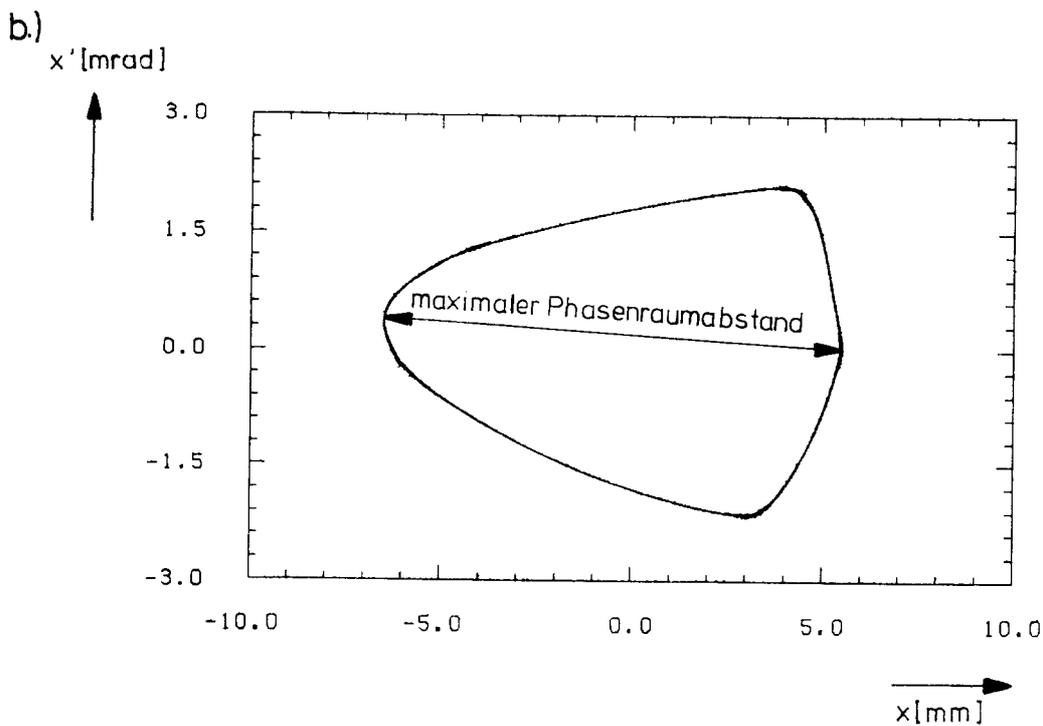
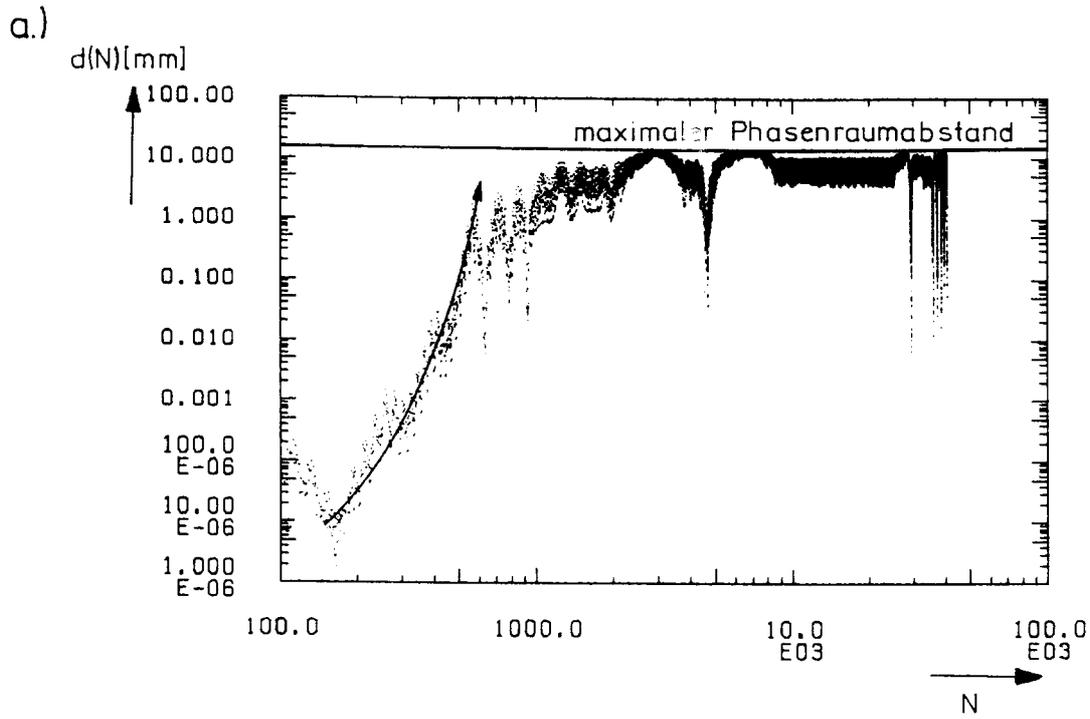
Je nach Vorzeichen von $\bar{a}(\Delta Q)$ und dem Anfangsabstand d_{op} kann jedoch für eine bestimmte Umlaufzahl zunächst eine Reduktion des Abstandes auftreten.

Sind die Trajektorien A und B jedoch chaotisch, so macht es keinen Sinn, d_0 in einen parallelen und senkrechten Anteil aufzuteilen, da es keine Bezugsrichtung zu einem KAM-Torus gibt. In einem chaotischen Bereich gilt somit für die Entwicklung des Abstandes:

$$d(N) = d_0 e^{LN} \quad (3.17)$$

Figur 3.15 zeigt das Beispiel einer chaotischen Trajektorie. Das Sättigungsverhalten in Figur 3.15a ist darauf zurückzuführen, daß der maximale Abstand im Phasenraum (Figur 3.15b) erreicht wird. Dieses Sättigungsverhalten tritt bei regulären Trajektorien nicht auf; nach Erreichen des maximalen Phasenraumabstandes nähern sich beide Trajektorien wieder und der Abstand wird geringer. Im regulären Fall wird somit der Abstand im Phasenraum zwischen dem minimalen Abstand d_{0s} und dem maximalen Phasenraumabstand in regelmäßigen Zeitabständen hin und herpendeln.

Dieses lineare Anwachsen des Abstands im Phasenraum macht aber die Unterscheidung zwischen regulärer und chaotischer Bewegung dann schwierig, wenn die chaotische Bewegung in sehr feinen chaotischen Bereichen stattfinden. Trajektorien in einem solchen schmalen chaotischen Bereich werden sich nämlich annähernd so verhalten, wie reguläre Trajektorien in unmittelbarer Nähe, also wird der Abstand zunächst ebenfalls linear anwachsen. Erst nach längeren Simulationen wird sich ein exponentielles Anwachsen des Abstands durchsetzen.

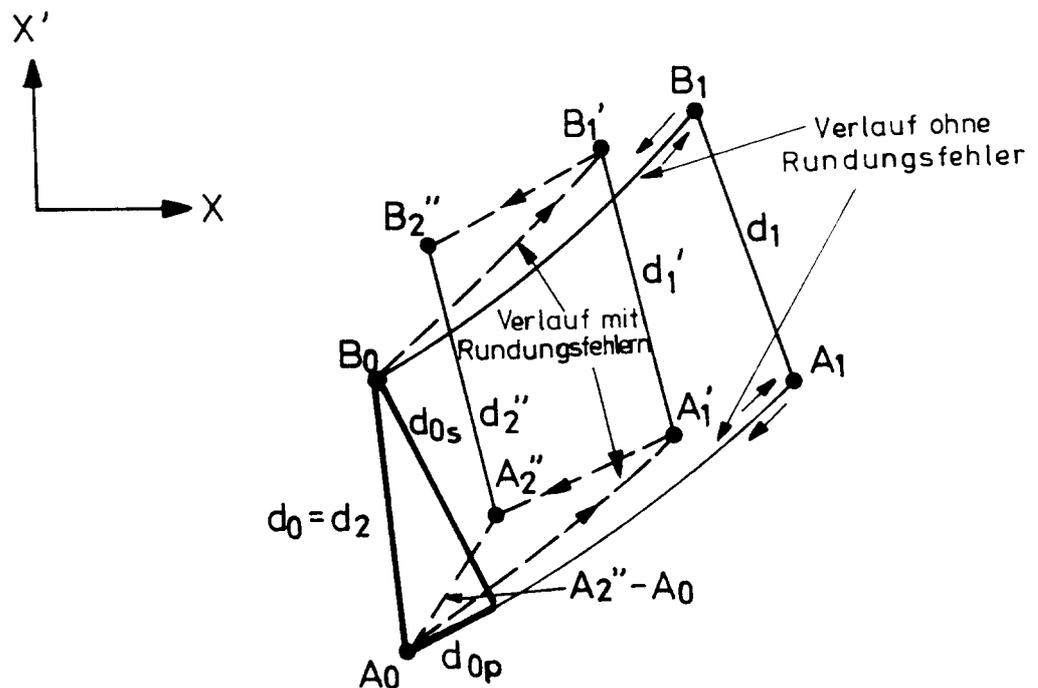


Figur 3.15: Abstand im Phasenraum einer chaotischen Bewegung

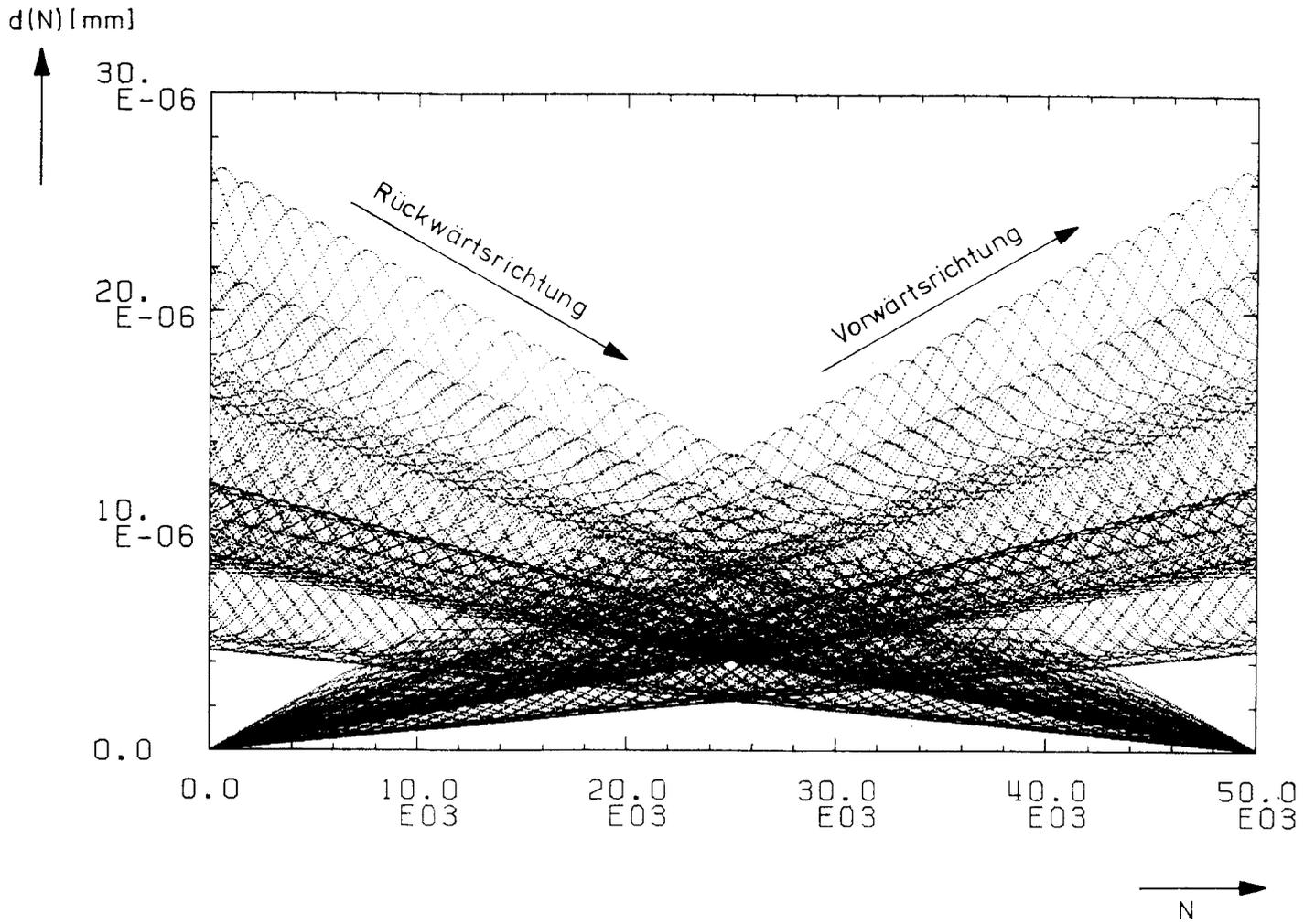
Teil a zeigt den Abstand im Phasenraum einer chaotischen Bewegung. Nach wenigen 1000 Umläufen ist eine Sättigungsgrenze erreicht. Diese Sättigungsgrenze beruht darauf, daß nur ein maximaler Phasenraumabstand erreicht werden kann (Teil b).

3.4.1.2 Einfluß von Rundungsfehlern auf den Lyapunov-Exponenten

Wie sich Rundungsfehler bei der numerischen Bestimmung des Lyapunov-Exponenten auswirken, möchte ich jetzt untersuchen. Zunächst betrachte ich einen regulären Fall mit nicht zu kleinem Anfangsabstand d_0 . Figur 3.17 zeigt den Abstand im Phasenraum zweier zunächst eng benachbarter Teilchen, von links nach rechts sind 50 000 Einträge der Vorwärtssimulation zu sehen und von rechts nach links die 50 000 Umläufe der Rückwärtssimulation. Trotz der Rundungsfehler schrumpft der Abstand nach immerhin 10^5 Umläufen innerhalb der Auflösung der Figur auf den ursprünglichen Abstand im Phasenraum. Dies möchte ich in Figur 3.16 schematisch erläutern.



Figur 3.16: Schematische Darstellung der Entwicklung des Abstandes im Phasenraum bei Vorwärts- und Rückwärtssimulation



Figur 3.17: Entwicklung des Abstandes im Phasenraum für 50 000 Vorwärts- und Rückwärtssimulationen für einen regulären Fall mit nicht zu kleinem Anfangsabstand d_0 im Phasenraum

Startpunkt sei A_0 und das Zwillingssteilchen B_0 mit dem Abstand d_0 . Nach einer gewissen Umlaufzahl N_1 ist der Abstand d_1 mit den Koordinaten A_1 und B_1 erreicht. Nun ist aber bis zur Umlaufzahl N_1 die Amplitude gemäß (3.8) geschrumpft, so daß stattdessen die Simulationen den Abstand d_1' mit den Koordinaten A_1' und B_1' ergeben. Es bewirken aber die Rundungsfehler für beide Teilchen eine annähernd gleiche Schrumpfung der Amplituden und somit auch eine annähernd gleiche Phasenverschiebung. Solange also der senkrechte Anteil d_{0s} vom Abstand d_0 groß ist gegen die Amplitudenschrumpfung ($a N_1 \hat{A}_x$) sind die Abstände d_1 und d_1' in guter Näherung gleich. Nach diesen N_1 Umläufen wird nun die Bewegungsrichtung umgedreht und N_1 Umläufe zurücksimuliert. Dann schrumpft d_1 wieder auf den ursprünglichen Wert d_0 mit A_0, B_0 . Auch bei der Rücktransformation schrumpft die Amplitude wieder um ($a N_1 \hat{A}_x$), so daß der Abstand d_2'' mit A_2'' und B_2'' erreicht wird. Aus den gleichen Argumenten wie oben gilt aber:

$$d_2'' \approx d_0$$

$$A_0 \approx A_2 \quad (3.18)$$

obwohl sich die Koordinaten wegen der Phasenverschiebung deutlich unterscheiden.

Diese Argumentation ist aber nur zulässig, wenn der Reduktionsfaktor a in (3.8) wirklich klein ist.

Wie im vorigen Abschnitt gezeigt, gibt es einen Grenzabstand d_G unterhalb dessen die Detailuntersuchungen des Phasenraums der Einfluß der Rundungsfehler sichtbar wird. Im nun folgenden Beispiel möchte ich zeigen, daß auch der Anfangsabstand d_0 oberhalb dieser Grenze gewählt werden muß, damit die Entwicklung des Abstandes im Phasenraum nicht durch Rundungsfehler bestimmt wird. Untersucht sei ein Simulationslauf mit $d_0 = 10^{-10}$, mit (3.9) ergibt sich:

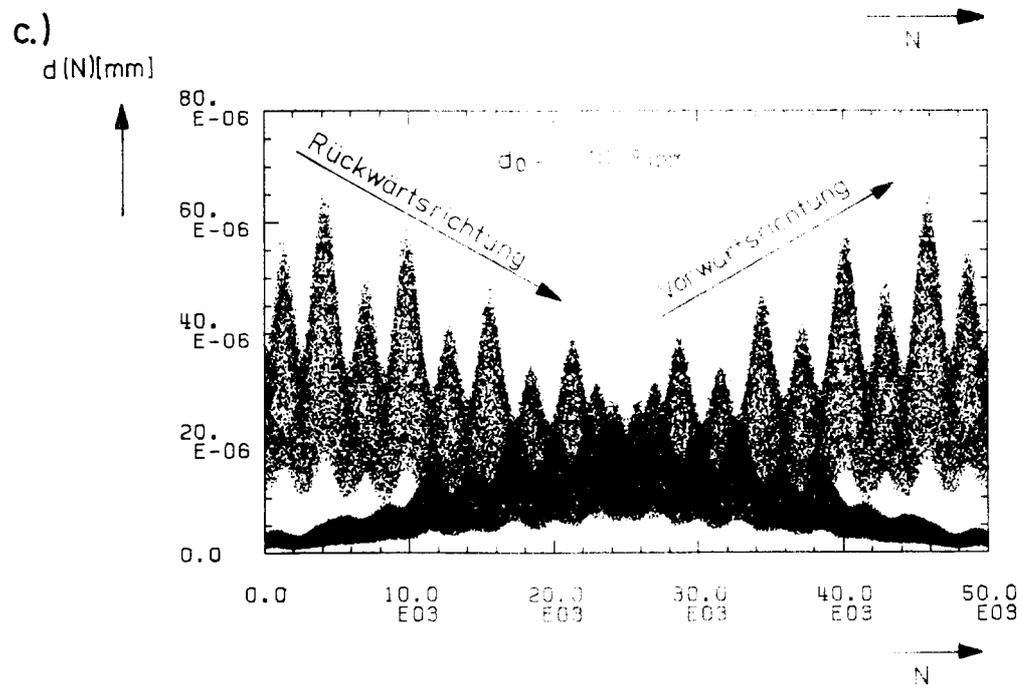
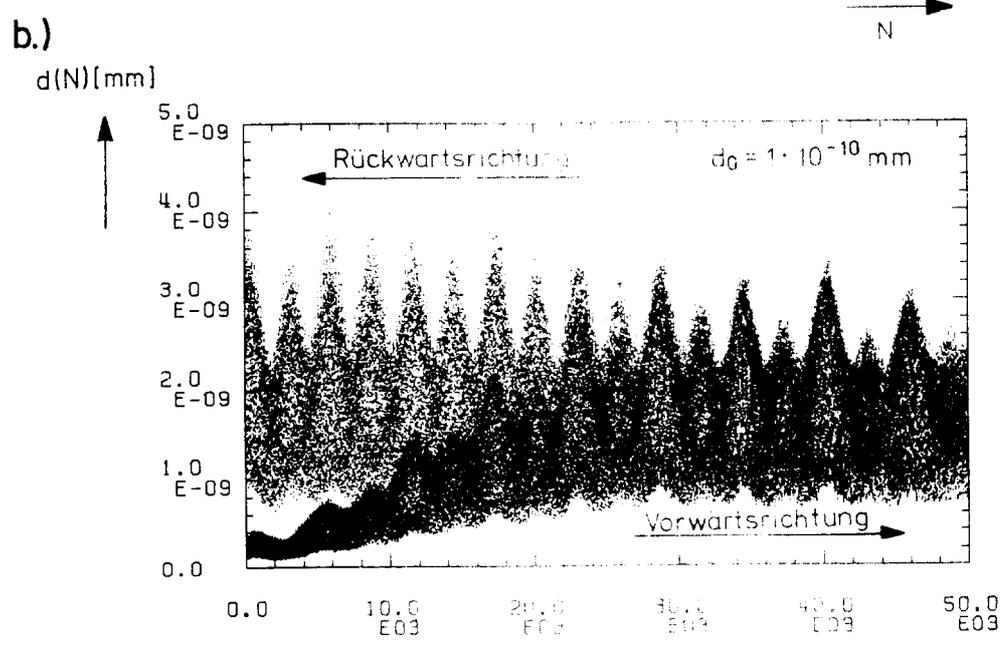
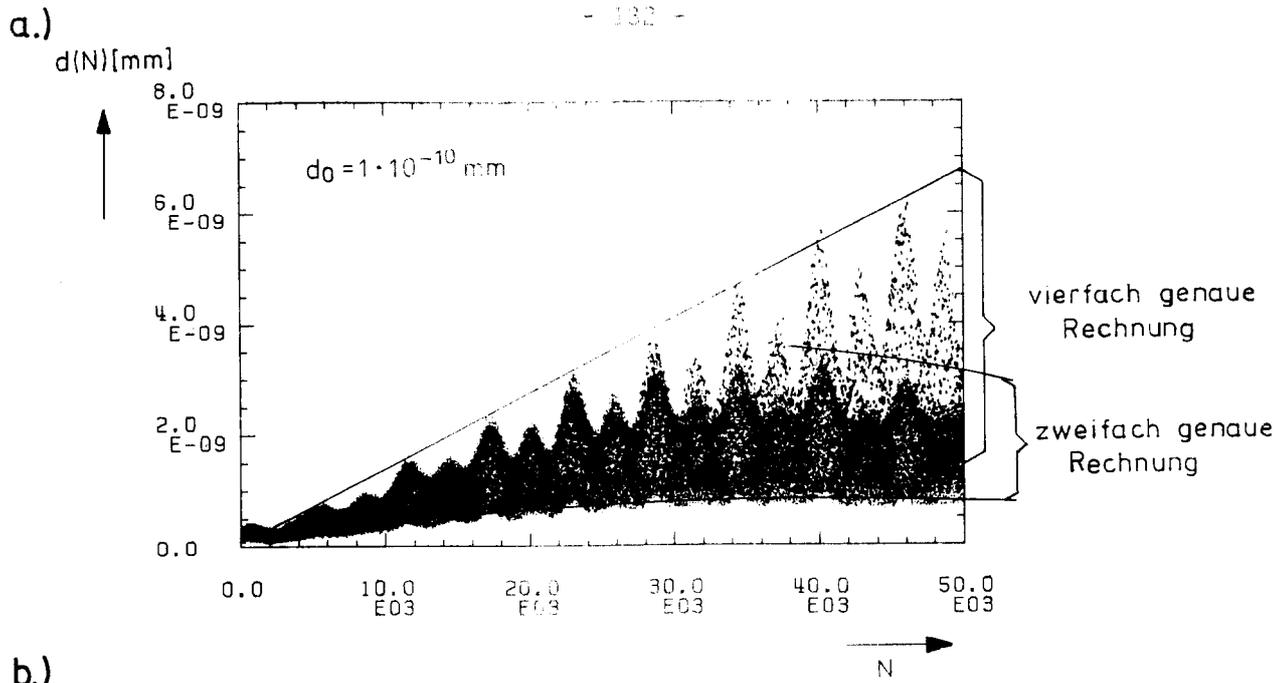
$$d_0 = 10^{-10}; \hat{A}_{x_0} \approx 2 \text{ mm}; N = 50000; a = -2.33 \cdot 10^{-13}$$

$$|d_G| \approx 2 \cdot 10^{-8} > d_0 \quad (3.19)$$

Figur 3.18a zeigt den Verlauf des Abstandes in zweifach und vierfach genauer Rechnung über 50 000 Umläufe. Nach etwa 28 000 Umläufen knickt die zweifach genaue Rechnung ab und bleibt auf einem konstanten Niveau, während die vierfach genaue Rechnung einen linearen Anstieg zeigt. Besonders deutlich wird der Effekt der Rundungsfehler, wenn man nach 50 000 Umläufen die Teilchen zurücksimuliert. In diesem Fall wird keineswegs der anfängliche Abstand von 10^{-10} wieder erreicht, sondern der Abstand bleibt in der Nähe des durch Rundungsfehler verursachten Sättigungswertes (Figur 3.18b). Bei einem Startwert des Abstandes d_0 von $1 \cdot 10^{-6}$ hingegen gilt:

$$d_0 = 10^{-6} \quad \rightarrow \quad |d_G| = 2 \times 10^{-8} < d_0 \quad (3.20)$$

In Figur 3.18c zeigt sich nun ein lineares Ansteigen des Abstands, das in der Struktur völlig der vierfach genauen Rechnung entspricht, bei allerdings 10^4 -fach größerem Abstand. Gleichzeitig ist auch die Rückwärtssimulation gezeigt, die in dieser Auflösung den Abstand wieder auf den ursprünglichen Wert zurückschrumpfen läßt.



Figur 3.18:
Einfluß von Rundungsfehlern
auf die Entwicklung des
Abstandes im Phasenraum

Wird der Anfangsabstand d_0 im Phasenraum unterhalb einer bestimmten Grenze (siehe Text) gewählt, wirken sich Rundungsfehler aus. Teil a zeigt den Vergleich von zweifach und vierfach genauer Rechnung bei $d_0 = 1 \cdot 10^{-10}$: Nach etwa 25 000 Umläufen zeigt die zweifach genaue Rechnung ein unphysikalisches Abknicken. Eine Rückwärtssimulation nach 50 000 Umläufen (Teil b) führt nicht zum ursprünglichen Wert des Abstandes im Phasenraum zurück. Bei einem Anfangsabstand von $d_0 = 10^{-6}$ knickt der Abstand im Phasenraum nicht ab und eine Rückwärtssimulation ergibt den ursprünglichen Anfangsabstand (Teil c).

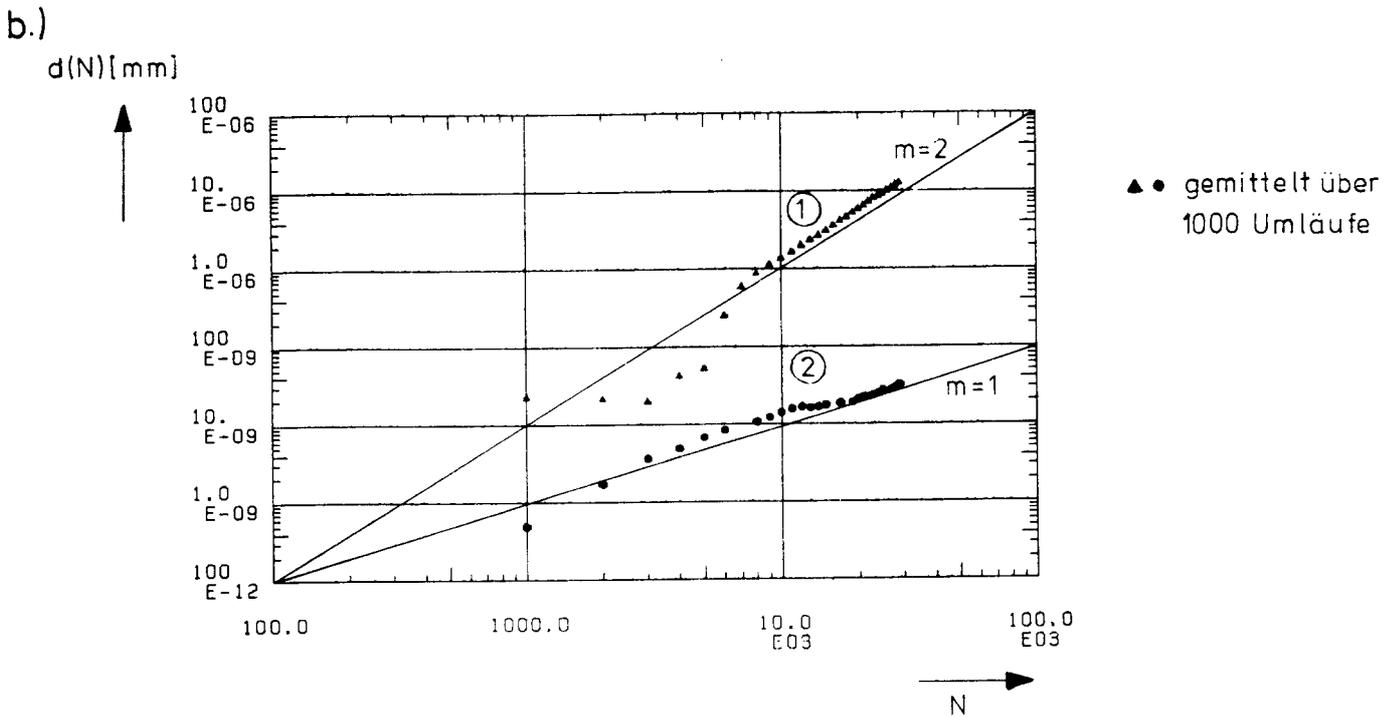
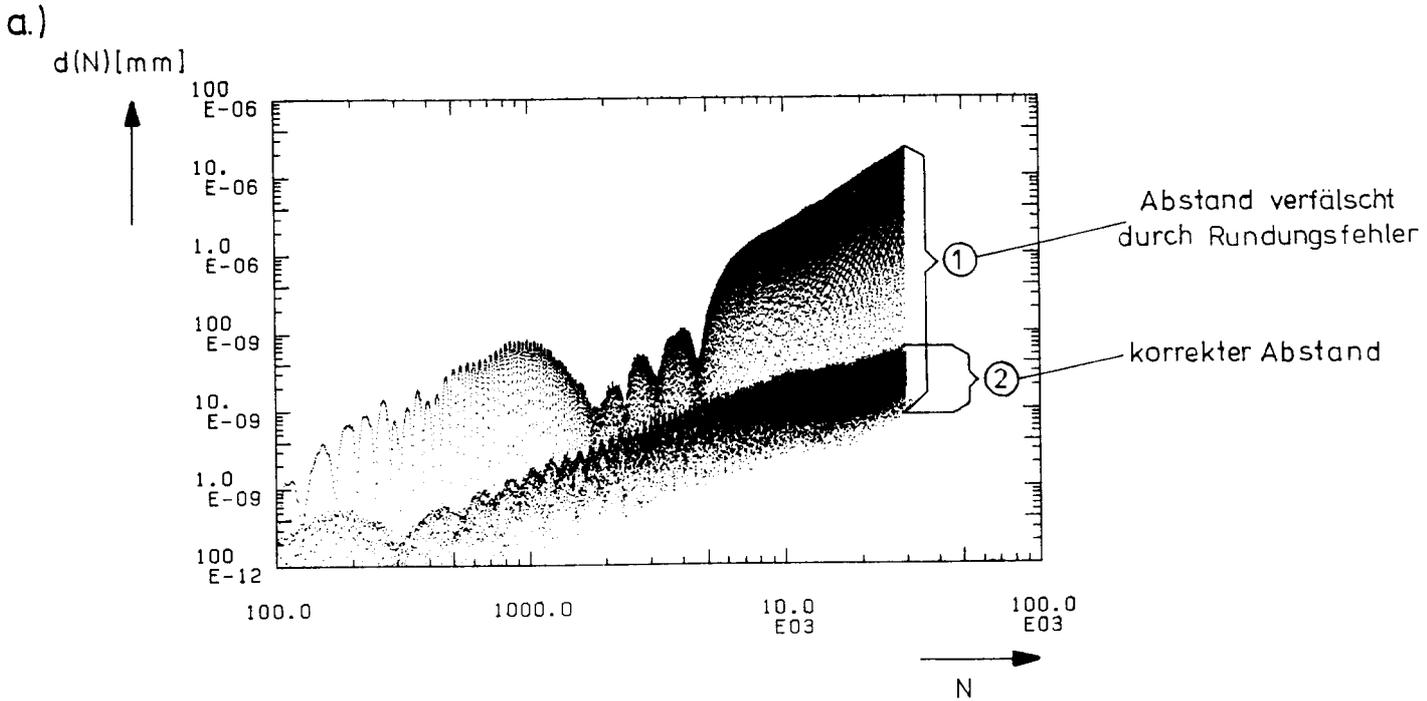
Ich möchte nun einen weiteren Effekt der Rundungsfehler behandeln. In Gleichung (3.13) ist die einfachste Definition des Abstandes im Phasenraum angegeben. In den Simulationen wird diese einfache Definition verwendet, um die aufwendige Berechnungen von (3.14) zu umgehen, zumal im sechsdimensionalen Fall die optischen Funktionswerte ($\beta_x, \beta_z, \alpha_x, \alpha_z$) energieabhängig werden und stets neu berechnet werden müßten. Die zusätzlichen Schwankungen des Phasenraumabstandes lassen sich außerdem, wie oben demonstriert, leicht durch eine Mittelung beseitigen. Bei einer allzu naiven Erweiterung von (3.13) auf den sechsdimensionalen Fall treten jedoch durch Rundungsfehler Schwierigkeiten auf.

$$d(N) = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta x'^2 + \Delta z^2 + \Delta z'^2 + \Delta \sigma^2 + \Delta \hat{\eta}^2} \quad (3.21)$$

In Figur 3.19 ist gezeigt, daß der so definierte Abstand quadratisch mit N anwächst. Das liegt daran, daß die Koordinate σ um Größenordnung größer ist als die anderen Koordinaten, so daß der quadratische Fehler dieser einen Koordinate den Verlauf des Abstandes bestimmt. Damit also ein lineares Anwachsen des Abstands gewährleistet ist, müssen die Koordinaten alle ungefähr die gleiche Größenordnung haben. Mit $\sigma \approx 1000$ und $\hat{\eta} \approx 10^3$ wird deshalb der Abstand folgendermaßen definiert:

$$d(N) = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta x'^2 + \Delta z^2 + \Delta z'^2 + \left(\frac{\Delta \sigma}{10^3}\right)^2 + (10^3 \cdot \Delta \hat{\eta})^2} \quad (3.22)$$

Mit dieser Definition wächst der Abstand nun wieder linear mit N (Figur 3.19).



Figur 3.19: Verfälschung des Abstands im Phasenraum durch Rundungsfehler einer Koordinate

Wird eine Definition des Abstandes im Phasenraum gewählt (3.21), bei der eine Koordinate wesentlich größer ist als die anderen Koordinaten, zeigt sich der quadratische Anstieg dieser Koordinate in der Entwicklung des Abstands im Phasenraum. Nur wenn alle Koordinaten so gewichtet sind, daß sie größenordnungsmäßig übereinstimmen (3.22), wächst der Abstand linear mit der Umlaufzahl N an.

3.4.1.3 Unterscheidung zwischen linearem und exponentiellem Wachstum des Abstandes im Phasenraum

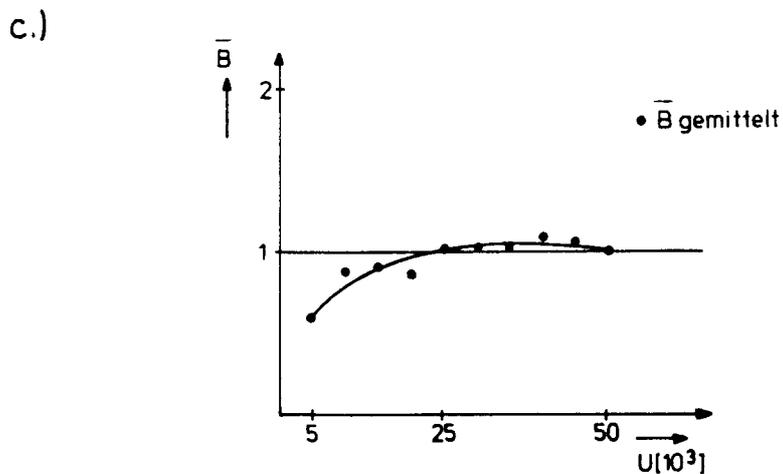
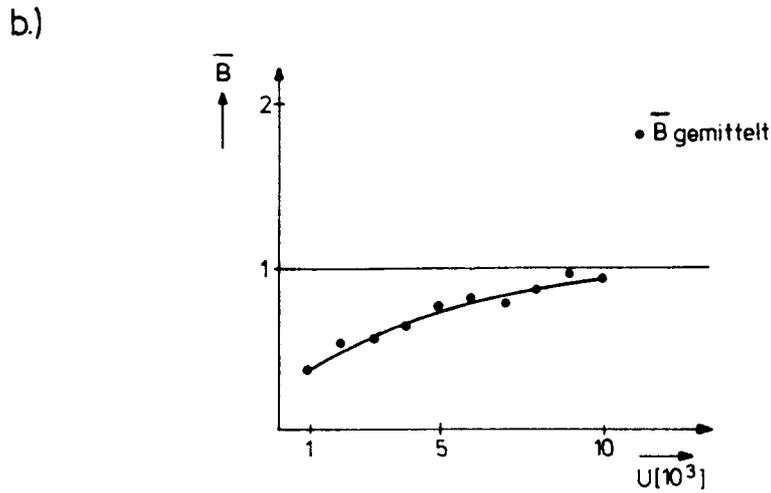
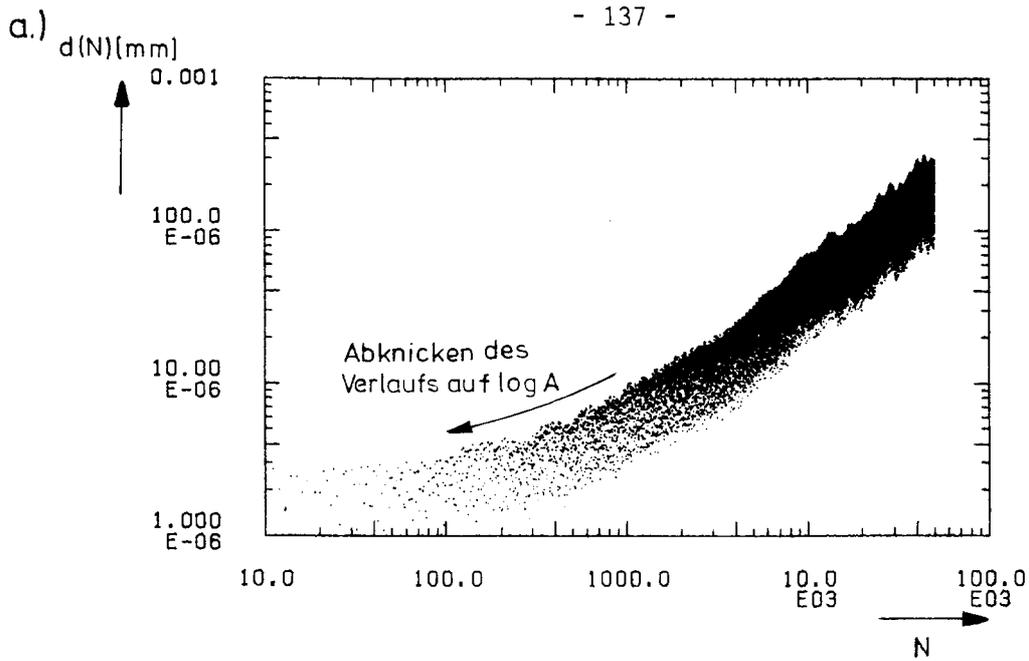
Ein ganz wesentlicher Punkt ist die eindeutige Unterscheidung zwischen linearem und exponentiellem Anstieg des Abstandes im Phasenraum. In einem ersten Schritt sollte deshalb der Verlauf optisch beurteilt werden. Ein großer Lyapunov-Exponent ist daran zu erkennen, daß nach wenigen Umläufen die Sättigungsgrenze (siehe Figur 3.15) erreicht wird und der Abstand danach im Mittel diesen Sättigungswert beibehält. Bei regulärer Bewegung gibt es nach Erreichen des maximalen Abstandes im Phasenraum wieder eine Reduktion auf den ursprünglichen Wert (siehe oben). Aber auch bei Beginn der Simulationen kann der Abstand zunächst geringer werden und nach dem Erreichen eines Minimalwertes wieder ansteigen (siehe Gleichung (3.16) und Figur 4.6a). Bei der Analyse des Anstieges im Phasenraum müssen diese Bereiche mit negativem Wachstum ausgeschlossen werden.

Weit im Resonanzüberlappbereich, wo die Lyapunov-Exponenten groß sind, läßt sich das chaotische Verhalten leicht feststellen. In der Nähe der Akzeptanzgrenze sind die Lyapunov-Exponenten sehr klein und zunächst wächst der Abstand annähernd linear. In diesem Bereich muß eine genauere Analyse vorgenommen werden, um reguläre und chaotische Bewegung sicher zu unterscheiden. Dazu wird ausgenutzt, daß bei doppelt-logarithmischer Darstellung des Abstandes gegen die Umlaufzahl N , ein lineares Anwachsen des Abstands eine Gerade der Steigung 1 ergibt, alle Anstiege mit einer höheren Potenz n_0 , ergeben ebenfalls Geraden und zwar mit den Steigungen n_0 . Nur ein exponentielles Wachstum zeigt auch in doppelt-logarithmischer Darstellung einen exponentiellen Anstieg. Diese doppelt-logarithmische Darstellung hat zudem den Vorteil, daß die ortsabhängigen Schwankungen des Abstandes für alle Umlaufzahlen auf ein gleichbreites Band reduziert werden. Allerdings muß man in Kauf nehmen, daß bei linearem Anstieg ($A + BN$) des Abstandes die Kurve bei kleinen Werten von N auf den Wert $\log A$ abknickt (siehe Figur 3.20) und bei negativen Steigungen ($B < 0$) die Kurven scharf auf $-\infty$ fallen werden und nicht etwa Geraden negativer Steigung ergeben.

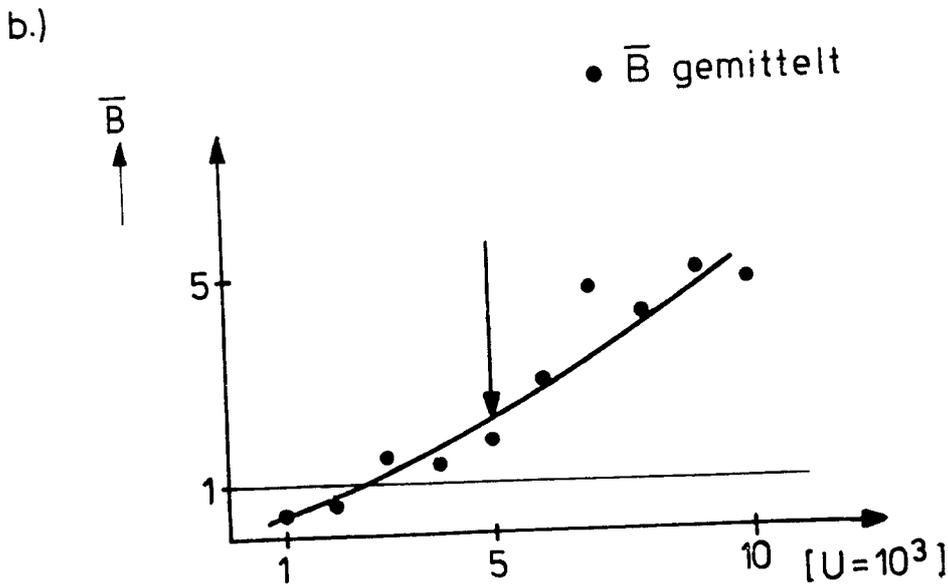
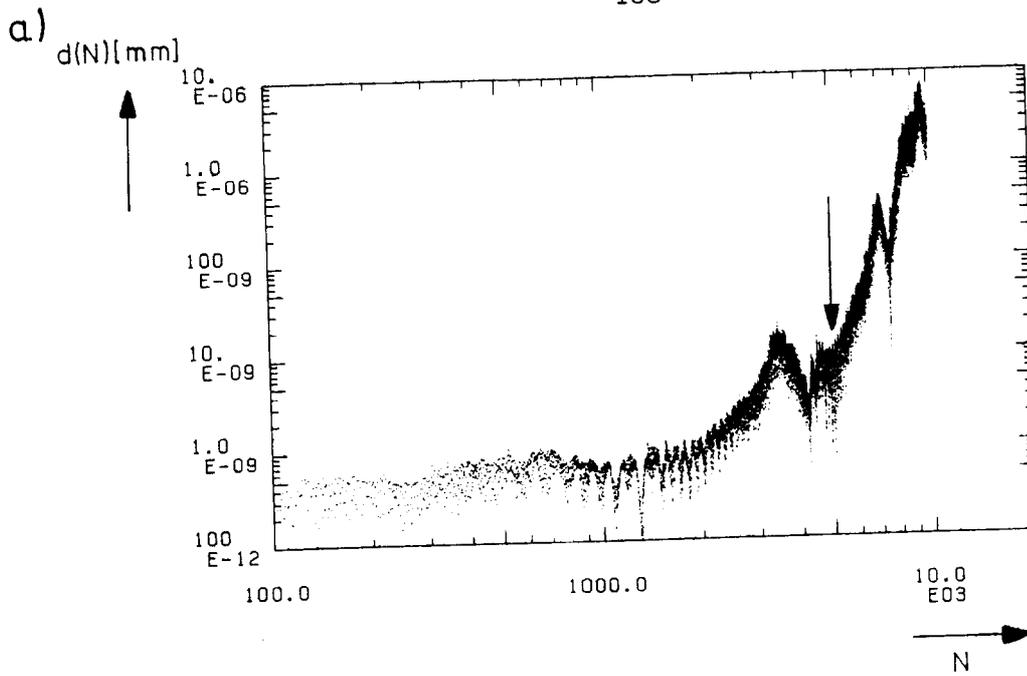
Wegen der großen ortsabhängigen Schwankungen des Abstandes ist der Wert von A nicht einfach zu bestimmen, so daß das Abknicken des Abstands auf $\log A$ sehr schwierig zu kompensieren ist. Zudem müßten dabei negative Argumente der logarithmischen Funktion vermieden werden.

Einen Großteil der ortsabhängigen Schwankungen kann durch Mittelung des Abstandes über (100, 1000) Umläufe unterdrückt werden, dadurch werden aber keine Schwankungen behoben, die durch das Annähern an instabile Fixpunkte entstehen, wenn die Umlaufzahl zwischen zwei Annäherungen groß gegen (100, 1000) ist. Die so gemittelten Werte des Abstandes werden in Gruppen zu (1000, 5000, 10^4) Umläufen zusammengefaßt und mit Hilfe von linearer Regression wird jeweils die Steigung in jeder Gruppe bestimmt und zusätzlich über die Anzahl der Gruppen gemittelt.

Figur 3.20 zeigt einen typischen Fall von regulärer Bewegung: Teil a zeigt den Abstand im Phasenraum gegen die Umlaufzahl N . In Teil b, c sind die Steigungen nach dem oben angegebenen Verfahren ermittelt worden, dabei sind die Abstände jeweils über 100 Umläufe gemittelt worden und in Teil b in Gruppen zu 1000 Umläufen, bzw. in Teil c in Gruppen von 5000 Umläufen, zusammengefaßt worden. Wegen des Absenkens der Geraden auf $\log A$ für kleinere N erreicht die Steigung erst langsam den Wert 1, erst bei 25 000 Umläufen ist dieser Wert im Mittel erreicht. Aber schon der sehr langsame Anstieg der Steigung über die ersten 10^4 Umläufe ist ein deutliches Indiz dafür, daß die Bewegung regulär ist. Figur 3.21 zeigt dagegen einen Fall bei dem bereits nach 5 000 Umläufen der Anstieg des Abstandes deutlich über 1 liegt.



Figur 3.20: Mittlere Steigung \bar{B} des Abstands einer regulären Bewegung
 Teil a zeigt den linearen Anstieg des Abstandes im Phasenraum. In Teil b,c sind die gemittelten Steigungen \bar{B} gegen die Umlaufzahl N gezeigt. \bar{B} erreicht nur langsam den Wert 1, da der Abstand für kleine N gegen $\log A$ abknickt.

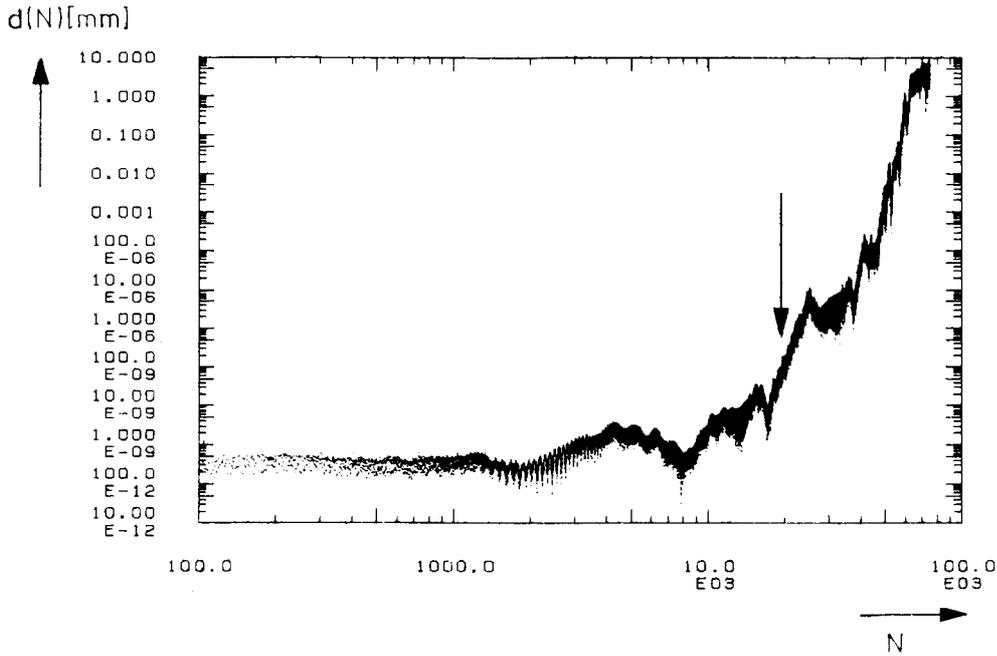


Figur 3.21: Mittlere Steigung \bar{B} des Abstand einer chaotischen Bewegung

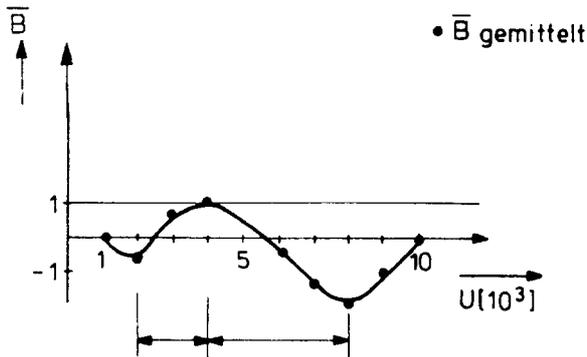
Nach etwa 5000 Umläufen läßt sich an der großen Abweichung der gemittelten Steigung (Teil b) vom Werte 1 chaotisches Verhalten feststellen.

Nach großen Umlaufzahlen wird sich der größte Lyapunov-Exponent durchsetzen. Über kleine Umlaufzahlen werden aber durchaus auch kleinere Exponenten festzustellen sein. Die chaotische Bewegung pendelt außerdem zwischen den Einflußbereichen unterschiedlicher regulärer Bewegung hin und her und zwar in unregelmäßigen Zeitabständen. Es ist deshalb ohne weiteres möglich, daß bei kleineren Umlaufzahlen große Schwankungen der Steigung des Abstandes im Phasenraum auch zu negativen Werten auftreten können. Die Größe der Schwankungen und deren Unregelmäßigkeit sind deshalb bereits ein gutes Indiz für chaotische Bewegung. Figur 3.22 zeigt einen solchen Fall, bei dem bis zur Umlaufzahl 10 000 große Schwankungen auftreten und erst nach 20 000 Umläufen ein starkes Anwachsen des Abstandes festzustellen ist. Der Verdacht auf chaotische Bewegung muß im Falle solcher Schwankungen durch eine Verlängerung des Simulationslaufs erhärtet werden. Denn auch in regulären Fällen können Schwankungen, wie oben erwähnt, auftreten, die allerdings in regelmäßigen Abständen wiederholt werden. In Figur 3.23 ist ein solches reguläres Beispiel gezeigt. Alle 10^5 Umläufe gibt es solche Schwankungen, allerdings sind diese Schwankungen wesentlich geringer als die im chaotischen Fall von Figur 3.22.

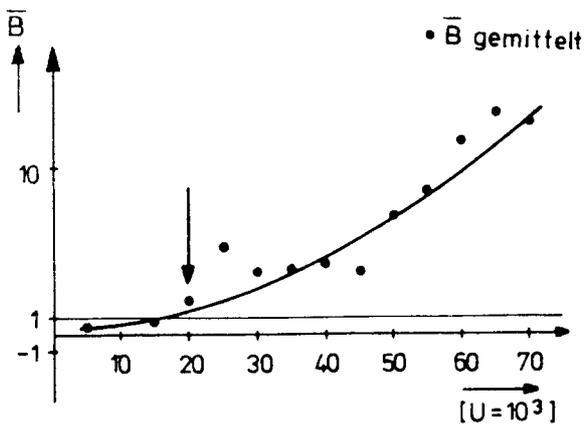
a.)



b.)

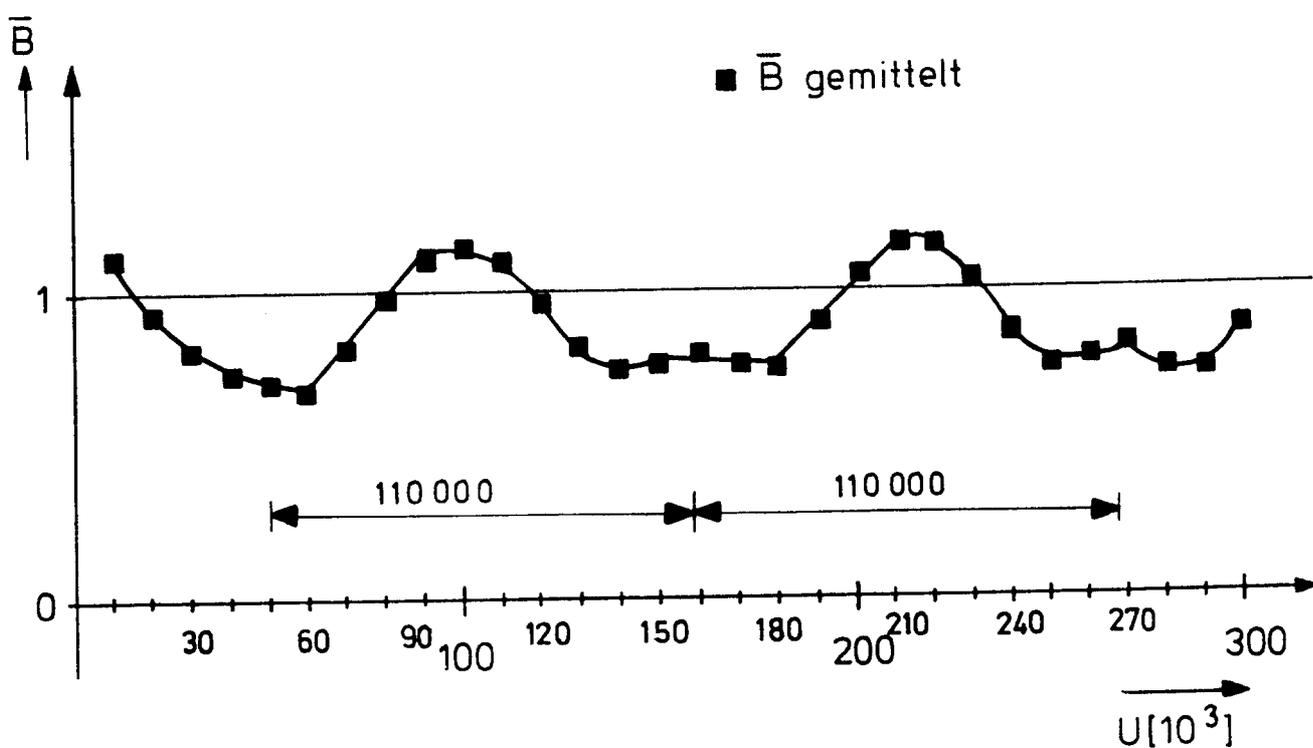


c.)



Figur 3.22:
Mittlere Steigung \bar{B} des Abstandes
einer chaotischen Bewegung in der
Nähe der Akzeptanzgrenze

In der Nähe der Akzeptanzgrenze sind
die Lyapunov-Exponenten klein.
Deshalb werden in diesem Beispiel
20 000 Umläufe benötigt, um eine
deutliche Abweichung des Anstiegs
vom Wert 1 feststellen zu können.
Die großen Schwankungen bei kleineren
Umlaufzahlen (Teil b) legen
allerdings schon den Verdacht auf
chaotische Bewegung nahe.

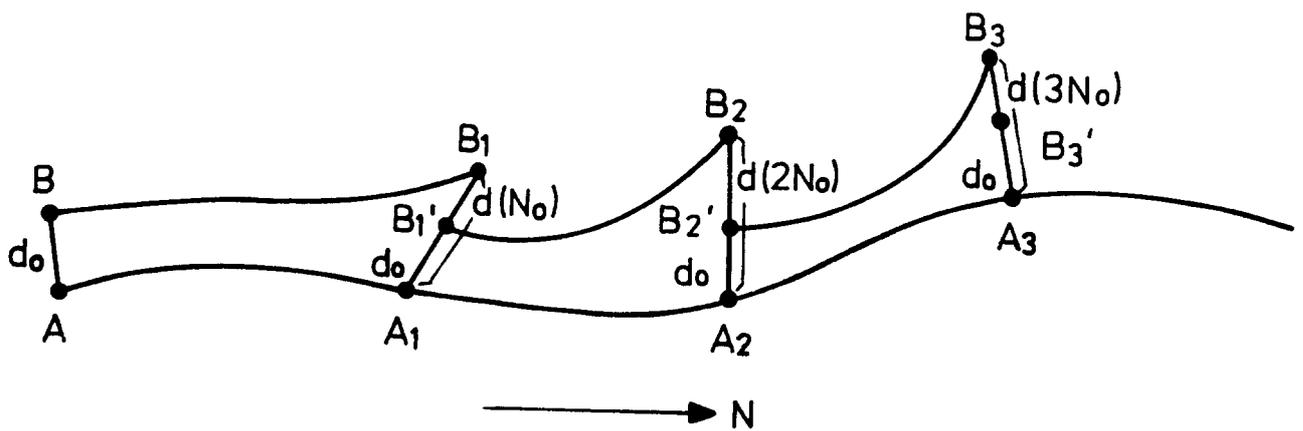


Figur 3.23: Mittlere Steigung \bar{B} des Abstands einer regulären Bewegung in der Nähe instabiler Fixpunkte

Kommt eine reguläre Bewegung instabilen Fixpunkten sehr nahe, entstehen große Schwankungen im Verlauf des Abstandes im Phasenraum (Figur 3.12). In einem solchen Fall schwingt der Abstand mit großer Periode (im gezeigten Beispiel 110 000 Umläufe) um den Wert 1. (Vergleiche jedoch Schwankungen im chaotischen Fall - Figur 3.22).

3.4.2. 2. Methode - Bestimmung eines mittleren Wertes für den Lyapunov-Exponenten

Aus der zeitlichen Entwicklung des Phasenraumabstandes kann man aufgrund der großen Schwankungen keinen exakten Zahlenwert des charakteristischen Lyapunov-Exponenten bestimmen. Von Benettin et al, 1976/19/ stammt die Idee, nach einer gewissen Zahl N_0 von Umläufen den Abstand immer wieder auf den ursprünglichen Wert zurückzuskalieren, wobei die Richtung im Phasenraum beibehalten wird. Dies ist in Figur 3.24 schematisch skizziert:



Figur 3.24: Schematische Darstellung der Rückskalierung des Abstandes nach je N_0 Umläufen

Der Lyapunov-Exponent errechnet sich nun nach N Umläufen, also nach

$N_I = \frac{N}{N_0}$ Iterationen, zu:

$$L = \frac{1}{N_0 N_I} \sum_i^{N_I} \ln \left(\frac{d(i \cdot N_0)}{d_0} \right) \quad (3.23)$$

Durch die Rückskalierung vermeidet man, daß der maximale Phasenraumabstand erreicht wird und hat über die ortsabhängigen Schwankungen von $d(N)$ gemittelt. Die Verringerung des Abstands wird dabei so vorgenommen (wie in Figur 3.24 angedeutet), daß die Richtung des Abstandsvektors $\vec{\omega}$ (siehe (2.13)) nicht verändert wird. Damit kann im Prinzip der Lyapunov-Exponent bestimmt werden, welcher sich aufgrund des Anfangsabstandes $\vec{\omega}_0$ ergibt. Aber aufgrund der Rundungsfehler wird schließlich der Wert des größten Lyapunov-Exponenten die Entwicklung des Abstandes bestimmen, so daß die 2. Methode stets diesen Wert des größten Lyapunov-Exponenten liefern wird. Das Verfahren ist insoweit etwas problematisch, daß der an sich geforderte Grenzübergang $N \rightarrow \infty$ in (3.12) der Definition des Lyapunov-Exponenten nicht durchgeführt wird. Dies führt zum Beispiel dazu, daß im regulären Fall ein von Null verschiedener Wert für L (Figur 3.25) errechnet wird, der allerdings mit einem steigenden N_0 gegen Null geht. Mit Gleichung (3.16) gilt:

$$\frac{1}{N_0} \ln \frac{d(N_0)}{d_0} = \frac{1}{N_0} \ln \frac{\sqrt{dp^2 + ds^2}}{\sqrt{dp_0^2 + ds_0^2}} \approx \frac{1}{N_0} \ln (b \cdot N_0) \neq 0 \text{ mit } N_0 \neq \infty \quad (3.24)$$

Dies macht es schwierig, bei kleinem Lyapunov-Exponenten zwischen chaotischer und regulärer Bewegung zu unterscheiden. In Figur 3.25 sind beide Methoden gegenübergestellt. Nach ca. 65 000 Umläufen geht das chaotische Teilchen verloren, bevor L einen Sättigungswert erreicht hat. Graphisch ergibt die erste Methode einen Lyapunov-Exponenten von ungefähr:

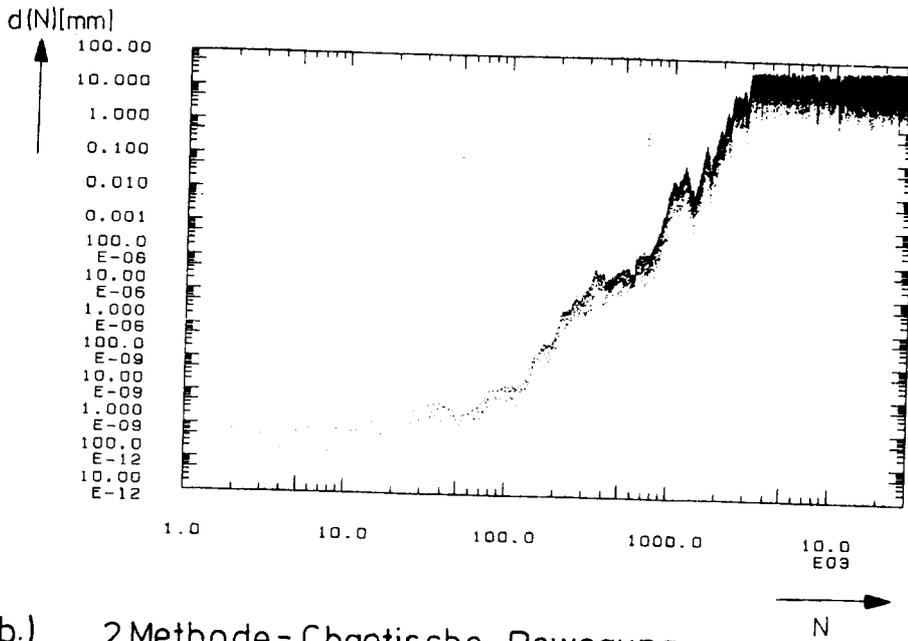
$$L_1 \approx 8,98 \cdot 10^{-3} \quad (3.25)$$

Während die zweite Methode einen Wert von ca.:

$$L_2 \approx 1,15 \cdot 10^{-2} \quad (3.26)$$

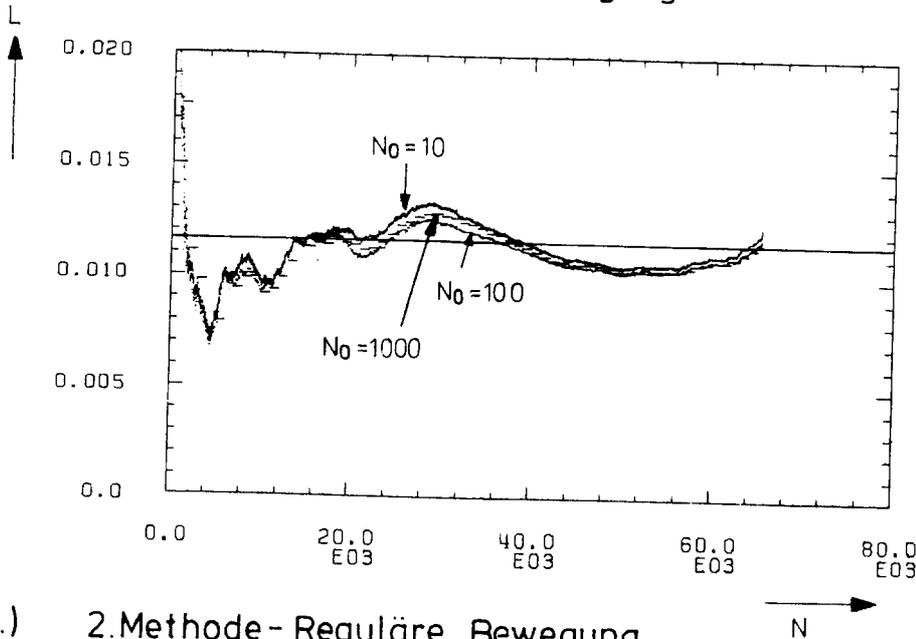
liefert.

a.) 1.Methode



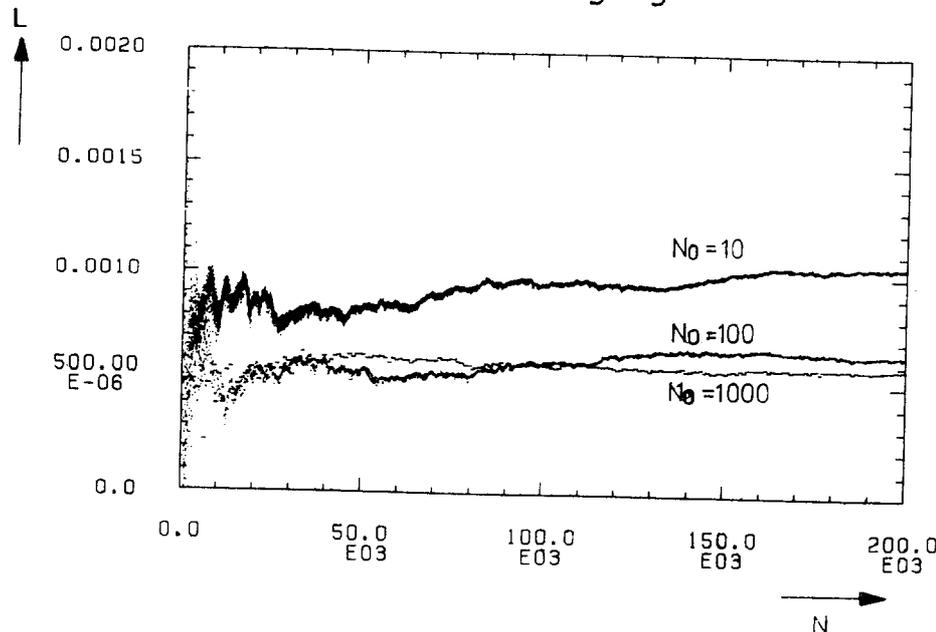
$d_0 = 1 \cdot 10^{-10}$
 $d(3000) \approx 50$
 $\Rightarrow L \approx 0,00898$

b.) 2.Methode - Chaotische Bewegung



$L \approx 0,0115$

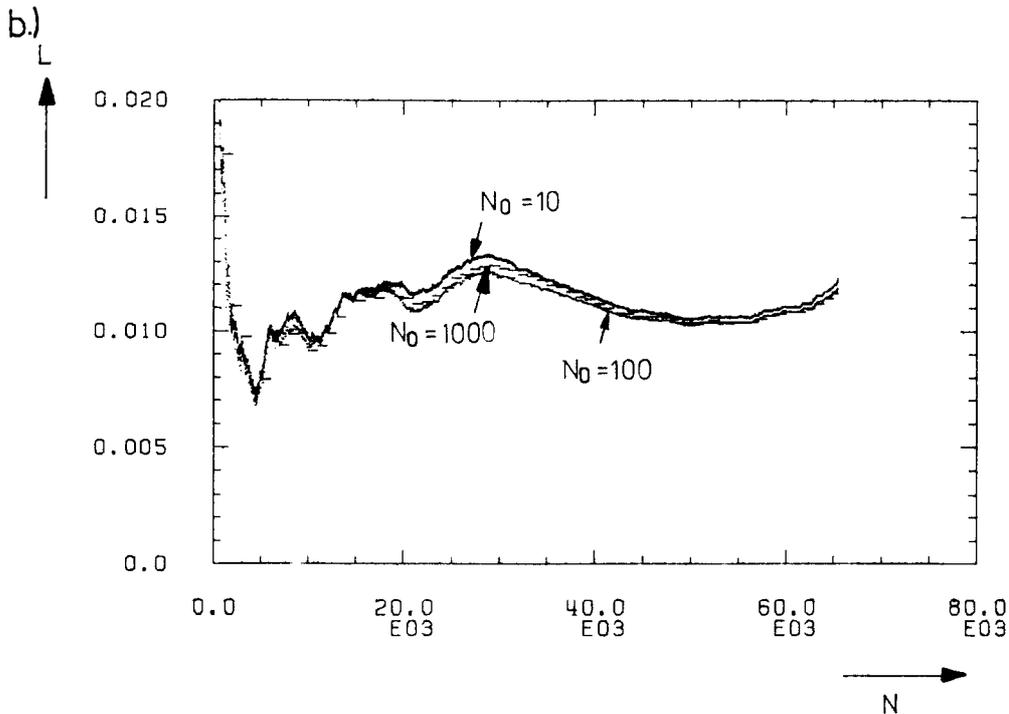
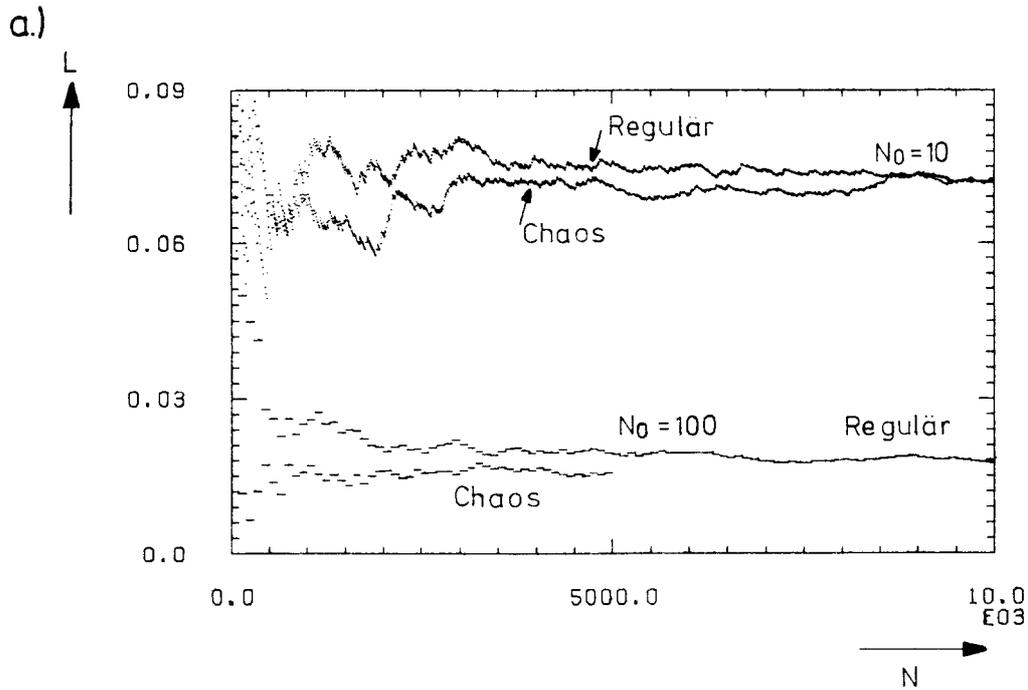
c.) 2.Methode - Reguläre Bewegung



Figur 3.25:
 Vergleich der beiden
 Methoden, den Lyapunov-
 Exponenten zu ermitteln

Mit der ersten Methode (Teil a) läßt sich der Lyapunov-Exponenten nur grob bestimmen. Einen exakteren Wert liefert die Mittelungsmethode (Teil b). Zwar liefert die zweite Methode für reguläre Bewegung deutlich geringere Werte für den Lyapunov-Exponenten (Teil c), jedoch ist dieser Wert auch bei einer Rücknormierung nach 1000 Umläufen noch deutlich ungleich Null. Es ist deshalb schwer mit dieser Mittelungsmethode chaotische von regulärer Bewegung zu unterscheiden, wenn der Lyapunov-Exponent sehr klein ist.

Die Übereinstimmung ist nicht besonders gut. Dies ist aber bei der groben graphischen Methode auch nicht anders zu erwarten. Bei der zweiten Methode ist mit drei verschiedenen N_0 gerechnet worden ($N_0 = 10, 100, 1000$). Im chaotischen Fall liegen die Ergebnisse für alle Werte für N_0 nahe beieinander, während im regulären Fall die Kurven mit wachsendem N_0 abfallen. Rundungsfehler haben bei dieser Methode verheerende Folgen. Wird zum Beispiel Definition (3.21) für den Abstand gewählt, so führt dies bei der ersten Methode zwar zu einem quadratischen Anwachsen des Abstands im Phasenraum. Dies quadratische Anwachsen läßt sich jedoch immer noch leicht von einem exponentiellen unterscheiden. Die zweite Methode jedoch liefert wegen der Rundungsfehler nahezu gleiche Werte für den Lyapunov-Exponenten für den chaotischen und regulären Fall. Da in beiden Fällen eine starke Abhängigkeit von N_0 vorliegt, würde man in beiden Fällen auf reguläre Bewegung schließen. Figur 3.26 zeigt den Vergleich mit der Rechnung, die auf der korrigierten Definition des Abstands im Phasenraum (3.22) beruht.



Figur 3.26: Verfälschung der Berechnung des Lyapunov-Exponenten durch Rundungsfehler bei Verwendung der zweiten Methode

Am Beispiel der Definition des Abstands gemäß Gleichung (3.21) läßt sich zeigen, wie empfindlich die Mittelungsmethode auf Rundungsfehler reagiert. Bei der ersten Methode läßt sich immerhin der quadratische Anstieg noch vom exponentiellen unterscheiden, so daß sich prinzipiell auch mit der Definition (3.21) eine Unterscheidung zwischen regulärer und chaotischer Bewegung treffen läßt. Die zweite Methode (Teil a) liefert jedoch für chaotische und reguläre Fälle annähernd die gleichen Werte. Zum Vergleich ist das Beispiel mit der Definition des Abstands (3.22) gezeigt (siehe Figur 3.25).

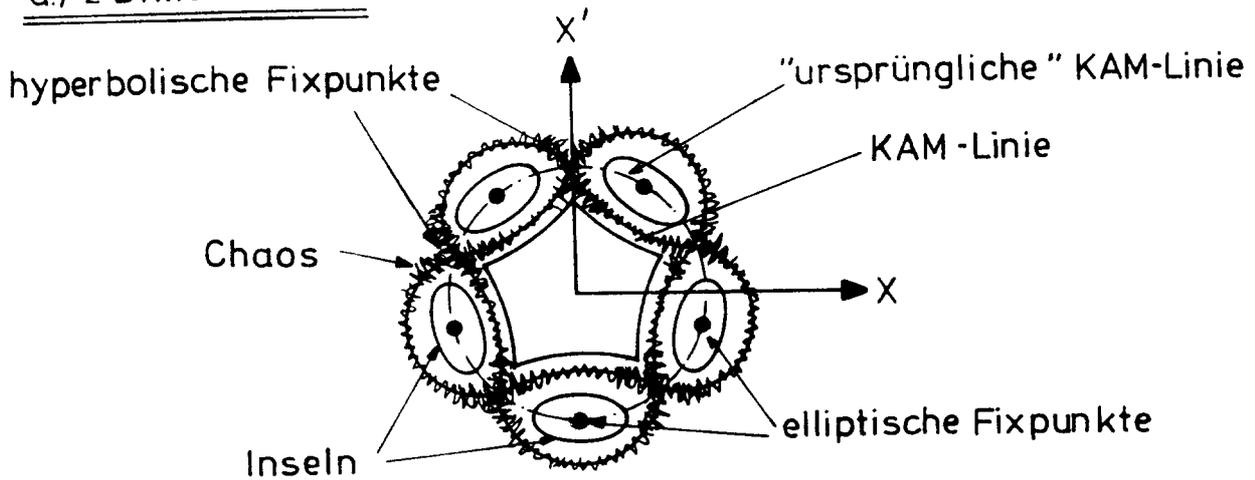
3.5 Methoden zur Untersuchung des höher-dimensionalen Phasenraums

Bei der Ermittlung der dynamischen Apertur tritt eine weitere Schwierigkeit auf. Man beginnt zur Ermittlung der Akzeptanzgrenze bei großen Amplituden, die man allmählich verkleinert, bis man reguläre Bewegung gefunden hat. Die Schwierigkeit beruht nun darauf, daß Inselbereiche mit regulärer Bewegung im chaotischen Bereich auftreten können und damit eine zu große Akzeptanz vorgetäuscht wird. So zeigen z.B. die Figuren 2.19a-f in zwei Dimensionen bei sehr großen Amplituden reguläre Inselbereiche. Die Akzeptanzgrenze liegt aber in diesen Beispielen dort, wo die vier instabilen Fixpunkte erreicht sind, also bei erheblich kleinerer Amplitude. Es muß also sorgfältig zwischen regulären nicht-aufgebrochenen KAM-Tori und regulärer Bewegung auf Tori um Fixpunkte unterschieden werden. Mit Hilfe des Lyapunov-Exponenten (Abschnitt 3.4) kann man diese beiden Bewegungstypen nicht unterscheiden. Allein eine Untersuchung des Phasenraums kann hier weiterhelfen. Diese Unterscheidung ist einfach in zwei Dimensionen zu treffen, wird aber bei Berücksichtigung weiterer Schwingungsebenen zunehmend schwieriger. In diesem Abschnitt möchte ich eine einfache Methode angeben, wie man in vier und sechs Dimensionen Bewegung auf Tori um Fixpunkte (Linien, Flächen) von Bewegung auf einen unaufgebrochenen KAM-Torus unterscheiden kann. Außerdem wird gezeigt, wie man mit Hilfe eines graphischen Systems den vierdimensionalen Phasenraum darstellen kann.

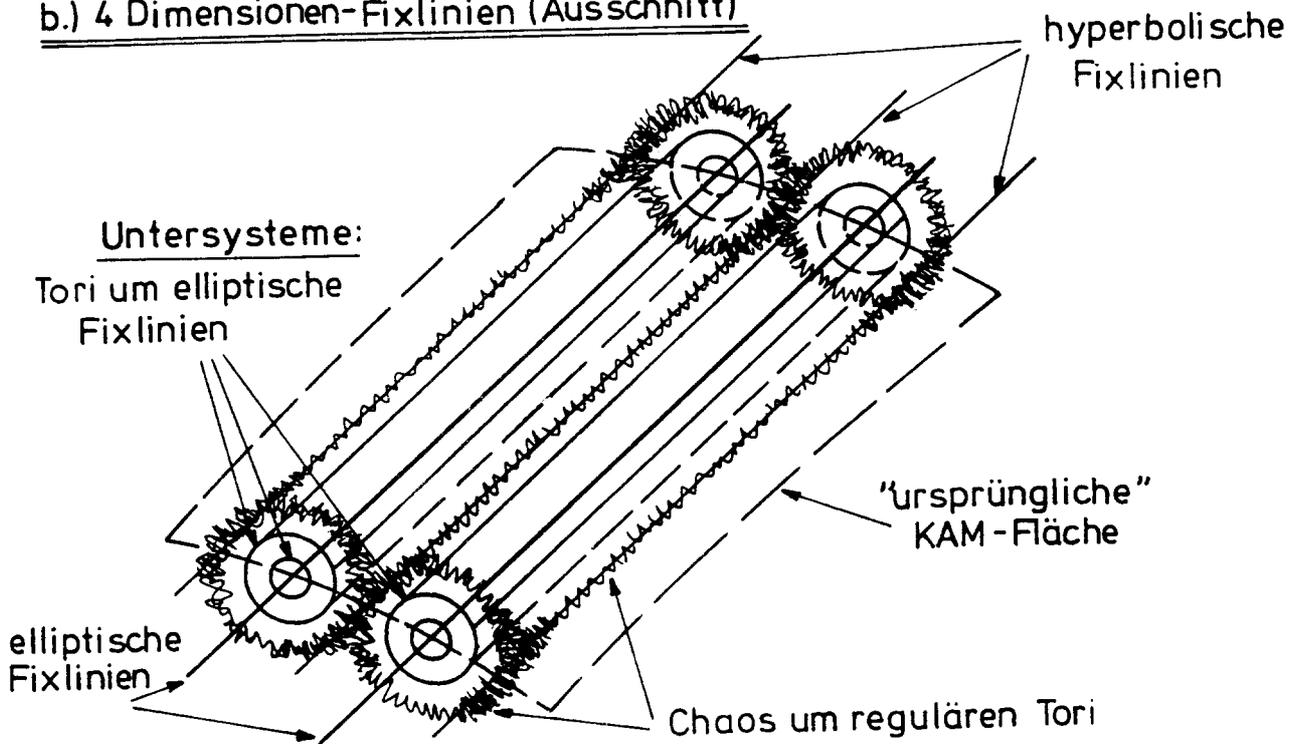
3.5.1 Vierdimensionale Bewegung

Die Bewegung in vier Dimensionen hat, wenn sie integrierbar ist, zwei Invarianten und verläuft deshalb auf $(N-2=2)$ einer zweidimensionalen KAM-Fläche. Der Aufbruch dieser Fläche kann auf zwei Arten geschehen: Wenn Resonanzbedingungen erfüllt sind, erwartet man einen Aufbruch in neue Teilflächen, die Fixlinien oder Fixpunkte einschließen. In Figur 3.27 sind die verschiedenen Fälle in zwei und vier Dimensionen gezeigt. In Teil a ist der Aufbruch in zwei Dimensionen gezeigt, von der ehemaligen KAM-Linie bleiben in diesem Beispiel 5 elliptische und 5 hyperbolische Fixpunkte. Die Bewegung um die elliptischen Fixpunkte ist wieder regulär (Inseln), und um die Separatrix und die instabilen Fixpunkte findet man Chaos.

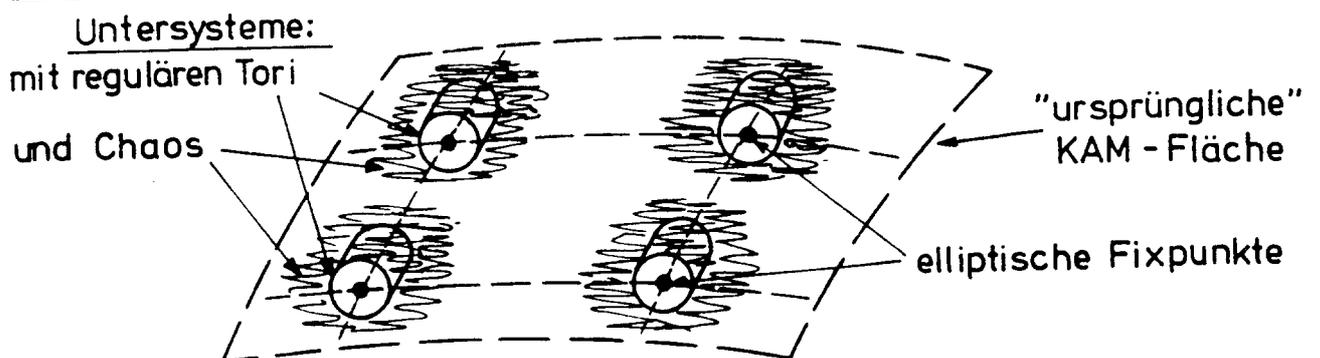
a.) 2 Dimensionen



b.) 4 Dimensionen-Fixlinien (Ausschnitt)



c.) 4 Dimensionen - Fixpunkte (Ausschnitt)



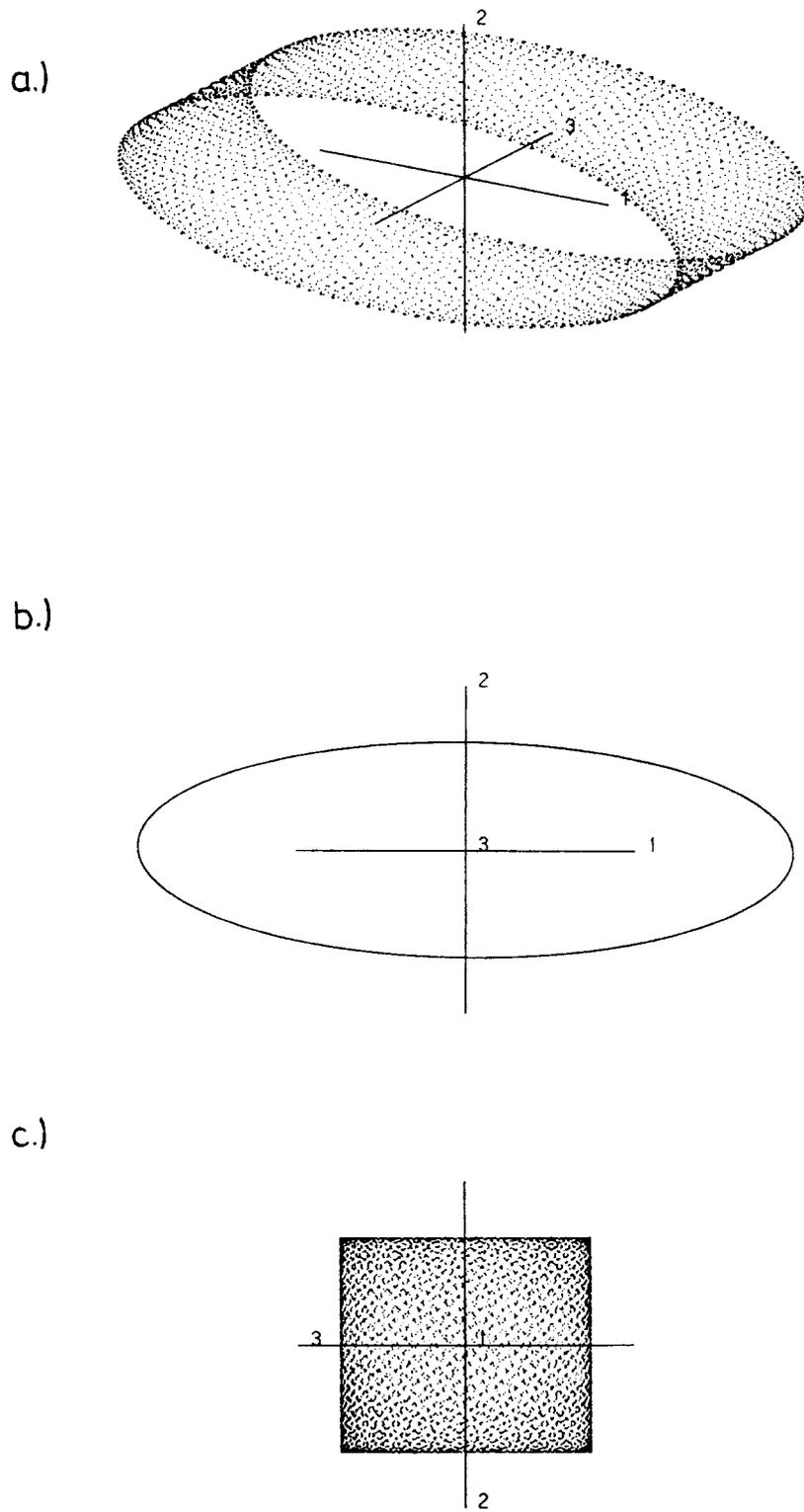
Figur 3.27: Schematische Darstellung des Aufbruchs von KAM-Tori in zwei und vier Dimensionen

Teil b zeigt den Aufbruch in vier Dimensionen in Bewegung um Fixlinien. Von der ursprünglichen KAM-Fläche verbleiben abwechselnd elliptische und hyperbolische Fixlinien (vergleiche Birkhoff-Poincaré-Theorem für 2 Dimensionen - Kapitel 2), um die die Bewegung auf zweidimensionalen Tori verläuft. Bei großem Abstand von dieser Fixlinie wird die Bewegung chaotisch.

Schließlich zerbricht die KAM-Fläche (Teil c), wenn eine Resonanzbedingung in beiden Phasenraumprojektionen gültig ist, in Untersysteme mit regulärer Bewegung in der Nähe der stabilen Fixpunkte und chaotischen Bereichen am Rande der Untersysteme.

3.5.1.1 Darstellung durch ein graphisches System

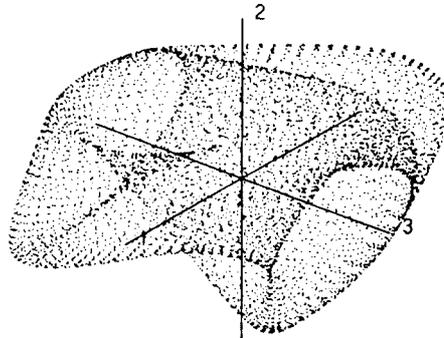
Zur Untersuchung des Phasenraums ist ein graphisches System verwendet worden, mit dem durch Drehung in Echtzeit dreidimensionale Projektionen des vierdimensionalen Phasenraums dargestellt werden können. Betrachten wir zum Beispiel einen Fall mit rein linearer Bewegung (Figur 3.28): Von den vier Koordinatenachsen sind drei abgebildet. $((x, x', z)$ entspricht $(1,2,3)$). Teil a zeigt den gedrehten Torus. Teil b (x, x') zeigt die Frontseite des Torus aus Teil a und Teil c (z, x') eine Seitenansicht dieses Torus. Die Bewegung in solchen dreidimensionalen Projektionen belegt den Torus doppelt. Diese Doppelbelegung entsteht dadurch, daß es für jeden z -Wert zwei z' -Werte gibt; bei z_{\min}^{\max} ist $z' = 0$ und bei $z = 0$ ist $z' = z'_{\min}^{\max}$. Die Nichtlinearitäten führen nun dazu, daß diese zwei aufeinanderliegenden Schichten voneinander getrennt werden und die zweidimensionale KAM-Fläche auf komplizierte Art verformt wird. Figur 3.29 zeigt ein Beispiel einer verformten KAM-Fläche: Teil a zeigt wieder eine gedrehte Projektion, während Teil b (x, x') die Front und Teil c (z, x') eine Seitenansicht dieses Torus wiedergibt. Schließlich kann die Farbe als vierte Koordinate verwendet werden. Hiermit hat man die Möglichkeit, z.B. die Doppelbelegung des Torus deutlich zu machen. Mit Figur 3.30 möchte ich dies skizzieren:



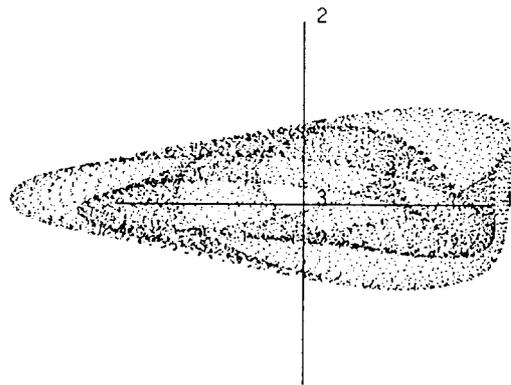
Figur 3.28: Dreidimensionale Projektionen von linearer Bewegung ohne Kopplung

Die Achsenbezeichnungen (1, 2, 3) entsprechen den Koordinaten (x, x', z) .

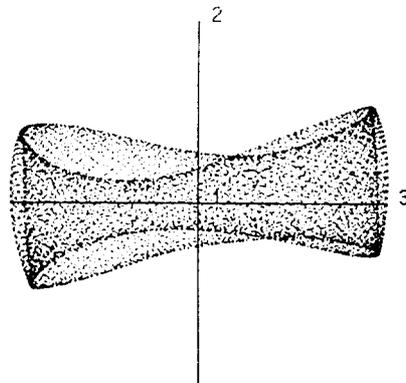
a.)



b.)



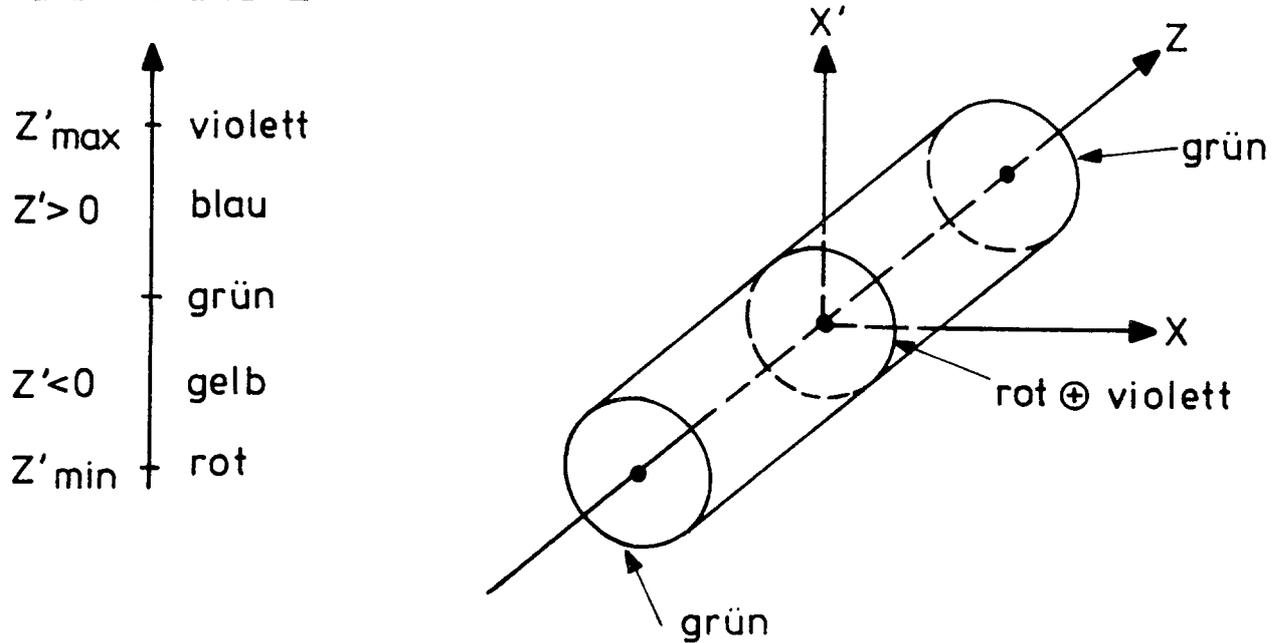
c.)



Figur 3.29: Dreidimensionale Projektion von regulärer Bewegung mit Kopplung (HERA, alle Multipole)

Die Achsenbezeichnungen (1, 2, 3) entsprechen den Koordinaten (x, x', z) .

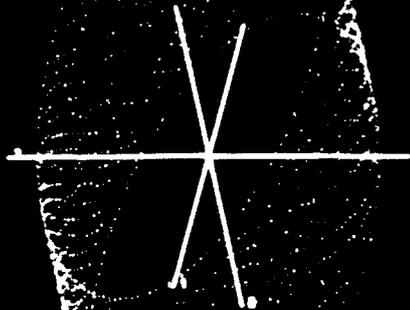
Farbskala für Z'



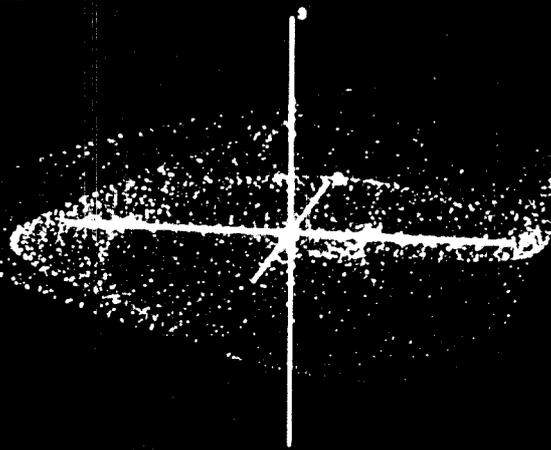
Figur 3.30: Darstellung der vierten Koordinaten durch Farbe

An den Enden des linearen Torus ($z_{\max} \rightarrow z' = 0$) sind die Einträge grün, in der Mitte bei ($z = 0 \rightarrow z'_{\max}^{\min}$) gibt es rote und violette Einträge. Die Doppelwändigkeit des Torus läßt sich natürlich dann gut zeigen, wenn diese Schichten durch starke Nichtlinearitäten getrennt werden. Figur 3.31 zeigt einige Beispiele solcher dreidimensionaler Projektionen mit Farbinformationen: neben der rein linearen Bewegung, wird ein reguläres Beispiel gezeigt, bei dem deutlich die violette und rote "Nase" also die Ablösung der beiden Schichten zu sehen ist; zwei Beispiele von regulärer Bewegung um Fixlinien werden gezeigt, einmal für horizontale und vertikale Bewegung, zum anderen für horizontale Bewegung mit Synchrotronschwingungen. An diesen beiden Beispielen läßt sich entlang der Bänder gut die Änderung der vierten Koordinate ablesen. Schließlich werden zwei chaotische Fälle gezeigt. Im ersten Fall verläuft die Bewegung am Rande eines Untersystems um Fixpunkte, im zweiten entlang einer Fixlinie.

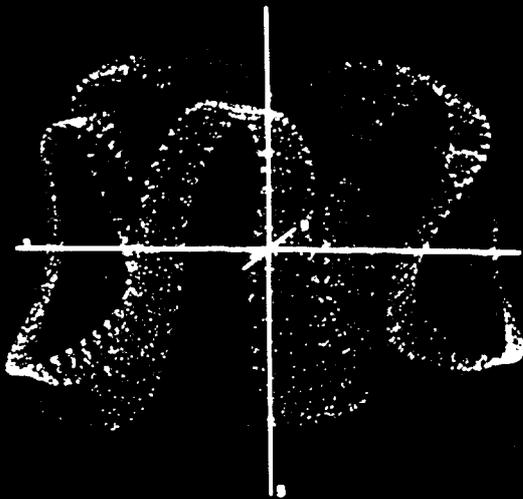
a



b



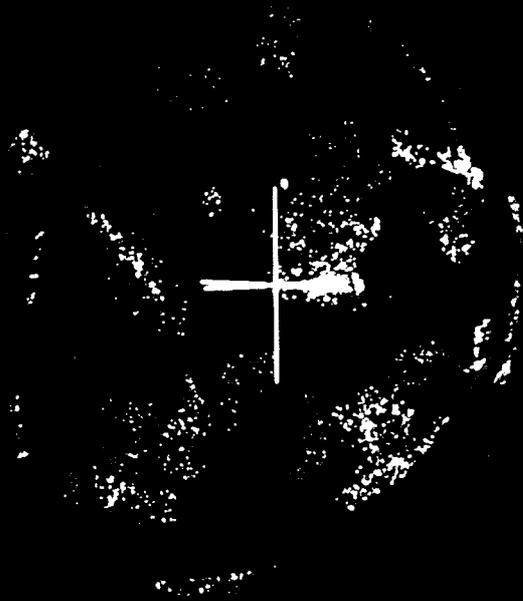
c



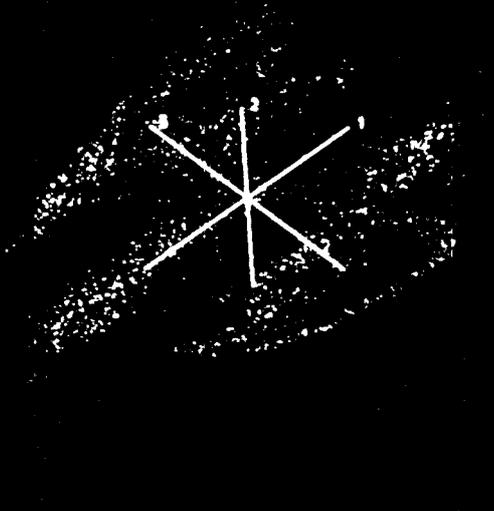
d



e



f



3.5.1.2 Nachweis des Aufbruchs eines KAM-Torus

Im folgenden soll untersucht werden, wie man reguläre Bewegung auf KAM-Tori von der regulären Bewegung um Fixpunkte (Linien) unterscheiden kann. Zunächst möchte ich Simulationen in vier Dimensionen behandeln. Für die Beispiele von Bewegung um Fixlinien in Figur 3.31 ist der Aufbruch offensichtlich, er läßt sich in den Phasenraumprojektionen ohne weitere Untersuchungen feststellen. Schwierig zu beurteilen sind aber Fälle, bei denen der KAM-Torus gerade eben aufgebrochen ist. Für solche Fälle sind die nachfolgenden Untersuchungen gedacht, dies gilt im besonderen Maße für sechsdimensionale Simulationen, denn dort ist ein Aufbruch besonders schwierig nachzuweisen. Am einfachsten läßt sich diese Unterscheidung treffen, wenn zweidimensionale Projektionen von Koordinaten verschiedener Bewegungsrichtungen untersucht werden, also z.B. jeweils Teil c von den Figuren 3.28, 3.29. Wegen der Doppelwandigkeit des Torus ist aber die Überlappung von vier Schichten zu sehen. Um den Aufbruch sicher feststellen zu können, darf nur eine Schicht vorhanden sein. Dies kann erreicht werden, indem die Koordinaten auf positive Werte eingeschränkt werden. In Kauf nehmen muß man dabei, daß die Anzahl der Simulationsdaten sich reduziert. Für die Untersuchungen wurde folgender Schnitt gewählt:

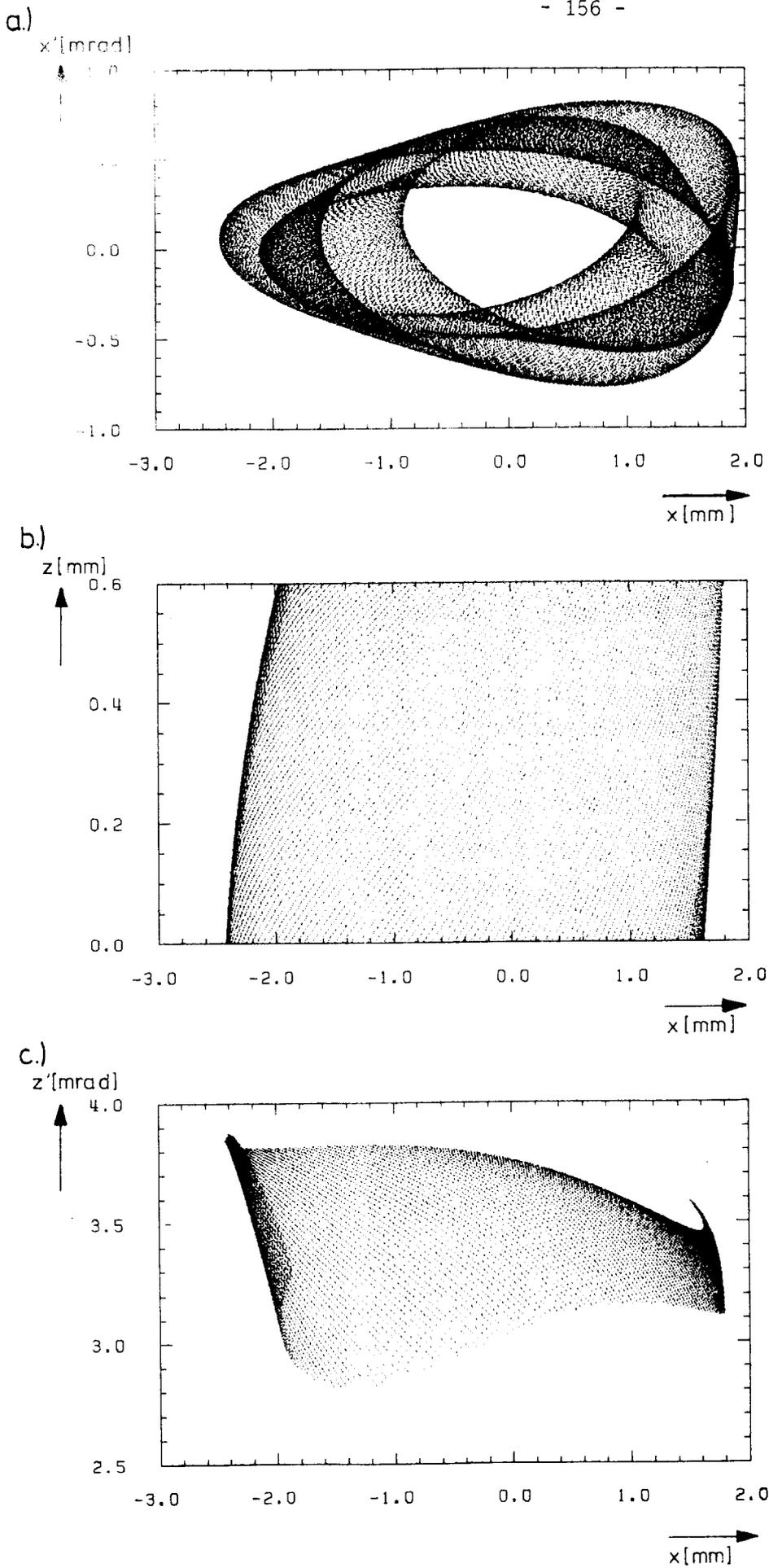
$$0 \leq z \leq 0,6 \text{ mm}; \quad 0 \leq z'; \quad 0 \leq x' \quad (3.27)$$

Wenn in dieser Schicht kein Aufbruch vorliegt, wird sie gleichmäßig mit Punkten bedeckt. Ist jedoch die Fläche aufgebrochen, so werden Teilbereiche der "ursprünglichen" KAM-Fläche nicht belegt. Die Bewegung auf den um die Fixlinien zentrierten neuen Flächen führt zu scheinbaren Überschneidungen der Trajektorien, wenn man Phasenraumprojektionen betrachtet, bei denen die Koordinaten auf positive Werte eingeschränkt sind.

Gemäß Kapitel 1.2.1 sind natürlich echte Überschneidungen von Trajektorien verboten.

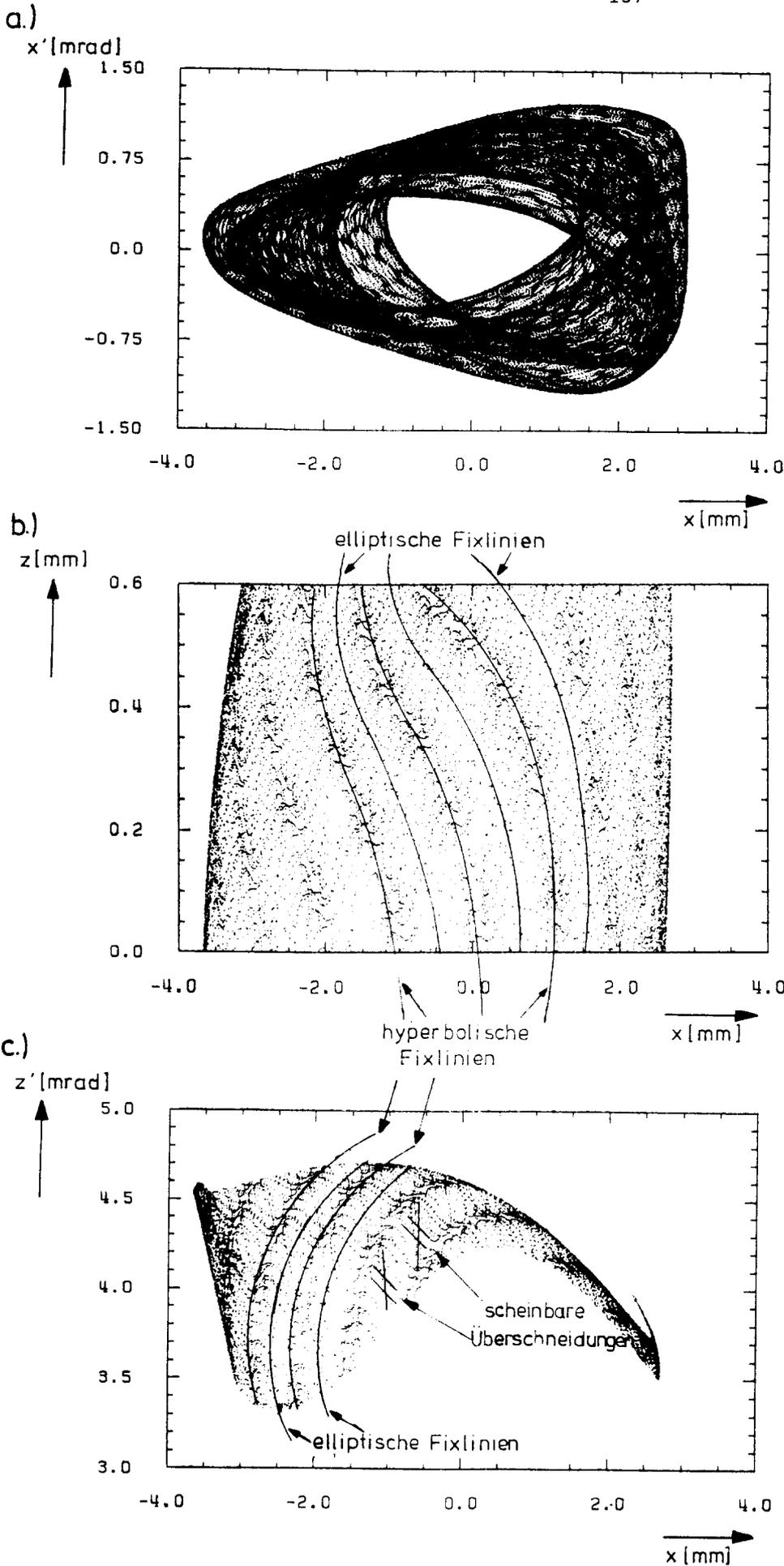
Die KAM-Flächen von regulärer Bewegung werden im allgemeinen dicht belegt. Figur 3.32 zeigt ein Simulationsbeispiel mit der horizontalen Phasenraumprojektion (Teil a), den Projektionen (z,x) (Teil b) und (z',x) (Teil c). Über 300 000 Umläufen wurden in den Projektionen die Flächen immer dichter aufgefüllt und es gibt keine Anzeichen eines Aufbruchs. Es gibt aber Grenzfälle, bei denen auch nach sehr hohen Umlaufzahlen Teilbereiche der KAM-Flächen frei bleiben. Dann wird es schwierig zu entscheiden, ob ein Aufbruch vorliegt.

Figur 3.33 zeigt ein Beispiel bei dem die KAM-Fläche gerade eben aufgebrochen ist und die Bewegung chaotisch zwischen den Tori um die elliptischen Fixlinien hin- und herpendelt. Vor allem in Teil c) lassen sich die oben erwähnten scheinbaren Überschneidungen erkennen, die eben daher rühren, daß die Bewegung auf Tori um elliptische Fixlinien verläuft. Wie in zwei Dimensionen lassen sich auch hier die hyperbolischen Fixlinien an einer Anhäufung der Simulationsdaten erkennen, zudem verlaufen die Trajektorien dort in komplizierter Weise. Innerhalb der erwähnten scheinbaren Überschneidungen verlaufen die elliptischen Fixlinien, dort ist die geringste Punktdichte festzustellen. Die scheinbaren Schnittpunkte der Trajektorien können nun genutzt werden, um reguläre Bewegung um elliptische Fixlinien zu finden. Zu diesem Zweck wird als Startpunkt einer neuen Simulation der Mittelpunkt der kürzesten Verbindungsstrecke der sich scheinbar kreuzenden Trajektorien gewählt. Damit ergibt sich die in Figur 3.34 gezeigte reguläre Bewegung um die elliptischen Fixlinien.



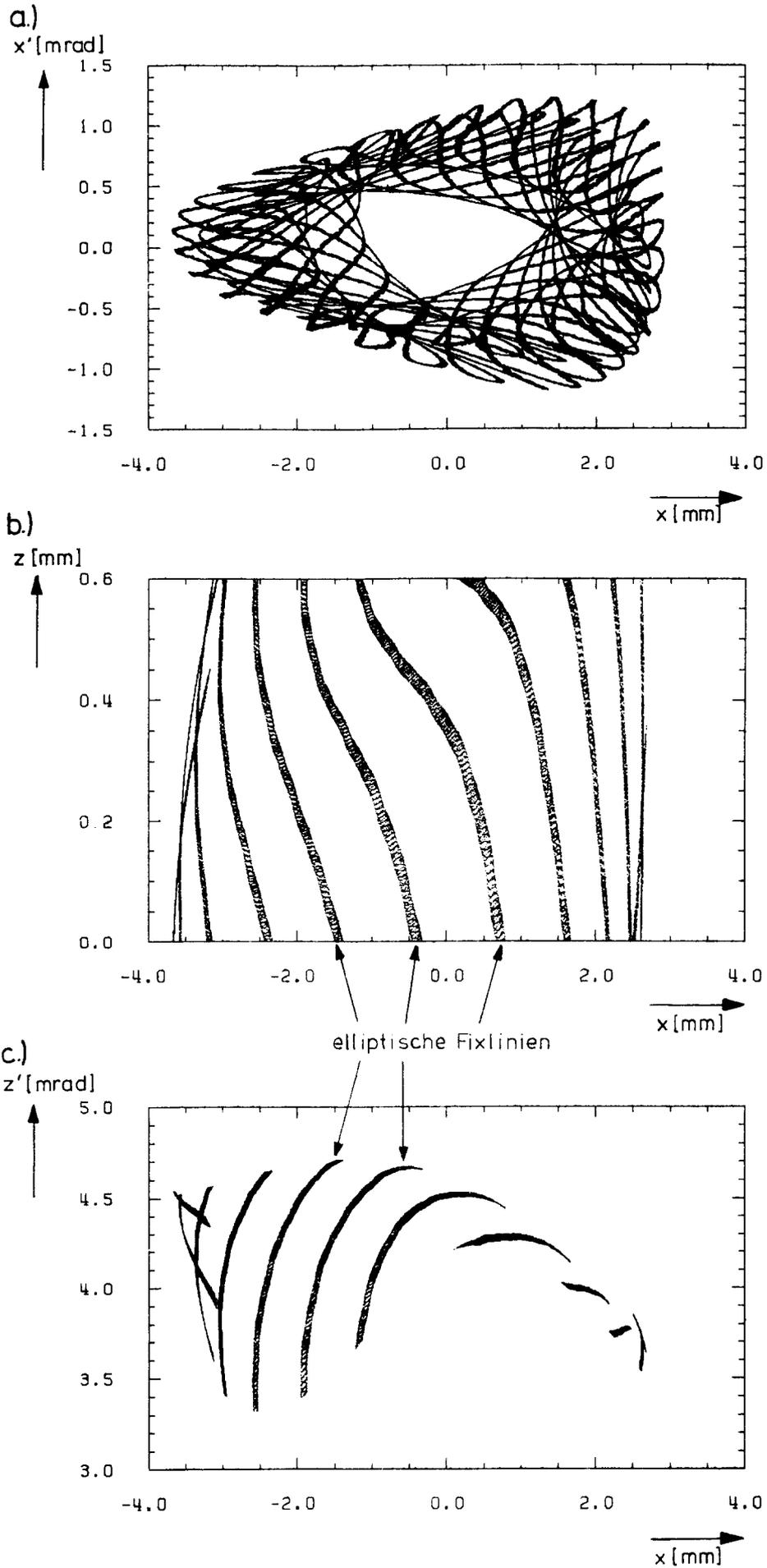
Figur 3.32: Detailuntersuchung eines regulären Torus

In den Schnitten (Teil b,c) der horizontalen Phasenraumprojektion (Teil a) zeigen sich bis zu einer Umlaufzahl von 300 000 keine Anzeichen eines Aufbruchs



Figur 3.33: Detailuntersuchung eines chaotischen Falles in der Nähe von hyperbolischen Fixlinien

In den Schnitten b, c lassen sich die hyperbolischen Fixlinien an der Häufung der Simulationsdaten und dem komplizierten Verlauf der Trajektorien erkennen. Dazwischen liegen die elliptischen Fixlinien, dort wo die Punktdichte gering ist und die Trajektorien sich scheinbar überschneiden.



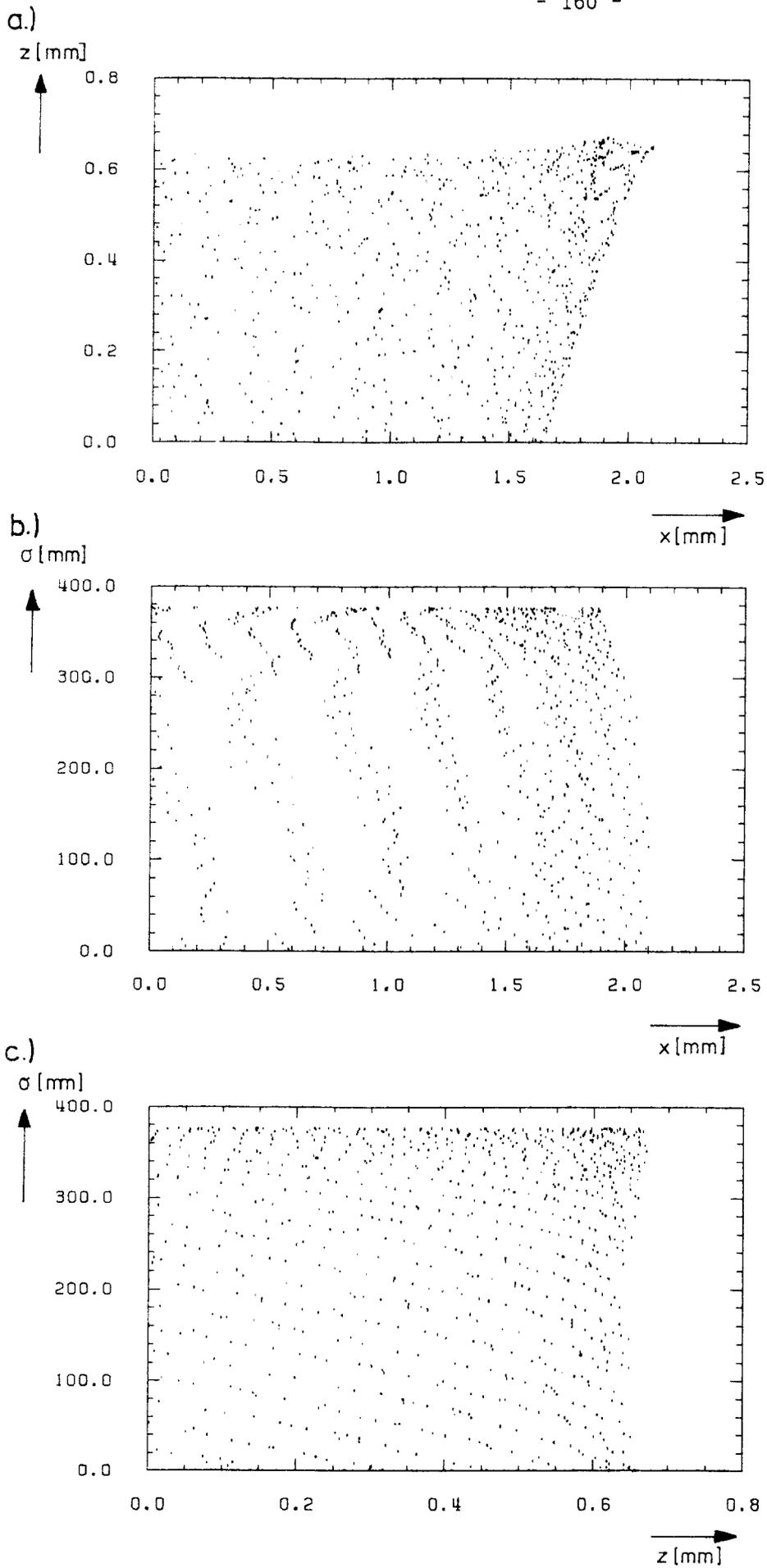
Figur 3.34: Reguläre Bewegung in der Nähe elliptischer Fixlinien

In der Nähe der elliptischen Fixlinien von Figur 3.33 ist die Bewegung auf regulären Tori um diese Fixlinien herum.

3.5.2 Sechsdimensionale Bewegung

Bei der sechsdimensionalen Bewegung sind die KAM-Tori bereits dreidimensional. Analog zur vierdimensionalen Bewegung erwartet man nun den Aufbruch der KAM-Tori, je nachdem wie viele Resonanzbedingungen in den verschiedenen Phasenraumprojektionen gegeben sind, in dreidimensionale Bereiche um Fixflächen, Fixlinien oder Fixpunkte. Neben der enormen Komplexität des nun mehr sechsdimensionalen Phasenraums gibt es hier bei der Detailuntersuchung ein weiteres Problem. Während in vierdimensionalen Fällen lediglich Flächen aufgefüllt werden und sich somit schnell eine erkennbare Struktur abzeichnet, müssen nun Volumina angefüllt werden, so daß sehr viele Umläufe gerechnet werden müssen, bevor sich Strukturen abzeichnen. Außerdem müssen 6 Koordinaten auf positive Werte eingeschränkt werden, wodurch sich die Datenmenge auf 1/64 reduziert.

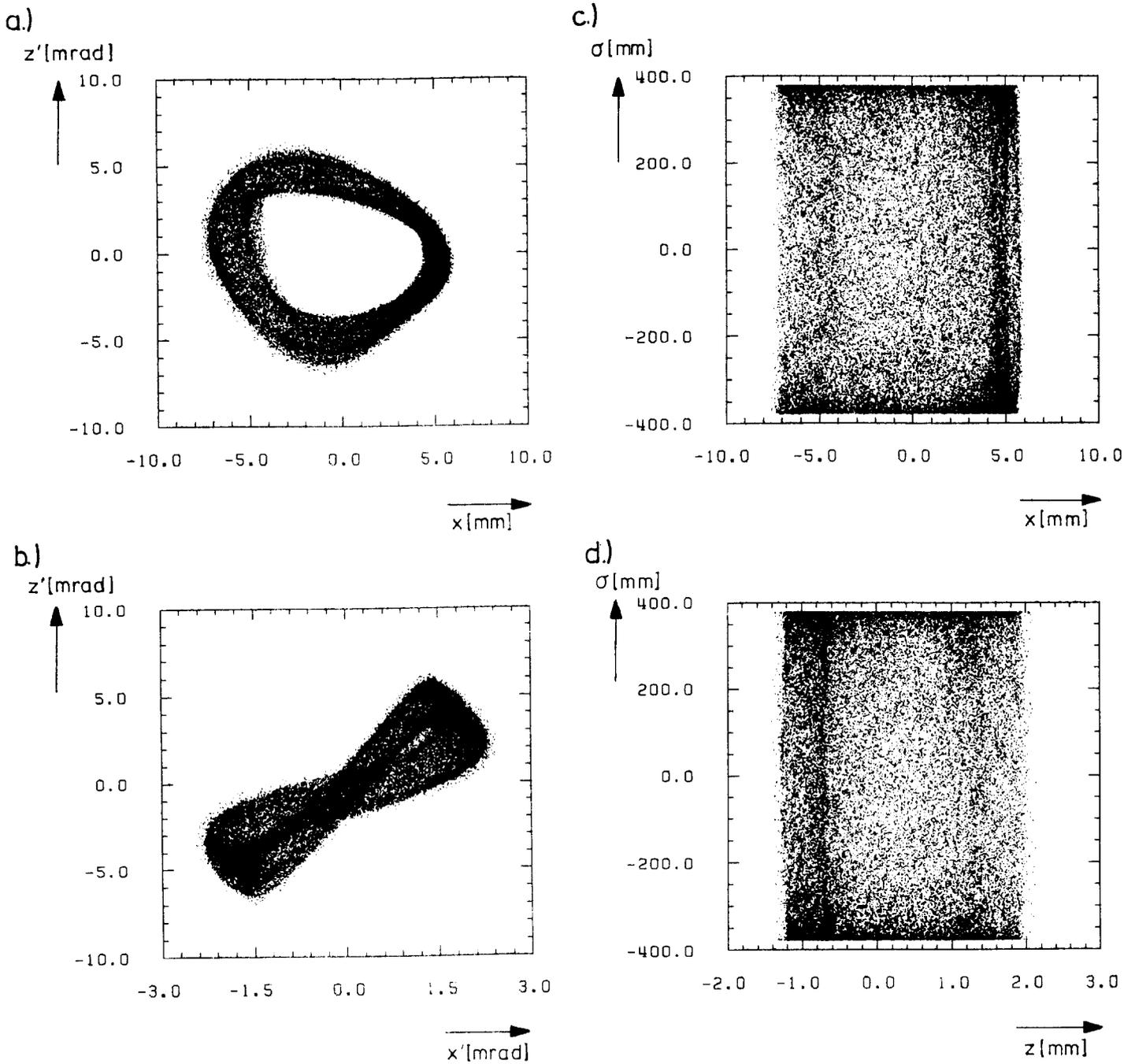
Von den 15 Projektionen der 6 Koordinaten reichen für die Untersuchungen in der Regel drei aus: z.B. (x,z) ; (σ,x) ; (σ,z) . Figur 3.35 zeigt diese drei Projektionen eines Simulationsbeispiels, bei dem kein Aufbruch festgestellt werden kann. Allerdings reichen die 781 Einträge (dies entspricht 50 000 Umläufen) vor allem in der Projektion (σ,x) nicht aus, um dies eindeutig zu klären.



Figur 3.35: Regulärer Fall einer sechsdimensionalen Bewegung
Bis zu einer Umlaufzahl von 50 000 zeigt sich kein Aufbruch des KAM-Torus.

Bei großen Amplituden, die tief in den chaotischen Bereich hineinführen, lassen sich Aufbrüche ohne besondere Schnitte erkennen. Figur 3.36 zeigt ein Beispiel, in dem eine Koppelresonanz der horizontalen und vertikalen Bewegung vorliegt, was an der bandartigen Struktur in Teil a,b zu erkennen ist. Es besteht jedoch keine Koppelresonanz, mit den Synchrotronschwingungen, die entsprechenden Phasenraumprojektionen c,d sind gleichmäßig belegt.

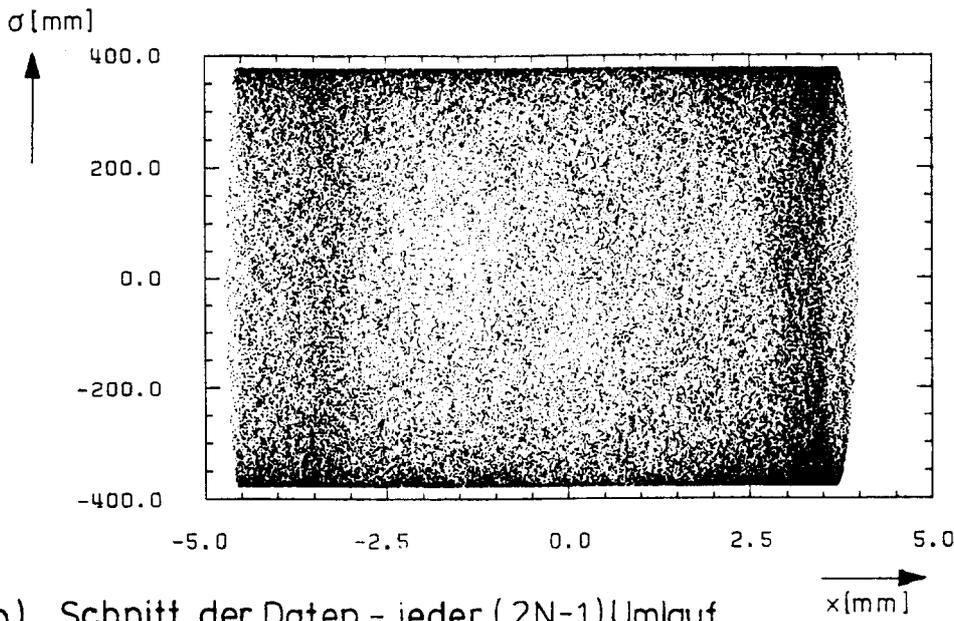
Sehr viel komplizierter wird es, in der Nähe der Grenze zwischen dem regulären Bereich und dem chaotischen Bereich (siehe Figur 2.4). Dort können Aufbrüche nur mittels der Einschränkung der Koordinaten auf positive Werte gefunden werden. Figur 3.37 zeigt ein solches Beispiel, dabei wird die Projektion (σ, x) untersucht. Teil a zeigt zunächst die Projektion (σ, x) ohne Einschränkung der übrigen Koordinaten, dabei ist keinerlei Aufbruch zu sehen; verlangt man positive Werte für die übrigen Koordinaten, so wird erkennbar, daß von Umlauf zu Umlauf (Teil b, c) die Einträge in voneinander getrennten Bereichen im Phasenraum liegen, mit einem schmalen Bereich, der im Phasenraum nicht erreicht wird.



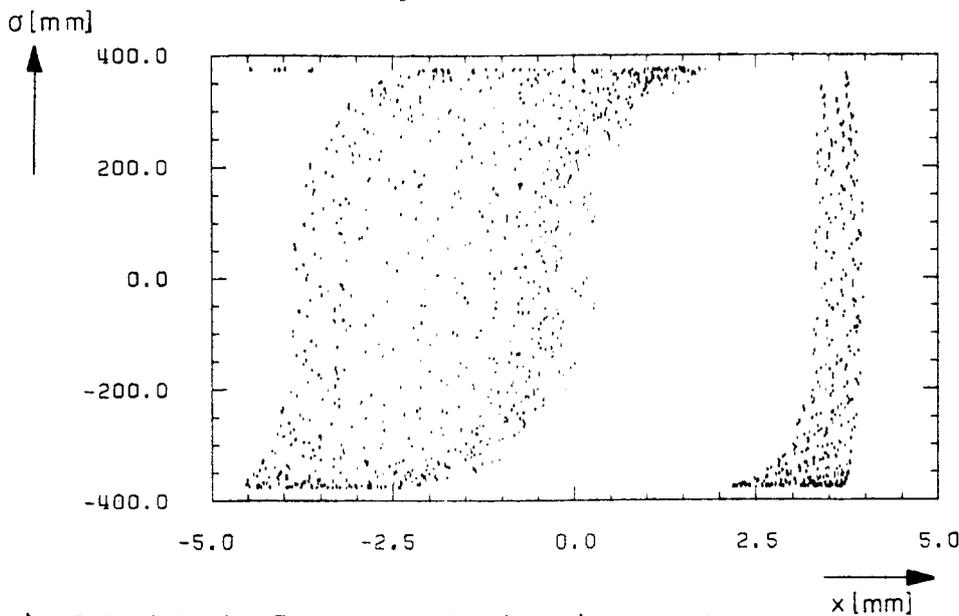
Figur 3.36: Chaotischer Fall einer sechsdimensionalen Bewegung

An der Bandstruktur (Teil a,b) ist zu erkennen, daß eine Koppelresonanz der horizontalen und vertikalen Bewegung vorliegt, während zwischen den anderen Schwingungsebenen (Teil c,d) keine Resonanzbedingung erfüllt ist.

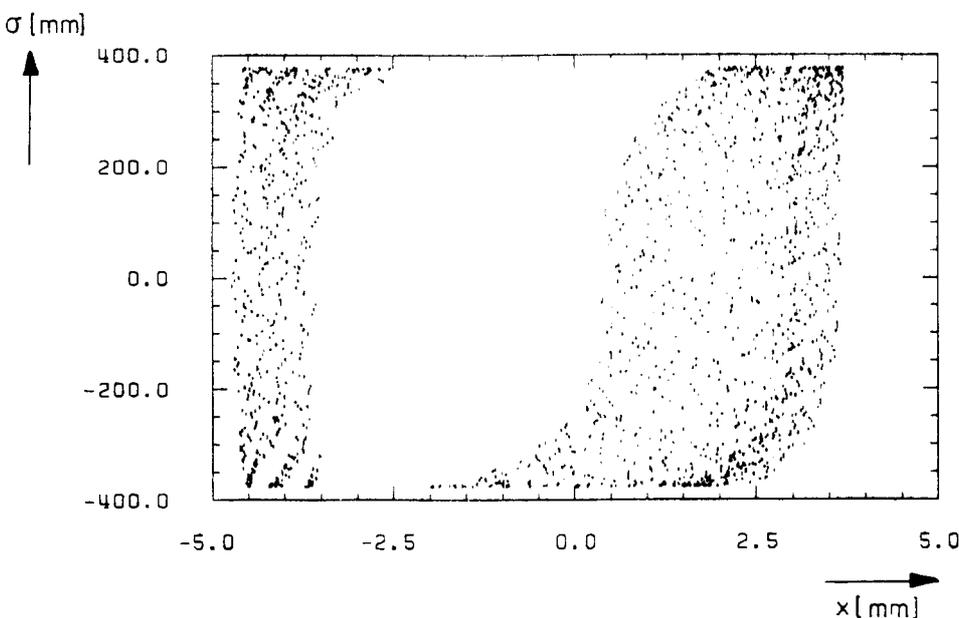
a.) Ohne Datenreduktion



b.) Schnitt der Daten - jeder $(2N-1)$ Umlauf



c.) Schnitt der Daten - jeder $(2N)$ Umlauf



Figur 3.37:
Beispiel eines gerade
eben aufgebrochenen
KAM-Torus in sechs
Dimensionen

In der Projektion (σ, x) (Teil a) ist ohne die Einschränkung der übrigen Koordinaten auf positive Werte kein Aufbruch feststellbar. Erst eine solche Einschränkung (Teil b,c) läßt erkennen, daß die Bewegung auf zwei Untersystemen verläuft, zwischen denen die Bewegung von Umlauf zu Umlauf wechselt.

3.6 Konsequenzen für die Bestimmung der dynamischen Akzeptanz

Die Voraussetzungen sind jetzt gegeben, die dynamische Akzeptanz als die Grenze zwischen dem regulären Bereich und dem Resonanzüberlappbereich zu bestimmen. Dabei muß aber abgeschätzt werden, wie stark die Arnold-Diffusion ist. Denn die Existenz dieser Diffusion verhindert, daß eine exakte Akzeptanzgrenze für Simulationen mit mehr als zwei Freiheitsgraden (Poincaré-"Fläche" mindestens vierdimensional) angegeben werden kann. Die Untersuchungen werden in drei Schritten durchgeführt:

1. Zunächst werden die Amplituden in groben Schritten variiert, um den Resonanzüberlappbereich grob abzugrenzen. Die Emittanzen werden dabei so geändert, daß ihr Verhältnis $K = \frac{\epsilon_{z0}}{\epsilon_{x0}}$ konstant bleibt. Dabei soll für einige größere Amplituden bis zum Teilchenverlust simuliert werden. So erhält man die Umlaufzahl bis zum Teilchenverlust als Funktion der Amplitude. Die so gewonnene Kurve läßt sich grob auf kleinere Amplituden extrapolieren, bei denen eine zu hohe Umlaufzahl nötig wäre, um ein Teilchenverlust festzustellen. Die maximalen Umlaufzahlen ohne Teilchenverlust im Resonanzüberlappbereich stellen eine untere Grenze für die Umlaufzahlen im regulären Bereich dar, bis zu denen kein Teilchenverlust durch Arnold-Diffusion eintritt.

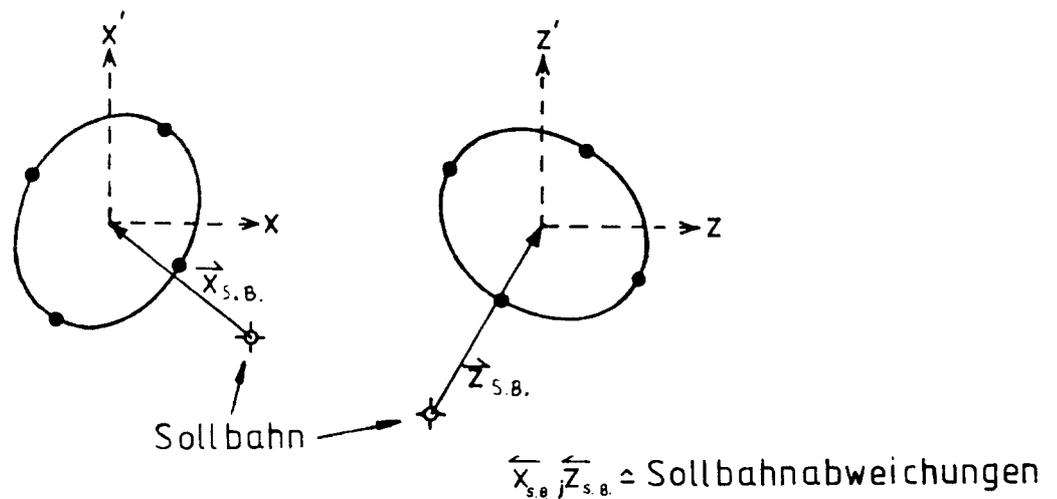
2. In der Nähe der größten Amplituden, bei denen die Bewegung sich im ersten Schritt als regulär erwiesen hat, werden nun in feiner Schrittweite die Amplituden variiert und nach den im Abschnitt 3.4.1.3 angegebenen Verfahren wird die Bewegung auf chaotisches Verhalten untersucht. Der reguläre Simulationslauf mit maximalen Startamplituden wird zur Definition der Akzeptanzgrenze benutzt. Natürlich muß, wie im vorigen Abschnitt beschrieben, im Phasenraum sichergestellt werden, daß es sich tatsächlich um einen unaufgebrochenen KAM-Torus handelt. Schließlich kann am Verhältnis der regulären zu chaotischen Fällen innerhalb dieser Grenze grob abgeschätzt werden, wie groß der chaotische Anteil im regulären Bereich ist. Damit hat man ein grobes Maß für das Phasenraumvolumen, das durch Arnold-Diffusion verloren gehen kann.

3. Sind chaotische Bereiche innerhalb des regulären Bereiches gefunden worden, so kann man mit Simulationsläufen mit sehr großer Umlaufzahl testen, ob eine Amplitudenvergrößerung und somit Arnold-Diffusion stattfindet. Wiederum muß der reguläre Simulationslauf bei größeren Amplituden auf einen unaufgebrochenen KAM-Torus verlaufen. Nur das "Überwinden" eines solchen KAM-Torus (in vier- und sechsdimensionalen Poincaré-"Flächen" ist dies stets möglich) ist als Arnold-Diffusion zu bezeichnen.

3.7 Gegenüberstellung der Simulationen über kurze Umlaufzahlen und der Langzeitsimulationen

Die bisherigen Akzeptanzuntersuchungen mit RACETRACK (A. Wrulich /2/) sind über eine geringe Umlaufzahl (100) und mehreren Teilchen (16) durchgeführt worden. In diesem Abschnitt möchte ich die unterschiedlichen Anwendungsbereiche dieser Methode im Vergleich mit den Langzeitsimulationen mit einem Teilchen angeben und erläutern, warum die Ergebnisse dieser beiden Methoden nur schwer zu vergleichen sind.

Mit den Kurzzeitsimulationen sollen am DESY-Rechner (IBM-3081) in vertretbaren Zeiten (3 Minuten Jobs) eine grobe Akzeptanzbestimmung durchgeführt werden. Für 16 Teilchen, deren Verteilung in den Projektionen des Phasenraumes in Figur 3.38 dargestellt ist, werden dafür jeweils 100 Umläufe simuliert.



Figur 3.38: Verteilung der 16 Teilchen auf den Ellipsen der Phasenraumprojektionen

Mit dieser Methode lassen sich die Einflüsse starker Resonanzen auf die Akzeptanz feststellen, verschiedene Optiken lassen sich schnell vergleichen, und Kompensationen starker Resonanzen (F. Schmidt /20/) können leicht durchgeführt werden.

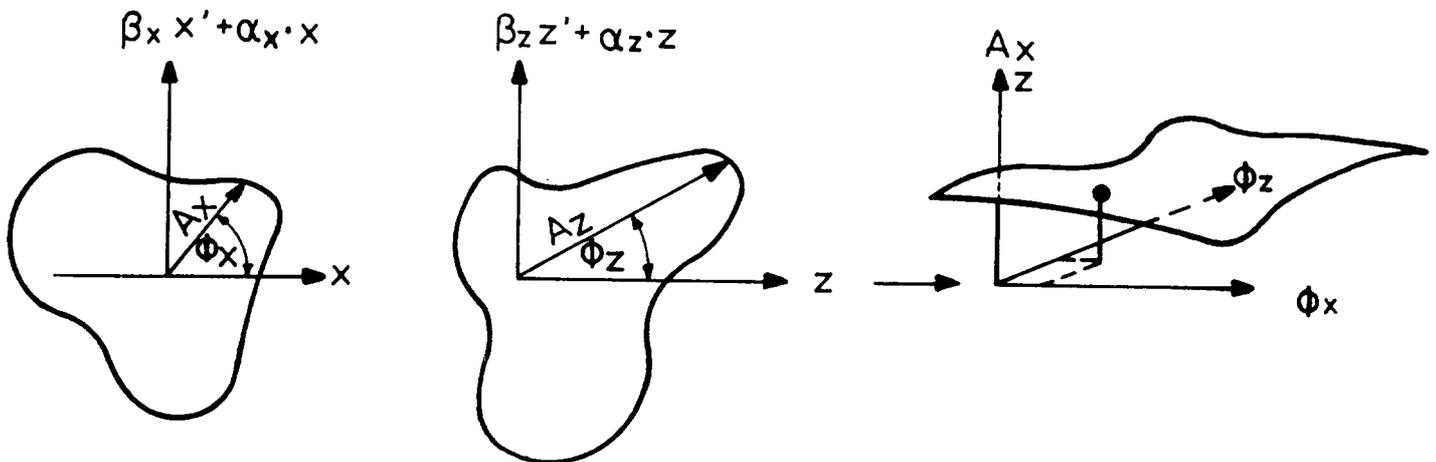
In der vorliegenden Arbeit sollen auch schwache Effekte der Nichtlinearitäten berücksichtigt werden und eine genaue Akzeptanzbestimmung gemäß Abschnitt 3.6 durchgeführt werden. Dazu wird nur ein Teilchen* über eine möglichst große Umlaufzahl ($\leq 10^6$) verfolgt. Die sehr rechenzeitaufwendigen Simulationen konnten mit den Emulatoren 370 E durchgeführt werden (≤ 300 h). Bei diesen Simulationen werden die Koordinaten bei jedem Umlauf abgespeichert, um eine Nachverarbeitung zu ermöglichen.

Bei den Kurzzeitsimulationen werden die 16 Teilchen mit konstantem Emittanzverhältnis $K_0 = \frac{\epsilon_{z0}}{\epsilon_{x0}}$ gestartet. Eines der 16 Teilchen wird bei den Langzeituntersuchungen verwendet. Im Verlaufe der Bewegung ist dieses ein Teilchen im gesamten Winkelbereich $0 \leq \phi_x(\phi_z) \leq 2\pi$ zu finden. Jedes dieser Punkte kann als Startpunkt der Trajektorie betrachtet werden. Da der Einfluß der Nichtlinearitäten an der Akzeptanzgrenze sehr stark ist, ändert sich auch das Verhältnis $K(N) = \frac{\epsilon_z}{\epsilon_x}$ während der Simulation. Um die beiden Methoden vergleichen zu können, dürfen sich aber die Werte von $K(N)$ nur geringfügig von K_0 unterscheiden. Problematisch ist dabei, daß nicht alle 16 Stellen verglichen werden können auf Grund unterschiedlicher K -Werte. Weiterhin läßt sich unter der Bedingung $K(N) = K_0$ ein Minimum der Amplitude bei den Langzeitsimulationen finden, das sicher nicht an einer der 16 Stellen im Phasenraum liegen wird.

An dieser Stelle möchte ich die Entwicklung der Emittanzen und des Emittanzenverhältnisses K näher untersuchen.

*) nebst eines Zwillingsteilchens für die Bestimmung des Lyapunov-Exponenten

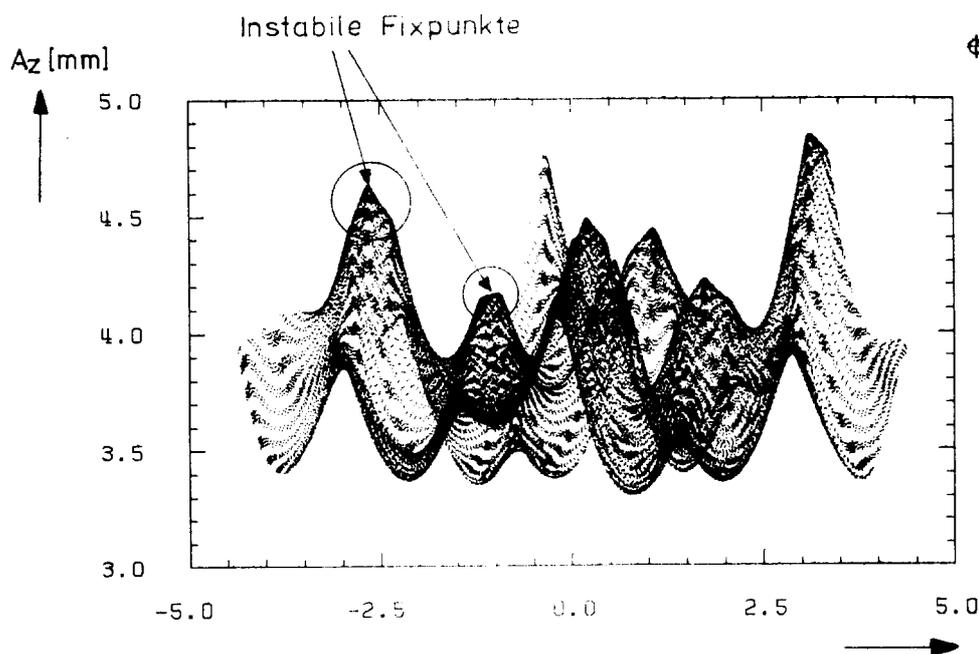
Dazu wird eine weitere Methode zur Veranschaulichung des vierdimensionalen Phasenraums eingeführt, ähnlich die Amplituden A_x , A_z als Funktion beider Winkel ϕ_x und ϕ_z aufzutragen:



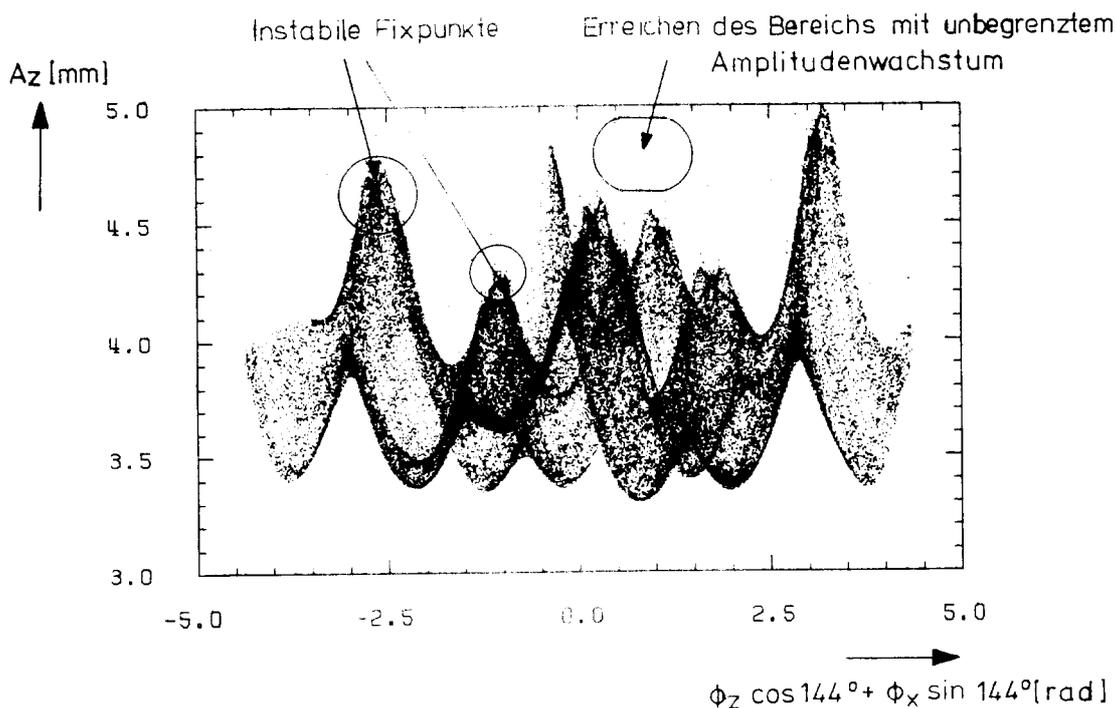
Figur 3.39: Die Amplituden A_x , A_z als Funktion der Winkel ϕ_x und ϕ_z

In vier Dimensionen bilden im regulären Fall die Amplituden eine durch Nichtlinearitäten zerklüftete Oberfläche, während im chaotischen Fall sich eine Schichtdicke um diese Oberfläche ergibt. Figur 3.40 zeigt im Vergleich einen regulären und chaotischen Fall (die Projektionsebene ist dabei um 144° verdreht). Deutlich sind in der Nähe der lokalen Maxima (das ist jeweils die unmittelbare Nähe instabiler Fixpunkte) im chaotischen Fall zusätzliche Einträge zu erkennen. Die vereinzelt Punkte bei noch größeren Amplituden zeigen das Erreichen des Bereiches ungegrenzten Wachstums an. Aber schon das diffuse und unstrukturierte Erscheinungsbild läßt das chaotische Verhalten erkennen. Die Amplituden der regulären und chaotischen Trajektorie unterscheiden sich nur geringfügig, der Resonanzüberlappbereich ist somit schmal. In Figur 3.41 sind die Amplituden der regulären (Teil a) und der chaotischen Bewegung (Teil b) und das Verhältnis der Emittanzen K (Teil c) im regulären Fall als Funktion von ϕ_x aufgetragen, wobei der Winkel ϕ_z auf ein kleines Winkelintervall ($\phi_z \approx 0$) eingeschränkt ist. Der chaotische Fall läßt sich bei dieser Auftragung deutlich durch das Auftreten von Inselstrukturen vom regulären Fall unterscheiden. Das Emittanzenverhältnis K schwankt um $+7$ bis -28% um den Startwert $K_0=1$. Damit wird deutlich, daß dieses

a.) Reguläre Bewegung



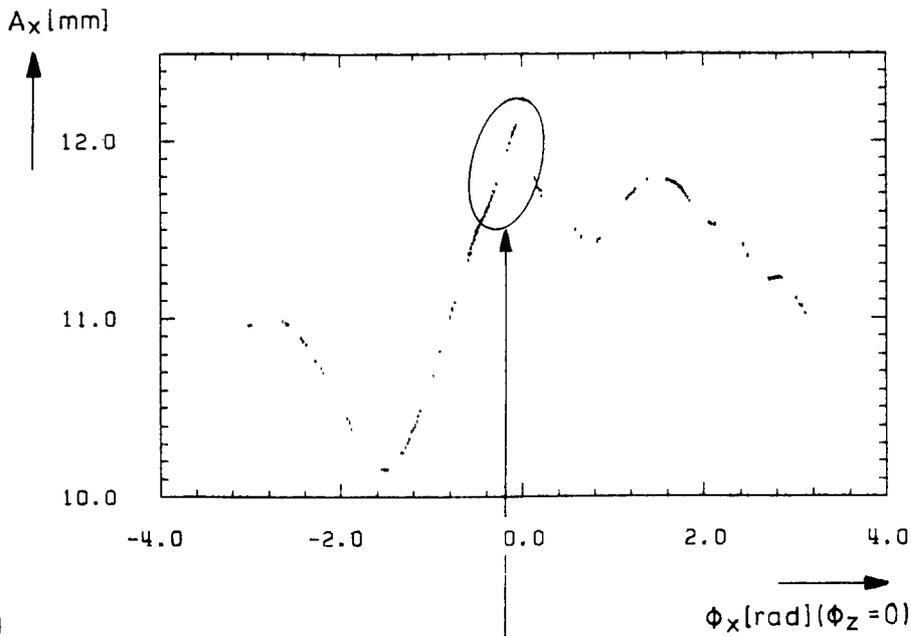
b.) Chaotische Bewegung



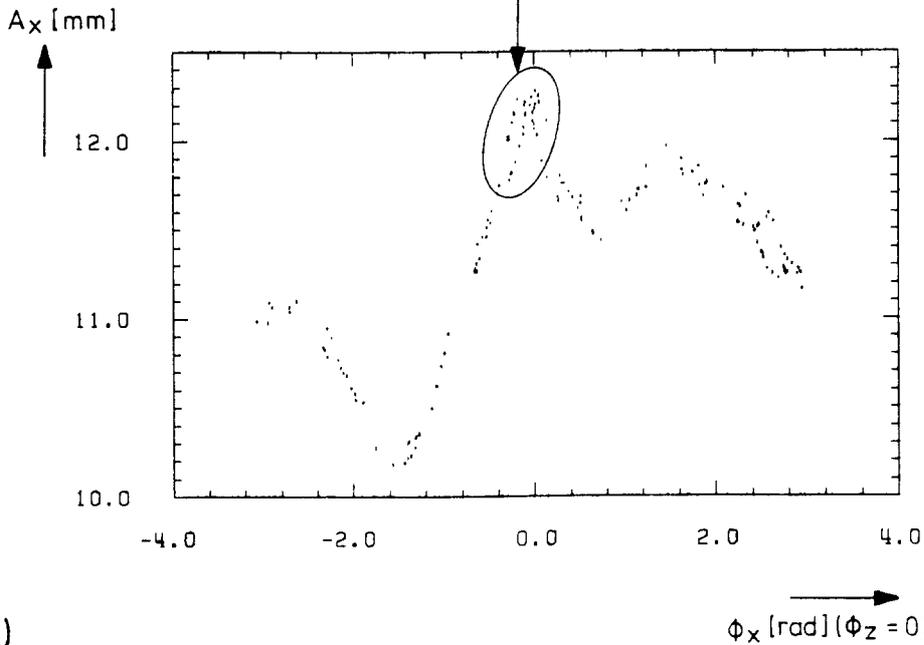
Figur 3.40: Amplitude A_z als Funktion der Winkel ϕ_x und ϕ_z

Teil a zeigt einen Fall der gerade noch regulär ist: der Verlauf der Oberfläche ist zwar zerklüftet, aber an der geordneten Belegung der Oberfläche läßt sich die reguläre Natur der Bewegung erkennen. Im chaotischen Fall (Teil b), bei etwas größerer Amplitude, wird die Oberfläche diffus belegt, bei den Maximalwerten der Amplitude (Nähe instabiler Fixpunkte) zeigen sich Simulationenanhäufungen. Schließlich wird der Bereich ungebundener Bewegung erreicht (vereinzelte Punkte bei noch größerer Amplitude).

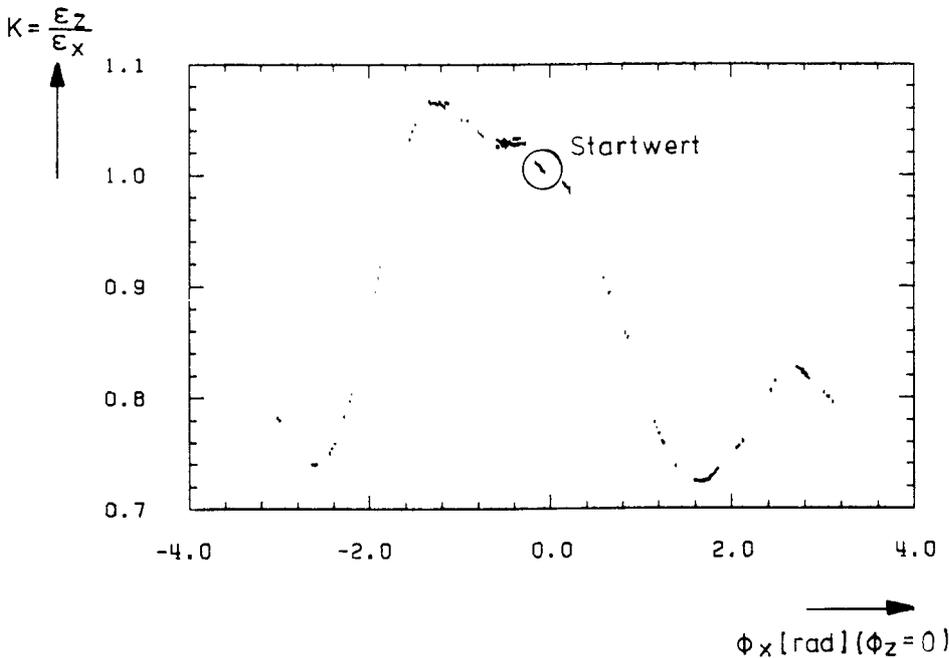
a.)



b.)



c.)



Figur 3.41:
Die Amplitude A_x und
das Emittanzver-
hältnis $K = \frac{\epsilon_z}{\epsilon_x}$ als
Funktion von ϕ_x

Im regulären Fall
(Teil a) liegen die
Amplituden A_x auf
einer Linie, während
im chaotischen Fall
(Teil b) die Linie
auf ein Band auf-
geweitet ist, in
dem reguläre Bewe-
gung um Fixpunkte
(Linien) umschlossen
werden. Teil c zeigt
die starke Variation
des Emittanzver-
hältnisses $K = \frac{\epsilon_z}{\epsilon_x}$ mit
der Phase ϕ_x

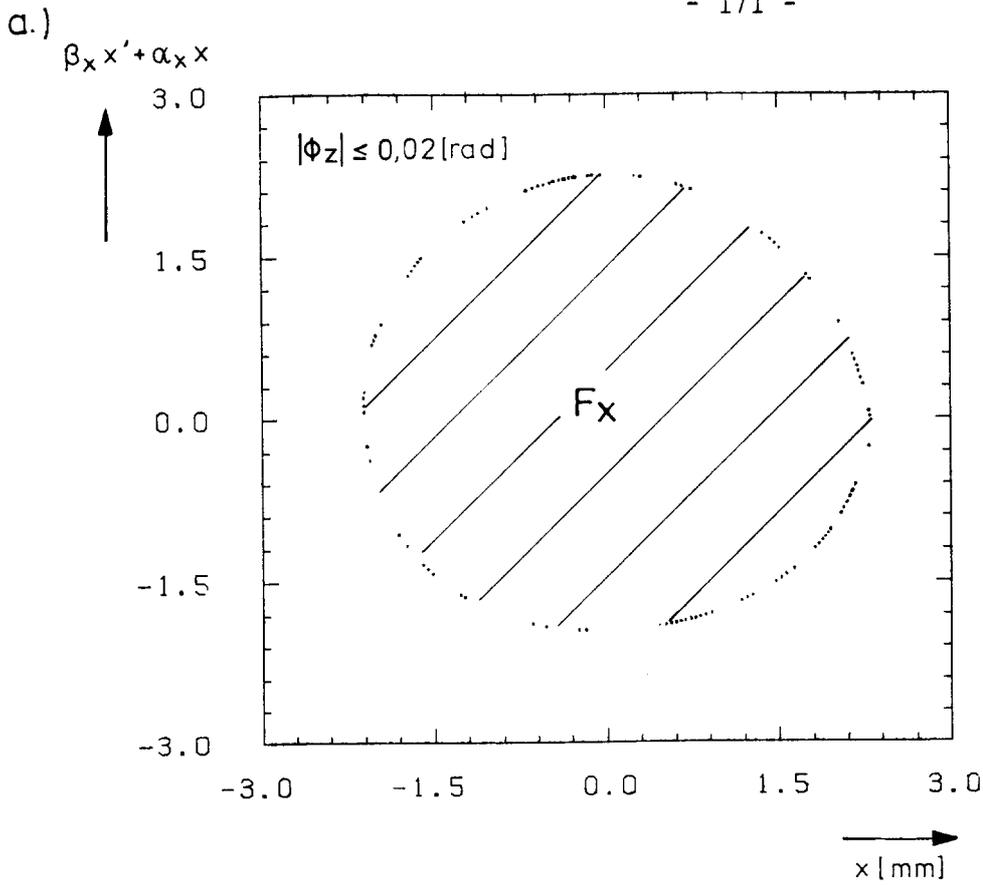
Emittanzenverhältnis K in der Nähe der Akzeptanzgrenze keine gute Näherung mehr für das Verhältnis der Invarianten $K_J = \frac{J_z}{J_x}$ ist. Die Invarianten J_x, J_z lassen sich wie folgt berechnen (R. Brinkmann, F. Willeke /11/).

$$\begin{aligned} J_x &= \frac{1}{2\pi} \oint d\phi_x \xi_x (\phi_x, \phi_z = \text{konstant}) \\ J_z &= \frac{1}{2\pi} \oint d\phi_z \xi_z (\phi_z, \phi_x = \text{konstant}) \end{aligned} \quad (3.28)$$

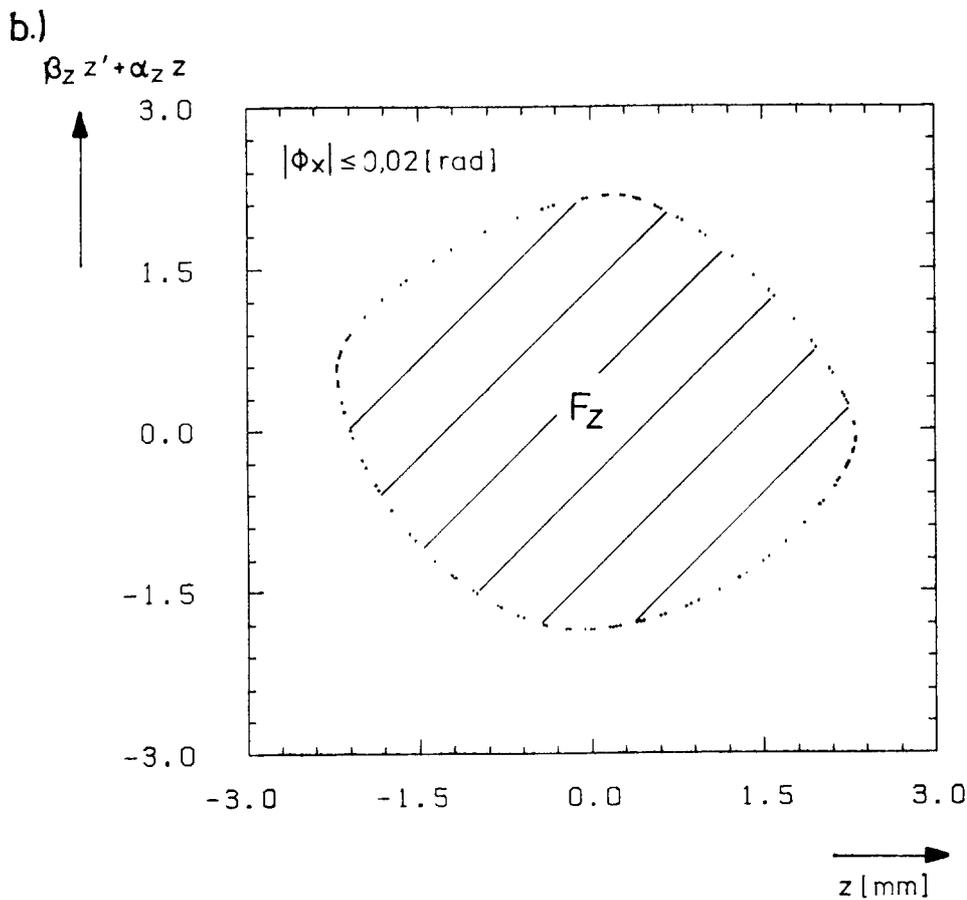
Natürlich führt die Integration in (3.28) nur in regulären Fällen zu sinnvollen Ergebnissen, da in chaotischen Bereichen diese Invarianten zerstört sind. Außerdem sind auch Bewegungen um Fixpunkte (-linien, -flächen etc.) auszuschließen, was am Beispiel der Differenzresonanz in Kapitel 1 sofort einzusehen ist. Ein Schnitt der Simulationsdaten wird nun durchgeführt durch Einschränkung von ϕ_x, ϕ_z der jeweils anderen Projektionen des Phasenraums auf ein kleines Winkelintervall, wie in Kapitel 1 beschrieben. Die Phasenraumprojektionen nach diesem Schnitt sind für den oben untersuchten regulären Fall in Figur 3.42a,b zu sehen. Mit diesen Simulationsdaten läßt sich mittels (3.28) die Invarianten J_x, J_z und ihr Verhältnis $K_J = 0,9008$ bestimmen. Also gibt es eine 10-prozentige Abweichung vom Anfangsemittanzenverhältnis $K_0=1$.

Wie die letzten Beispiele zeigen, lassen sich durch Nachverarbeitung eine Vielzahl von Untersuchungen vornehmen: Neben der oben erläuterten Akzeptanzbestimmung können Detailuntersuchungen des Phasenraums durchgeführt werden (siehe Abschnitt 3.5). Vor allem lassen sich so wichtige Größen wie die mittleren amplitudenabhängigen Phasenvorschübe und damit die Q-Werte bestimmen (siehe Kapitel 4, 5) und Vergleiche mit der Theorie (Kapitel 1, 2) lassen sich einfach durchführen.

Ganz wesentlich ist schließlich, daß die Abstände im Phasenraum zur Verfügung stehen, mit denen gemäß der in Abschnitt 3.4.1.3 vorgestellten Methode reguläre von chaotischer Bewegung unterschieden werden kann und damit eine gute Näherung einer Akzeptanzgrenze anzugeben ist. In Tabelle 3.2 möchte ich die Vor- und Nachteile der beiden Methoden zur Akzeptanzberechnung noch einmal zusammenfassen.



$$J_x = \frac{F_x}{2\pi} = 2,40 [\text{mm}^2]$$



$$J_z = \frac{F_z}{2\pi} = 2,16 [\text{mm}^2]$$

$$K_J = \frac{J_z}{J_x} = 0,9008$$

Figur 3.42: Bestimmung der Invarianten J_x, J_z

Die Invarianten J_x, J_z werden gemäß Gleichung (3.28) bestimmt. Damit kann das Verhältnis $K_J = \frac{J_z}{J_x}$ berechnet werden.

Tabelle 3.2: Vergleich der beiden Methoden, die Akzeptanzen zu bestimmen.

1. Methode: Akzeptanzermittlung mit einigen Teilchen und wenigen Umläufen		2. Methode: Ein einziger Satz vom Anfangs-koordinaten über viele Umläufe	
Vorteile	Nachteile	Vorteile	Nachteile
<p>Geringe Rechenzeit 3 min</p> <p>mehrere Teilchen: Deformation im Phasenraum wird berücksichtigt</p>	<p>Bei wenigen Teilchen nur dünne Belegung der Ellipsen in den Phasenraumprojektionen</p>	<p>Teilchen überstreicht bei großen Umläufen die gesamte KAM-Fläche -> Akzeptanzgrenze überall bestimmbar</p>	<p>sehr großer Rechenaufwand ≤ 300 h</p> <p>nur ein Teilchen</p> <p>aber: <--</p>
<p>Sehr einfach zu handhaben</p>	<p>Programm liefert nur Endkoordinaten und gibt Auskunft ob ein Teilchen stabil ist oder nicht</p>	<p>durch Nachverarbeitung: Phasenraumdetail-untersuchungen, Amplituden, Q-Werte, Rundungsfehler etc.</p>	<p>große Datenmenge Nachverarbeitung ist aufwendig</p>
<p>Anwendungsbereich:</p> <p>Schneller Vergleich verschiedener Optiken, Einfluß starker Resonanzen wird sichtbar.</p>		<p>regulärer Bereich kann gut von chaotischem Bereich unterschieden werden (Lyapunov-Exponent) präzise Akzeptanzbestimmung</p>	<p>genaue Akzeptanzbestimmung einer ausgereiften Optik, Bestimmung des Einflusses schwacher Resonanzen.</p>

Kapitel 4: HERA

4.1 Einführung

In diesem Kapitel möchte ich die in Kapitel 3 dargestellten Methoden anwenden, um eine Akzeptanzgrenze für den HERA-Protonenring zu bestimmen.

Dabei wird die Injektionsoptik untersucht. Dies ist der kritische Fall, da bei der Injektionsenergie von 40 GeV der Strahlquerschnitt wesentlich größer ist als bei der Endenergie von 820 GeV und somit die Nichtlinearitäten einen entsprechend größeren Effekt auf den Strahl ausüben.

Ursprünglich war geplant, die Protonen und Elektronen mit einem Kreuzungswinkel von 10,5 mrad in der Wechselwirkungszone kollidieren zu lassen (K. Steffen /21/). Dies hat Vorteile im Vergleich zu einer Maschine, bei der die Teilchen ohne Kreuzungswinkel aufeinander treffen, da man keine gemeinsamen magnetischen Elemente benötigt.

Das Konzept der Kreuzungswinkeloptik mußte jedoch verworfen werden, da durch diesen Kreuzungswinkel Synchrotronseitenbänder der Resonanzen der Strahlstrahlwechselwirkung angeregt werden, so daß kein resonanzfreier Arbeitspunkt im Q-Werte-Diagramm gefunden werden kann (A. Piwinski /22/). Es ist deshalb eine Optik ohne Kreuzungswinkel (Head-on-Optik) entwickelt worden (R. Brinkmann /23/).

Allerdings erfordert die Head-on-Optik eine Ablenkung der Elektronen in der Nähe der Wechselwirkungszone, wodurch eine erheblich größere Synchrotronstrahlung im Detektor auftritt. Man muß deshalb mit einem größeren Untergrund und einer stärkeren Strahlenbelastung des Detektors rechnen.

Die Entscheidung für die Head-on-Optik ist getroffen worden, als schon eine Reihe von Rechnungen mit der alten Optik durchgeführt

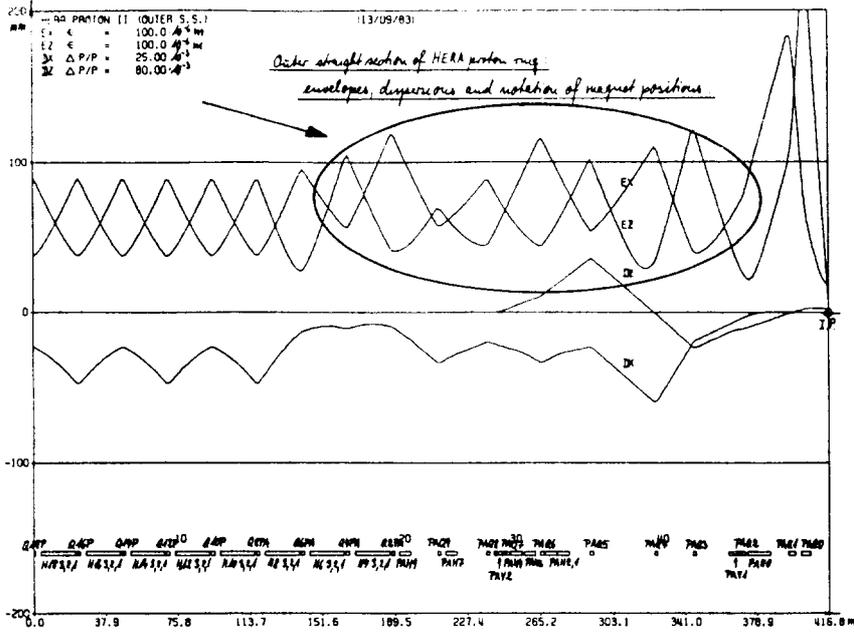
worden sind. Die durch diese Rechnungen gewonnenen Erkenntnisse lassen sich jedoch ohne Schwierigkeit qualitativ für den Fall ohne Kreuzungswinkel übertragen.

Beide Optiken lassen sich nur schlecht vergleichen, da für die Head-on-Optik ein großer Aufwand gestrichen worden ist, die Verläufe der Beta- und Dispersionsfunktionen in der Wechselwirkungszone zu optimieren, während die Kreuzungswinkeloptik noch einer solchen Optimierung bedurft hätte.

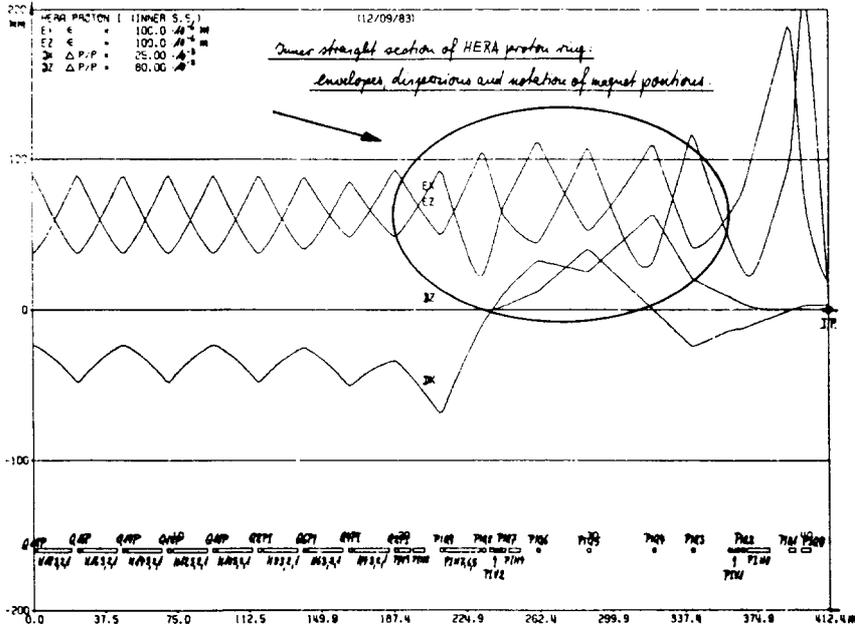
In Figur 4.1 sind die Verläufe der Beta- und Dispersionsfunktionen der alten und neuen Optik im Bereich der Wechselwirkungszone und den Rändern der Bögen im Vergleich zu sehen. In der Wechselwirkungszone und am Rand des Bogens der Head-on-Optik sind etwas geringere Auslenkungen zu großen Betafunktionswerten festzustellen, vor allem aber ist der Verlauf der Funktionswerte wesentlich periodischer. Dies hat zur Folge, daß die Resonanzen dritter Ordnung durch die Sextupole zur Chromatikkorrektur sehr schwach sind und eine Sextupolresonanzkompensation nicht notwendig ist. Bei der Resonanzkompensation für die nicht optimierte Optik mit Kreuzungswinkel ($F. Schmidt / 20$) hatte sie sich nämlich herausgestellt, daß die resonanztreibenden Terme dieser Resonanzen im wesentlichen von den Rändern der Bögen stammen, eben wegen des unperiodischen Verlaufs der dortigen Betafunktionen. Im übrigen Teil des Bogens heben sich die resonanztreibenden Terme gegenseitig auf, weil in diesem Bereich die Betafunktionsverläufe ganz periodisch sind und der Phasenverschiebung pro Zelle 90° beträgt. Die Sextupolresonanzen bei der Head-on-Optik sind sogar so schwach, daß selbst bei einem Q_x -Wert von 31.333333 die Resonanzen stabilisiert sind, wie Figur 4.2 für eine zweidimensionale Simulation zeigt.

Für die Head-on-Optik ist deshalb mit einer erheblichen besseren Akzeptanz zu rechnen im Vergleich zur Kreuzungswinkel-Optik, vor allem wenn Simulationen nur mit Sextupolen zur Chromatikkorrektur durchgeführt werden.

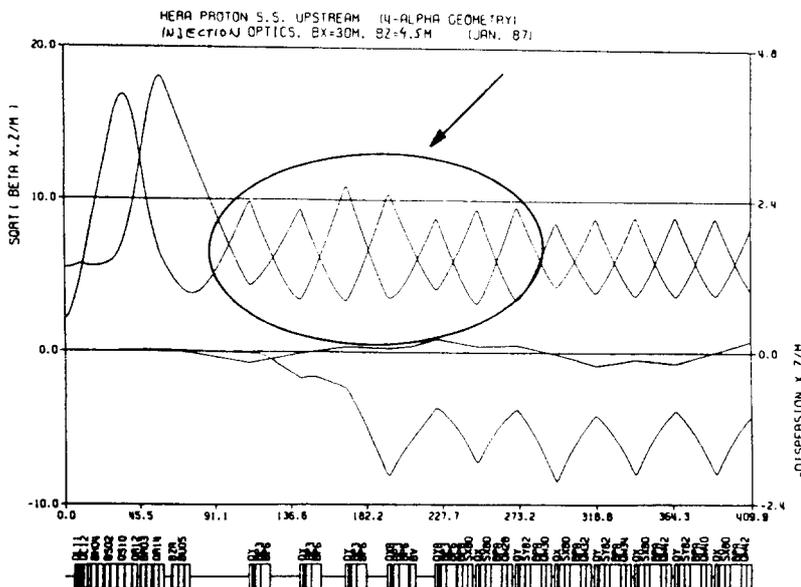
a.)



b.)



c.)

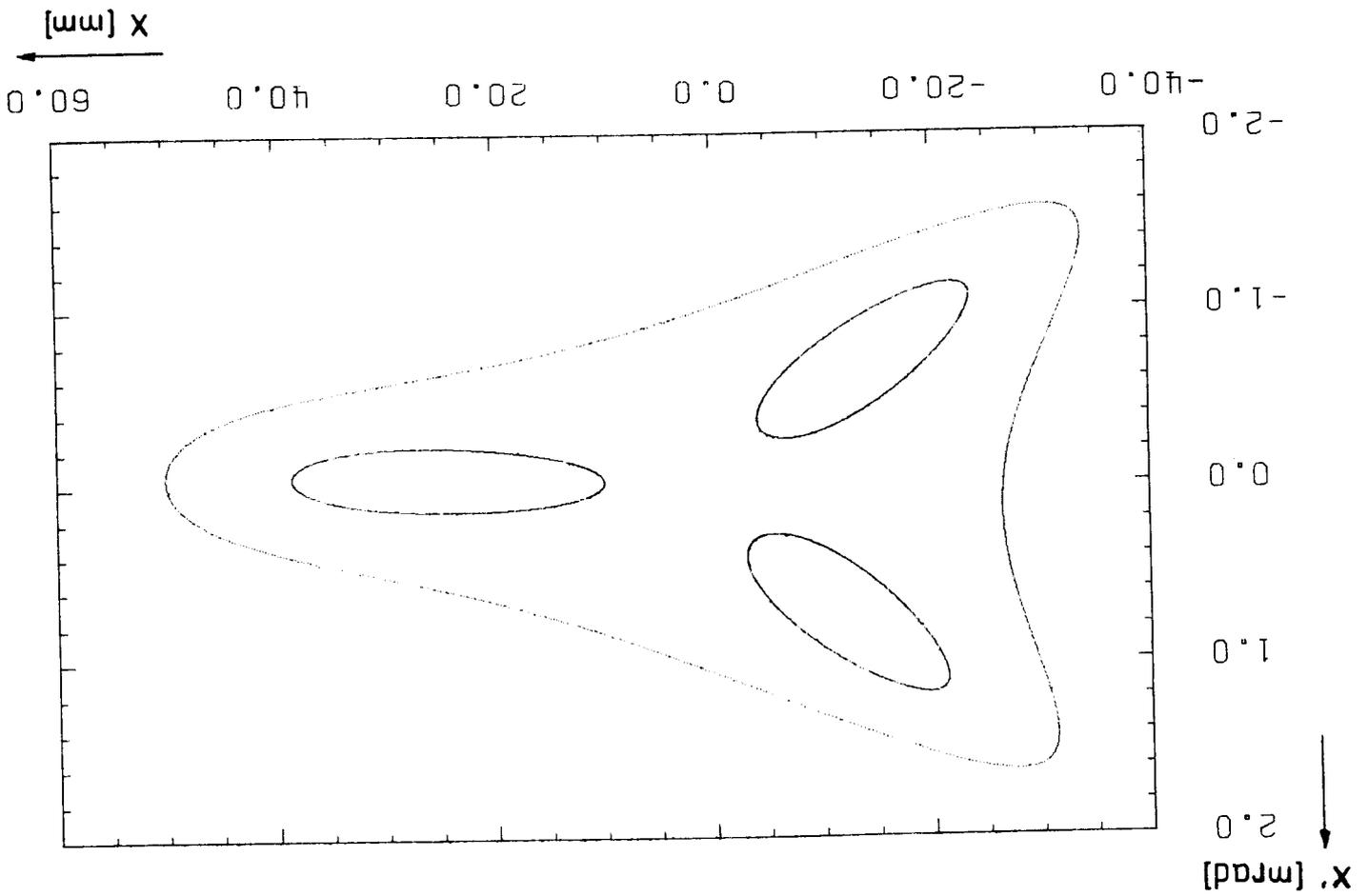


Figur 4.1:
Vergleich des Verlaufs der optischen Funktionswerte in der Wechselwirkungszone für die Optik mit Kreuzungswinkel und die Head-on-Optik

Teil a,b zeigt den Verlauf der optischen Funktionswerte der Optik mit Kreuzungswinkel, während Teil c den Verlauf für die Head-on-Optik zeigt. Am Rande der Wechselwirkungszone ist der Verlauf der Funktionswerte bei der Head-on-Optik deutlich periodischer.

Wegen des periodischen Verlaufs der Betafunktion am Rande der Wechselwirkungszone bei der Resonanz ist die Resonanz dritter Ordnung $3Q_x = p$ stabilisiert.

Figur 4.2: Stabilisierte Sextupolresonanz



In Abschnitt 4.3 wird die Akzeptanzgrenze für die Optik ohne Kreuzungswinkel (Head-on) bestimmt. Dabei werden jetzt auch physikalische Aperturbegrenzungen und Sollbahnabweichungen mit 1 mm rms berücksichtigt, die vierdimensionalen Rechnungen werden zusätzlich bei den maximalen festen relativen Impulsabweichungen $\hat{\eta}_m = \pm 1.6 \%$ durchgeführt, einige Simulationen werden mit den neuesten Multipoldaten der Magnete wiederholt und der Einfluß von Arnold-Diffusion wird untersucht. Im Abschnitt 4.4 werden schließlich die Ergebnisse zusammengefaßt.

4.2 Untersuchungen für die Optik mit Kreuzungswinkel

Mit dieser Optik wird getestet, ob die in Kapitel 3 vorgestellten Methoden sich tatsächlich unabhängig von der Anzahl der gekoppelten Schwingungsfreiheitsgrade anwenden lassen. Dazu wurde die Bewegung nacheinander in zwei, vier und schließlich sechs Dimensionen des Phasenraums untersucht.

Bei allen Untersuchungen für die Optik mit Kreuzungswinkel wurden die Simulationen am Wechselwirkungspunkt gestartet. Mit folgenden Anfangsparametern wurde gerechnet:

- optische Funktionswerte am Wechselwirkungspunkt

$$\beta_x^* = 2.94 \quad \alpha_x^* = 0.0230$$

$$\beta_z^* = 0.305 \quad \alpha_z^* = -0.0166$$

- Arbeitspunkt im Q_x - Q_z -Diagramm

$$Q_x = 37.15 \quad Q_z = 37.18$$

- Folgende Parameter werden für alle Untersuchungen festgelegt:
(vier- und sechsdimensionaler Fall)

gleiche Emittanzen: $\epsilon_{x_0} = \epsilon_{z_0}$

$$2 \epsilon_{x_0} = \left(\frac{1 + \alpha_x^2}{\beta_x} \right) x_0'^2 + 2 \alpha_x x_0 x_0' + \beta_x x_0^2$$

$$2 \epsilon_{z_0} = \left(\frac{1 + \alpha_z^2}{\beta_z} \right) z_0'^2 + 2 \alpha_z z_0 z_0' + \beta_z z_0^2$$

$$\sigma_0 = 0$$

$$\hat{\eta}_{max} = 1,6\%$$

- Bei allen Simulationen wurde folgender Satz von Multipol-
koeffizienten für die Hauptdipolmagnete verwendet:

Ord.	b_n	rms	a_n	rms
2	0	8.33E-5	0	8.33E-5
3	0	3 E-4	0	7 E-5
4	0	7 E-5	0	7 E-5
5	2 E-4	7 E-5	0	7 E-5
6	0	7 E-5	0	7 E-5
7	-1 E-4	7 E-5	0	7 E-5
8	0	7 E-5	0	7 E-5
9	-2 E-5	7 E-5	0	7 E-5

- Da die Berechnungen mit der alten Optik lediglich als Test gedacht
waren, sind keine Aperturbegrenzungen und Sollbahnschwankungen be-
rücksichtigt worden. Einige Dipole, für die wegen großer Betafunk-
tionswerte Sondertypen im Gespräch waren, sind nicht mit Multipo-
len versehen worden. Außerdem ist keine Sextupolresonanzkompen-
sation durchgeführt worden.

4.2.1 Zweidimensionale Bewegung

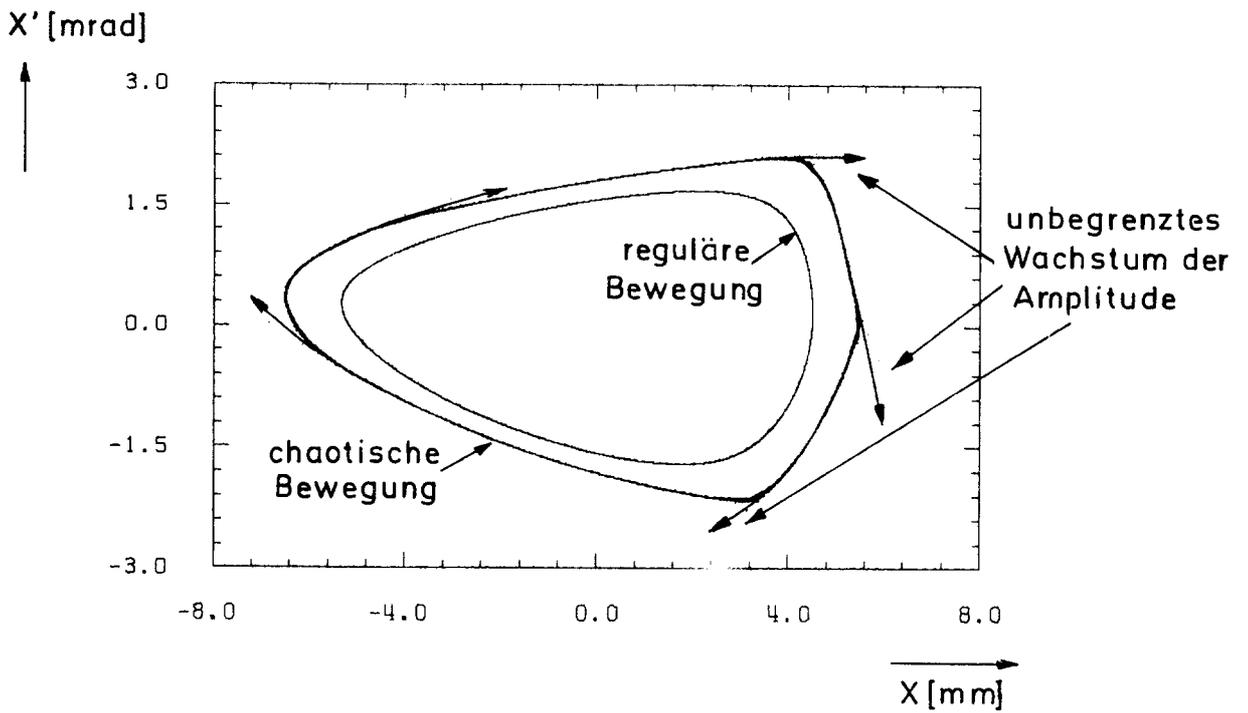
Zunächst sind Untersuchungen für die horizontale Bewegung durchge-
führt worden. Bei Vernachlässigung der höheren Multipolkoeffizienten
werden bei den Simulationen die bekannten Phasenraumellipsen beobachtet.
Der Abstand benachbarter Trajektorien bleibt unabhängig von der Um-
laufzahl konstant.

Werden die Multipolfelder berücksichtigt, so erhält man die in Figur 4.3a gezeigten Phasenraumkurven: reguläre Bewegung bei kleiner Amplitude, unbegrenztes Wachstum der Amplituden außerhalb der Separatrix und chaotische Bereiche in der Nähe dieser Separatrix. Figur 4.3b zeigt die entsprechenden Anstiege der Abstände zweier Teilchen im Phasenraum: reguläre Bewegung führt zu einem linearen Anstieg des Abstands, während bei chaotischer Bewegung dieser Abstand exponentiell anwächst.

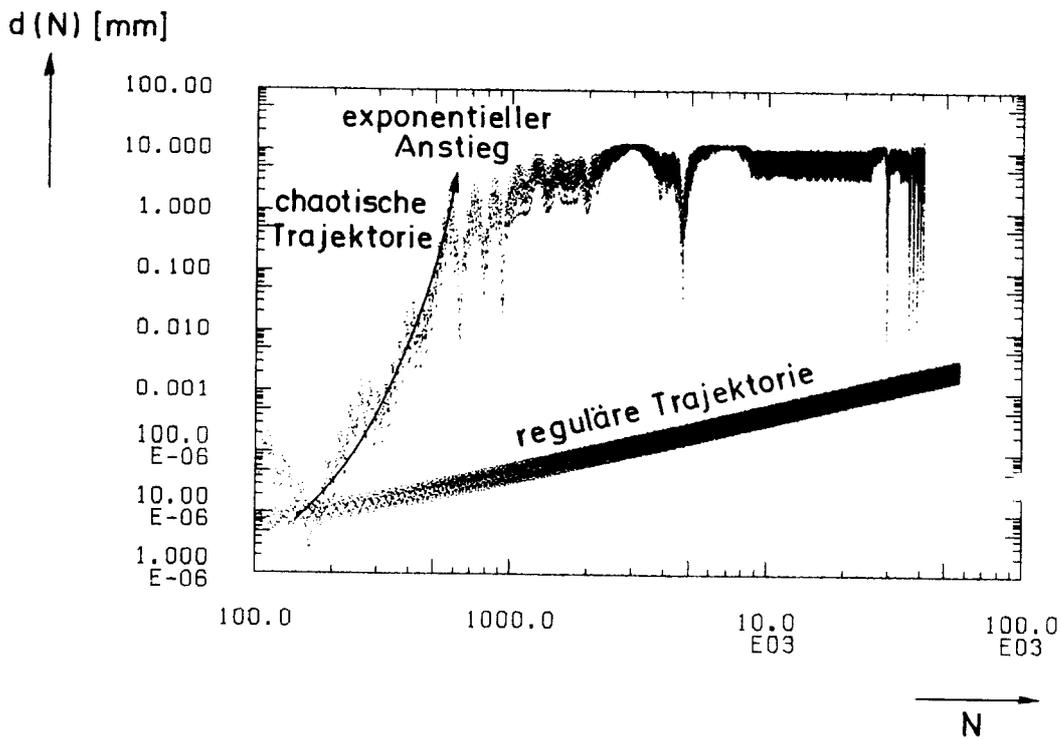
Bei Beschränkung auf horizontale Bewegung ist der Resonanzüberlappbereich bei HERA sehr schmal. Innerhalb des Bereiches I von Figur 2.4 sind nur sehr feine chaotische Schichten um Separatrizen und instabilen Fixpunkte zu erwarten.

Gewählt wurde ein instabiler Fixpunkt bei einer Amplitude, welche bei 90 % der Akzeptanzgrenze liegt. Durch Annähern an diesen Fixpunkt wurde versucht, chaotische Bewegung aufzufinden. Bis zum minimalen Abstand, bei dem Rundungsfehler noch keine Rolle spielen, konnte kein chaotisches Verhalten festgestellt werden. Figur 4.4a zeigt, daß die beobachtete Bewegung annähernd der Bewegung auf einer Separatrix gleicht. In der Umgebung des instabilen Fixpunktes (Figur 4.4b) sind die drei bei einem Pendel auftretenden regulären Bewegungsformen zu sehen. Es zeigen sich allerdings erste Anzeichen von Rundungsfehlern. Die Feldqualität der Magnet ist somit so gut, daß bei rein horizontaler Bewegung keine wesentlichen Effekte der nichtlinearen Feldanteile beobachtet werden.

a.)



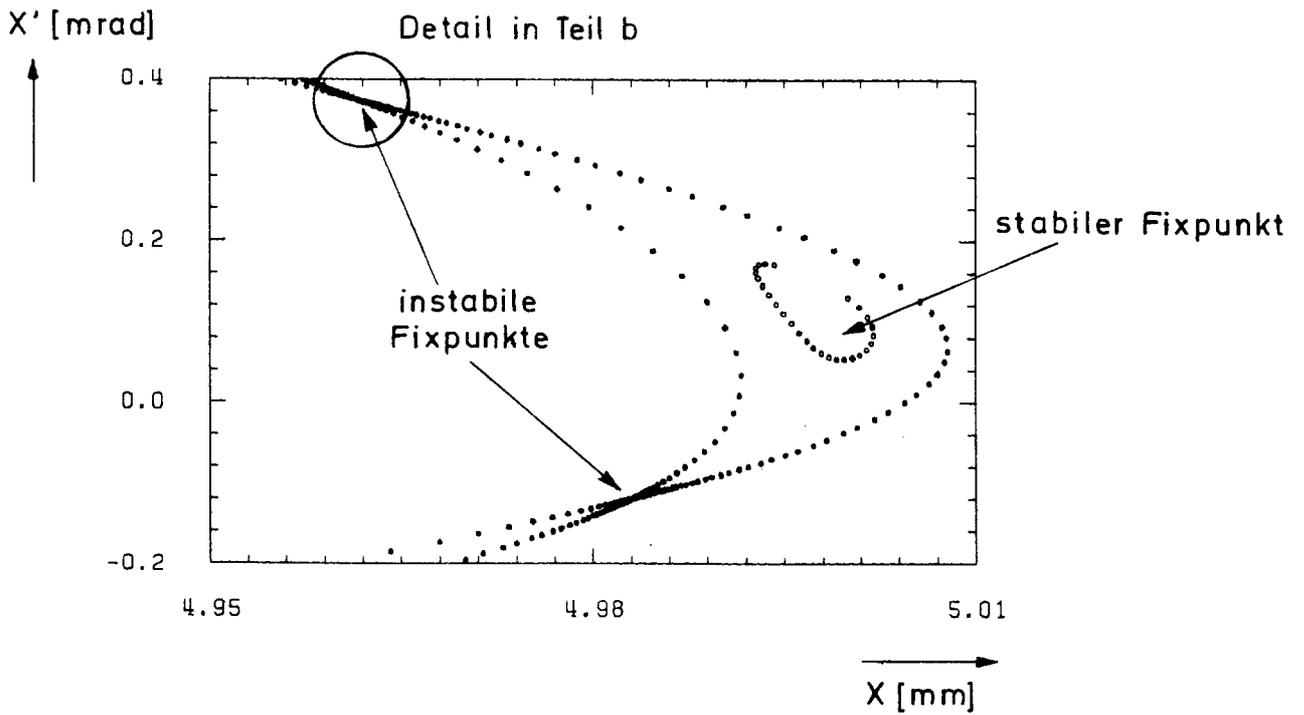
b.)



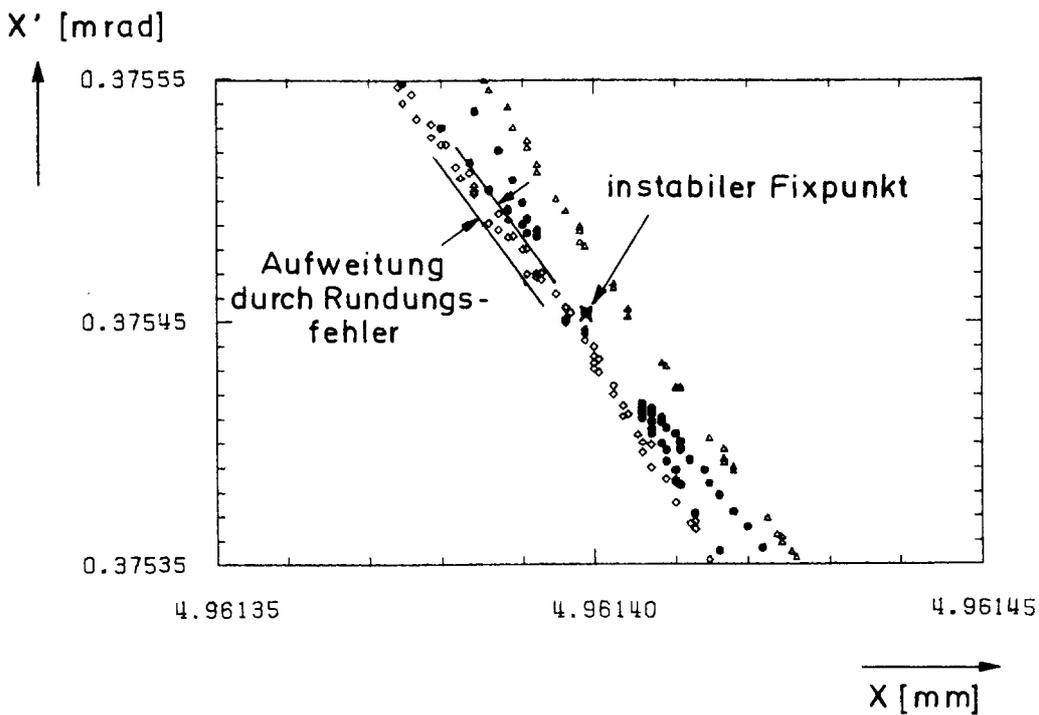
Figur 4.3: Zweidimensionale Bewegung mit Nichtlinearitäten

Im zweidimensionalen Fall wird nur bei der Akzeptanzgrenze bei großer Amplitude (Teil a) ein schmaler chaotischer Bereich gefunden (Details siehe Anhang 4). Teil b zeigt den entsprechenden Verlauf des Abstandes im Phasenraum für den regulären und chaotischen Fall.

a.)



b.)



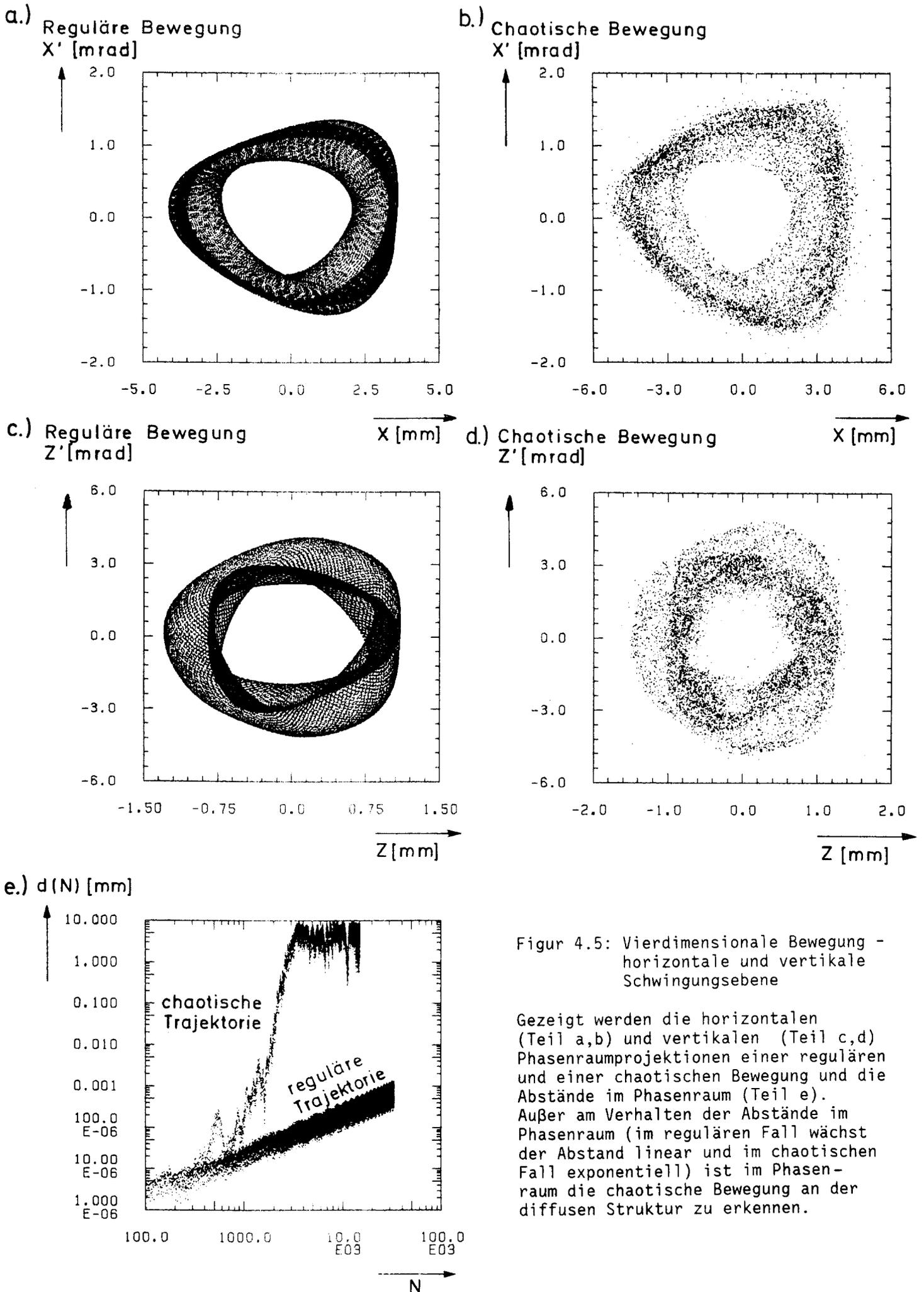
Figur 4.4: Bewegung in der Nähe eines instabilen Fixpunktes innerhalb der Akzeptanzgrenze

Nur geringfügig innerhalb der Akzeptanzgrenze (bei 90 %) läßt sich bis zu einem Abstand, bei dem Rundungsfehler anfangen, das Ergebnis zu stören, keine chaotische Bewegung nachweisen. Teil a zeigt eine Bewegung, die nahezu der Bewegung auf der Separatrix entspricht und eine Bewegung in der Nähe des stabilen Fixpunktes. Teil b zeigt die Umgebung eines instabilen Fixpunktes. Es wird eine Bewegung außerhalb, innerhalb der Separatrix und eine Bewegung um die stabilen Fixpunkte (Inseln) gezeigt. Der Abstand zum instabilen Fixpunkt ist dabei so gering, daß die Reduktion der Amplitude durch Rundungsfehler sichtbar wird.

4.2.2 Vierdimensionale Bewegung

Zunächst wird die gekoppelte horizontale und vertikale Bewegung betrachtet. Figur 4.5 zeigt die Phasenraumprojektionen und die Abstände im Phasenraum eines regulären und eines chaotischen Falles der rein transversalen Bewegung. Außer an den Abständen im Phasenraum (bei regulärer Bewegung wächst der Abstand linear, bei chaotischer exponentiell), läßt sich auch in den Phasenraumprojektionen an den regellosen Einträgen das chaotische Verhalten ablesen, während im regulären Fall eine Struktur zu erkennen ist.

Als nächstes wird die Kopplung zwischen horizontaler und longitudinaler Bewegung betrachtet. Figur 4.6 zeigt die Abstände im Phasenraum eines regulären und eines chaotischen Falles. Im regulären Fall ist ein Beispiel gezeigt für einen zunächst schrumpfenden Abstand im Phasenraum. Wie in Kapitel 3.4.1.1 erläutert, kann je nach der gewählten Anfangsbedingung der Abstand zunächst geringer werden, bis der minimale senkrechte Anteil des Abstandes d_{0s} erreicht wird. Danach wächst der Abstand erneut linear an. Figur 4.7 zeigt die entsprechenden Phasenraumprojektionen der beiden Fälle. Es fällt auf, daß die Kopplung gering ist, so daß nur eine geringfügige gegenseitige Beeinflussung der beiden Schwingungen auftritt.

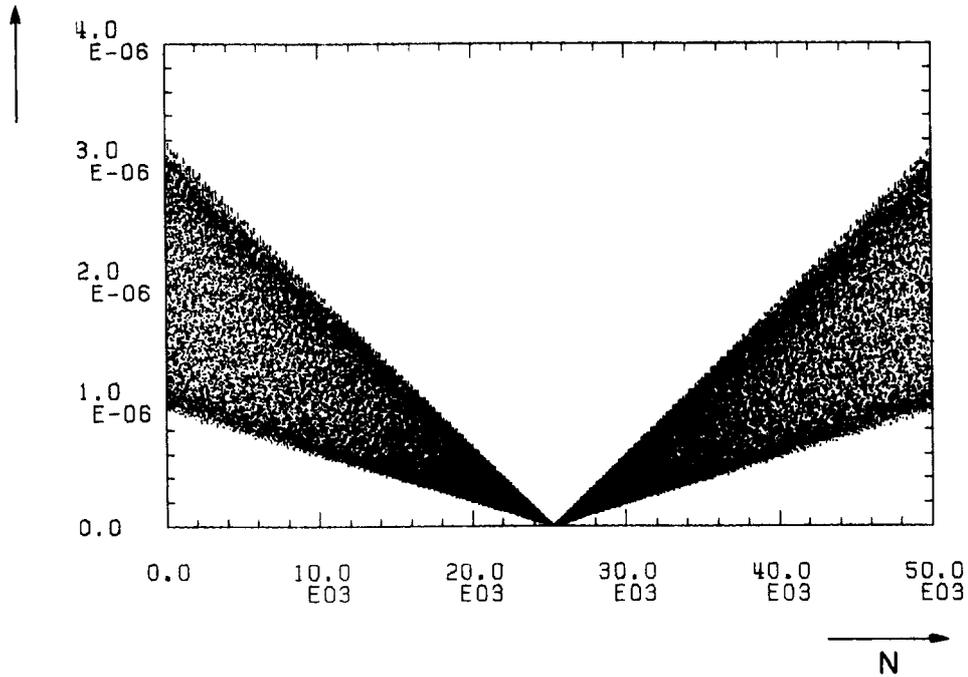


Figur 4.5: Vierdimensionale Bewegung - horizontale und vertikale Schwingungsebene

Gezeigt werden die horizontalen (Teil a,b) und vertikalen (Teil c,d) Phasenraumprojektionen einer regulären und einer chaotischen Bewegung und die Abstände im Phasenraum (Teil e). Außer am Verhalten der Abstände im Phasenraum (im regulären Fall wächst der Abstand linear und im chaotischen Fall exponentiell) ist im Phasenraum die chaotische Bewegung an der diffusen Struktur zu erkennen.

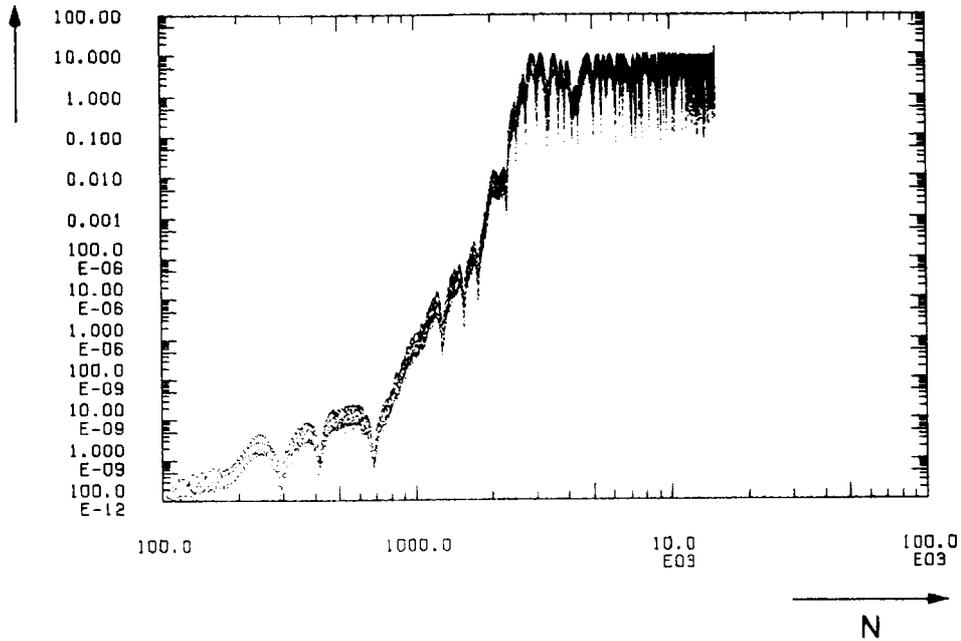
a.) Reguläre Bewegung

$d(N)$ [mm]



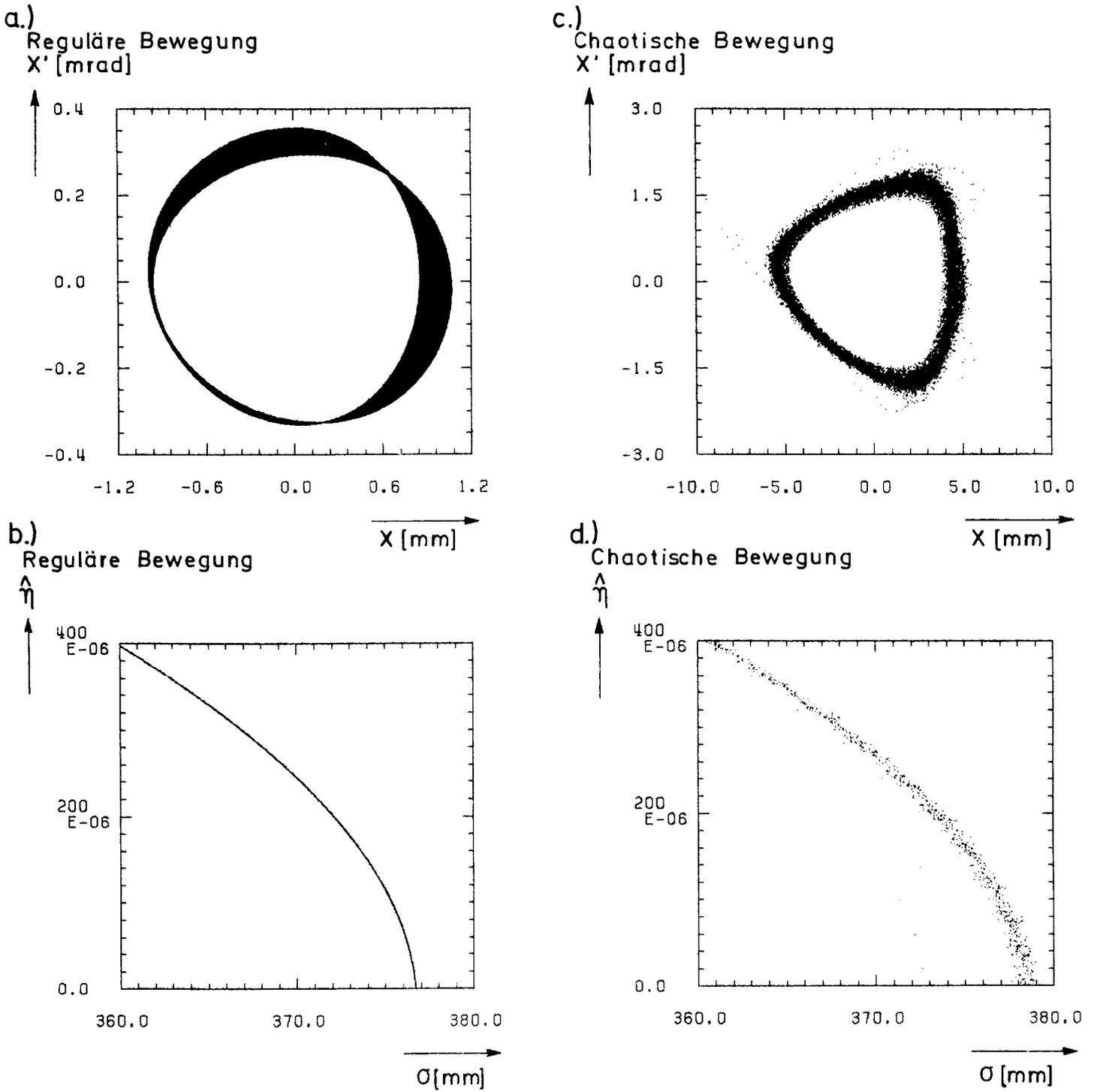
b.) Chaotische Bewegung

$d(N)$ [mm]



Figur 4.6: Vierdimensionale Bewegung - horizontale Schwingung mit Synchrotronschwingung

Teil a zeigt den Verlauf des Abstandes im Phasenraum einer regulären Bewegung, wie in Kapitel 3.4.1 erläutert, kann der Abstand für eine bestimmte Umlaufzahl zunächst abnehmen, um dann wieder anzusteigen. Im chaotischen Fall (Teil b) zeigt sich wieder der exponentielle Anstieg des Abstandes im Phasenraum.



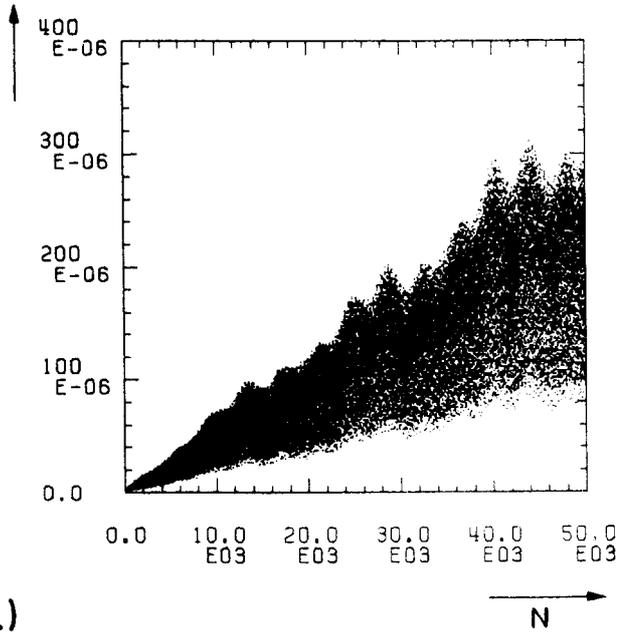
Figur 4.7: Phasenraum der vierdimensionalen Bewegung - horizontale Schwingung mit Synchrotronschwingung

Die Teile a,b zeigen die horizontale und die longitudinale Phasenraumprojektion der regulären Bewegung, die entsprechenden Phasenraumprojektionen der chaotischen Bewegung sind in Teil c,d gezeigt. Wiederum kann im Phasenraum an der diffusen Struktur die chaotische Bewegung erkannt werden.

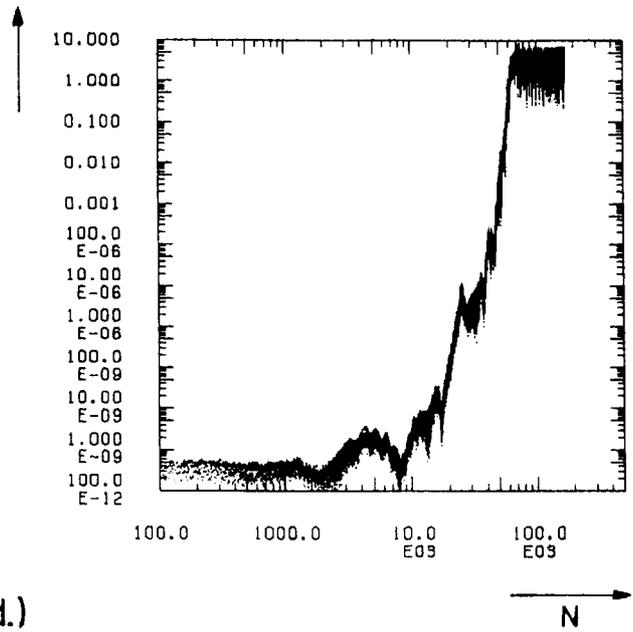
4.2.3 Sechsdimensionale Bewegung

Auch für die volle sechsdimensionale Dynamik möchte ich einen regulären und einen chaotischen Fall vorstellen. Die Figur 4.8 zeigt die Abstände im Phasenraum und jeweils die drei Phasenraumprojektionen. Wieder wächst der Abstand linear, wenn die Bewegung regulär ist, während ein exponentielles Wachstum des Abstandes chaotische Bewegung anzeigt. Da im chaotischen Fall starke Kopplungserscheinungen zwischen den Projektionen des Phasenraums auftreten, kann man in diesem Beispiel chaotisches Verhalten auch in den Phasenraumprojektionen erkennen. In der Nähe der Akzeptanzgrenze ist diese visuelle Unterscheidung von chaotischer und regulärer Bewegung in den Projektionen des sechsdimensionalen Phasenraums schwierig. Dazu müssen die KAM-Volumina hinreichend angefüllt sein, wofür eine sehr große Umlaufzahl notwendig ist.

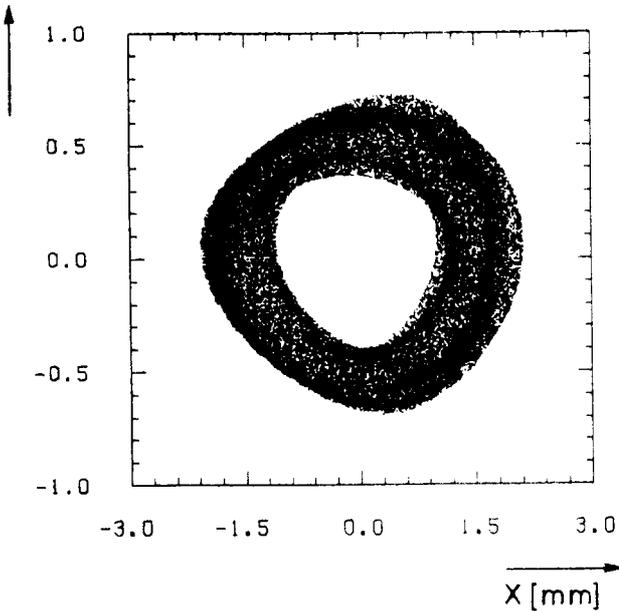
a.)
Reguläre Bewegung
 $d(N)$ [mm]



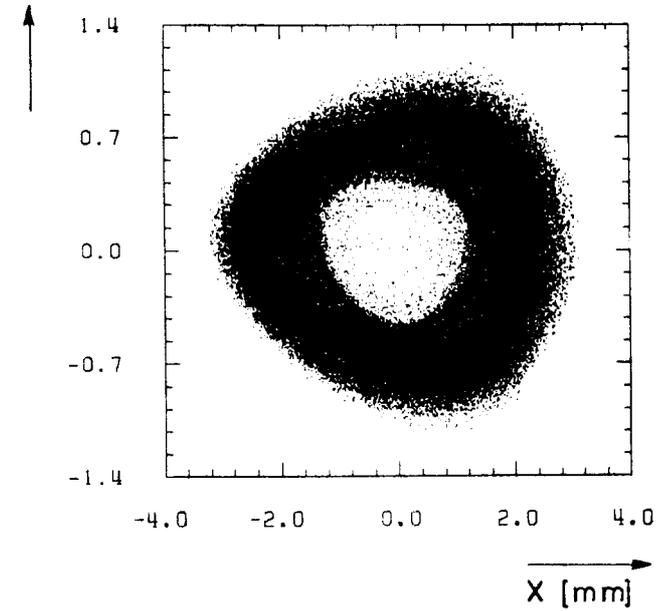
c.)
Chaotische Bewegung
 $d(N)$ [mm]



b.)
Reguläre Bewegung
 X' [mrad]



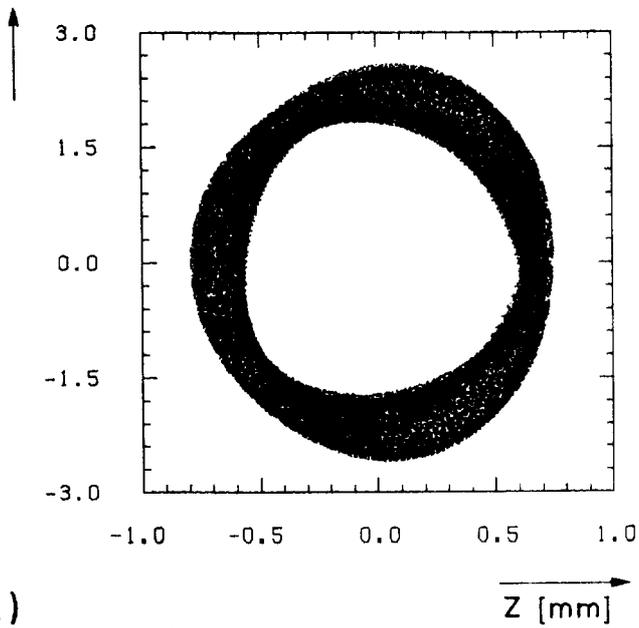
d.)
Chaotische Bewegung
 X' [mrad]



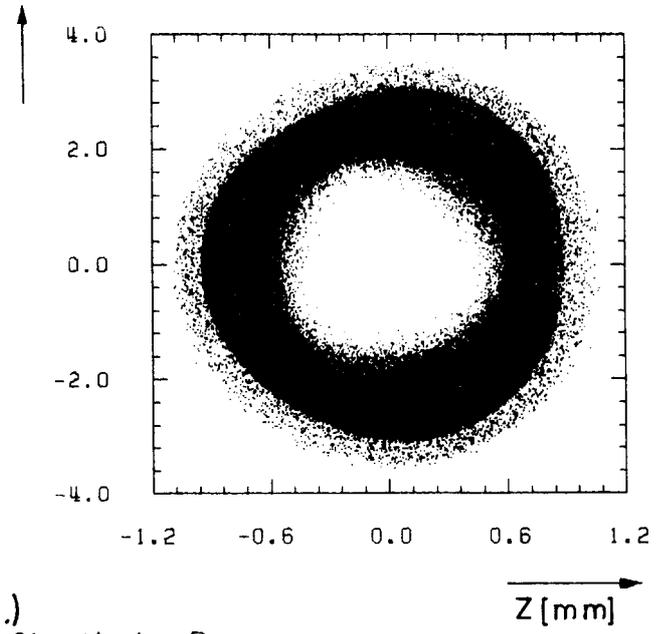
Figur 4.8: Sechsdimensionale Bewegung

Teil a,c zeigen die Abstände im Phasenraum für einen regulären bzw. chaotischen Fall. Auch in sechs Dimensionen kann am exponentiellen Anstieg sicher chaotische Bewegung identifiziert werden. Teil b,d zeigen die entsprechenden horizontalen Phasenraumprojektionen der regulären und der chaotischen Bewegung.

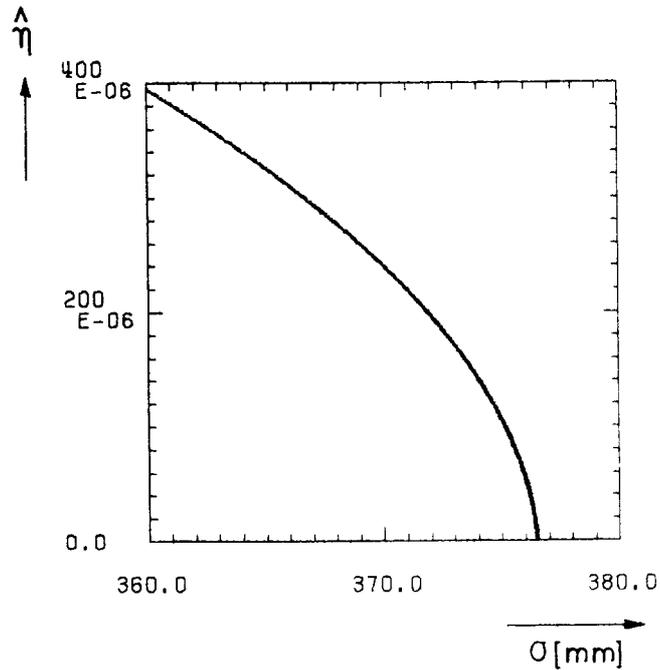
e.) Reguläre Bewegung
 Z' [mrad]



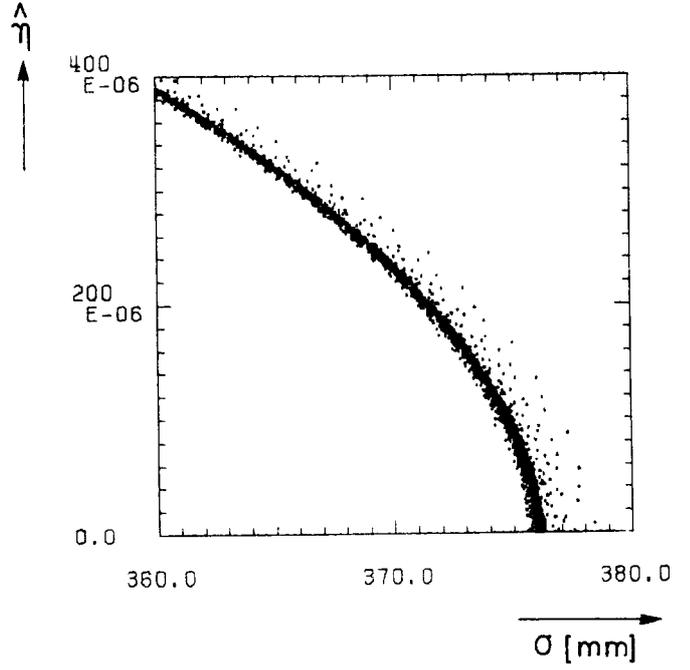
g.) Chaotische Bewegung
 Z' [mrad]



f.) Reguläre Bewegung
 $\hat{\eta}$



h.) Chaotische Bewegung
 $\hat{\eta}$



Figur 4.8: Sechsdimensionale Bewegung

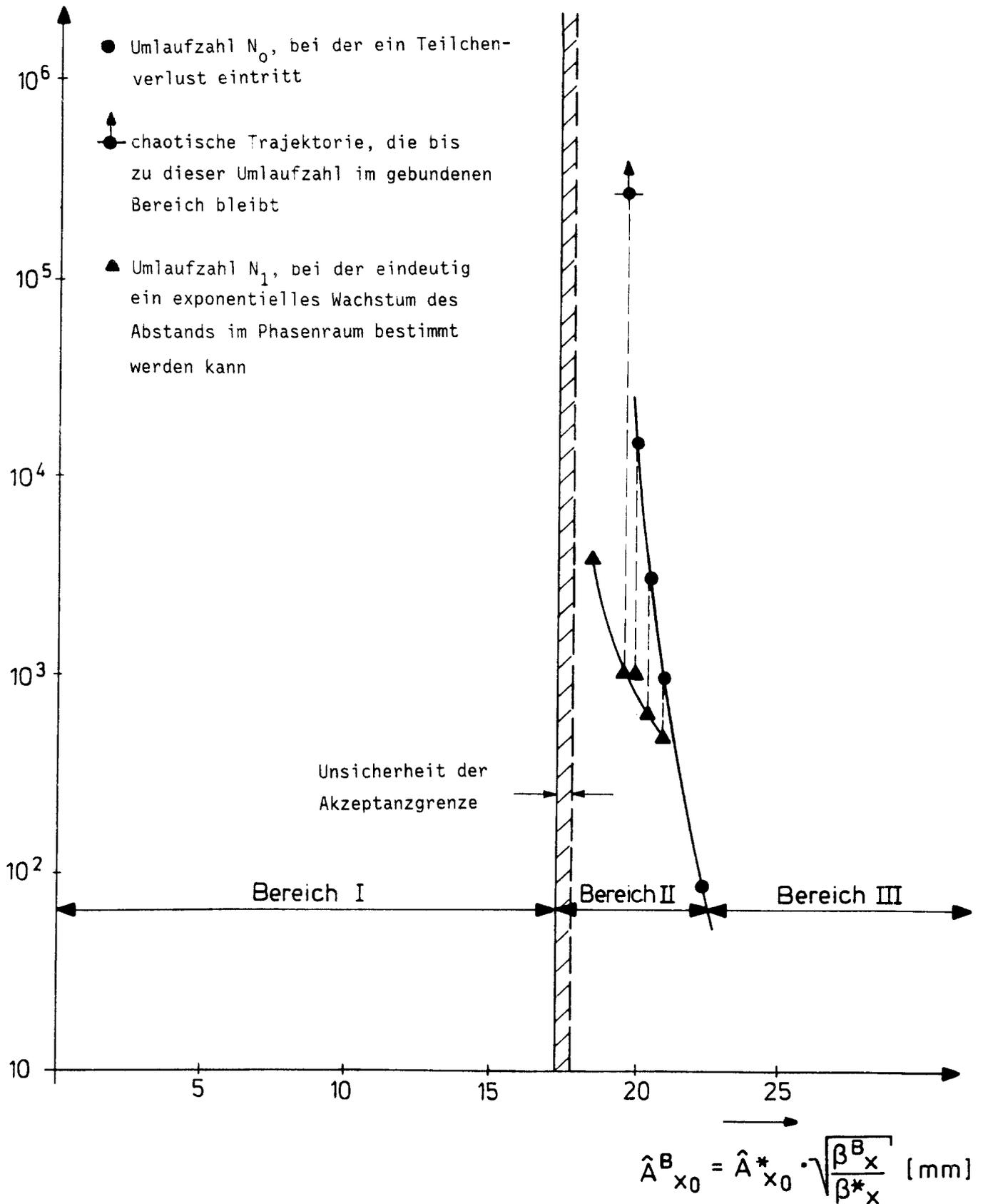
Die Teile e,g zeigen die vertikale Bewegung und Teil f,h die Bewegung in der longitudinalen Phasenraumprojektion der regulären bzw. chaotischen Bewegung.

4.2.4 Dynamische Akzeptanz

Die Grenze zwischen dem Resonanzüberlappbereich und dem Bereich mit größtenteils regulärer Bewegung (siehe Figur 2.4) kann, wie in Kapitel 3 diskutiert, als Akzeptanzgrenze aufgefaßt werden.

Figur 4.9 zeigt für die verdimensionale Bewegung die Umlaufzahl N_0 , bei der ein Teilchenverlust eintritt als Funktion der Startamplituden am Wechselwirkungspunkt. Im Bereich II wächst N_0 sehr rasch an, wenn die Amplitude kleiner wird, und erreicht bei Annäherung an die Grenze zum regulären Bereich I Werte von mehr als 10^5 , so daß eine weitere Untersuchung wegen des zu großen Aufwandes an Rechenzeit scheitert. Wesentlich kleiner sind die Umlaufzahlen N_1 , bei denen sich gemäß dem Verfahren aus Kapitel 3.4.1.3 eindeutig ein exponentielles Anwachsen des Phasenraumabstandes erkennen läßt. Man kann daher die Grenze zwischen dem Bereich I mit regulärer Bewegung und dem Resonanzüberlappbereich II auf diese Weise mit erheblich geringerer Rechenzeit ermitteln.

Umlaufzahlen



Figur 4.9: Akzeptanzgrenze der vierdimensionalen Bewegung für die Optik mit Kreuzungswinkel

Die Amplituden sind skaliert auf den maximalen Wert der Betafunktion $\beta_x^B = 80$ m im Bogen.

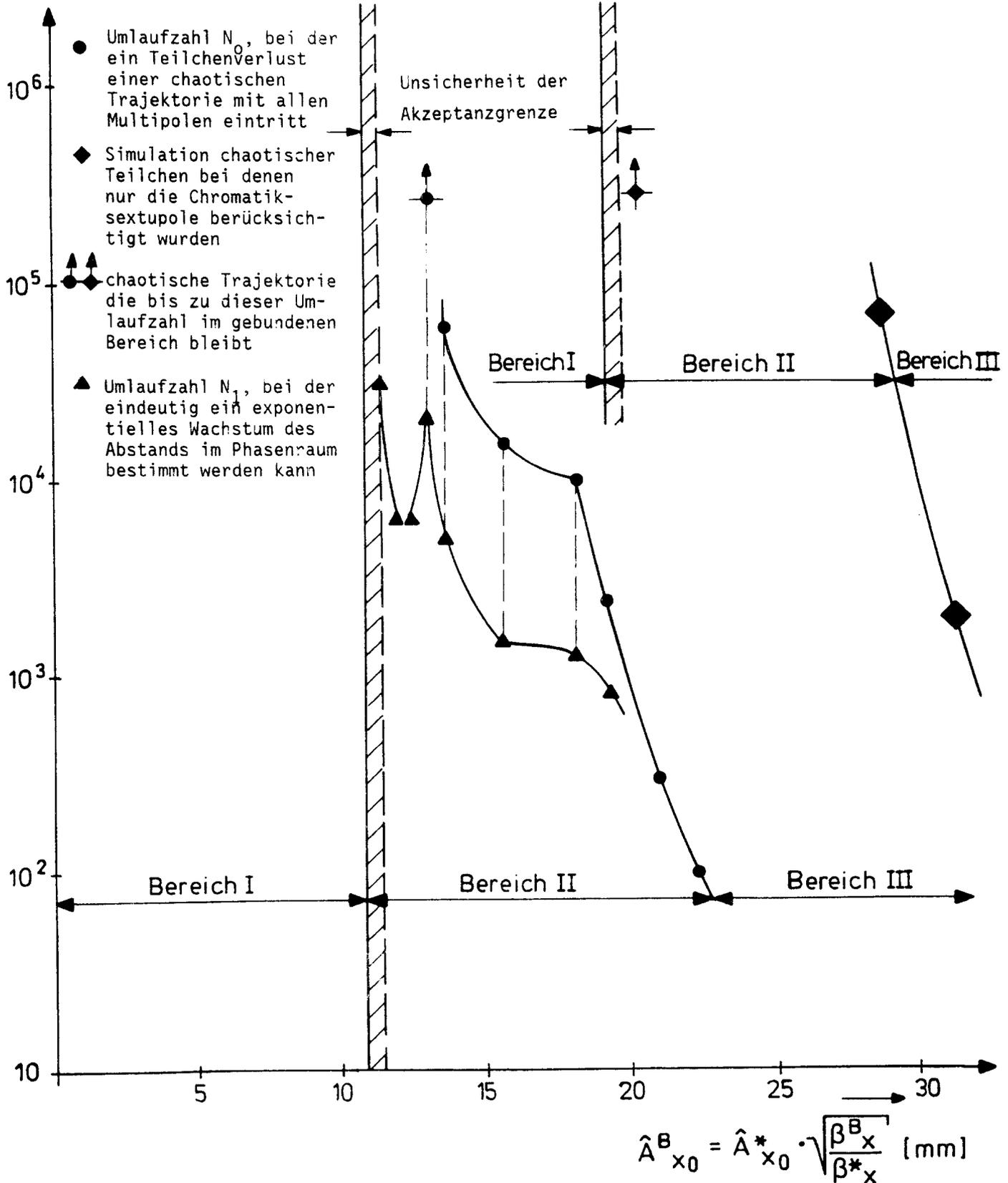
Figur 4.10 zeigt die entsprechenden Umlaufzahlen für den vollen sechsdimensionalen Phasenraum. Auch hier wächst die Zahl N_0 , bei der ein Teilchenverlust eintritt, sehr stark an, wenn man sich der Grenze zwischen Bereich II und I nähert, während einige 10^4 Umläufe ausreichen, um ein exponentielles Anwachsen des Phasenraumabstandes eindeutig zu erkennen. Ein Vergleich mit Figur 4.9 zeigt, daß durch Hinzunahme der Synchrotronschwingungen die Akzeptanzgrenze (jeweils skaliert auf die maximale Betafunktion ($\beta_x=80\text{m}$) im Bogen des HERA-Ringes) von 17,2 mm auf 11.0 mm herabgesetzt wird. Das beruht im wesentlichen darauf, daß bei der rein transversalen Bewegung Impulsabweichung Null vorausgesetzt wurde.

Die über 100 Umläufe bestimmten Akzeptanzgrenzen liegen deutlich höher, um einen Faktor 1.25 im vierdimensionalen und um einen Faktor 2.1 im sechsdimensionalen Fall. Das liegt an einer starken Resonanzüberlappung bei einer Impulsabweichung von maximal 1,6 ‰.

Im regulären Bereich I wurden in beiden Fällen keine chaotischen Trajektorien gefunden. Die Arnold-Diffusion sollte daher keine große Rolle spielen.

Für den sechsdimensionalen Fall ist auch eine Simulation durchgeführt worden, bei der nur die Chromatiksextupole berücksichtigt und alle Multipolfehler der Dipole vernachlässigt wurden. Erwartungsgemäß liegt die Akzeptanzgrenze dann deutlich höher (s. Figur 4.10).

Umlaufzahlen



Figur 4.10: Akzeptanzgrenze der sechsdimensionalen Bewegung für die Optik mit Kreuzungswinkel

Gezeigt wird die Akzeptanzgrenze für Simulationen nur mit Chromatiksextupolen (mit ◆ gekennzeichnet) und die Grenze bei Berücksichtigung aller Multipolkoeffizienten (mit ● gekennzeichnet). Die Amplituden sind skaliert auf den maximalen Wert der Betafunktion $\beta_x^B = 80$ m im Bogen.

4.3 Simulationsergebnisse der Optik ohne Kreuzungswinkel

Für die Simulationen mit der Head-on-Optik wird mit folgenden Anfangsparametern gerechnet:

- optische Parameter am Wechselwirkungspunkt

$$\beta_x^* = 27.79 \quad \alpha_x^* = -0.0100$$

$$\beta_z^* = 3.567 \quad \alpha_z^* = 0.0113$$

- Arbeitspunkt im Q_x - Q_z Diagramm

$$Q_x = 31,15 \quad Q_z = 32,18$$

- Folgende Parameter werden für alle Untersuchungen festgelegt (vier- und sechsdimensionale Fälle)

gleiche Emittanzen: $\varepsilon_{x_0} = \varepsilon_{z_0}$

$$2 \varepsilon_{x_0} = \left(\frac{1 + \alpha_x^2}{\beta_x} \right) x_0^2 + 2 \alpha_x x_0 x_0' + \beta_x x_0'^2$$

$$2 \varepsilon_{z_0} = \left(\frac{1 + \alpha_z^2}{\beta_z} \right) z_0^2 + 2 \alpha_z z_0 z_0' + \beta_z z_0'^2$$

$$\sigma_0 = 0$$

$$\hat{\eta}_{max} = 1,6\%$$

- der verwendete Multipolsatz entspricht dem der Kreuzungswinkeloptik
- Zusätzlich sind Simulationen mit den neuesten Daten der Multipolfelder gemacht worden.

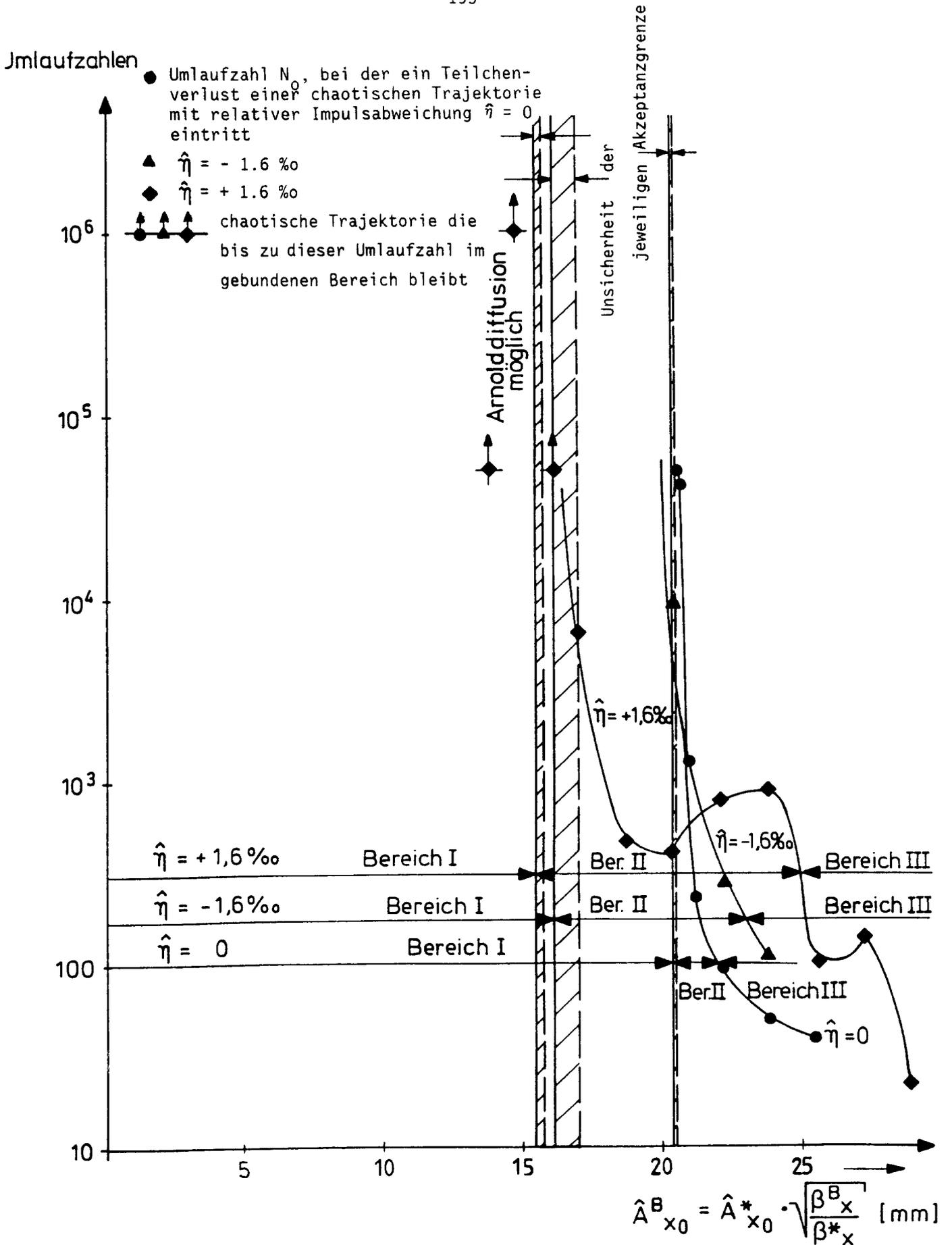
Ord	B_n	rms	A_n	rms
2	0	1 E-4	0	1 E-4
3	0	3 E-4	0	1 E-4
4	0	1 E-4	0	2 E-4
5	9 E-5	2 E-4	0	1 E-4
6	0	1 E-4	0	1 E-4
7	3 E-5	1 E-4	0	1 E-4
8	0	1 E-4	0	1 E-4
9	-6 E-5	1 E-4	0	1 E-4

4.3.1 Bestimmung der Akzeptanz

Figur 4.11 zeigt die Akzeptanzgrenze im vierdimensionalen Fall mit drei festen relativen Impulsabweichungen $\hat{\eta}$ (-1,6 %, 0, +1,6 %).

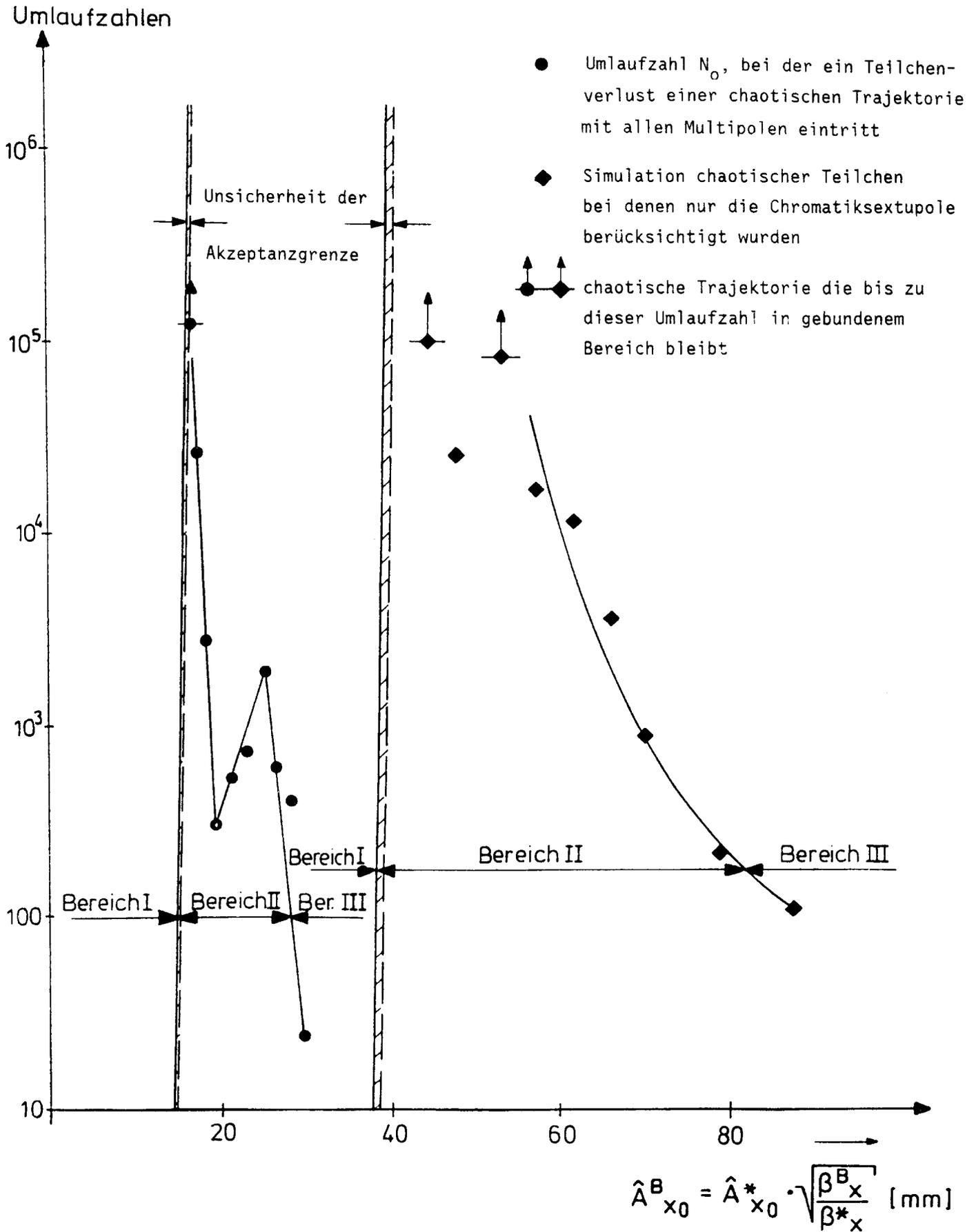
Für $\hat{\eta} = 0$ ist die Akzeptanz am größten und der Resonanzüberlappbereich am schmalsten. Bei $\hat{\eta} = \pm 1,6$ % ist aufgrund der impulsabhängigen Sollbahnabweichung die Akzeptanz wesentlich kleiner und die Resonanzüberlappbereiche erheblich breiter.

Figur 4.12 zeigt das entsprechende für die volle sechsdimensionale Bewegung. Die Akzeptanzgrenze (skaliert auf die maximale Betafunktion im Bogen des HERA-Ringes) liegt bei 14,7 mm. Im Vergleich ergibt die vierdimensionale Bewegung mit $\hat{\eta} = +1,6$ % eine Amplitude von 15,5 mm. Die sechsdimensionale Akzeptanz ist somit nur um ca. 5 % geringer. Dies ist auf die geringe Kopplung zwischen der transversalen und longitudinalen Bewegung und der sehr kleinen Frequenz der Synchrotron-schwingung zurückzuführen.



Figur 4.11: Akzeptanzgrenze der vierdimensionalen Bewegung für die Head-on-Optik mit $\hat{\eta} (0, \pm 1.6\%)$

Die Amplituden sind skaliert auf den maximalen Wert der Betafunktion $\beta^B_x = 80$ m im Bogen.



Figur 4.12: Akzeptanzgrenze der sechsdimensionalen Bewegung für die Head-on-Optik

Die Amplituden sind skaliert auf den maximalen Wert der Betafunktion $\beta_x^B = 80 \text{ m}$ im Bogen.

In Tabelle 4.1 sind nun alle Ergebnisse der alten und neuen Optik zusammengetragen. Für die neue Optik sind neben der Berechnung der dynamischen Akzeptanz auch Aperturbeschränkungen berücksichtigt worden. Die Apertur wird vor allem durch bestimmte Quadrupole in der Wechselwirkungszone eingeschränkt:

$$|x| \leq 20 \text{ mm}; \quad |z| \leq 35 \text{ mm} \quad (4.1)$$

Gleichzeitig sind dort aber auch die Betafunktionswerte sehr groß. Dies hat zur Folge, daß sich die Akzeptanz im Bogen auf 11,8 mm reduziert, unabhängig davon, ob nur mit den Chromatiksextupolen oder zusätzlich den Multipolen der Dipolmagnete gerechnet wird.

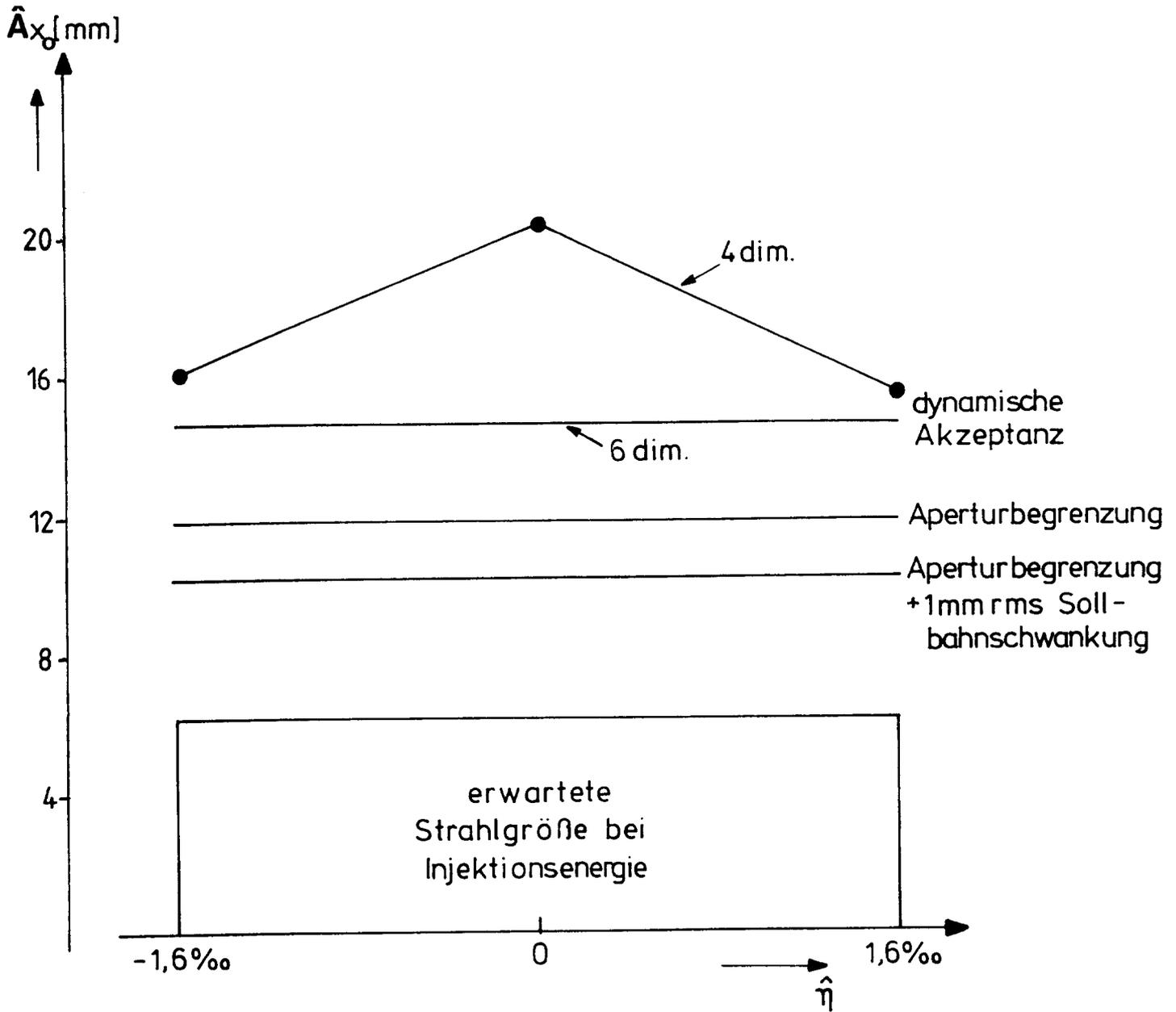
Werden zusätzlich noch die Sollbahnabweichungen von 1 mm rms berücksichtigt, reduziert sich die Akzeptanz auf 10,2 mm im Bogen. Es stellt sich also heraus, daß die Akzeptanz fast ausschließlich durch die starke Aperturbegrenzung in der Wechselwirkungszone bestimmt wird und somit die auftretenden Nichtlinearitäten praktisch keine Rolle für die Akzeptanz spielen.

Aufgrund dieser Erkenntnis ist es zweifelhaft, ob durch Ordnen der Magnete die Akzeptanz noch verbessert werden kann. In Figur 4.13 ist schließlich der Sicherheitsabstand zur erwarteten Strahlgröße bei der Injektionsenergie zu sehen für die verschiedenen vier- und sechsdimensionalen Fälle mit und ohne Aperturbegrenzung und Sollbahnabweichungen von 1 mm rms.

Tabelle 4.1 Simulationsergebnisse für den HERA - Protonenring

skaliert auf die maximale Betafunktion im Bogen $\beta_x^B = 80 \text{ m}$.

	alte Optik		neue Optik						
	4 D	6 D	4 D		6 D				
Dimension der Poincaré - "Fläche"	4 D	6 D	6 D						
relative Impulsabweichung $\tilde{\eta}$ [‰]	0	(-1.6 \longleftrightarrow +1.6) Synchrotronschwingungen	-1.6	0	+1.6	(-1.6 \longleftrightarrow +1.6) Synchrotronschwingungen			
Art der Nichtlinearitäten	alle Multipole \hat{A}_{x0} [mm]	nur Chromatik-Sextupole \hat{A}_{x0} [mm]	alle Multipole \hat{A}_{x0} [mm]		nur Chromatik-Sextupole \hat{A}_{x0} [mm]	alle Multipole \hat{A}_{x0} [mm]	zweite Multipol-Statistik \hat{A}_{x0} [mm]	neuer Multipol-Satz \hat{A}_{x0} [mm]	
dynamische Akzeptanz	17.2	18.3	16.1	20.4	15.5	37.2	14.7	11.5	
Aperturbegrenzung						11.8	11.9	11.5	
Aperturbegrenzung + Sollbahnschwankung (1mm rms)						10.1	10.2	10.6	10.4

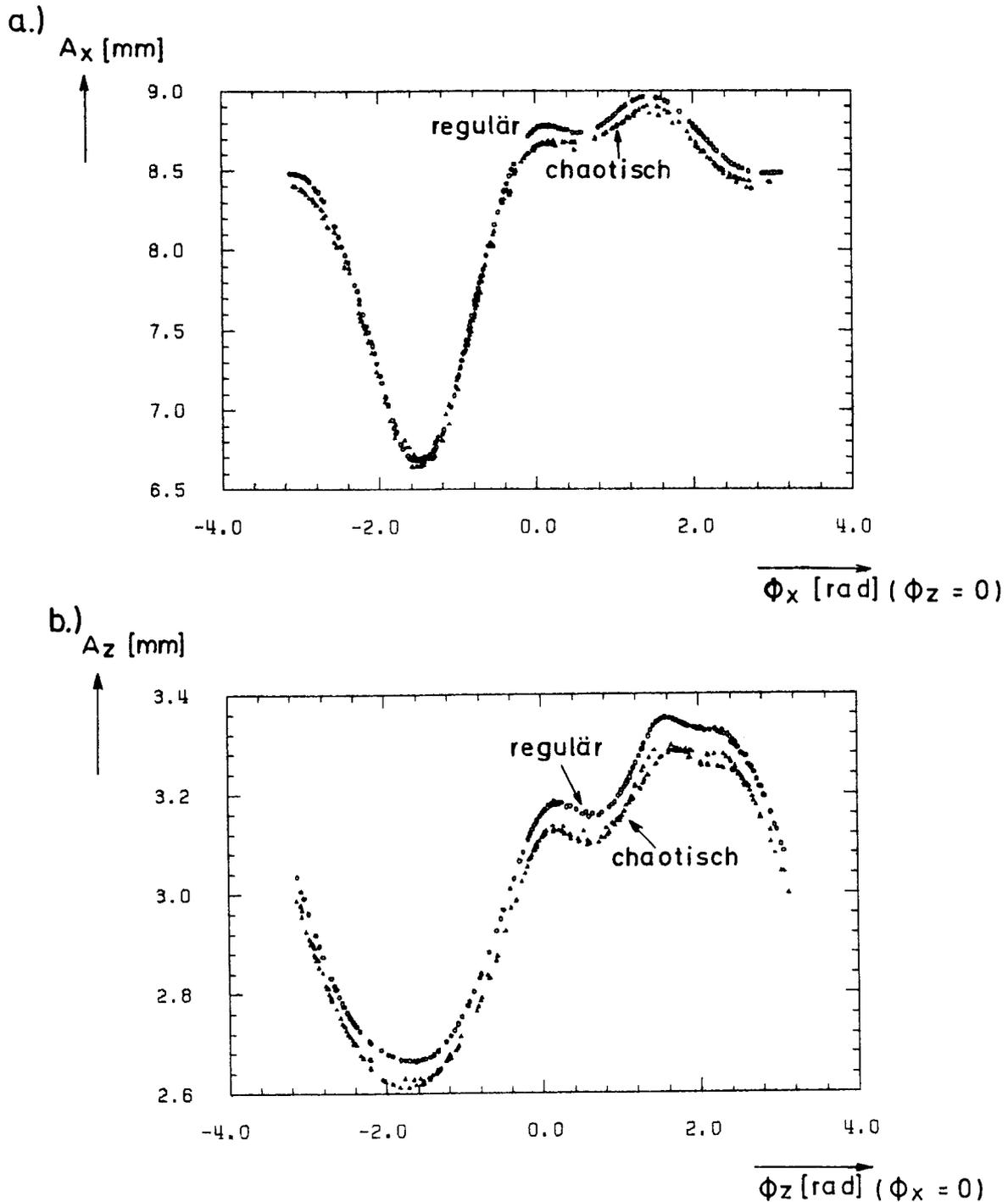


Figur 4.13: Abstand zwischen der Akzeptanz und der erwarteten Strahlgröße, für die 2.2 Standardabweichungen berücksichtigt worden sind.

4.3.2 Arnold-Diffusion

Für den Fall mit $\hat{\eta} = +1.6 \%$ in Figur 4.11 sind innerhalb des im wesentlichen regulären Bereichs I chaotische Trajektorien gefunden worden. Für den chaotischen Simulationslauf mit maximaler Amplitude innerhalb des Bereiches I wurden 10^6 Umläufe (ca. 200 Std. Rechenzeit) durchgeführt, um zu untersuchen, ob Arnold-Diffusion zu einem Anwachsen der Amplituden führt.

Um nun mögliche Vergrößerungen der Amplitude im Laufe der Bewegung zu finden (Kapitel 3.5, Figur 3.41), werden die Amplituden als Funktion eines der Winkel dargestellt, wobei der jeweils andere Winkel auf ein kleines Winkelintervall eingeschränkt wird. Figur 4.14 zeigt die Amplitude A_x, A_z als Funktion der Winkel $\phi_x (\phi_z \approx 0), \phi_z (\phi_x \approx 0)$ für den regulären und chaotischen Fall. Zwar zeigen sich wie auch in Figur 3.41 im chaotischen Fall Inselstrukturen, aber über die gesamte Simulationsdauer von 10^6 Umläufen bleibt die Trajektorie in einer sehr dünnen chaotischen Schicht, ohne jede Tendenz zu einer Vergrößerung der Amplitude; wenn überhaupt eine Arnold-Diffusion vorliegt, verläuft sie somit äußerst langsam. Zusammen mit den großen Umlaufzahlen bis zum Teilchenverlust im Resonanzüberlappbereich in der Nähe des Bereichs I und dem sehr seltenen Auftreten von chaotischen Fällen im Bereich I (bei den gewählten Schrittweiten der Amplituden sind solche chaotischen Fälle nur im vierdimensionalen Fall mit $\hat{\eta} = +1.6 \%$ gefunden worden) bedeutet dies, daß nur ein unbedeutender Anteil von Trajektorien innerhalb des Bereiches I durch Arnold-Diffusion verloren gegen wird. Die Grenze zwischen Bereich I und II ist somit als gute Näherung der Akzeptanzgrenze zu betrachten.



Figur 4.14: Suche nach einer Vergrößerung der Amplitude durch Arnold-Diffusion

Für die horizontale Amplitude (Teil a) und die vertikale Amplitude (Teil b) zeigt sich bis zu einer Umlaufzahl von 10^6 keine Vergrößerung der Amplituden A_x , A_z . Es findet also kein "Überwinden" eines regulären KAM-Torus statt. In Teil b zeigt sich wieder (vergleiche Figur 3.41) eine Aufweitung der Einträge, in die reguläre Bewegung um Fixpunkte (Linien) eingebettet sind.

4.4 Zusammenfassung der Ergebnisse

Abschließend möchte ich die Ergebnisse der Simulationen für HERA zusammenfassen.

Zunächst einmal hat sich herausgestellt, daß es im zweidimensionalen Fall praktisch keine Reduktion der Akzeptanz durch chaotische Bewegung gibt. Erst die vier- und sechsdimensionalen Untersuchungen zeigen einen breiten Resonanzüberlappbereich und somit eine deutliche Einschränkung der dynamischen Akzeptanz aufgrund chaotischer Bewegung. Dabei zeigt sich, daß die Berücksichtigung der longitudinalen Schwingungen nur eine unwesentliche zusätzliche Akzeptanzeinschränkung bewirkt.

Die gute Feldqualität der Dipolmagnete führt im sechsdimensionalen Fall zu einer guten dynamischen Akzeptanz im Bogen von 14,7 mm. Es bleibt also ein deutlicher Sicherheitsabstand zur erwarteten Strahlgröße, die etwa 6 mm beträgt.

Allerdings hat sich gezeigt, daß die Akzeptanz praktisch nicht durch die untersuchten Nichtlinearitäten bestimmt wird, sondern im wesentlichen durch die starke Aperturbegrenzung an einigen Stellen in der Wechselwirkungszone. Dies führt zu einer Reduktion der Akzeptanz auf 11,8 mm.

Schließlich hat sich herausgestellt, daß die Arnold-Diffusion für HERA keine Rolle spielt und man deshalb die hier verwendete Definition einer Akzeptanzgrenze als eine gute Näherung für eine solche Grenze betrachten darf.

Kapitel 5: DESY III

5.1 Einführung

Für das Protonen-Synchrotron DESY III /24,25/ sind Teilchenbahnsimulationen durchgeführt worden, um die Einschränkung der Akzeptanz durch Feldfehler der combined-function Magnete zu bestimmen. Dazu wurde der modifizierte RACETRACK-Code verwendet, mit dem der ganze Beschleunigungszyklus behandelt werden kann (siehe Anhang 1, 2).

Durch Simulation an kritischen Q-Werten wurde abgeschätzt, ob die Q-Aufweitung durch Raumladungseffekte gefährlich werden kann.

In Abschnitt 5.4 wird die Q-Wert-Verschiebung und Aufweitung durch Nichtlinearitäten bestimmt.

Es wurde mit mehreren Multipolstatistiken gerechnet, um zu testen, wie empfindlich die Akzeptanz abhängt von unterschiedlichen Multipolverteilungen um den Ring herum.

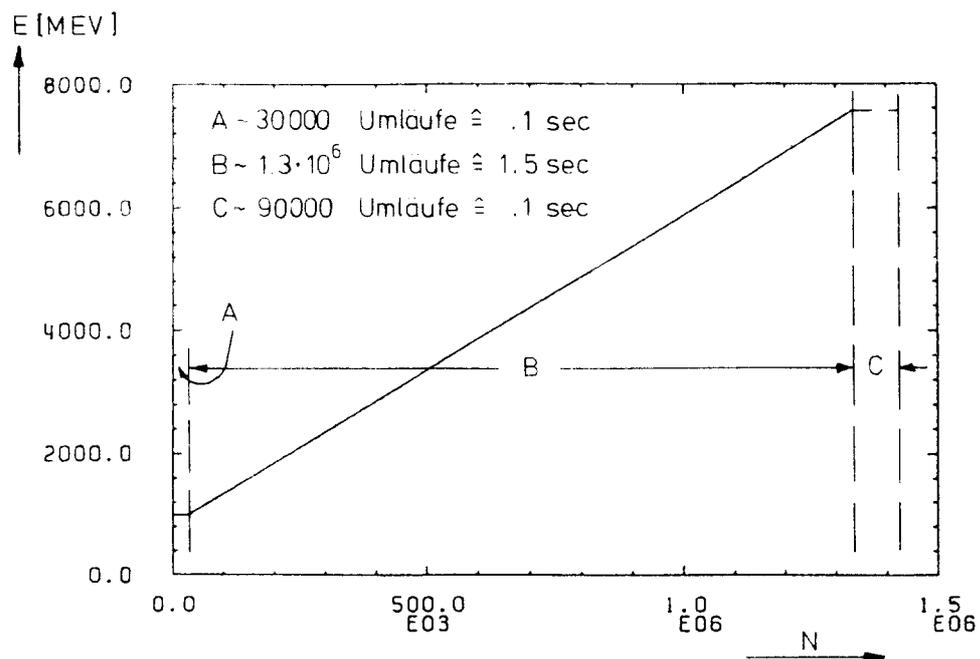
Außerdem wurde der Einfluß einer intrinsischen Resonanz auf die Akzeptanz bestimmt.

5.2 DESY III - Berechnungen mit dem erweiterten RACETRACK-Code

In das Programm RACETRACK werden die Feldfehler in einer Multipolentwicklung eingegeben. Zur Bestimmung der Feldfehler sind Messungen an combined-function Magneten mit dem Meßsystem der HERA-Dipole durchgeführt worden /26/. Leider konnten die Ergebnisse nicht verwendet werden, da die Werte der Multipole ab 5. Ordnung durch das Rauschen der Meßapparatur überdeckt wurden. Dies liegt daran, daß der große Quadrupolanteil des combined-function Magneten beim Meßverfahren unkompensiert bleibt. Es wurde deshalb ein Satz von Multipolen benutzt, der durch einen Fit an alte Meßdaten /27/ der Modellmagnete von DESY III gewonnen wurde (näheres siehe Anhang 6).

Der gesamte Beschleunigungszyklus in DESY III dauert 1.7 sec. Das entspricht 1.5×10^6 Umläufen. Es ist deshalb möglich, Teilchenbahnen über die gesamte Verweildauer in DESY III mit RACETRACK zu verfolgen.

Im Beschleunigungszyklus werden die Protonen von 50 MeV auf 6.6 GeV beschleunigt. Diese Beschleunigung erfolgt gemäß Figur 5.1: Etwa 30000 Umläufe nach der Injektion (.1 sec) wird die Beschleunigung für 1.3×10^6 Umläufe (1.5 sec) eingeschaltet. Am Ende der Beschleunigungsphase wird die Energie für weitere 90000 Umläufe (.1 sec) konstant gehalten.



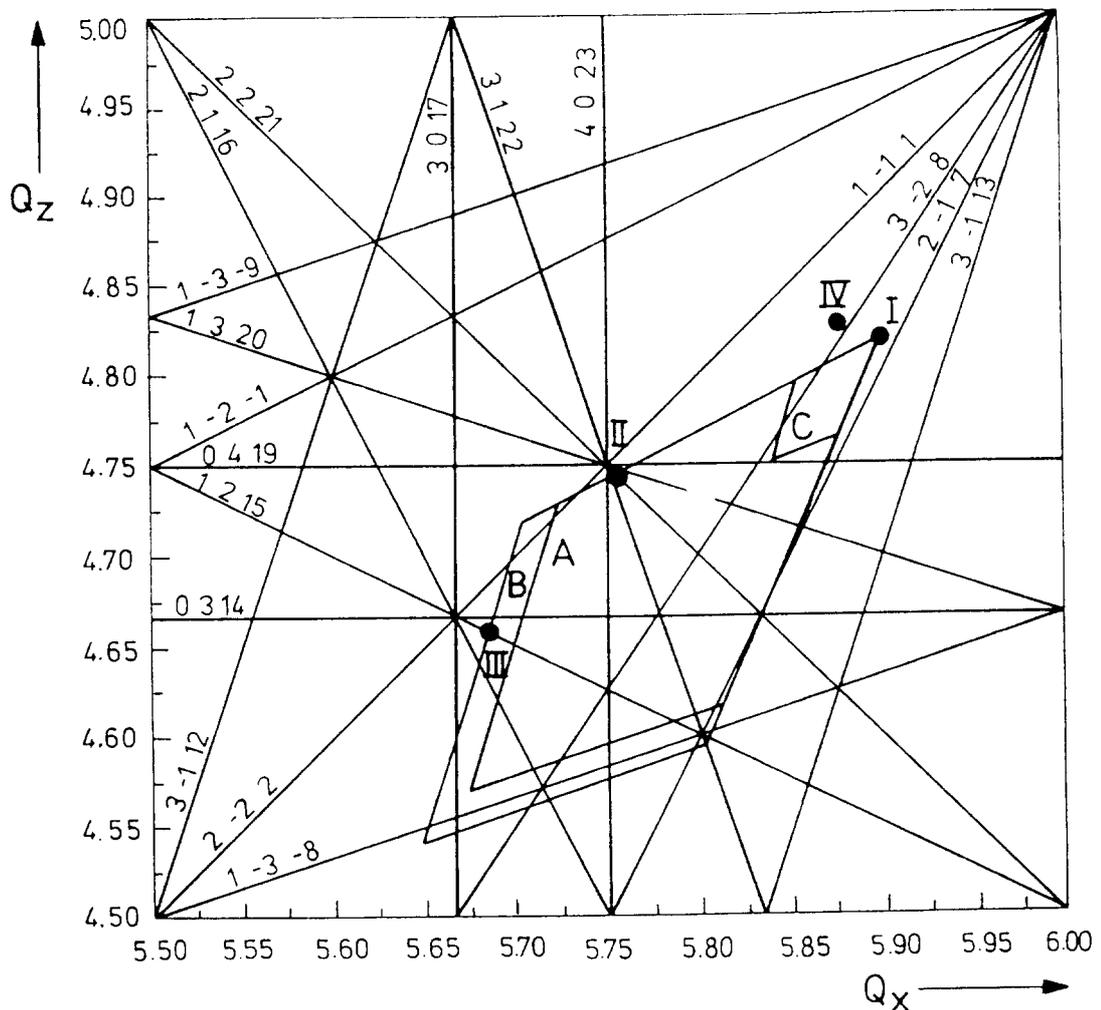
Figur 5.1: Beschleunigungszyklus

Zunächst wird die Akzeptanzgrenze für den Design-Arbeitspunkt (Punkt I in Figur 5.2) bestimmt. Um diese Grenze zu finden, wird die Anfangsamplitude \hat{A}_{x_0} variiert, dabei wird die Amplitude \hat{A}_{z_0} der z-Bewegung stets mit variiert: $\hat{A}_{z_0} = \sqrt{\beta_z/\beta_x} \hat{A}_{x_0}$. Die maximale stabile Anfangsamplitude ist dann die Akzeptanzgrenze.

Zweitens werden Raumladungseffekte betrachtet. Bei niedrigen Energien spielen diese Raumladungskräfte eine große Rolle für die Strahldynamik /25/. Bei kleiner Geschwindigkeit der Protonen wird die elektrostatische Abstoßung zwischen Teilchen nicht durch die magnetische Wechselwirkung kompensiert und es bleibt eine defokussierende Selbstkraft. Dies führt zu einer Reduktion der Betatronfrequenzen.

In einem gebündelten Strahl mit nicht gleichförmiger transversaler und longitudinaler Dichte ist die Frequenzverschiebung sowohl amplitudenabhängig als auch eine Funktion der longitudinalen Teilchenposition. Es ergibt sich somit eine Q-Wert-Aufweitung. Infolge der Synchrotronschwingung oszilliert ein Teilchen zwischen Kopf, Mitte und Schwanz des Teilchenbündels hin und her, wobei Gebiete mit niedriger, hoher und wieder niedriger Ladungsdichte durchlaufen werden, deshalb variiert der Q-Wert mit der doppelten Synchrotronfrequenz.

Figur 5.2 zeigt die Q-Wert-Aufweitungen für verschiedene Energien. Die Berücksichtigung des Raumladungseffektes ist in RACETRACK wegen des großen zusätzlichen Rechenaufwands nicht vorgesehen. Jedoch kann man einen Anhaltspunkt erhalten, inwieweit ein großer überstrichener Q-Wertbereich gefährlich ist, indem man auf einem Arbeitspunkt in der Nähe der Resonanzen 3. Ordnung (Punkt II in Figur 5.2) und 4. Ordnung (Punkt III in Figur 5.2) die Akzeptanzen bestimmt.



Figur 5.2: Q_x - Q_z Diagramm

Die Geraden sind mit $(n \ m \ p)$ gekennzeichnet: $n Q_x + m Q_z = p$. Punkt I ist der Design-Arbeitspunkt. II ist in der Nähe der Resonanzen 4. Ordnung, III liegt in der Nähe der Resonanzen 3. Ordnung, IV ist in der Nähe der Dekapolresonanz $3Q_x - 2Q_z = 8$. Die Flächen A, B, C geben den Q-Wertbereich an, der durch den Raumladungseffekt überstrichen wird, A entspricht der Einschüßenergie, B ist die Fläche nach 28 ns, C nach 0,5 sec Beschleunigung.

Als dritter Punkt wird der Einfluß verschiedener Multipolstatistiken untersucht. Neben den Mittelwerten der Multipole werden 10% dieser Werte als Standardabweichung eingesetzt (siehe Anhang 6), um die Unterschiede von Magnet zu Magnet zu berücksichtigen. Zunächst muß eine der vielen möglichen Multipolverteilungen ausgewählt werden. Dazu wird jeweils für 20 verschiedene Multipolsätze die maximale stabile Anfangsamplitude über 100 Umläufe bestimmt. Eine Statistik mit mittlerer maximaler stabiler Anfangsamplitude wird gewählt und für alle Untersuchungen beibehalten.

Es gibt die Möglichkeit, alle Magnete zu vermessen und dann gezielt zu plazieren, um die Akzeptanz zu optimieren. Der große Aufwand ist aber nur dann gerechtfertigt, wenn die Akzeptanz empfindlich von einer solchen Plazierung abhängt. Um ein Gefühl für diese Empfindlichkeit zu bekommen, ist zusätzlich die Akzeptanz bei zwei weiteren Multipolstatistiken bestimmt worden.

Viertens wird der Einfluß einer intrinsischen Resonanz auf die Akzeptanz bestimmt. Der DESY III Ring läßt sich in 8 Superperioden unterteilen. Intrinsische Resonanzen sind solche, bei denen die Resonanzbedingung $n_x Q_x + n_z Q_z - p = 0$ in jeder Superperiode erfüllt ist, also p durch die Anzahl der Superperioden teilbar ist. Sie sind besonders stark und sollten daher vermieden werden.

Wie stark sich zum Beispiel die intrinsische Dekapolresonanz $3Q_x - 2Q_z = 8$ auf die Akzeptanz auswirkt, ist zusätzlich an einem Arbeitspunkt in der Nähe dieser Resonanz (Punkt IV in Figur 5.2) untersucht worden.

5.3 Ergebnisse

Bei allen Untersuchungen wurden am Ort der Beschleunigungsstrecke die Simulationen gestartet. Dort wurde dann untersucht, wie sich die Anfangskoordinaten ($x_0, x'_0, z_0, z'_0, \sigma_0, \hat{\eta}_0 = (\Delta p/p)_0$) von Umlauf zu Umlauf entwickeln.

Folgende Anfangsparameter wurden verwendet (entnommen aus/24/):

- optische Parameter

$$\beta_x = 6.59 \text{ m} \quad \alpha_x = -0.88$$

$$\beta_z = 10.6 \text{ m} \quad \alpha_z = 1.09$$

- Dispersion $D_x = 3.14 \text{ m}$

Wegen des großen Wertes der Dispersion am Startpunkt hat dort die Dispersionsbahn eine entsprechend große Ablage

$$x_{\hat{\eta}} = D_x \cdot \hat{\eta}_0 = 4.71 \text{ mm}$$

- Arbeitspunkt im Q_x - Q_z -Diagramm:

$$Q_x = 5.9 \quad Q_z = 4.82$$

Dies ist der Design-Arbeitspunkt, dieser Wert entspricht Punkt I in Figur 5.2.

- Folgende Parameter werden für alle Untersuchungen festgelegt:

$$\text{gleiche Emittanzen: } \varepsilon_{x_0} = \varepsilon_{z_0}$$

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= 0 \\ \hat{\eta}_0 &= 1.5 \text{ ‰} \end{aligned}$$

$$2\varepsilon_{x_0} = \left(\frac{1+\alpha_x^2}{\beta_x} \right) x_0^2 + 2\alpha_x x_0 x'_0 + \beta_x x_0'^2$$

$$2\varepsilon_{z_0} = \left(\frac{1+\alpha_z^2}{\beta_z} \right) z_0^2 + 2\alpha_z z_0 z'_0 + \beta_z z_0'^2$$

Um die dynamische Akzeptanz von DESY III zu bestimmen, sind zunächst physikalische Aperturbegrenzungen und Sollbahnabweichungen durch Dipolfehler vernachlässigt worden.

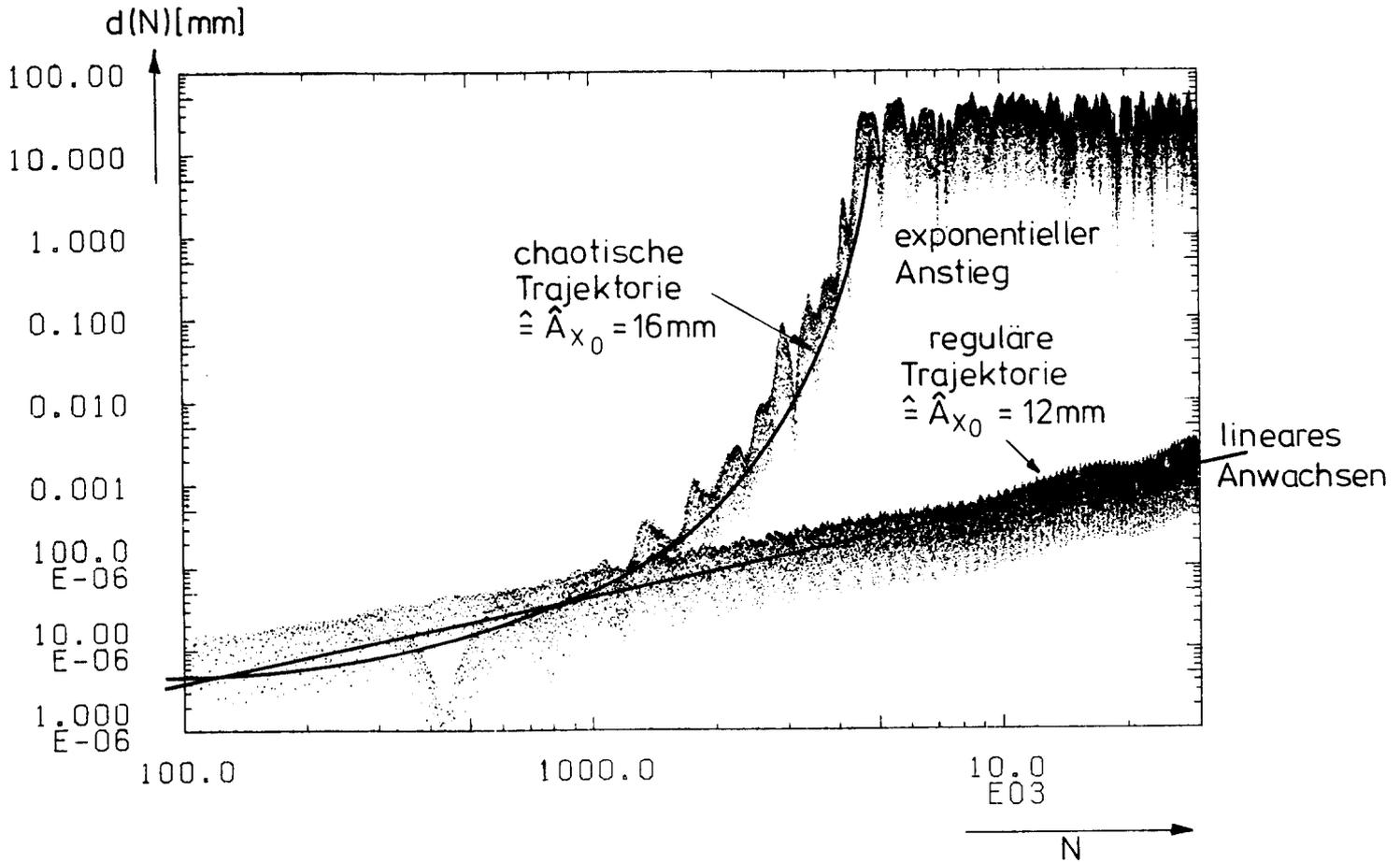
Bei einem Speicherring ist die maximale Amplitude, für die die Bewegung regulär ist, die Akzeptanzgrenze (siehe Kapitel 3,4).

Beim Synchrotron DESY III hingegen werden die Teilchen beschleunigt. Diese Beschleunigung führt zur Dämpfung der Betatronamplituden; damit werden auch die Störungen durch Feldfehler geringer. Dies führt dazu, daß ein Teilchen entweder nach wenigen Umläufen oder gar nicht verlorengeht; so wurde kein einziger Teilchenverlust gefunden nach Umlaufzahlen von mehr als 50 000. Es wurden deshalb in den meisten Fällen lediglich 10^5 Umläufe simuliert.

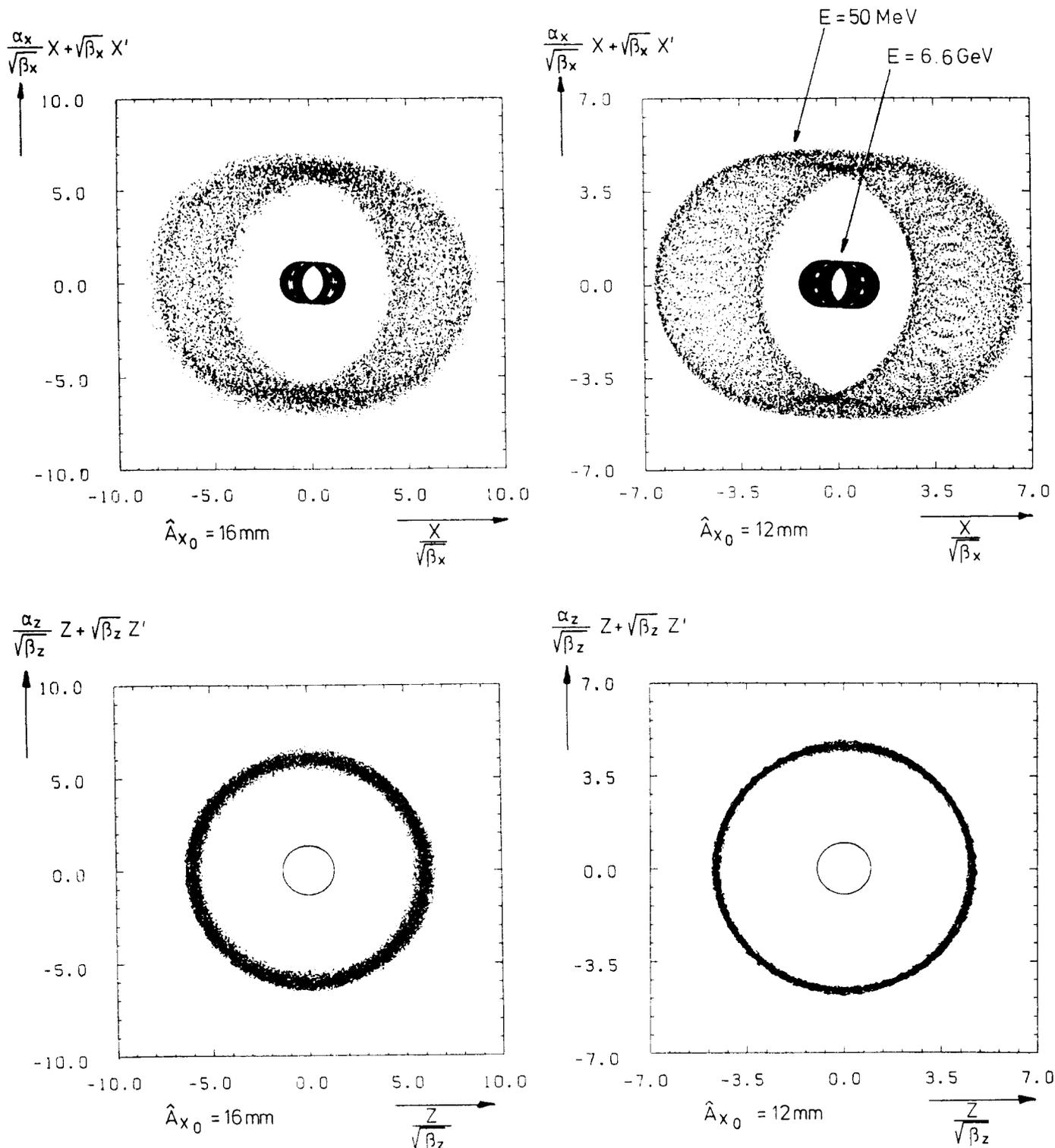
Die Abbildungen 5.3-5 zeigen die Ergebnisse für die Teilchen mit der größten regulären Anfangsamplitude $\hat{A}_{x_0} = 12$ mm und der maximalen stabilen Anfangsamplitude $\hat{A}_{x_0} = 16$ mm. Im ersten Falle handelt es sich um eine reguläre Trajektorie, entsprechend wächst der Phasenraumabstand zweier Teilchen $d(N)$ (Figur 5.3) linear an, während im zweiten Fall chaotische Bewegung mit exponentiell anwachsendem Abstand $d(N)$ vorliegt.

Figur 5.4 und 5.5 zeigen die Projektionen des Phasenraumes (x, x') ; (z, z') ; $(\sigma, \hat{\eta})$ vor und nach der Beschleunigung. Bei der regulären Bewegung nehmen die Flächen im Phasenraum mit dem Verhältnis der Impulse vor p_0 und nach p_1 der Beschleunigung $p_0/p_1 \approx 0.04$ ab.

Bei chaotischer Bewegung muß eine Schrumpfung der Phasenraumflächen nicht exakt im Verhältnis der Impulse stattfinden. Denn durch den Einfluß von Differenzenresonanzen kann sich das Verhältnis der Emittanzen $K = \varepsilon_z/\varepsilon_x$ sprunghaft verändern (siehe Figur 5.6). Durch eine nachfolgende Beschleunigung kann wegen der Dämpfung der Schwingungsamplitude dieses Emittanzenverhältnis eingefroren werden.

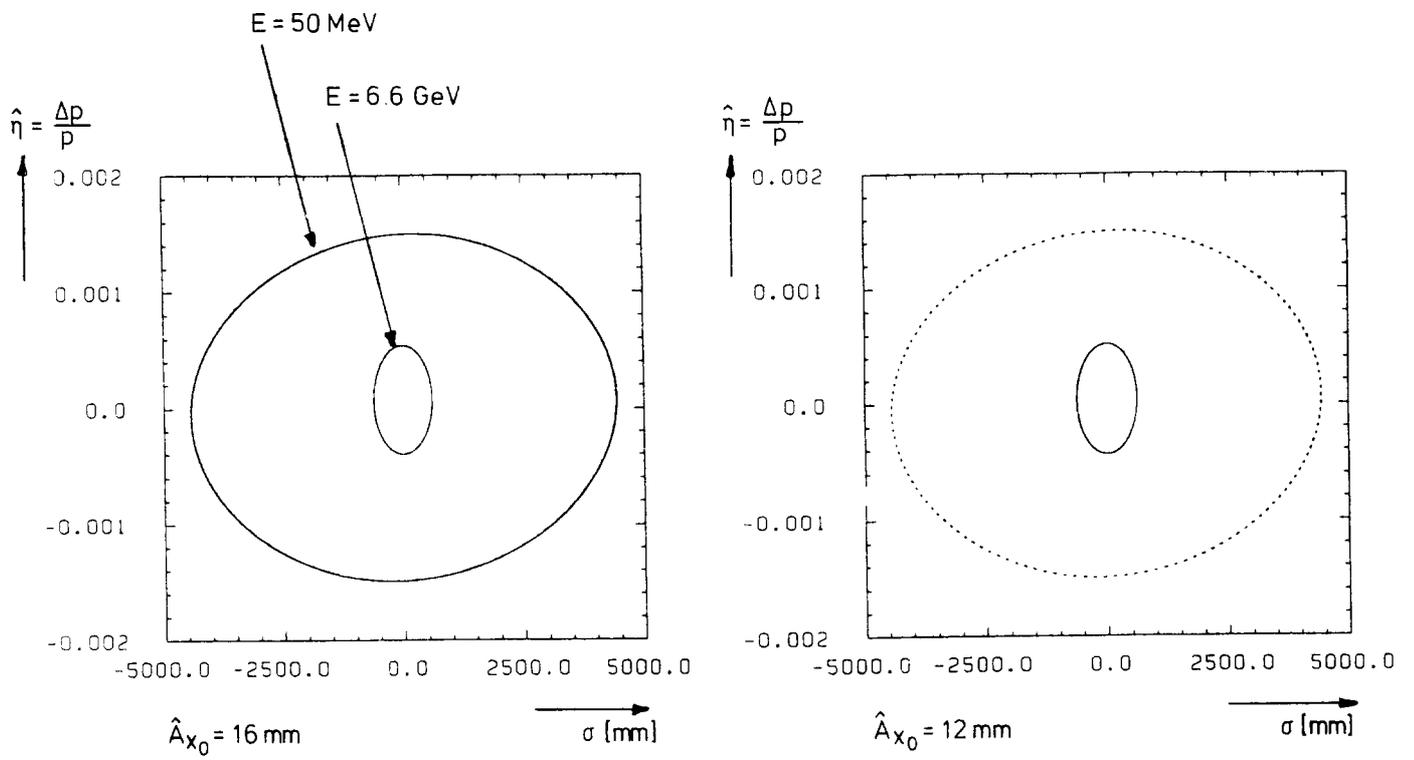


Figur 5.3: Phasenraumabstand zweier Teilchen als Funktion der Umlaufzahl N

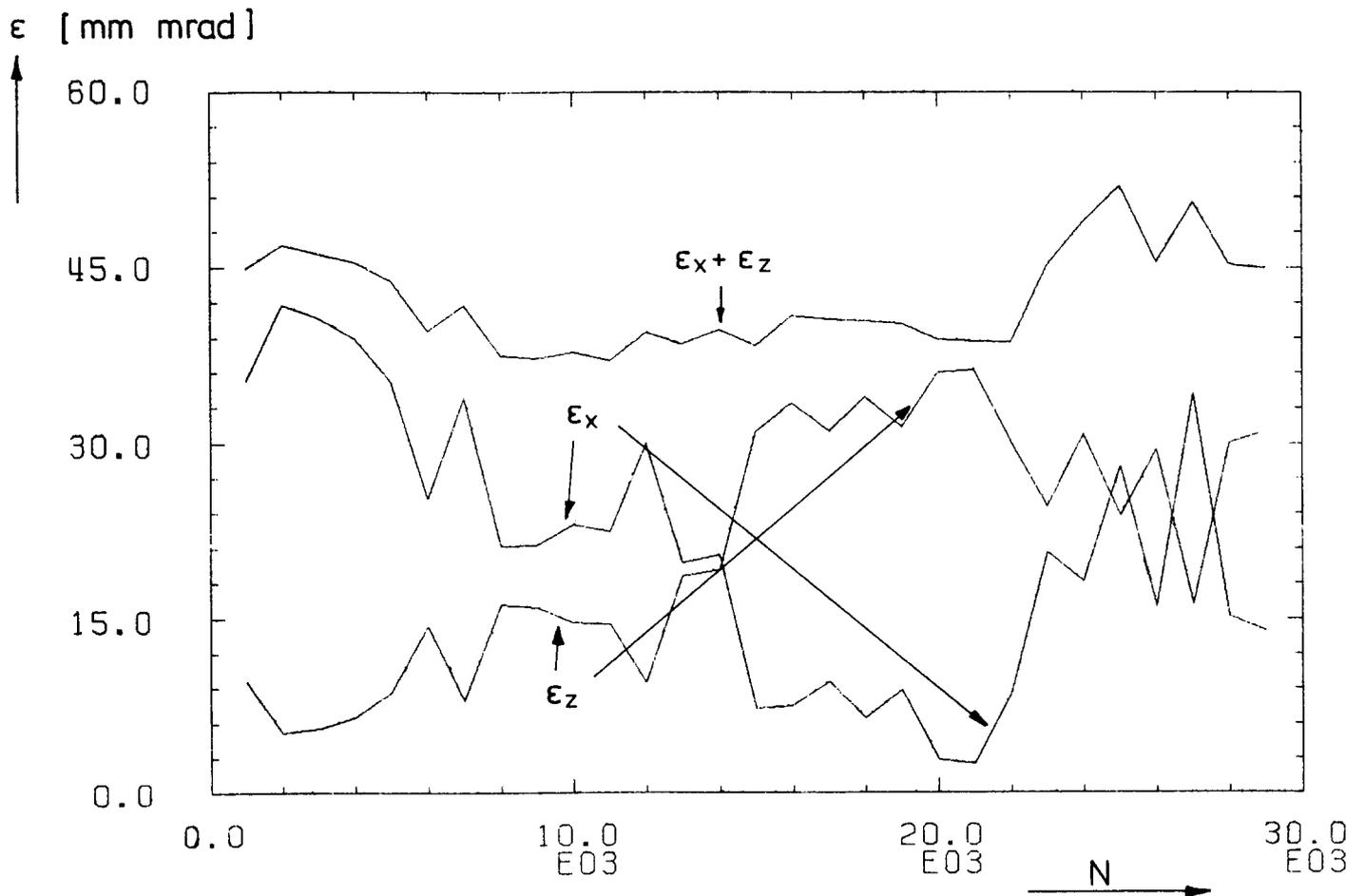


Figur 5.4: Horizontale und vertikale Phasenraumprojektion

Die beiden rechten Abbildungen gelten für die Anfangsamplitude $\hat{A}_{x_0} = 12\text{ mm}$, links bei 16 mm . Es sind jeweils die ersten 30000 Umläufe vor der Beschleunigung (aussen) und die letzten 90000 Umläufe nach der Beschleunigung (innen) gezeigt. Statt der jeweiligen Koordinaten (y, y') sind die mit den Twissparameter $(y/\sqrt{\beta}, \alpha/\sqrt{\beta} y + \sqrt{\beta} y')$ normierten Koordinaten verwendet worden. Die Ellipsen der linearen Bewegung im Phasenraum werden dadurch auf Kreise transformiert. Dadurch läßt sich der Effekt der Nichtlinearitäten als Abweichung von einem solchen Kreis besser beurteilen.



Figur 5.5: - Longitudinale Projektion des Phasenraumes ($\sigma, \hat{\eta} = \frac{\Delta p}{p}$)



Figur 5.6: Gemittelte Emittanzen als Funktion der Umlaufzahl N

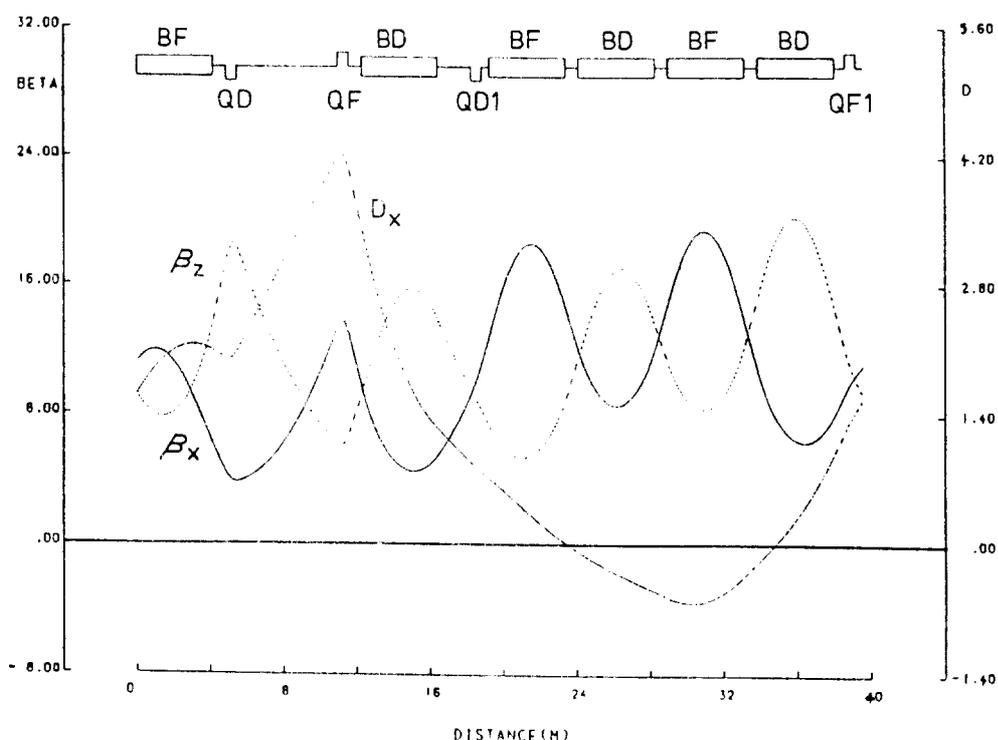
Gezeigt werden die über 1000 Umläufe gemittelten Emittanzen für den Arbeitspunkt in der Nähe der Dekapolresonanz. Bei etwa 14 000 Umläufen gibt es einen sprunghaften Emittanzaustausch von ϵ_x nach ϵ_z , wobei die Summe der Emittanzen $\epsilon_x + \epsilon_z$ nahezu konstant bleibt.

In Tabelle 5.1 sind alle Simulationsergebnisse zusammengefaßt. In der Nähe der Resonanzen der Ordnung 3 und 4 ist eine deutliche Reduktion der dynamischen Akzeptanz festzustellen, die 2 weiteren Multipolstatistiken und der Fall IV in der Nähe der intrinsischen Dekapolresonanz ergeben ungefähr die gleiche Akzeptanz.

Ohne Synchrotronoszillationen und $\hat{\eta}_0 = 0$ ergibt sich erwartungsgemäß eine deutliche Verbesserung der Akzeptanz, hier simuliert für den Design-Arbeitspunkt und einen Arbeitspunkt in der Nähe der Resonanzen der Ordnung 3.

Die Nähe zur Dekapolresonanz bewirkt im wesentlichen eine starke Verringerung der größten regulären Amplitude: nur noch 7 mm im Vergleich zu 12 mm beim Design-Arbeitspunkt (siehe auch Abschnitt 5.4).

Als nächstes sind physikalische Aperturbegrenzungen in die Maschine eingeführt worden. In den defokussierenden Magneten und den Quadrupolen ist eine freie Apertur von ± 40 mm. Die fokussierenden Magnete haben eine elliptische Apertur $x = \pm 41.5$ mm; $z = \pm 25.5$ mm.



Figur 5.7: Magnetstruktur von DESY III

Das Synchrotron besteht aus 8 gleichen Abschnitten (Superperioden). Die Abbildung zeigt einen solchen Abschnitt mit den optischen Funktionswerten (β_x , β_z , D_x) in Abhängigkeit von der longitudinalen Koordinate s.

Wie zu erwarten, gehen in allen Fällen die Teilchen im fokussierenden Magneten verloren.

Zusätzlich sind Teilchenbahnen mit und ohne Schwankungen der Sollbahn (1 mm bzw. 2 mm rms) simuliert worden (Tabelle 5.1).

Zusammenfassend läßt sich sagen, daß für den realistischen Fall mit Aperturbegrenzung und Sollbahnabweichung weder die Änderung des Arbeitspunktes noch die Änderung der Multipolstatistik zu einer starken Akzeptanzeinschränkung führt, alle Werte liegen zwischen $\hat{A}_{x_0} = 12$ mm und $\hat{A}_{x_0} = 14$ mm. Allerdings sind alle Ergebnisse mit den vorläufigen Multipolkoeffizienten berechnet worden. Die Rechnungen müssen nach der erneuten Messung von einigen Magneten mit dem neuen quadrupolkompensierten Meßsystem wiederholt werden, um diese Resultate zu erhärten.

5.4 Verschiebung der Q-Werte durch Nichtlinearitäten

Die Nichtlinearitäten in DESY III führen zu einer amplitudenabhängigen Q-Wert-Verschiebung. Mit einer einfachen Methode können die nichtlinearen Q-Werte bestimmt werden. Dazu werden die Phasenvorschübe pro Umlauf am Beobachtungspunkt bestimmt und über 1000 Umläufe gemittelt.

Figur 5.8 zeigt Q_Z gegen Q_X für verschiedene Amplituden, dabei sind jeweils alle Resonanzlinien bis 7. Ordnung eingezeichnet. In Teil a werden die Q-Werte des Design-Arbeitspunktes gezeigt, für die Startamplituden $\hat{A}_{x_0} = 1 \cdot 10^{-5}$ mm; $\hat{A}_{x_0} = 12$ mm; $\hat{A}_{x_0} = 16$ mm.

Teil b zeigt die Q-Werte am Arbeitspunkt in der Nähe der Dekapolveresonanz, dort für die Startamplituden $\hat{A}_{x_0} = 1 \cdot 10^{-5}$ mm; $\hat{A}_{x_0} = 7$ mm; $\hat{A}_{x_0} = 8$ mm; $\hat{A}_{x_0} = 16$ mm.

Die nichtlineare Q-Wert-Verschiebung kann auch näherungsweise analytisch berechnet werden /9/:

$$\begin{aligned} \Delta Q_X &= \sum_i \sum_{\nu=2}^5 \frac{b_{2\nu}^i (2\nu-1)!}{2^{\nu+1} \pi} \sum_{q+s=\nu} \frac{q}{(q!)^2 (s!)^2} (-1)^s (\beta_X^i)^q (\beta_Z^i)^s (\tilde{\epsilon}_X)^{(q-1)} (\tilde{\epsilon}_Z)^s \\ \Delta Q_Z &= \sum_i \sum_{\nu=2}^5 \frac{b_{2\nu}^i (2\nu-1)!}{2^{\nu+1} \pi} \sum_{q+s=\nu} \frac{s}{(q!)^2 (s!)^2} (-1)^s (\beta_X^i)^q (\beta_Z^i)^s (\tilde{\epsilon}_X)^q (\tilde{\epsilon}_Z)^{(s-1)} \end{aligned} \quad (5.1)$$

Dabei werden alle geraden regulären Multipole bis Ordnung 10 jeweils an ihren longitudinalen Positionen s_i berücksichtigt. Da die Nichtlinearitäten die Phasenraumflächen deformieren, sind statt der Anfangsemittanzen $(\epsilon_{x_0}, \epsilon_{z_0})$ gemittelte Werte $(\tilde{\epsilon}_X, \tilde{\epsilon}_Z)$ verwendet worden. (Beide Wertpaare unterscheiden sich allerdings nur geringfügig). Die mit Pfeilen gekennzeichneten Punkte sind die Ergebnisse der obigen Formel, sie stimmen hervorragend mit den gemittelten Q-Werten überein.

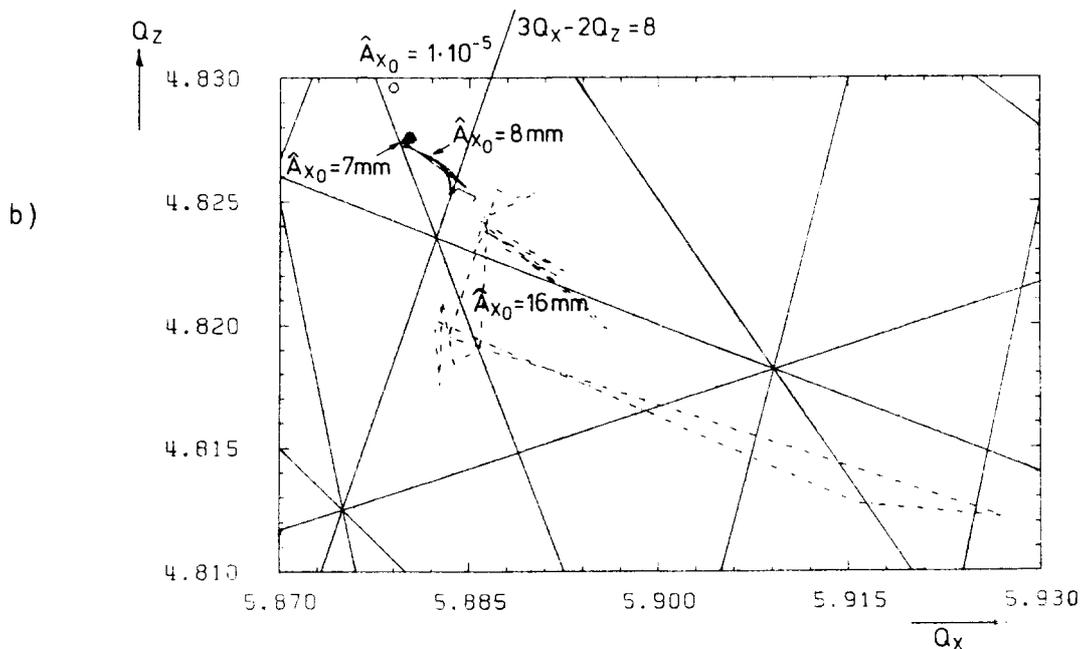
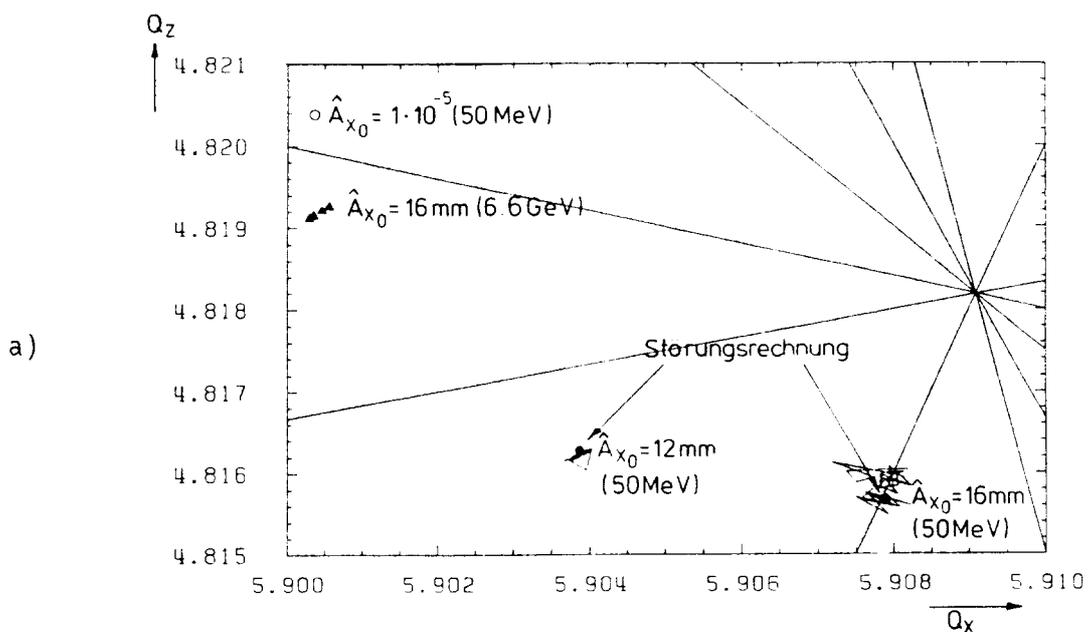


Fig. 5.8: Nichtlineare Q-Wert-Verschiebung

- a) Die Abbildung zeigt die nichtlineare Q-Wert-Verschiebung am Design-Arbeitspunkt für die Amplituden $\hat{A}_{x_0} = 1 \times 10^{-5}$, 12 mm, 16 mm bei der Einschussenergie ($E = 50$ MeV). Nach der Beschleunigung ($E = 6.6$ GeV) ist wegen der Dämpfung der Amplituden auch die nichtlineare Q-Wert-Verschiebung geringer. Für die Amplitude $\hat{A}_{x_0} = 12, 16$ mm sind zusätzlich die gemäß Gleichung (5.1) berechneten Q-Wert-Verschiebungen eingetragen. Es sind alle Resonanzlinien bis zur 7. Ordnung eingezeichnet.
- b) Beim Arbeitspunkt in der Nähe der Dekapolresonanz ($3Q_x - 2Q_z = 8$) ist die nichtlineare Q-Wert-Verschiebung für die Amplituden $\hat{A}_{x_0} = 1 \times 10^{-5}$, 7, 8, 16 mm gezeigt. Bei 7 mm ist die Bewegung noch regulär. Bei größeren Amplituden ist die Bewegung chaotisch und die Q-Werte wandern zwischen verschiedenen Resonanzlinien hin und her.

In Figur 5.8a sind zusätzlich noch die Q-Werte bei $\hat{A}_{x_0} = 16$ mm nach der Beschleunigung eingetragen, die wieder in der Nähe des Designwertes liegen.

Bis zu einer Amplitude von 7 mm ist die Bewegung in der Nähe der Dekapolresonanz noch regulär. Wie in Figur 8b zu sehen, sind die gemittelten Q-Werte zwar durch die Nichtlinearitäten verschoben, sind aber auf einem nahezu punktförmigen Bereich im Q_x - Q_z -Diagramm eingeschränkt.

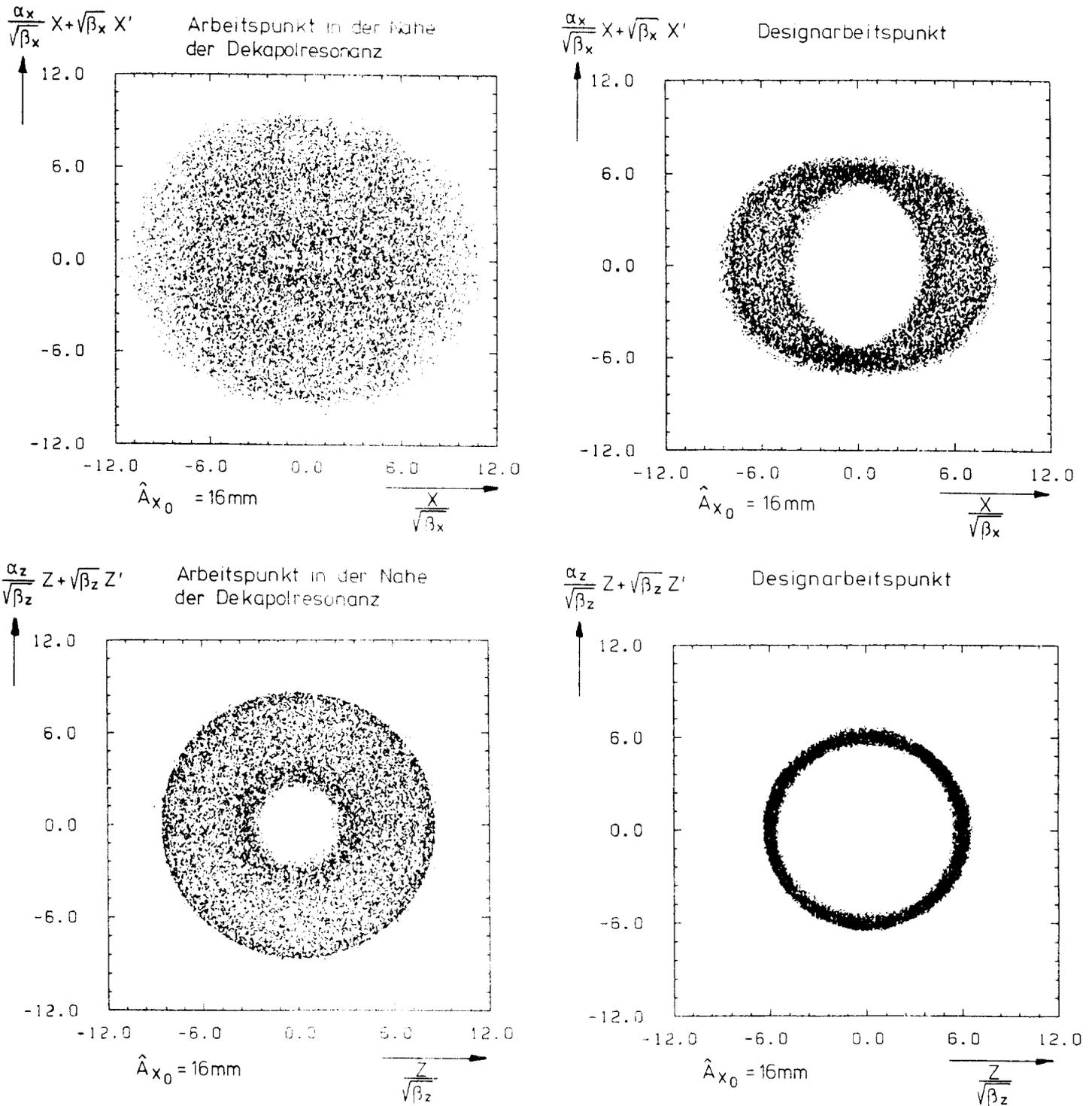
Bereits bei einer Amplitude von 8 mm sind die amplitudenabhängigen nichtlinearen Effekte (Q-Verschiebung, Resonanzverbreiterung) so stark, daß der Arbeitspunkt zwischen verschiedenen Resonanzen wandert und die Teilchenbahn chaotisch wird.

Bei $\hat{A}_{x_0} = 16$ mm überstreicht der Arbeitspunkt einen großen Bereich mit vielen Resonanzlinien. Dies führt dazu, daß auch in der horizontalen und vertikalen Phasenraumprojektion ein größerer Bereich eingenommen wird, wie in Figur 5.9 im Vergleich zum Design-Arbeitspunkt zu sehen ist, denn bei diesem Arbeitspunkt wird bei gleicher Anfangsamplitude nur ein kleiner Q-Wert-Bereich in der Nähe einer einzigen Resonanz überstrichen (Figur 5.8a).

Die maximalen Q-Wert-Verschiebungen für den Design-Arbeitspunkt durch Nichtlinearitäten sind:

$$\Delta Q_x = 8 \times 10^{-3} \quad ; \quad \Delta Q_z = -5 \times 10^{-3}$$

Im Vergleich zu den Q-Wert-Verschiebungen durch Raumladungseffekte sind sie also sehr klein.



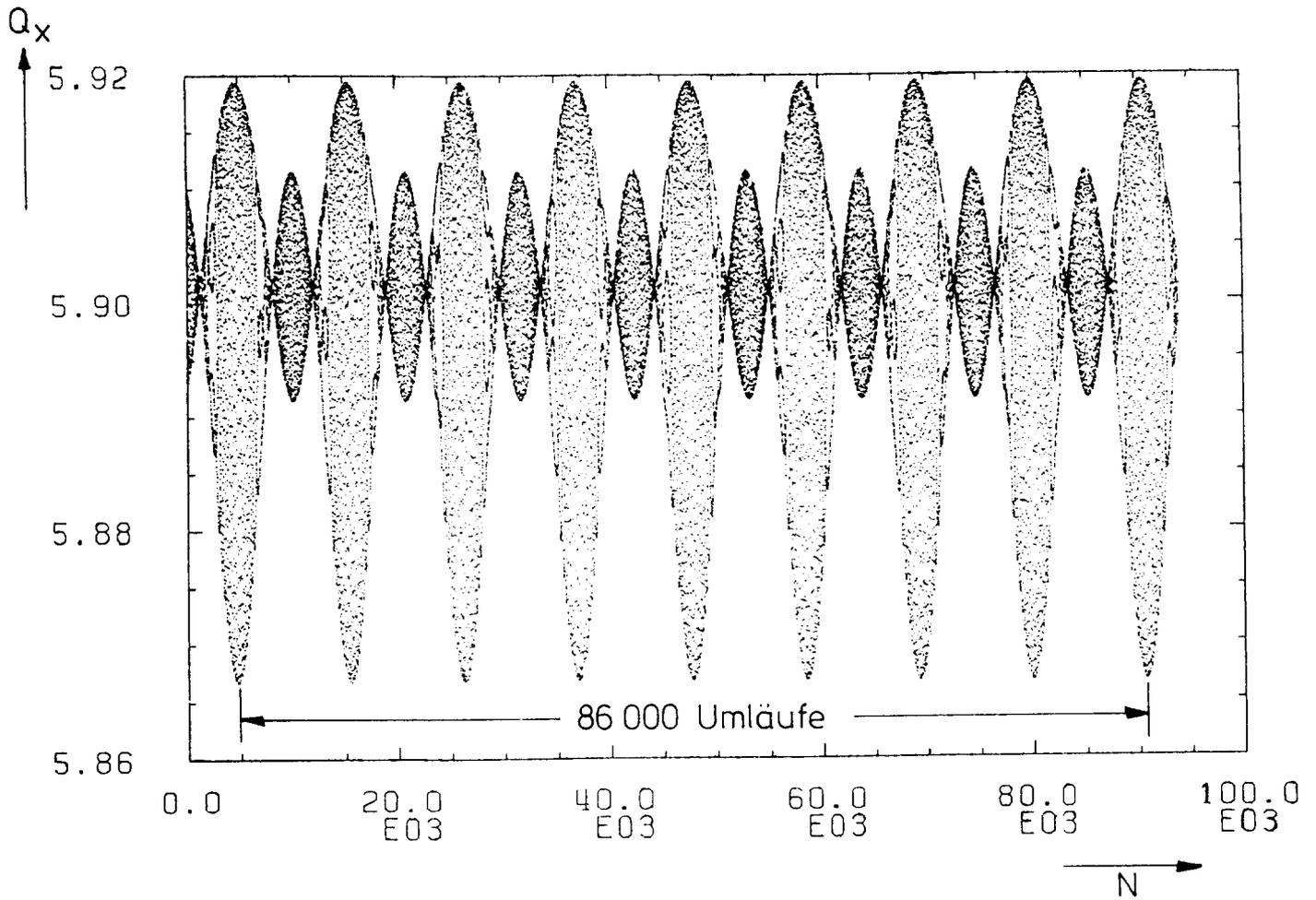
Figur 5.9: Horizontale und vertikale Projektion des Phasenraums für zwei verschiedene Arbeitspunkte bei $\hat{A}_{x_0} = 16\text{mm}$.

Am Arbeitspunkt in der Nähe der Dekapolresonanz $3Q_x - 2Q_z = 8$ wird im $Q_x - Q_z$ -Diagramm ein wesentlich größerer Bereich überstrichen als beim Design-Arbeitspunkt (Figur 5.8). An diesem Arbeitspunkt tritt deshalb ein besonders starker Emittanzaustausch auf (Figur 5.6). Entsprechend größer ist deshalb der Bereich, der im Phasenraum eingenommen wird (linke Seite) im Vergleich zum Design-Arbeitspunkt (rechte Seite).

Figur 5.10 zeigt die Änderung des Q_x -Wertes pro Umlauf nach der Beschleunigung für $\hat{A}_{x_0} = 16$ mm.

Bei DESY III wird die Chromatizität nicht kompensiert. Deshalb ändern sich im Takt der Synchrotronfrequenz die relative Impulsabweichung \hat{n} und damit auch die Quadrupolstärken. Dies führt zu einer Oszillation der Q-Werte, aus der man den Q-Wert der Synchrotronschwingung ermitteln kann:

$$Q_s = 9.30 \times 10^{-5}$$



Figur 5.10: Q_x gegen N nach der Beschleunigung für $\hat{A}_{x_0} = 16$ mm

Aus der Schwingungsperiode von Q_x läßt sich der Q-Wert der Synchrotronschwingung bestimmen:

$$Q_s = \frac{8}{86000} \approx 9.30 \times 10^{-5}$$

Anhang 1: Erweiterung des RACETRACK-Codes auf einen sechsdimensionalen symplektischen Formalismus

Gemäß den Referenzen /15,28/ sollen die Bewegungsgleichungen für die transversale Bewegung mit Synchrotronschwingungen abgeleitet werden.

Startpunkt der Überlegungen ist die relativistische Lagrangefunktion eines geladenen Teilchens im elektromagnetischen Feld:

$$\mathcal{L} = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{e}{c} (\dot{\vec{r}} \vec{A}) - e\varphi$$

$$v = |\dot{\vec{r}}| \quad (A1.1)$$

Dabei sind A und φ Vektor- und Skalarpotentiale des elektromagnetischen Feldes. Daraus kann man die Hamilton-Funktion in den natürlichen Koordinaten (x, z, s) (siehe Figur 1.1) gewinnen:

$$H(x, z, s, p_x, p_z, p_s, t) = c \left\{ m_0^2 c^2 + (p_x - \frac{e}{c} A_x)^2 + (p_z - \frac{e}{c} A_z)^2 + \left[\frac{p_s}{1 + K_x x + K_z z} - \frac{e}{c} A_s \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} + e\varphi$$

(A1.2)

K_x, K_z sind die Krümmungen in x- bzw. z-Richtung: $K_x = \frac{e}{\rho_0 c} B_{z_0}$; $K_z = \frac{e}{\rho_0 c} B_{x_0}$.

Wie in der Beschleunigerphysik üblich, wird statt der unabhängigen Variablen t die Variable s gewählt. Dies kann erreicht werden, indem statt des kanonischen Variablenpaars (s, p_s) das kanonische Variablenpaar $(t, -H)$ benutzt wird. Hierdurch erhält man die neue Hamilton-Funktion $K = -p_s$ und die neue unabhängige Variable s :

$$K(x, z, t, p_x, p_z, -H) = -p_s$$

$$= -(1 + K_x x + K_z z) \left\{ \frac{(H - e\varphi)^2}{c^2} - m_0^2 c^2 - (p_x - \frac{e}{c} A_x)^2 - (p_z - \frac{e}{c} A_z)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} - (1 + K_x x + K_z z) \frac{e}{c} A_s$$

(A1.3)

Es wird die Coulombbeziehung gewählt bei der $\varphi = 0$ ist und somit für die Energie gilt:

$$H = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = E \quad (\text{A1.4})$$

Nun wird die Hamilton-Funktion transformiert auf die Variablen σ :

$$(-v_0 t, \eta = \frac{E - E_0}{E_0}) \quad (\text{A1.5a})$$

und im ultrarelativistischen Fall auf

$$(-ct, \eta = \frac{E - E_0}{E_0}) \quad (\text{A1.5b}),$$

wobei v_0 die Geschwindigkeit des Sollteilchens sein soll.

Da $t(s)$ ohne Grenzen anwächst, wird statt $(-v_0 t)$; $(-ct)$ die Variable σ :

$$\sigma = s - v_0 t(s) \quad (\text{A1.6a})$$

$$\sigma = s - ct(s) \quad \text{ultrarelativistisch} \quad (\text{A1.6b})$$

eingeführt. Diese ist die Weglängenänderung an der Position s eines Teilchens mit Lichtgeschwindigkeit bzw. mit der Geschwindigkeit v zum Sollteilchen, dessen σ also stets gleich Null ist.

Die Hamilton-Funktion soll nun auf die Variablen (σ, η) transformiert werden. Im ultrarelativistischen Fall ist der Term $\left(\frac{m_0 c^2}{E_0}\right)^2$ sehr klein und wird deshalb vernachlässigt:

$$\bar{K} = \eta - (1 + K_x x + K_z z) \beta_0 \sqrt{(1 + \eta)^2 - \left(\frac{m_0 c^2}{E_0}\right)^2} \cdot \left\{ 1 - \frac{(\hat{p}_x - \beta_0 \frac{e}{E_0} A_x)^2 + (\hat{p}_z - \beta_0 \frac{e}{E_0} A_z)^2}{\beta_0^2 \left[(1 + \eta)^2 - \left(\frac{m_0 c^2}{E_0}\right)^2 \right]} \right\}^{\frac{1}{2}} - [1 + K_x x + K_z z] \beta_0 \frac{e}{E_0} A_s$$

$$\hat{p}_x = \frac{v_0}{E_0} p_x \quad ; \quad \hat{p}_z = \frac{v_0}{E_0} p_z \quad ; \quad \beta_0 = \frac{v_0}{c}$$

(A1.7a)

ultrarelativistisch

$$\bar{K} = (1 + \eta) \left\{ 1 - (1 + K_x x + K_z z) \left[1 - \frac{(\hat{p}_x - \frac{e}{E_0} A_x)^2}{(1 + \eta)^2} - \frac{(\hat{p}_z - \frac{e}{E_0} A_z)^2}{(1 + \eta)^2} \right]^{\frac{1}{2}} \right\} - (1 + K_x x + K_z z) \frac{e}{E_0} A_s$$

$$\hat{p}_x = \frac{e}{E_0} p_x \quad ; \quad \hat{p}_z = \frac{e}{E_0} p_z$$

(A1.7b)

Schließlich wird der Wurzelterm in (A1.7)(in (A1.7a) ist der zweite Wurzelterm gemeint) bis zum zweiten Glied entwickelt:

$$\hat{K} = \eta - (1 + K_x x + K_z z) \beta_0^2 (1 + \hat{\eta}) + \frac{1}{2\beta_0^2} \frac{(\hat{p}_x - \beta_0 \frac{e}{E_0} A_x)^2}{(1 + \hat{\eta})} + \frac{1}{2\beta_0^2} \frac{(\hat{p}_z - \beta_0 \frac{e}{E_0} A_z)^2}{(1 + \hat{\eta})} - (1 + K_x x + K_z z) \frac{e}{E_0} A_s \quad (\text{A1.8a})$$

ultrarelativistisch

$$\hat{K} = (1 + \eta) \left(1 - (1 + K_x x + K_z z) \left[1 - \frac{(\hat{p}_x - \frac{e}{E_0} A_x)^2}{2(1 + \eta)^2} - \frac{(\hat{p}_z - \frac{e}{E_0} A_z)^2}{2(1 + \eta)^2} \right] \right) - (1 + K_x x + K_z z) \frac{e}{E_0} A_s \quad (\text{A1.8b})$$

Dabei ist der erste Wurzelterm in (A1.7a) umgeformt worden:

$$\frac{1}{\beta_0} \sqrt{(1 + \eta)^2 - \left(\frac{m_0 c^2}{E_0} \right)^2} = \frac{1}{\beta_0} \frac{p c}{E_0} = \frac{p}{p_0} = 1 + \hat{\eta} \quad (\text{A1.9})$$

(A1.8) wird jetzt mit den entsprechenden Vektorpotentialen für Driftstrecken, Dipole, Quadrupole, combined-function Magnete und Beschleunigungsstrecken ausgewertet. Ich möchte mich hier auf die einfachsten Fälle, nämlich Driftstrecken, Dipole und den Beschleunigungsstrecken beschränken, denn für diese Beispiele lassen sich die Ergebnisse leicht veranschaulichen. Die anderen Fälle sind nur rechentechnisch aufwendiger (siehe Referenzen /15,28/). Für eine Driftstrecke sind sowohl das Vektorpotential als auch die Krümmungen gleich Null:

$A_x = A_z = 0$; $K_x = K_z = 0$. Die Hamilton-Funktion einer Driftstrecke nimmt somit für den allgemeinen Fall die Form an

$$\hat{K} = \eta - \beta_0^2 (1 + \hat{\eta}) + \frac{\hat{p}_x^2}{2\beta_0^2 (1 + \hat{\eta})} + \frac{\hat{p}_z^2}{2\beta_0^2 (1 + \hat{\eta})} \quad (\text{A.1.10})$$

und damit sind die entsprechenden Bewegungsgleichungen:

$$x' = \frac{\hat{p}_x}{\beta_0^2(1+\hat{\eta})} ; \quad z' = \frac{\hat{p}_z}{\beta_0^2(1+\hat{\eta})} ; \quad \sigma' = \left(1 - \frac{v_0}{v}\right) - \frac{1}{2} x'^2 \frac{v_0}{v}$$

$$\hat{p}_x' = 0 ; \quad \hat{p}_z' = 0 ; \quad \eta' = 0$$

(A.1.11)

Durch Integration erhält man: $s_2 - s_1 = L \hat{=} \text{Länge der Driftstrecke}$

$$x_2 - x_1 = \int_{s_1}^{s_2} x' ds = x' L ; \quad z_2 - z_1 = \int_{s_1}^{s_2} z' ds = z' L$$

$$\sigma_2 - \sigma_1 = \left(1 - \frac{v_0}{v}\right) L - \frac{1}{2} x'^2 \frac{v_0}{v} L$$

(A1.12)

Im ultrarelativistischen Fall ergibt (A1.8) folgende Form:

$$\hat{K} = (1+\eta) \left\{ 1 - 1 + \frac{\hat{p}_x^2}{2(1+\eta)^2} + \frac{\hat{p}_z^2}{2(1+\eta)^2} \right\} = \frac{\hat{p}_x^2}{2(1+\eta)} + \frac{\hat{p}_z^2}{2(1+\eta)}$$

$$x' = \frac{\hat{p}_x}{1+\eta} \qquad z' = \frac{\hat{p}_z}{1+\eta}$$

$$\hat{p}_x' = 0 \qquad \hat{p}_z' = 0 \qquad \eta' = 0$$

$$\sigma' = -\frac{1}{2} \left(\frac{\hat{p}_x^2}{(1+\eta)^2} + \frac{\hat{p}_z^2}{(1+\eta)^2} \right) = -\frac{1}{2} (x'^2 + z'^2)$$

(A1.13)

Dabei wurde verwendet: $\frac{\partial (\beta_0^2 (1+\hat{\eta}))}{\partial \eta} = \frac{v_0}{v}$

Durch Integration erhält man:

$$x_2 - x_1 = \int_{s_1}^{s_2} x' ds = x' L$$

$$z_2 - z_1 = \int_{s_1}^{s_2} z' ds = z' L$$

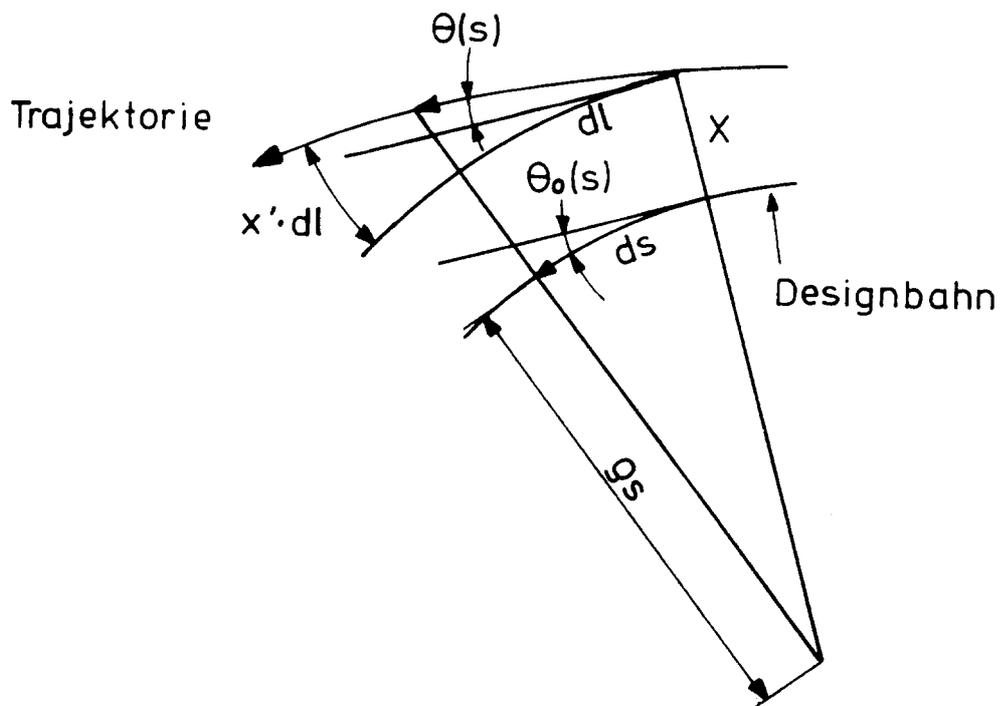
$$\sigma_2 - \sigma_1 = \int_{s_1}^{s_2} \sigma' ds = -\frac{1}{2} L (x'^2 + z'^2)$$

(A1.14)

$x' \neq 0$, so gilt wieder bei s_2 (siehe Figur A1.1):

$$\begin{aligned} \sigma_2 &= L - v_0 t_2 = L - \frac{v_0 L'}{v} = L \left(1 - \frac{v_0}{v} \sqrt{1 + x'^2} \right) \\ &\approx L \left[1 - \frac{v_0}{v} \left(1 + \frac{1}{2} x'^2 \right) \right] = \left(1 - \frac{v_0}{v} \right) L - \frac{1}{2} x'^2 \frac{v_0}{v} L \end{aligned} \quad (\text{A1.17})$$

Diese nichtlinearen Terme (quadratisch in x') treten für alle Elemente mit endlicher Länge auf und führen für beide Vorzeichen von x' (bzw. z') stets zu einer Verkleinerung von σ , weil sie die Zeitdifferenz zum Sollteilchen vergrößern. Die für die Synchrotronschwingungen verantwortlichen Terme (linear in x_0, x'_0, η) stammen von Elementen mit von Null verschiedener Krümmung, also von Dipolen und combined-function Magneten. Zur Bestimmung dieser Terme muß die Ablage $x(s)$ in Abhängigkeit von der longitudinalen Position s bekannt sein. Diese Terme möchte ich zum besseren physikalischen Verständnis näherungsweise für den ultrarelativistischen Fall geometrisch bestimmen und sie dann mit den Ergebnissen der formalen Herleitung (G. Ripken /15/) vergleichen. Es wird dabei stets ein Sektormagnet betrachtet. Zur geometrischen Bestimmung folge ich der Ableitung von (M. Sands /29/).



Figur A1.2: Protonentrajektorie in einem Dipol

Als erstes wird die Bewegungsgleichung gesucht. Dazu benötigt man die Ableitung von $x' = \theta_0 - \theta$, wobei $\theta_0(s)$, $\theta(s)$ der Winkel der Sollbahn bzw. Trajektorie zu einer Referenzrichtung ist (siehe in Figur A1.2):

$$x'' = \frac{d(\theta_0 - \theta)}{ds} \quad (\text{A1.18})$$

Die Änderung des Sollbahnwinkels θ_0 ist.:

$$\frac{d\theta_0}{ds} = -\frac{1}{f_s} = K_x \quad (f_s < 0) \quad (\text{A1.19})$$

während sich die Änderung von θ wie folgt bestimmen läßt:

$$d\theta = -\frac{dl}{f} = \frac{c B_{z0}}{E} dl \quad (\text{A1.20})$$

Der Zusammenhang von dl und ds ist näherungsweise:

$$dl \approx \frac{-f_s + x}{-f_s} ds = (1 + K_x x) ds \quad (\text{A1.21})$$

Mit $B_{z0} = \frac{E_0}{e} \cdot K_x (E_0 \approx p_0 c)$ und $E = E_0(1+\eta)$ ergibt sich:

$$x'' = \left[K_x - \frac{c \frac{E_0}{e} K_x}{E_0(1+\eta)} (1 + K_x x) \right] \underset{(\eta \ll 1)}{\approx} -K_x^2 x + K_x \eta \quad (\text{A1.22})$$

Diese Differentialgleichung führt nun auf $x(s)$, dabei seien x_0 , x'_0 die Koordinaten beim Eintritt in den Dipol:

$$x(s) = x_0 \cos(K_x s) + x'_0 \frac{1}{K_x} \sin(K_x s) + \frac{\eta}{K_x} \left[1 - \cos(K_x s) \right] \quad (\text{A1.23})$$

Wie im Falle der Driftstrecke läßt sich nun die Weglängenänderung bestimmen, indem über ds (bzw. dl) integriert wird. Bei Eintritt in den Dipol gelten wieder $\sigma_1 = 0, t_1 = 0, s_1 = 0$. Dann gilt unter der Verwendung von A1.21) für σ_2, t_2 beim Austritt aus dem Element:

$$\begin{aligned} t_2 &= \frac{L'}{c} = \frac{1}{c} \int_0^L (1 + K_x x) ds & s_2 &= L \triangleq \text{Länge des Dipols} \\ \sigma_2 &= L - ct_2 = L - \frac{c}{c} \int_0^L (1 + K_x x) ds = K_x \int_0^L x ds \\ &= -x_0 \sin(K_x L) + x'_0 \frac{1}{K_x} \left[\cos(K_x L) - 1 \right] + \eta \left[\frac{1}{K_x} \sin(K_x L) - L \right] \end{aligned} \quad (\text{A1.24})$$

Damit haben wir Terme gefunden, die periodisch sind (je nach Vorzeichen von x_0 , x'_0, η). Die Synchrotronschwingungen werden im wesentlichen von diesen linearen Termen bestimmt, da die nichtlinearen Terme (z.B. A1.12/14) quadratisch in x' und damit klein sind.

Für die Untersuchungen der Synchrotronschwingungen in dieser Arbeit wird die Gleichung (A1.8) für das Vektorpotential eines Dipols ausgewertet. (Im weiteren beschränke ich mich zur Vereinfachung auf die horizontale Bewegung.) Zunächst wird wieder der ultrarelativistische Fall betrachtet:

$$\begin{aligned} A_x = A_z = 0 & ; K_x \neq 0 ; K_z = 0 \\ \frac{e}{E_0} A_y = -\frac{1}{2} (1 + K_x x) & ; B_x = B_z = 0 \\ B_z = -\frac{1}{1 + K_x x} \frac{\partial}{\partial x} & \left[(1 + K_x x) A_y \right] \end{aligned} \quad (\text{A1.25})$$

Damit erhält man für die Hamilton-Funktion (A1.8b)

$$\hat{K} = (1 + \eta) \left(1 - (1 + K_x x) \left(1 - \frac{\hat{p}_x^2}{2(1 + \eta)^2} \right) \right) + \frac{1}{2} (1 + K_x x)^2 \quad (\text{A1.26})$$

Bei Berücksichtigung von maximal zweiter Ordnung in (x, \hat{p}_x) folgt:

$$\begin{aligned} \hat{K} &= -(1 + \eta) K_x x + \frac{\hat{p}_x^2}{2(1 + \eta)} + \frac{1}{2} + K_x x + \frac{1}{2} K_x^2 x^2 \\ &= \frac{\hat{p}_x^2}{2(1 + \eta)} + \frac{1}{2} K_x^2 x^2 - K_x x \cdot \eta + \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (\text{A1.27})$$

Die Bewegungsgleichungen sind dann:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{\hat{p}_x}{1 + \eta} ; \hat{p}_x' = -K_x^2 x + K_x \eta \\ \sigma' &= \frac{-\hat{p}_x^2}{2(1 + \eta)^2} - K_x x = -\frac{1}{2} x'^2 - K_x x ; \eta' = 0 \end{aligned} \quad (\text{A1.28a})$$

$$\Rightarrow x'' = \frac{1}{(1 + \eta)} (-K_x^2 x + K_x \eta) \quad (\text{A1.28b})$$

Im Vergleich zu (A1.22) gibt es in (A1.28b) einen zusätzlichen Faktor $\frac{1}{1+\eta}$ der sich beim Übergang von (A1.3) nach (A1.7b) ergibt. Mit dieser kleinen Korrektur liefert dann der zweite Term von σ' in (A1.28a) die Weglängenänderung (vergleiche (A1.24)):

$$\sigma_2 = -x_0 \sin\left(\frac{K_x L}{\sqrt{1+\eta}}\right) + x_0' \frac{1+\eta}{K_x} \left[\cos \frac{K_x L}{\sqrt{1+\eta}} - 1 \right] + \eta \left[\frac{1+\eta}{K_x} \sin \frac{K_x L}{\sqrt{1+\eta}} - L \right] \quad (\text{A1.29})$$

Die Integration des ersten Terms von (A1.28a) ergeben hauptsächlich kleine nichtlineare Terme und einige lineare Terme, die aber proportional zu $\frac{\eta}{\beta_s}$ sind und damit klein sind. (Im Programm werden alle diese Terme berücksichtigt.)

Im allgemeinen Fall hat die Hamilton-Funktion statt (A1.27) folgende Form:

$$\hat{K} = \eta - (1 + K_x x) \beta_0^2 (1 + \hat{\eta}) + \frac{1}{2} \beta_0^2 + K_x x \beta_0^2 + \frac{K_x^2 x^2 \beta_0^2}{2} + \frac{1}{2 \beta_0^2} \frac{\hat{p}_x^2}{(1 + \hat{\eta})} \quad (\text{A1.30})$$

Daraus lassen sich dann die Bewegungsgleichungen herleiten:

$$x' = \frac{\hat{p}_x}{\beta_0^2 (1 + \hat{\eta})} ; \quad \hat{p}_x' = K_x \beta_0^2 (1 + \hat{\eta}) - K_x \beta_0^2 - K_x^2 \beta_0^2 x = \hat{\eta} K_x \beta_0^2 - K_x^2 \beta_0^2 x$$

$$\Rightarrow x'' = \frac{1}{1 + \hat{\eta}} (K_x \hat{\eta}' - K_x^2 x)$$

$$\sigma' = \left(1 - \frac{v_0}{v}\right) - \frac{v_0}{v} K_x x - \frac{1}{2} x'^2 \frac{v_0}{v} ; \quad \eta' = 0 \quad (\text{A1.31})$$

Im Vergleich mit (A1.28) lassen sich jetzt die Unterschiede zur ultrarelativistischen Bewegung feststellen. Alle relativen Energieabweichungen η müssen durch die relativen Impulsabweichungen $\hat{\eta}$ ersetzt werden, ansonsten bleiben die Bewegungsgleichungen der transversalen Bewegung gleich. Alle Terme der Berechnung der Weglängenänderung werden mit dem Geschwindigkeitsverhältnis $\frac{v_0}{v}$ multipliziert und jedes Element mit endlicher Länge L trägt mit einem zusätzlichen Beitrag von $(1 - \frac{v_0}{v}) L$ zur Weglängenänderung bei.

Als letztes möchte ich die Beschleunigungsstrecke behandeln. Mit einem Vektorpotential, das von der Weglängenänderung σ abhängt, läßt sich das elektrische Feld ϵ berechnen in den Variablen (x, z, s, σ) , dabei wird zunächst wieder der ultrarelativistische Fall behandelt:

$$\begin{aligned} A_x = A_z = 0 ; \quad \epsilon_x = \epsilon_z = \sigma \\ A_s = \int_{\sigma_0}^{\sigma} d\sigma \epsilon(s, \sigma) ; \quad \epsilon = \frac{\partial}{\partial \sigma} A \end{aligned} \quad (\text{A1.32})$$

Für eine unendliche dünne Beschleunigungsstrecke gilt näherungsweise für das elektrische Feld:

$$\epsilon(s, \sigma) = \hat{V} \sin \left[k \frac{2\pi}{L} \sigma + \phi \right] \delta(s - s_0) \quad (\text{A1.33})$$

und damit für das Vektorpotential:

$$A_s = -\frac{L}{2\pi k} \hat{V} \cos \left[k \frac{2\pi}{L} \sigma + \phi \right] \delta(s - s_0)$$

k = Harmonischenzahl

ϕ = Sollphase

\hat{V} = elektrisches Potential

L = Länge des Beschleunigers

(A1.34)

Da zunächst keine Beschleunigung behandelt wird (siehe Anhang 2), also im Mittel die Energie konstant bleiben soll, wird die Sollphase $\phi = 0$ gewählt.

Mit Gleichung (A1.34) ergibt (A1.8b) folgende Hamilton-Funktion:

$$K_x = K_z = 0$$

$$\hat{K} = \frac{1}{2} \frac{\hat{p}_x^2}{(1+\eta)} + \frac{L}{k 2\pi} \frac{e\hat{V}}{E_0} \cos \left[k \frac{2\pi}{L} \sigma + \phi \right] \delta(s - s_0)$$

$$x' = \frac{\hat{p}_x}{(1+\eta)} ; \quad \hat{p}_x' = 0$$

$$\sigma' = -\frac{1}{2} x'^2 ; \quad \eta' = \frac{e\hat{V}}{E_0} \sin \left(k \frac{2\pi}{L} \sigma + \phi \right) \delta(s - s_0) \quad (\text{A1.35})$$

und damit gilt für die Koordinaten:

$$x(s_0 + 0) = x(s_0 - 0) ; \quad \sigma(s_0 + 0) = \sigma(s_0 - 0)$$

$$x'(s_0 + 0) = \frac{1+\eta(s_0 - 0)}{1+\eta(s_0 + 0)} x'(s_0 - 0) = \frac{E(s_0 - 0)}{E(s_0 + 0)} x'(s_0 - 0)$$

$$\eta(s_0 + 0) = \eta(s_0 - 0) + \frac{e\hat{V}}{E_0} \sin \left[k \frac{2\pi}{L} \sigma(s_0 - 0) + \phi \right] \quad (\text{A1.36})$$

Als nächstes wird die Beschleunigungsstrecke im allgemeinen Fall behandelt. Das elektrische Feld ergibt sich für diesen Fall in den Koordinaten (x, z, s, σ) aus dem Vektorpotential durch

$$\mathcal{E} = \beta_0 \frac{\partial}{\partial \sigma} A \quad ; \quad \beta_0 = \frac{v_0}{c} \quad (\text{A1.37})$$

mit

$$\mathcal{E} = \hat{v} \sin \left[k \frac{2\pi}{L} \sigma + \phi \right] \delta(s-s_0) \quad (\text{A1.38})$$

ist dann das Vektorpotential mit $A_x = A_z = 0$

$$A_s = -\frac{1}{\beta_0} \frac{L}{k 2\pi} \hat{v} \cos \left[k \frac{2\pi}{L} \sigma + \phi \right] \delta(s-s_0) \quad (\text{A1.39})$$

Mit Gleichung (A1.39) erhält dann (A1.8b) die Form:

$$\hat{K} = \eta - \beta_0^2 (1 + \hat{\eta}) + \frac{1}{2\beta_0^2} \frac{\hat{p}_x^2}{1 + \hat{\eta}} + \frac{e\hat{v}}{E_0} \frac{L}{2\pi k} \cos \left(k \frac{2\pi}{L} \sigma + \phi \right) \delta(s-s_0) \quad (\text{A1.40})$$

Dies führt wieder zu den Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{\hat{p}_x}{\beta_0^2 (1 + \hat{\eta})} \quad ; \quad \hat{p}_x' = 0 \\ \sigma' &= \left(1 - \frac{v_0}{c}\right) - \frac{1}{2} x'^2 \frac{v_0}{c} \\ \eta' &= \frac{e\hat{v}}{E_0} \sin \left(k \frac{2\pi}{L} \sigma + \phi \right) \delta(s-s_0) \end{aligned} \quad (\text{A1.41})$$

und den Gleichungen für die Koordinaten:

$$\begin{aligned} \sigma(s+0) &= \sigma(s-0) \\ \eta(s+0) &= \eta(s-0) + \frac{e\hat{v}}{E_0} \sin \left(\frac{2\pi k}{L} \sigma + \phi \right) \\ x(s+0) &= x(s-0) \\ x'(s+0) &= \frac{\beta_0^2 (1 + \hat{\eta}(s-0))}{\beta_0^2 (1 + \hat{\eta}(s+0))} x'(s-0) = \frac{p(s-0)}{p(s+0)} x'(s-0) \end{aligned} \quad (\text{A1.42})$$

Abschließend eine Bemerkung zur Übergangsenergie. Diese Ableitungen hatten nämlich zur Voraussetzung, daß die Energie der Teilchen oberhalb der Übergangsenergie lag, also die Teilchen mit höherer Energie die Beschleunigungsstrecke später erreichen als die Teilchen, die eine niedrigere Energie haben. Unterhalb der Übergangsenergie muß die HF-Frequenz um 180° phasenverschoben werden, da in diesem Fall die energiereicheren Teilchen die Beschleunigungsstrecke früher erreichen (siehe z.B. E.J.N. Wilson /30/). Dies wird am einfachsten im Programm dadurch erreicht, indem im Sinus-Term von η in Gleichung (A1.36/42) die Weglängenänderung σ durch $(-\sigma)$ ersetzt wird.

Anhang 2: Adiabatische Energieänderung

Neben der Behandlung der Bewegung von Protonen im Speicherringbetrieb (HERA - Kapitel 4) soll auch eine adiabatische Beschleunigung für DESY III (Kapitel 5) berücksichtigt werden. Adiabatisch ist die Beschleunigung dann, wenn in einer Synchrotronperiodenzeit die Energie sich nur geringfügig ändert.

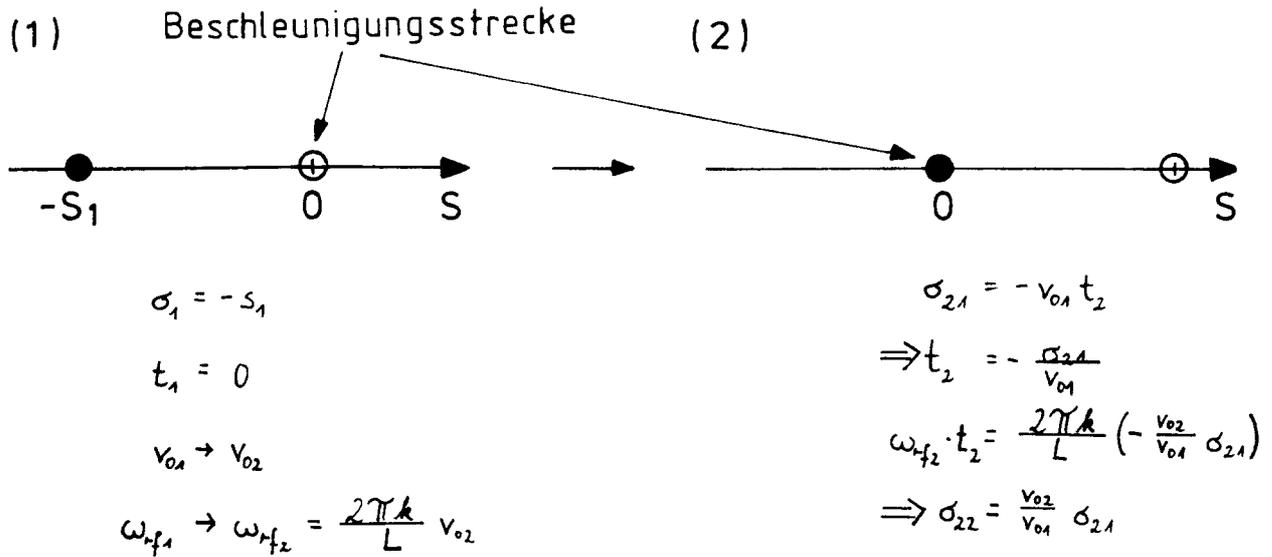
Die adiabatische Beschleunigung wird nun wie folgt behandelt: Erreicht das Sollteilchen ($x=x'=z=z'=s=\eta=0$) die Beschleunigungsstrecke so wird dessen Energie um den gewünschten Betrag erhöht, die Geschwindigkeit des Sollteilchens erhöht sich dabei von v_{01} auf v_{02} . Das Sollteilchen soll auch nach dem Durchgang der Beschleunigungsstrecke bleiben, so daß die magnetischen Felder $B \sim p_0$ und im allgemeinen Fall ($v_0 < c$) die HF-Frequenz ($\omega_{rf} = \frac{2\pi k}{L} v_0$, die Beschleunigungsstrecke sei bei $s=0$) angepaßt werden. Im übrigen Teil des Beschleunigers bleibt v_0 konstant, so daß der im Anhang 1 beschriebene Formalismus voll anwendbar ist.

Nach dem Theorem von Ehrenfest ist das Wirkungsintegral J

$$J = \oint \Delta E dt \quad (\text{A2.1})$$

eine adiabatische Invariante der Bewegung (siehe auch Kapitel 1), wobei die Integration sich über eine Synchrotronperiode erstreckt. M. Karantzoulis und J.R. Maidment /31/ wiesen allerdings darauf hin, daß bei Beschleunigung im allgemeinen Fall ($v_0 < c$) die Anwendung der Gleichung (A1.41) bzw. (A1.42) zu einer unphysikalischen Dämpfung in der longitudinalen Projektion des Phasenraumes führt, und zwar schrumpft J im Verhältnis der Geschwindigkeit $\frac{v_{01}}{v_{02}}$ des Sollteilchens vor und nach der Beschleunigungsstrecke.

Das liegt daran, daß bei der Anwendung dieser Gleichung berücksichtigt werden muß, daß Teilchen mit endlichem Wert der Weglängenänderung σ zu einer Zeit $t=0$ die Beschleunigungsstrecke erreicht, die Umnormierung ($v_{01} \rightarrow v_{02}$) aber bei der Zeit $t=0$ stattfindet. Wie sich diese zeitliche Differenz auswirkt, wird nun untersucht. Wir betrachten zunächst den Fall $\sigma < 0$, also eilt das Sollteilchen (\bullet in Figur A2.1) dem Teilchen mit $\tilde{\eta} \neq 0$ (\circ in Figur A2.1) voraus.



Figur A2.1: Durchgang durch die Beschleunigungsstrecke mit $\sigma < 0$

Das Teilchen mit $\eta \neq 0$ hinkt dem Sollteilchen zeitlich hinterher.

Zur Zeit t_1 erreicht das Sollteilchen die Beschleunigungsstrecke. Damit macht die Sollgeschwindigkeit ($v_{01} \rightarrow v_{02}$) und somit auch die HF-Frequenz einen Sprung. Das noch nicht beschleunigte Teilchen erreicht bei $t_2 = -\frac{\sigma_{21}}{v_{01}}$ die Beschleunigungsstrecke mit der neuen HF-Frequenz und wird deshalb mit der Phase:

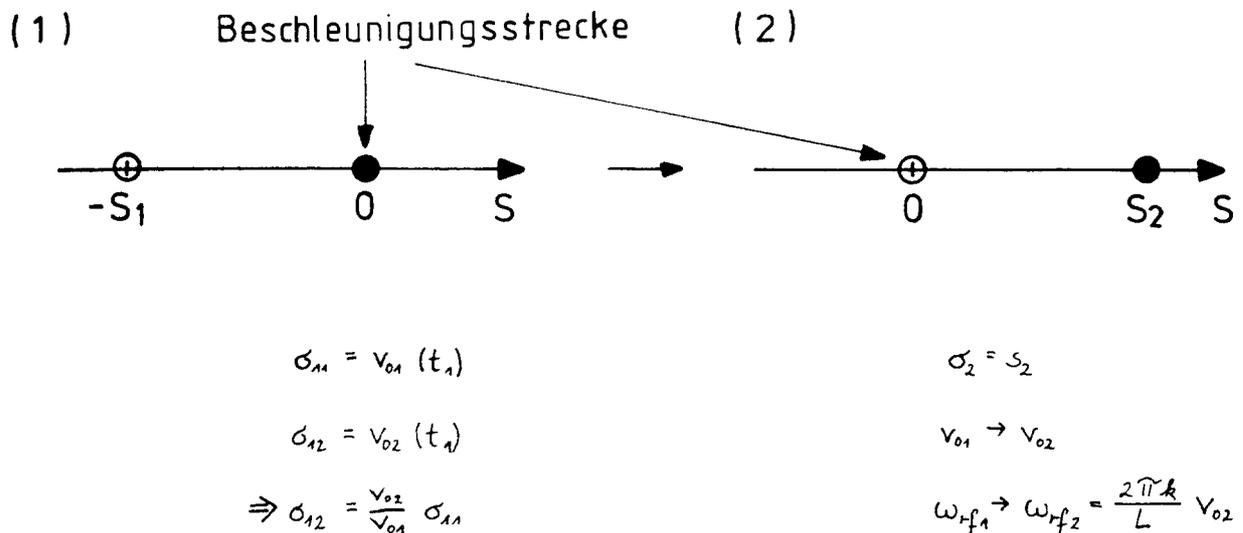
$$\omega_{rf2} \cdot t_2 + \phi = \frac{2\pi k}{L} \left(-\frac{v_{02}}{v_{01}} \sigma_2\right) + \phi \quad (\text{A2.2})$$

beschleunigt. Auch die Koordinate σ macht also einen Sprung beim Erreichen der Beschleunigungsstrecke:

$$\sigma_{22} = \frac{v_{02}}{v_{01}} \sigma_{21} \quad (\text{A2.3})$$

Anschaulich läßt sich diese Vergrößerung folgendermaßen verstehen: Das Sollteilchen wird zuerst beschleunigt, so daß der Abstand zwischen den Teilchen größer wird, solange das zweite Teilchen die Beschleunigungsstrecke noch nicht erreicht hat.

Wir kommen jetzt zum zweiten Fall mit $\sigma > 0$, also hinkt nun das Sollteilchen (o in Figur A2.2) dem Teilchen (\bullet in Figur A2.2) mit $\hat{\eta} \approx 0$ hinterher.



Figur A2.2: Durchgang durch die Beschleunigungsstrecke mit $\sigma > 0$
 Das Teilchen mit $\hat{\eta} \approx 0$ eilt dem Sollteilchen voraus

In diesem Fall kommt das Teilchen mit $\hat{\eta} \approx 0$ zuerst zur Beschleunigungsstrecke. Nach dem Durchgang ist aber die mittlere Geschwindigkeit der beschleunigten Teilchen v_{02} , so daß auch hier die σ -Koordinate einen Sprung um $\frac{v_{02}}{v_{01}}$ macht. Einfacher läßt sich der Sprung der Weglängenänderung σ einsehen, wenn man die Zeitrichtung der Bewegung umdreht. Dann erhalten wir den Fall in Figur A2.1 nur mit Entschleunigung: Als erstes wird das Sollteilchen entschleunigt ($v_{02} \rightarrow v_{01}$) und das nachlaufende Teilchen sieht die neue HF-Frequenz $\omega_{rf1} = \frac{2\pi k}{L} v_{01}$, da die Zeitdifferenz bei Erreichen der Beschleunigungsstrecke jetzt $t = \frac{\sigma}{v_{02}}$ ist, macht nun die Weglängenänderung einen Sprung zu kleineren Werten ($\sigma \rightarrow \frac{v_{01}}{v_{02}} \sigma$). Umgekehrt muß also in Figur A2.2 σ um $\frac{v_{02}}{v_{01}}$ vergrößert werden. Auch diesen Fall möchte ich anschaulich erläutern: nach dem Durchgang des Teilchens mit $\hat{\eta} \approx 0$ vergrößert sich auch hier der Abstand zum Sollteilchen auf Grund der vergrößerten Geschwindigkeit dieses Teilchens.

Wird dieser Sprung von σ berücksichtigt, verschwindet das unphysikalische Schrumpfen in der longitudinalen Projektion des Phasenraums. Im Programm müssen die Fälle ($\sigma < 0$; $\sigma > 0$) unterschieden werden, im ersten Fall wird das Teilchen mit der neuen HF-Frequenz ($\omega_{rf_2} = \frac{2\pi k}{L} v_{o_2}$) beschleunigt, während im zweiten Fall noch die alte HF-Frequenz ($\omega_{rf_1} = \frac{2\pi k}{L} v_{o_1}$) gültig ist.

Anzumerken ist noch, daß in den beiden Fällen $\sigma \leq 0$ die Koordinate t stetig verläuft.

Anhang 3: Korrektur von Rundungsfehlern

Das Verfahren zur Korrektur von Rundungsfehlern (Kapitel 3.3.4) möchte ich für den zweidimensionalen Fall vorstellen. Dabei soll außer einer bloßen Korrektur der Abweichung von der Symplektizität (gleichbedeutend mit einer Abweichung von $\det/M = 1$) wie z.B. in Referenz /18/, zusätzlich ein Phasenfehler korrigiert werden, der ebenfalls durch Rundungsfehler entsteht. Die abbildende Matrix sei M mit den durch Rundungsfehler verursachten Abweichungen e_1, e_2 :

$$M = \begin{pmatrix} \cos \phi + e_1 & \sin \phi + e_2 \\ -(\sin \phi + e_2) & \cos \phi + e_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \Rightarrow \det M = a^2 + b^2 = a_c \quad (\text{A3.1})$$

Es genügt die Korrektur für die Basisvektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ zu bestimmen. Mit $e_1 = e_2 = 0$ gilt:

$$M(e_1 = e_2 = 0) \cdot v_1 = \begin{pmatrix} \cos \phi \\ -\sin \phi \end{pmatrix} ; \quad M(e_1 = e_2 = 0) \cdot v_2 = \begin{pmatrix} \sin \phi \\ \cos \phi \end{pmatrix} \quad (\text{A3.2})$$

und für $e_1 \neq e_2 \neq 0$

$$M \cdot v_1 = \begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix} ; \quad M \cdot v_2 = \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} \quad (\text{A3.3})$$

Die Korrektur wird in zwei Schritten durchgeführt:

1. Schritt: Determinantenfehler

$$M \cdot \left(\frac{1}{a_c} v_1 \right) = \begin{pmatrix} \frac{a}{a^2 + b^2} \\ \frac{-b}{a^2 + b^2} \end{pmatrix} = \bar{v}_1 ; \quad M \cdot \left(\frac{1}{a_c} v_2 \right) = \begin{pmatrix} \frac{b}{a^2 + b^2} \\ \frac{a}{a^2 + b^2} \end{pmatrix} = \bar{v}_2 \quad (\text{A3.4})$$

2. Schritt: Phasenfehler

$$M_{\phi_c} = \begin{pmatrix} \cos \phi_c & \sin \phi_c \\ -\sin \phi_c & \cos \phi_c \end{pmatrix} \quad \text{Drehung um } \phi_c \quad (\text{A3.5})$$

Der durch die Korrektur des Determinatenfehlers erhaltenen Vektor \bar{v}_1 wird nun durch eine Drehung um ϕ_c auf den gewünschten Vektor (A3.2) gedreht.

$$\mathbb{M}_{\phi_c} \cdot \bar{v}_1 = \begin{pmatrix} \cos \phi \\ -\sin \phi \end{pmatrix} \quad (\text{A3.6})$$

Damit läßt sich ϕ_c berechnen:

$$\begin{aligned} \cos \phi_c &= a \cos \phi + b \sin \phi \\ \sin \phi_c &= a \sin \phi - b \cos \phi \end{aligned} \quad (\text{A3.7})$$

Die Gesamtkorrektur erhält man durch den Determinantenklick $\frac{1}{a_c}$ und die Drehung um ϕ_c :

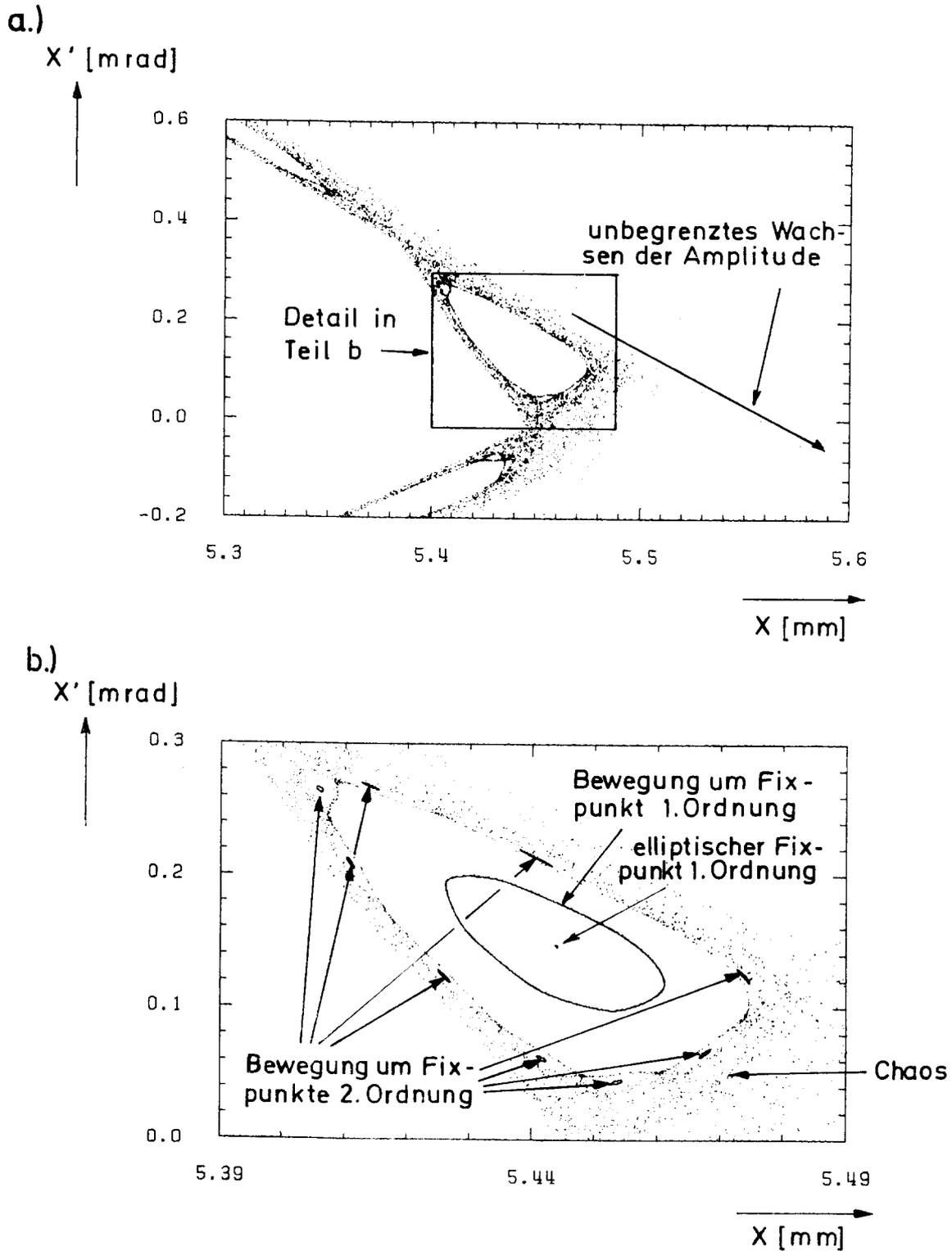
$$\mathbb{M}_c = \frac{1}{a_c} \mathbb{M}_{\phi_c} = \frac{1}{a_c} \begin{pmatrix} a \cos \phi + b \sin \phi & a \sin \phi - b \cos \phi \\ b \cos \phi - a \sin \phi & a \cos \phi + b \sin \phi \end{pmatrix} \quad (\text{A3.8})$$

Mit dieser Gesamtkorrektur wird die Fehlabbildung auf Grund von Rundungsfehlern für beide Basisvektoren v_1, v_2 korrigiert:

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_c \cdot \mathbb{M} \cdot v_1 &= \mathbb{M}_c \begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi \\ -\sin \phi \end{pmatrix} \\ \mathbb{M}_c \cdot \mathbb{M} \cdot v_2 &= \mathbb{M}_c \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \phi \\ \cos \phi \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A3.9})$$

Anhang 4: Bewegung chaotischer Trajektorien im Phasenraum /32,33/

In diesem Anhang möchte ich darstellen, wie sich chaotische Trajektorien im Phasenraum verhalten. Im Laufe der Bewegung kommt eine solche chaotische Trajektorie in unmittelbarer Nachbarschaft verschiedener KAM-Tori und regulärer Bereiche um elliptische Fixpunkte (Linien, Flächen etc.). Dabei gleicht die Bewegung der chaotischen Trajektorie auch annähernd der Bewegung des jeweiligen regulären Bereichs. Figur A4.1 zeigt einen Ausschnitt der chaotischen Bewegung in zwei Dimensionen (Figur 4.3). Innerhalb des chaotischen Bereichs gibt es reguläre Bewegung um elliptische Fixpunkte erster Ordnung (große Ellipse) und um elliptische Fixpunkte zweiter Ordnung (neun kleine Inseln). Kommt die chaotische Bewegung in die Nähe des Bereiches des elliptischen Fixpunktes erster Ordnung wird der Q-Wert im Mittel der Resonanzbedingung ($21 \cdot (Q_x - 37) = 4$) entsprechen. Figur A4.2 zeigt die gemittelten Q-Werte für die reguläre Bewegung um den Fixpunkt erster Ordnung (Teil a) und für die chaotische Bewegung (Teil b). Zwischen den Umlaufzahlen 10 000 - 35 000 hält sich die chaotische Trajektorie im Einflußbereich der regulären Bewegung um den elliptischen Fixpunkt herum auf, so daß der Q-Wert im Mittel $Q_x = 37 + \frac{4}{21}$ entspricht. Davor und danach ist der mittlere Q-Wert deutlich verschieden von diesem Wert, da sich die chaotische Trajektorie in diesen Fällen im Einflußbereich anderer regulärer Bereiche befinden. Bei Erreichen des instabilen Bereichs bei großer Amplitude (Figur A4.1 und Figur 4.3) ist die fünfte Ordnung Resonanz mit $Q_x = 37.2$ wirksam.

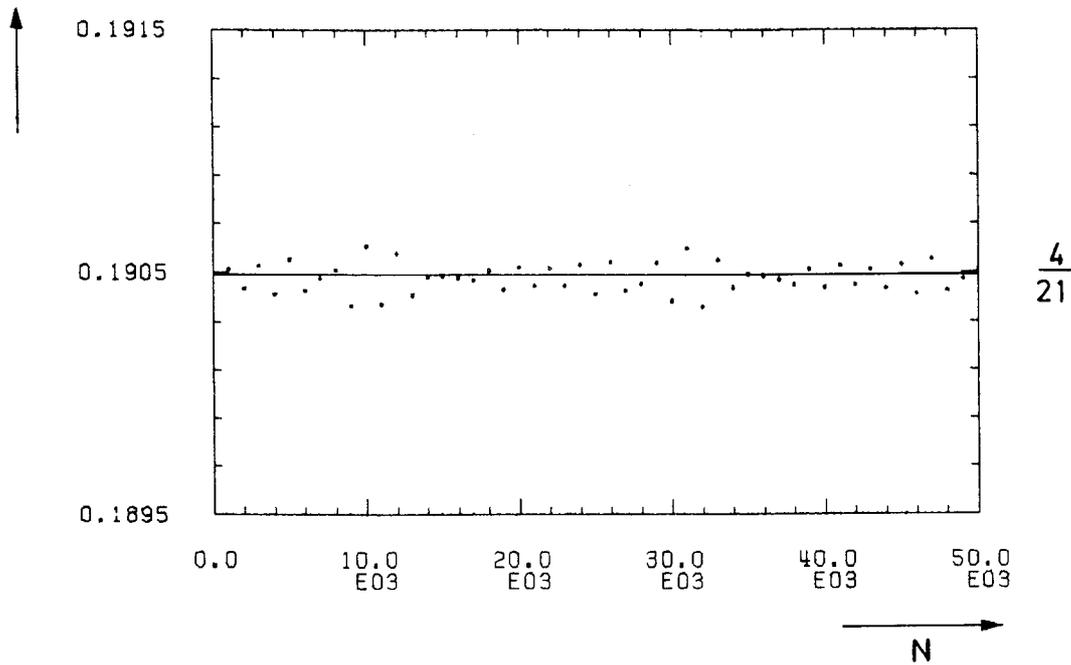


Figur A4.1: Chaotische Bewegung in zwei Dimensionen

Teil a zeigt einen Ausschnitt der chaotischen Bewegung in zwei Dimensionen (siehe Figur 4.3). Beim Erreichen des äußeren Randes des chaotischen Bereiches (Pfeil) setzt unbegrenztes Wachsen der Amplitude ein (die Bewegung wurde von einer starken Resonanz "eingefangen"). Teil b zeigt einen der in Teil a zu sehenden, im chaotischen Bereich eingebetteten regulären Bereich. Neben einer regulären Bewegung um einen Fixpunkt erster Ordnung tauchen am Rande dieses regulären Bereiches neue Fixpunkte zweiter Ordnung auf, mit ebenfalls regulärer Bewegung in deren Nähe.

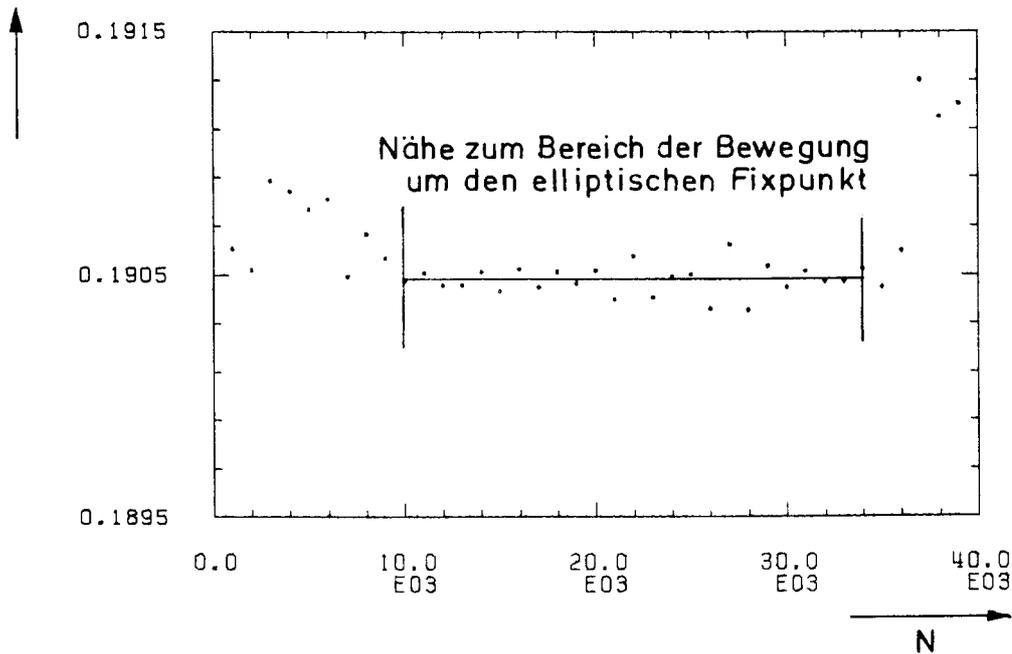
a.) Reguläre Bewegung um den elliptischen Fixpunkt

$\langle Q_x \rangle - 37$



b.) Chaotische Bewegung

$\langle Q_x \rangle - 37$

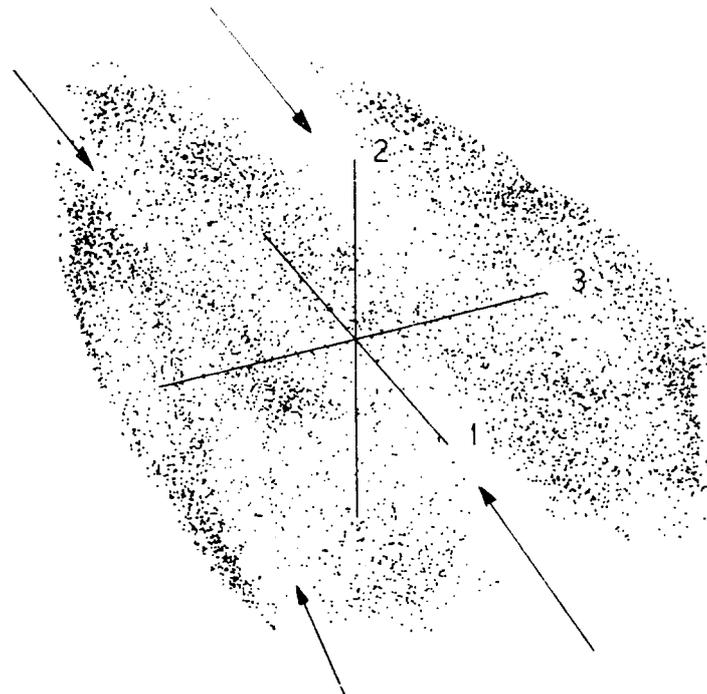


Figur A4.2 Gemittelter Q-Wert der regulären Bewegung um ein Fixpunkt und der chaotischen Bewegung

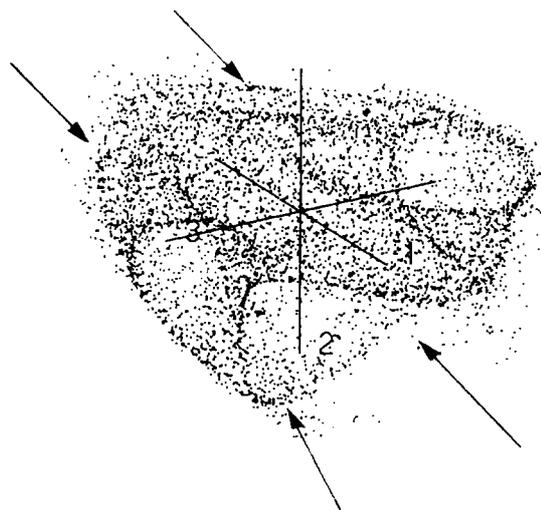
Die Bewegung um den Fixpunkt (große Ellipse in Figur A4.1b) hat im Mittel einen Phasenvorschub (gemittelt über 1000 Umläufe), der der Resonanzbedingung $(21 \cdot \langle Q_x - 37 \rangle) = 4$ entspricht (Teil a). Wird im Verlauf der chaotischen Bewegung die Nähe dieses Bereiches um den stabilen Fixpunkt erreicht, so entspricht im Mittel der Phasenvorschub wiederum dieser Resonanzbedingung. In Teil b kann deshalb abgelesen werden, daß die chaotische Bewegung zwischen den Umlaufzahlen 10000 und 35000 in der Nähe dieses regulären Bereiches verweilt.

Auch in vier Dimensionen pendelt die chaotische Bewegung zwischen den Einflußbereichen verschiedener regulärer Bereiche. Figur A4.3 zeigt die dreidimensionale Projektion einer vierdimensionalen chaotischen Bewegung. Zunächst (Teil a) verweilt die Trajektorie in der Nähe einer regulären Bewegung um eine Fixlinie, nach etwa 5 500 Umläufen (Teil b) kommt diese Trajektorie in den Einflußbereich eines regulären KAM-Torus.

a.)



b.)



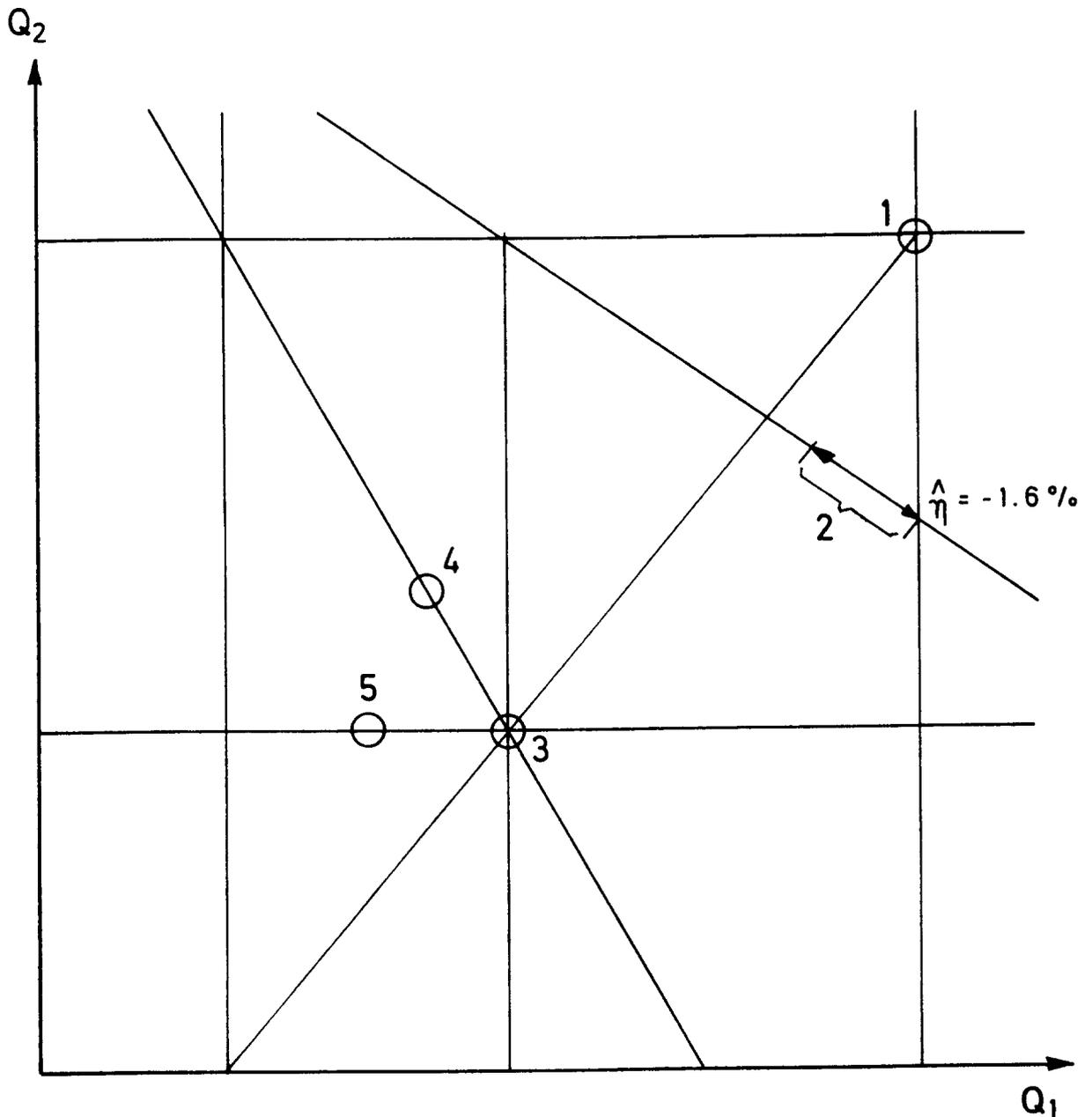
Figur A4.3: Chaotische Bewegung in vier Dimensionen

Auch in vier Dimensionen wechselt die chaotische Bewegung zwischen verschiedenen Einflußbereichen regulärer Bewegung (KAM-Tori, Fixpunkten, Fixlinien). Teil a zeigt eine dreidimensionale Projektion (die Achsenbezeichnungen 1, 2, 3 entsprechen den Koordinaten x, x', z) der ersten 5500 Umläufe einer chaotischen Bewegung. Die Bewegung ist dabei in der Nähe einer stabilen Fixlinie (bestimmte Bereiche werden im Phasenraum nicht erreicht - siehe Pfeile). Danach (Teil b) kommt die Bewegung in die Nähe eines unaufgebrochenen KAM-Torus. Die Bandstruktur von Teil a ist nun nicht mehr zu sehen (siehe Pfeile).

Anhang 5: AufbruchszENARIO von KAM-Tori in vier Dimensionen

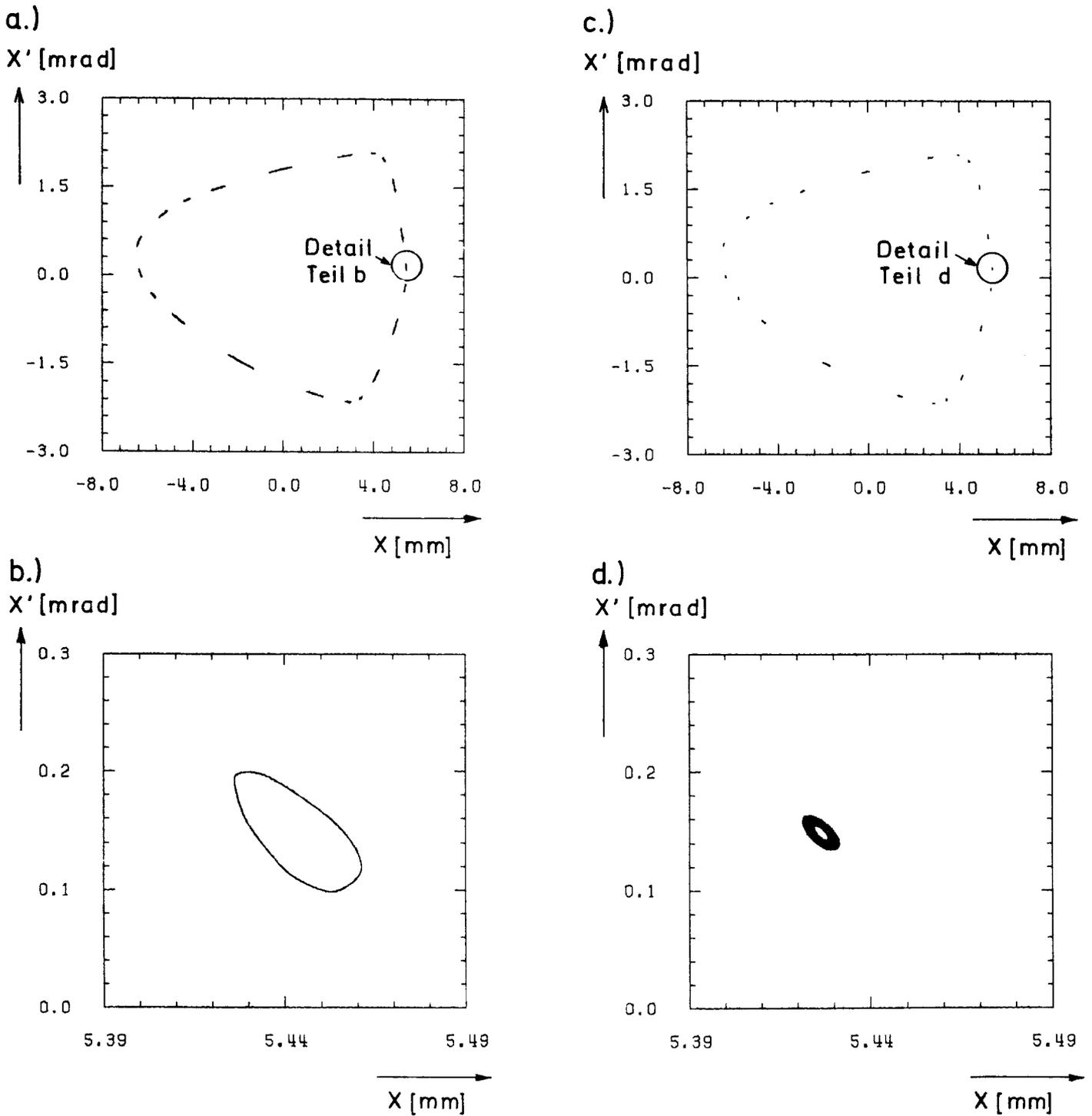
In diesem Anhang möchte ich systematisch das AufbruchszENARIO in vier Dimensionen behandeln. Im ersten Beispiel (Punkt 1 in Figur A5.1) wird von einem Aufbruch in zwei Dimensionen Figur A5.2a,b ausgegangen. Wird nun eine zweite Schwingungsebene "adiabatisch" (das heißt mit kleiner Schwingungsamplitude und geringer Kopplung zwischen den Schwingungsebenen - dazu bieten sich die Synchrotronschwingungen an) hinzugenommen, so bleibt die Bewegung, abgesehen von einer kleinen Aufweitung (Figur A5.2c/d) in der horizontalen Projektion des Phasenraums (x', x) fast unverändert. In der Projektion $(\hat{\eta}, \sigma)$ zeigen sich ebenfalls die gleiche Anzahl von aufgeweiteten Ellipsen (Figur A5.2e), wobei Figur A5.2f der aufgeweiteten Ellipse in Figur A5.2d entspricht. Die Projektion in gemischten Koordinaten $(\hat{\eta}, x)$ (Figur A5.2g) zeigt, daß die Bewegung auf einen Torus in vier Dimensionen um einen Fixpunkt herum verläuft.

Im nächsten Fall (Punkt 2 in Figur A5.1) ist bei fester relativer Impulsabweichung von -1.6 ‰ die Resonanzbedingung $Q_x = 31 \frac{1}{6}$ annähernd erfüllt (Figur A5.3a). Werden statt einer festen relativen Impulsabweichung Synchrotronschwingungen berücksichtigt, die relative Impulsabweichung jedoch auf einen Bereich kleiner $\hat{\eta} \leq -1.5 \text{ ‰}$ eingeschränkt, ist die Resonanzbedingung weiterhin annähernd erfüllt. Figur A.5.3b zeigt die Umgebung einer der Fixpunkte dieser beiden Fälle. Ohne die Einschränkung der relativen Impulsabweichung verläuft die Bewegung um eine Fixlinie. Figur A5.3c zeigt einen Ausschnitt der horizontalen Projektion und Figur A5.3d die Projektion $\hat{\eta}$ gegen x . Immer wenn die relative Impulsabweichung $\hat{\eta} = -1.6 \text{ ‰}$ im Verlauf der Synchrotronschwingungen erreicht (Pfeile in Figur A5.3c/d) ist die horizontale Resonanzbedingung annähernd erfüllt, so daß der Torus der Bewegung um die Fixlinie sechs Öffnungen hat. In der Regel sind solche Tori um Fixlinien geschlossen. Es handelt sich hierbei somit um eine Mischung aus einer Bewegung um Fixlinien und Fixpunkten.



Figur A5.1 Vierdimensionale Bewegung in der Nähe von Fixpunkten bzw. -Linien

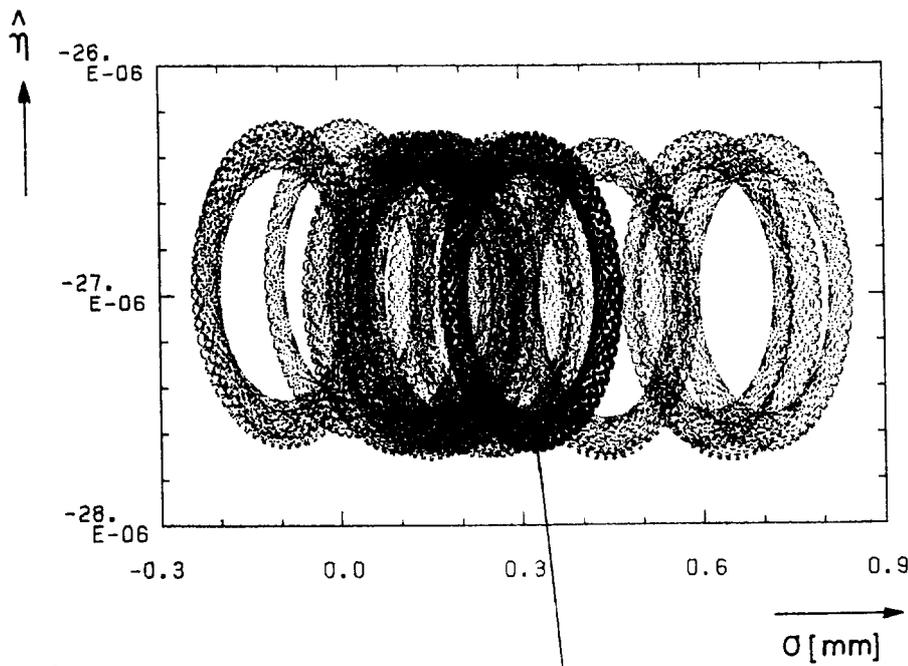
- ① \triangleq horizontale Bewegung mit Synchrotronschwingungen kleiner Amplitude - Bewegung um Fixpunkte
- ② \triangleq horizontale Bewegung mit Synchrotronschwingungen großer Amplitude - Mischung einer Bewegung um Fixpunkte und Fixlinien
- ③ \triangleq transversale Bewegung um Fixpunkte
- ④ \triangleq transversale Bewegung um Fixlinien
- ⑤ \triangleq Bewegung mit einer Resonanzbedingung nur in der vertikalen Schwingungsebene



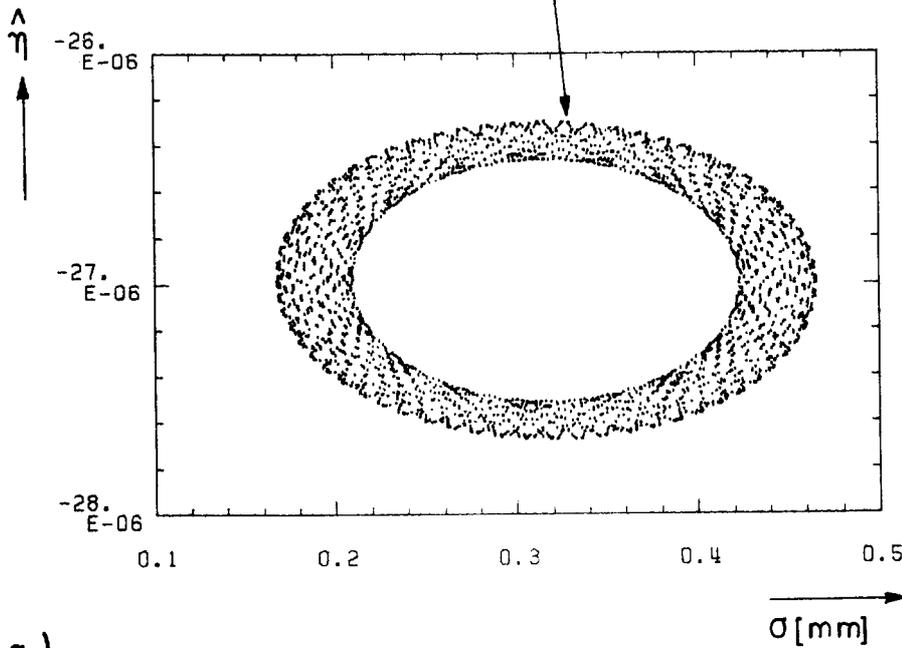
Figur A5.2: Einfluß von Synchrotronschwingungen kleiner Amplitude auf die horizontale Bewegung in der Nähe von Fixpunkten

Teil a,b zeigt die rein horizontale Bewegung. Werden zusätzlich Synchrotronschwingungen kleiner Amplitude berücksichtigt, so bleibt die Bewegung in der horizontalen Phasenraumprojektion im wesentlichen unverändert (Teil c), außer einer kleinen Verschiebung der stabilen Fixpunkte und einer Aufweitung der Ellipse der Bewegung um diese Fixpunkte (Teil d).

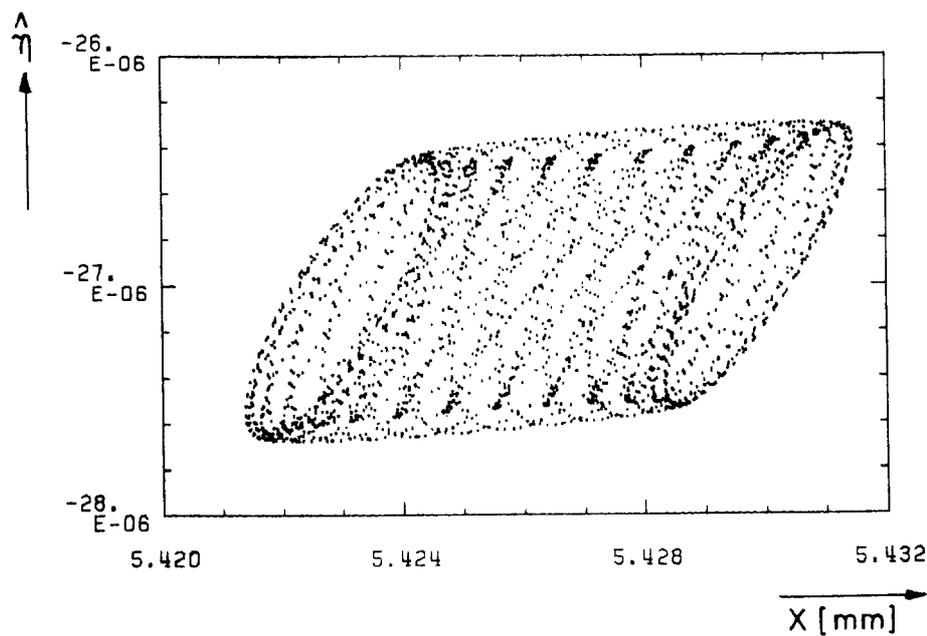
e.)



f.)

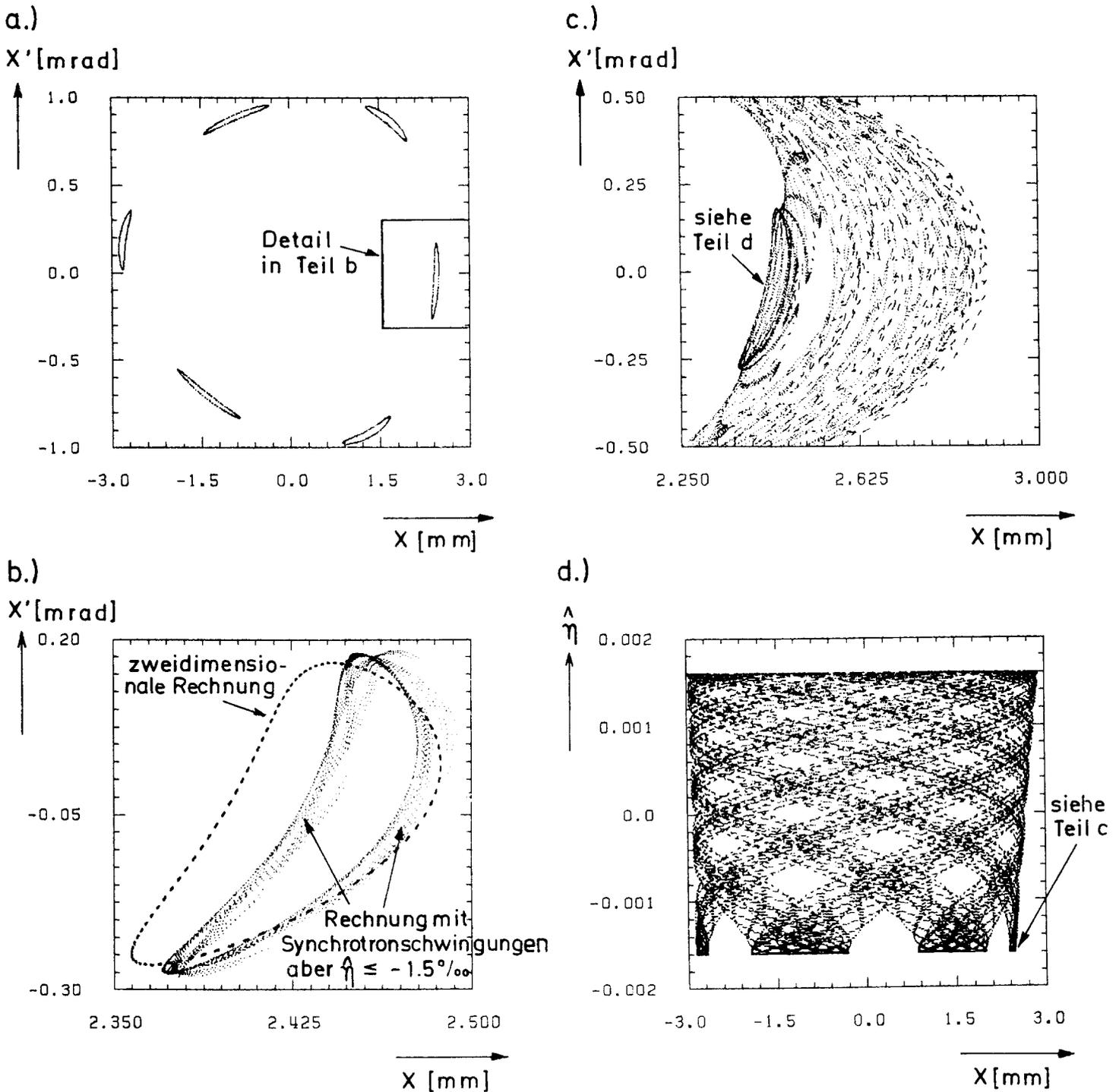


g.)



Figur A5.2:
Einfluß von Synchrotron-
schwingungen kleiner
Amplitude auf die horizon-
tale Bewegung in der Nähe
von Fixpunkten

Teil e zeigt die longitu-
dinale Phasenraumprojektion
der Bewegung von Figur A5.2c,
der in Teil f ausgewählte
Bereich entspricht
Figur A5.2d. Teil g zeigt
in der Projektion $(\hat{\eta}, X)$,
daß die Bewegung auf einen
Torus um stabile Fixpunkte
verläuft.



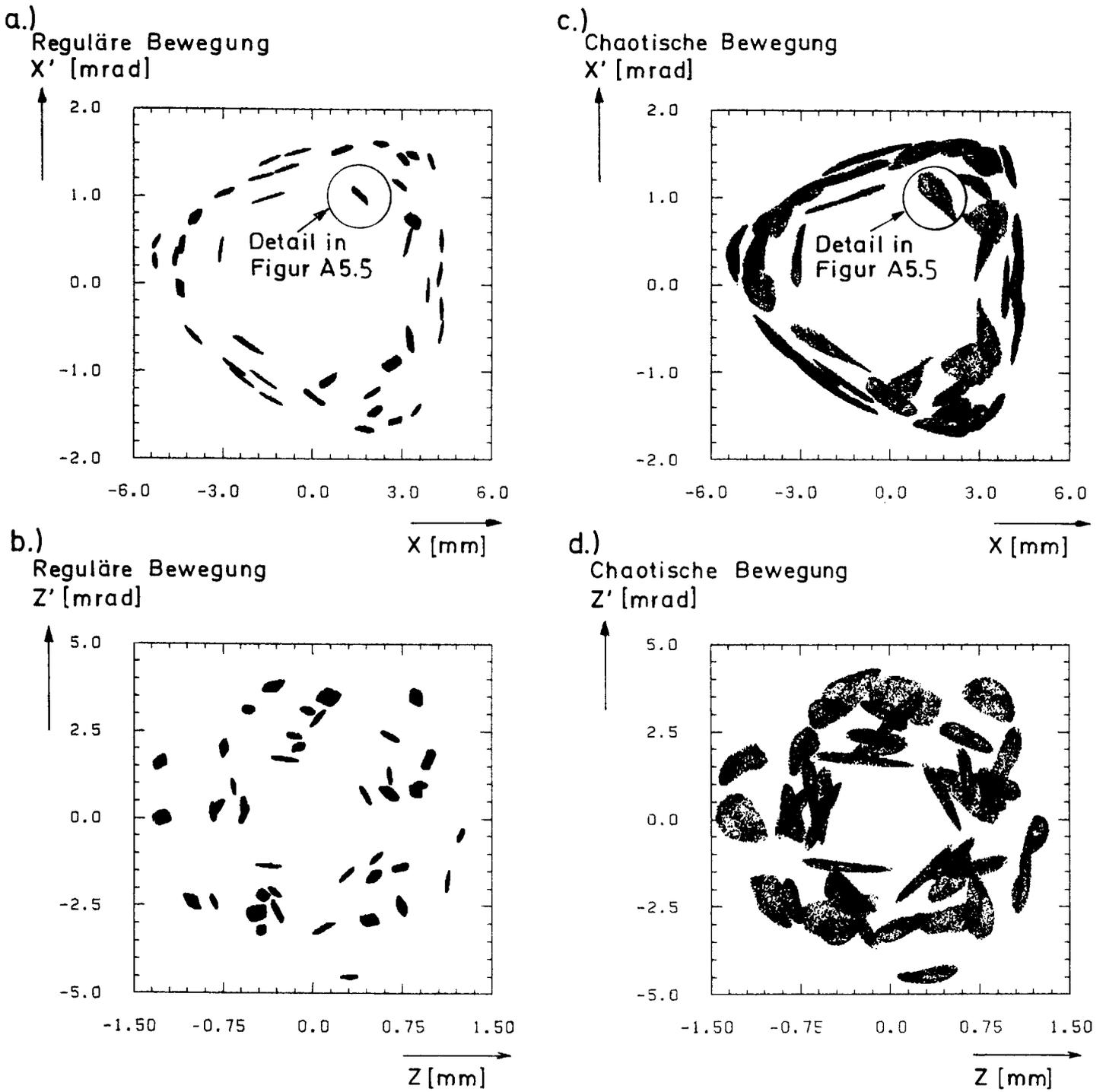
Figur A5.3: Einfluß von Synchrotronschwingungen großer Amplitude auf die horizontale Bewegung in der Nähe von Fixpunkten

Teil a zeigt die horizontale Bewegung bei fester relativer Impulsabweichung $\hat{\eta} = -1.6\text{‰}$. In Teil b ist einer der sechs Bereiche aus Teil a mit Simulationen mit Synchrotronschwingungen verglichen worden, wobei jedoch nur Einträge berücksichtigt wurden mit $\hat{\eta} \leq -1.5\text{‰}$. Teil c zeigt einen Ausschnitt der horizontalen Phasenraumprojektion der Bewegung mit Synchrotronschwingungen. Dabei ist die relative Impulsabweichung nicht eingeschränkt worden, deutlich tritt der Bereich mit $\hat{\eta} \leq -1.5\text{‰}$ als "Öffnung" des Torus um eine Fixlinie hervor. Daß die Bewegung bei $\hat{\eta} \geq -1.5\text{‰}$ auf einen Torus um eine Fixlinie verläuft, wird besonders deutlich in der $(\hat{\eta}, x)$ Projektion. Die "Öffnung" dieses Torus (Teil c) ist in Teil d mit einem Pfeil gekennzeichnet. Es handelt sich somit um eine Mischung von Bewegung um Fixlinien und um Fixpunkte.

In den nächsten Beispielen wird statt der Synchrotronschwingung vertikale Bewegung betrachtet, mit der die horizontale Bewegung (siehe Kapitel 4) wesentlich stärker gekoppelt ist. Zunächst wird ein Fall von Bewegung in der Nähe von diskreten Fixpunkten gezeigt (Punkt 3 in Figur A5.1). Figur A5.4 zeigt die horizontale und vertikale Projektion des Phasenraums einer regulären Bewegung in der Nähe der Fixpunkte (Teil a/b) und einer chaotischen Bewegung bei größerem Abstand zum Fixpunkt. Wie bei Bewegung um Fixlinien ist die Bewegung um einen solchen Fixpunkt als ein Untersystem aufzufassen, mit dem gleichen Verhalten wie das Hauptsystem um den Fixpunkt ($x=x'=z=z'=0$). Figur A5.5 zeigt eines dieser Untersysteme (Pfeile in Figur A5.4 a/c) mittels des graphischen Systems, welches in Kapitel 3.5.1.1 vorgestellt worden ist. Durch geeignete Drehung des Untersystems (Teil b) zeigt sich, daß sich die Bewegung auf Tori um einen Fixpunkt bewegen, wobei im Falle mit kleinerem Abstand die Bewegung regulär ist.

Anhand einer Bewegung um eine Fixlinie (Punkt 4 in Figur A5.1) möchte ich demonstrieren, daß die Bewegung tatsächlich auf einem Torus verläuft: Figur A5.6a zeigt eine dreidimensionale Projektion einer Bewegung um eine Fixlinie, ein kleiner Abschnitt dieser Bewegung (Teil b) kann nun so gedreht werden, daß der Querschnitt des Bandes als Ellipse sichtbar wird (Teil c).

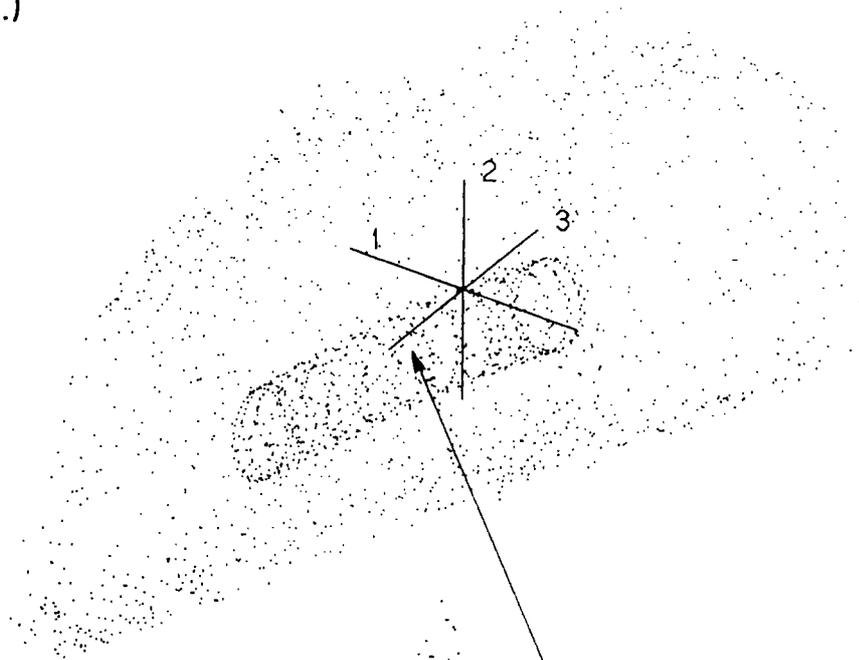
Schließlich wird ein Beispiel gezeigt (Punkt 5 in Figur A5.1) bei der nur in einer der Projektionen des Phasenraums eine Resonanzbedingung erfüllt ist, dabei sind zusätzlich Synchrotronschwingungen berücksichtigt, so daß die Bewegung sechsdimensional ist. Figur A5.7a zeigt die vertikale Phasenraumprojektion: Es werden nur drei Bereiche in dieser Phasenraumprojektion erreicht, der Q_z -Wert ist somit $Q_z = 31 \cdot 1/3$. In den gemischten Projektionen (z', x) und (σ, z') (Figur A5.7b/c) sind jeweils drei Bänder längs der x - bzw. σ -Achse zu sehen. Eine zusätzliche Resonanzbedingung würde zu einem Aufbruch dieser Bänder führen.



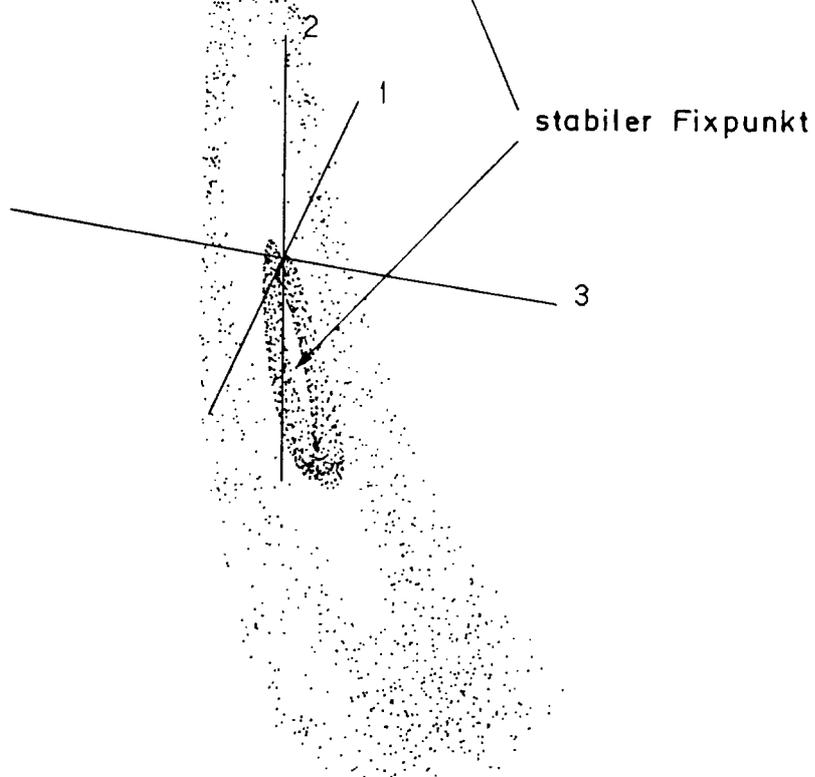
Figur A5.4: Transversale Bewegung um Fixpunkte

Teil a,b zeigen die horizontale und vertikale Phasenraumprojektion einer regulären Bewegung in der Nähe von stabilen Fixpunkten. Bei größeren Abständen zu den Fixpunkten wird die Bewegung chaotisch, Teil c,d zeigen die entsprechenden Phasenraumprojektionen.

a.)



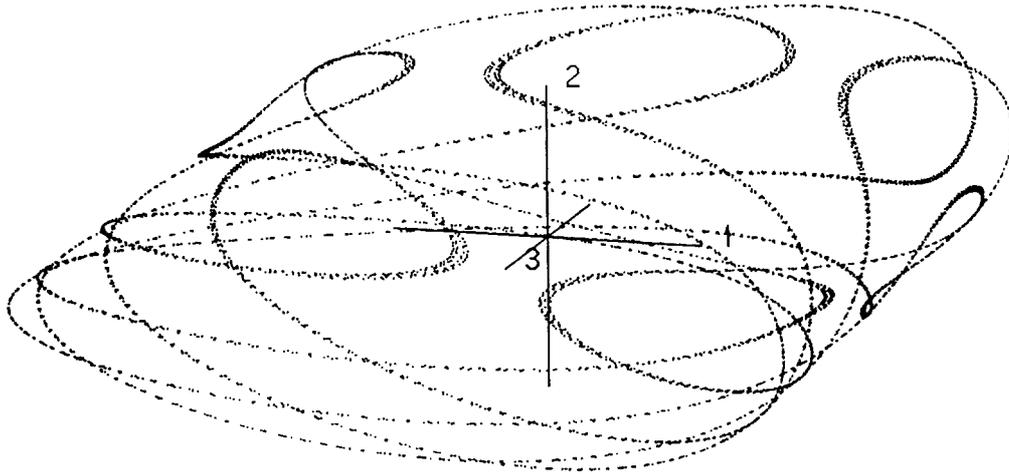
b.)



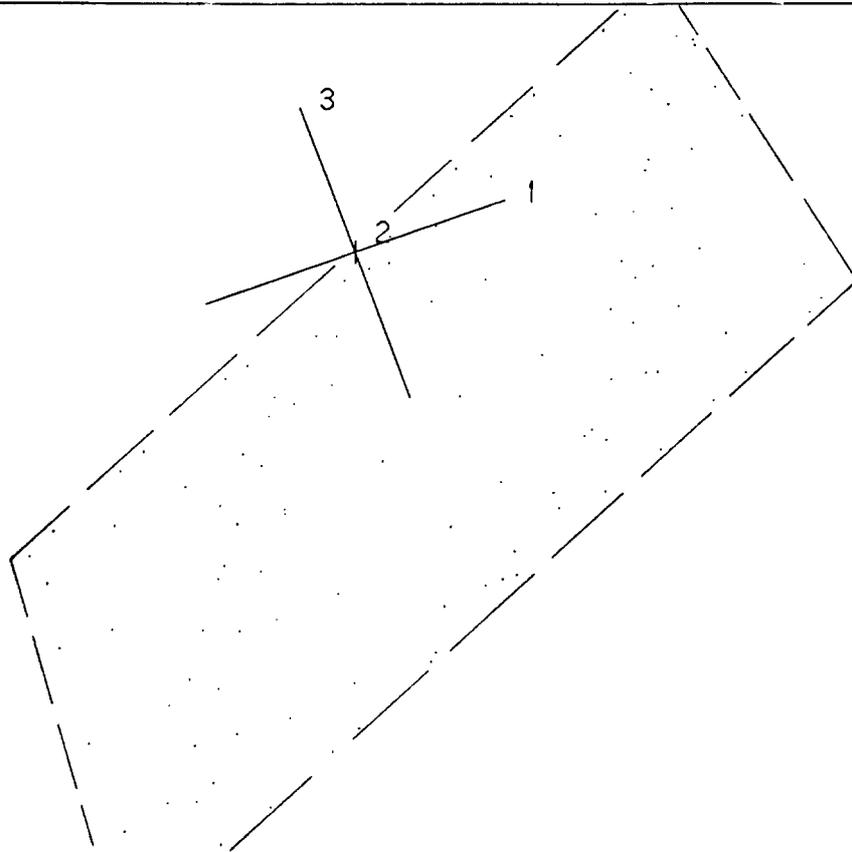
Figur A5.5: Untersystem um einen Fixpunkt

Eines der Untersysteme in Figur A5.4 ist in Teil a in einer dreidimensionalen Projektion abgebildet. In der Nähe des Fixpunktes ist die Bewegung regulär, während bei großem Abstand die Bewegung chaotisch wird. Durch eine Drehung (Teil b) zeigt sich, daß die beiden Simulationsläufe von Teil a tatsächlich ineinanderliegende Tori um den stabilen Fixpunkt sind.

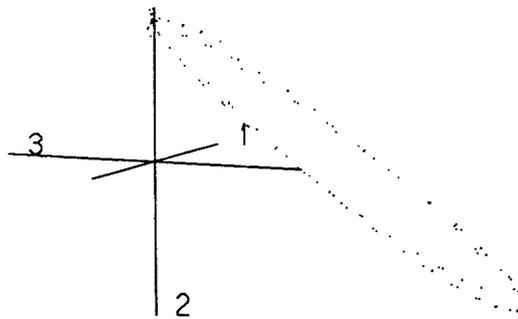
a.)



b.)

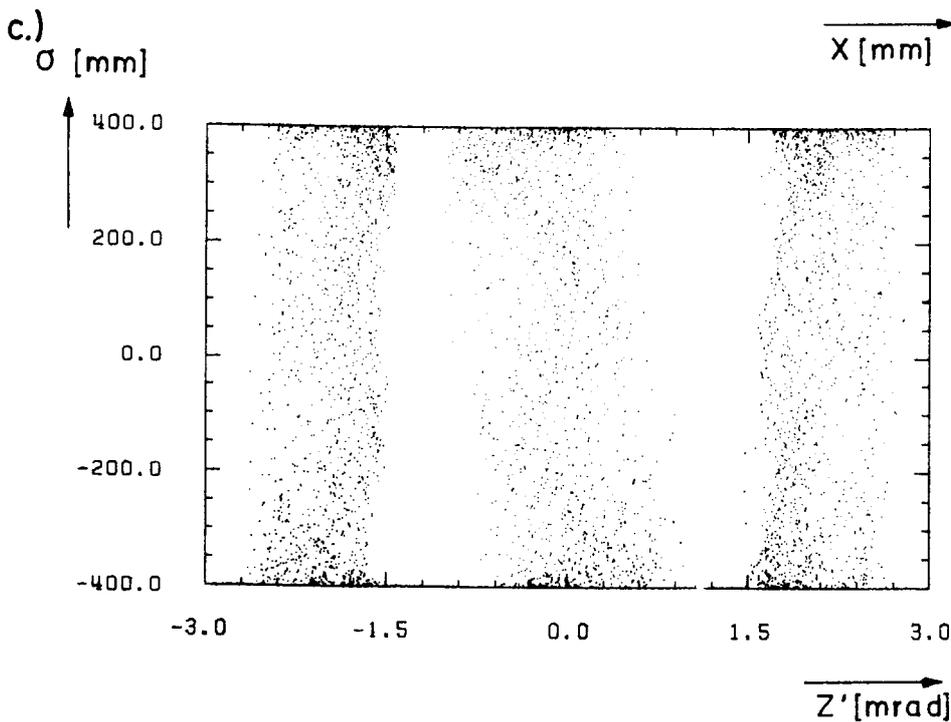
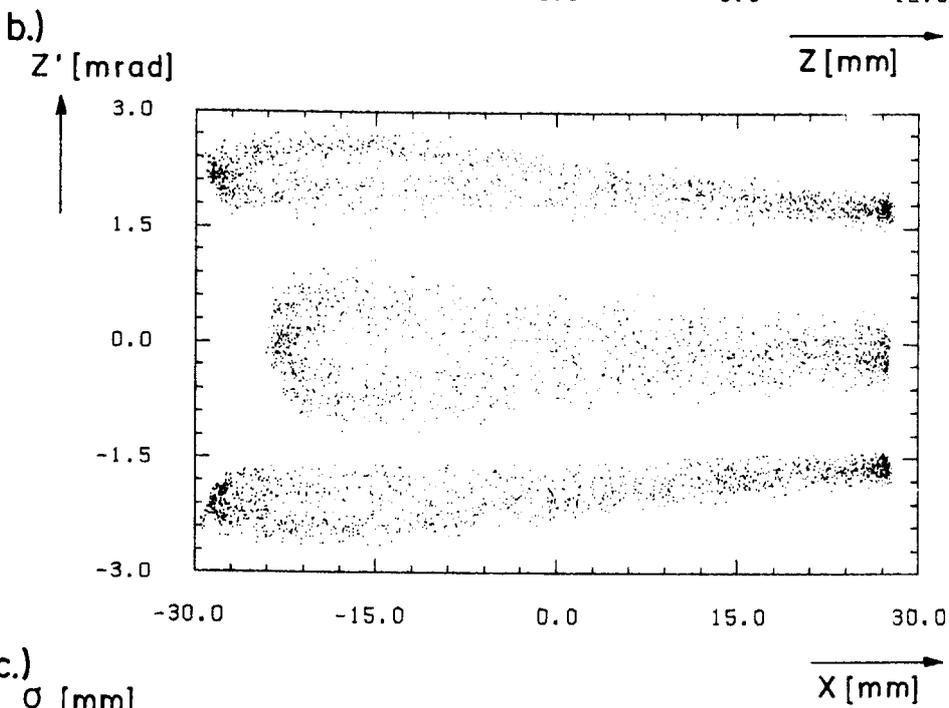
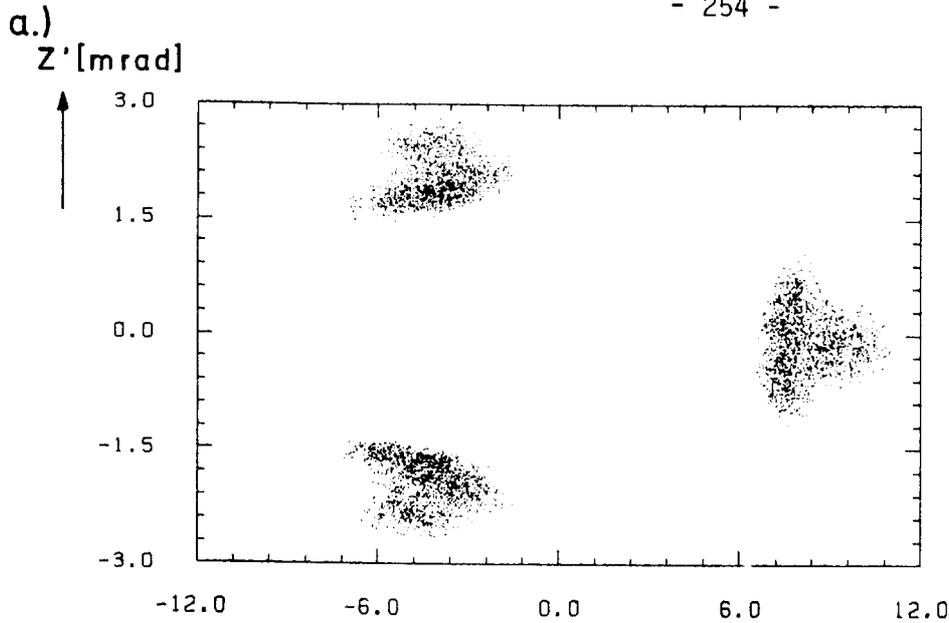


c.)



Figur A5.6: Bewegung um eine Fixlinie

Teil a zeigt eine dreidimensionale Projektion einer Bewegung um eine Fixlinie. Ein kleiner Ausschnitt dieser Bewegung ist in Teil b zu sehen. Eine Drehung dieses Ausschnittes zeigt, daß der Querschnitt einer solchen Bewegung eine Ellipse ergibt. Damit ist gezeigt, daß die Bewegung tatsächlich auf einen Torus um eine Fixlinie herum verläuft.



Figur A5.7:
Bewegung mit einer Resonanz-
bedingung in nur einer
Schwingungsebene

In diesem Beispiel wird eine sechsdimensionale Bewegung behandelt, bei der nur in der vertikalen Phasenraumprojektion eine Resonanzbedingung erfüllt ist. In Teil a ist diese vertikale Phasenraumprojektion zu sehen, in der die Resonanzbedingung $3Q_x = p$ im Mittel erfüllt ist. Teil b,c zeigt die gemischten Projektionen $(z',x), (\sigma,z')$: es zeigen sich aufgrund der Resonanzbedingung drei Bänder. Wären in den beiden anderen Schwingungsebenen weitere Resonanzbedingungen erfüllt, führten diese zu einem weiteren Aufbrechen der Bänder.

Anhang 6: Multipolkoeffizienten der combined function-Magnete von DESY III

Wie bereits in Kapitel 5 erwähnt, werden die combined function-Magnete von DESY III mit dem Meßsystem für die HERA Dipole vermessen /26/. Das Auswerteprogramm liefert Multipolkoeffizienten bis zur 16. Ordnung (32 Pole). Bei der Messung wird der Dipolanteil kompensiert, nicht aber der große Quadrupolanteil des combined function-Magneten. Dies führt dazu, daß die Meßwerte nur bis zur Ordnung $n = 5$ verlässlich sind. So ist das Anwachsen der Multipolkoeffizienten ab $n = 5$ in Figur A6.1 lediglich auf systematische Fehler der Meßapparatur zurückzuführen. Die rms-Werte der Koeffizienten a_n und b_n (Tabelle A6.1) sind i.A. größer als die eigentlichen Meßwerte.

Es ist deshalb eine andere Möglichkeit gesucht worden, um zumindest vorläufige Multipolkoeffizienten auch höherer Ordnung zu erhalten. Dafür werden alte Messungen an den Modellmagneten des DESY-Elektronen-Synchrotrons verwertet /27/. An die Daten aus den Meßkurven (Figur A6.2) ist mittels der Methode der kleinsten quadratischen Abweichung eine Entwicklung nach Multipolkoeffizienten (Gleichung A6.1) angepaßt worden. Wie in Figur A6.3 deutlich zu sehen ist, muß beim F-Magneten bis zur 11. Ordnung entwickelt werden, um eine gute Übereinstimmung im Rahmen der Ablesegenauigkeit zu erreichen. Als Feldfehler sind in Figur A6.2 die relative Gradientenabweichung als Funktion des Abstandes r aufgetragen.

Die Entwicklung nach Multipolkoeffizienten \tilde{B}_m ist dann gegeben durch:

$$\frac{\Delta G}{G}(r) = \sum_{m=1} \tilde{B}_m r^{m-1}; \quad \tilde{B}_m = \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^m B_z}{\partial x^m} \quad (A.6.1)$$

Dabei ist m die Ordnung, bis zu der entwickelt wurde.

Aus diesen Koeffizienten \tilde{B}_m werden jetzt die Multipolkoeffizienten b_n für RACETRACK bei der Dipolstärke B_0 und dem Referenzradius $r_0 = 25 \text{ mm}$ berechnet.

$$b_n = |\rho| \frac{1}{n-1} \tilde{B}_{n-1} K r_0^{n-1} = \frac{1}{B_0} \frac{r_0^{n-1}}{(n-1)!} \frac{\partial^{n-1} B_z}{\partial x^{n-1}} \quad (\text{A.6.2a})$$

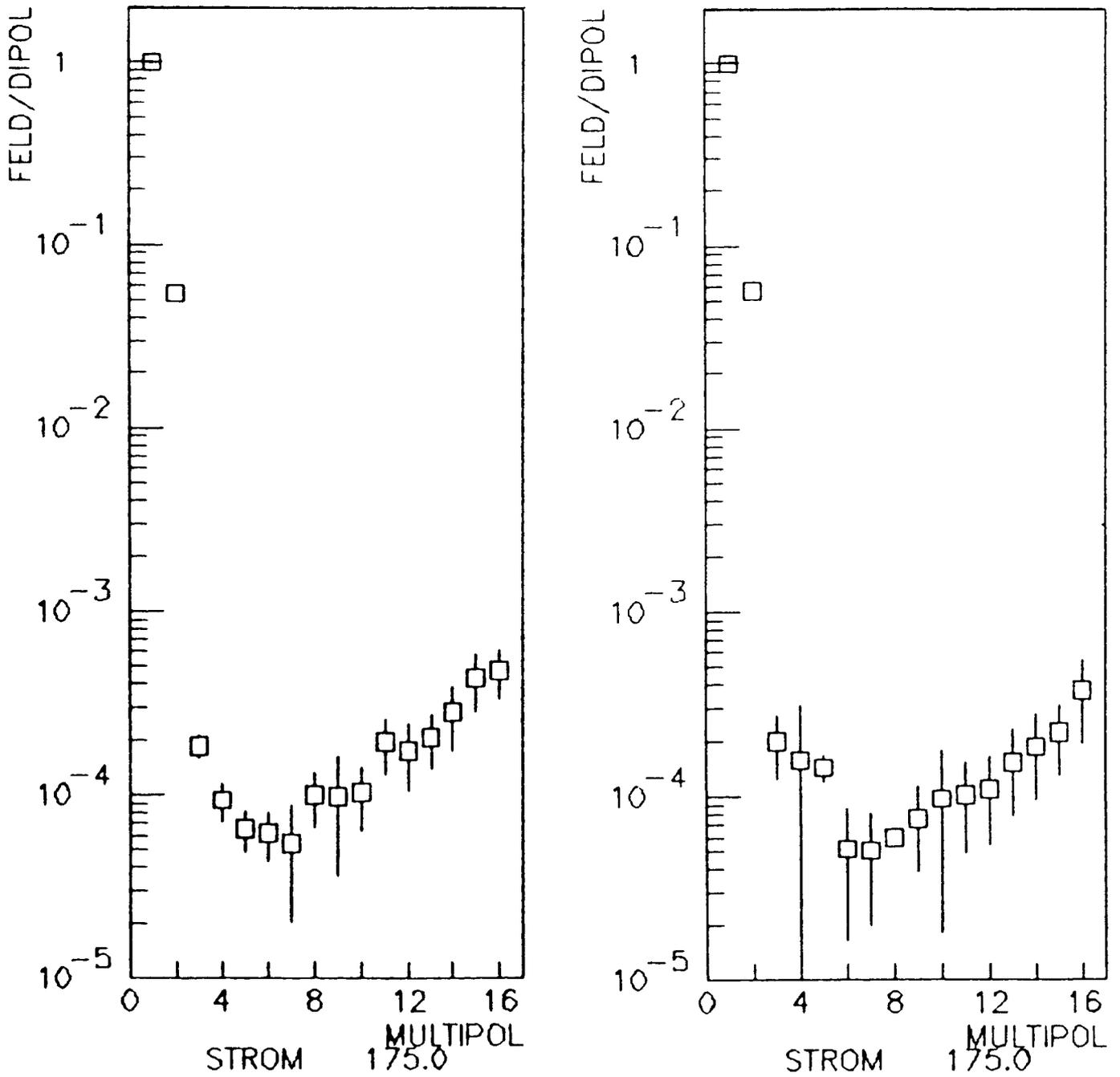
$$n = 2, \dots, 11; K = \frac{e}{p} G; \frac{1}{|\rho|} = \frac{e}{p} B_0$$

Entsprechend ist die Definition der gedrehten Multipolkoeffizienten a_n

$$a_n = \frac{1}{B_0} \frac{r_0^{n-1}}{(n-1)!} \frac{\partial^{n-1} B_x}{\partial x^{n-1}} \quad (\text{A.6.2b})$$

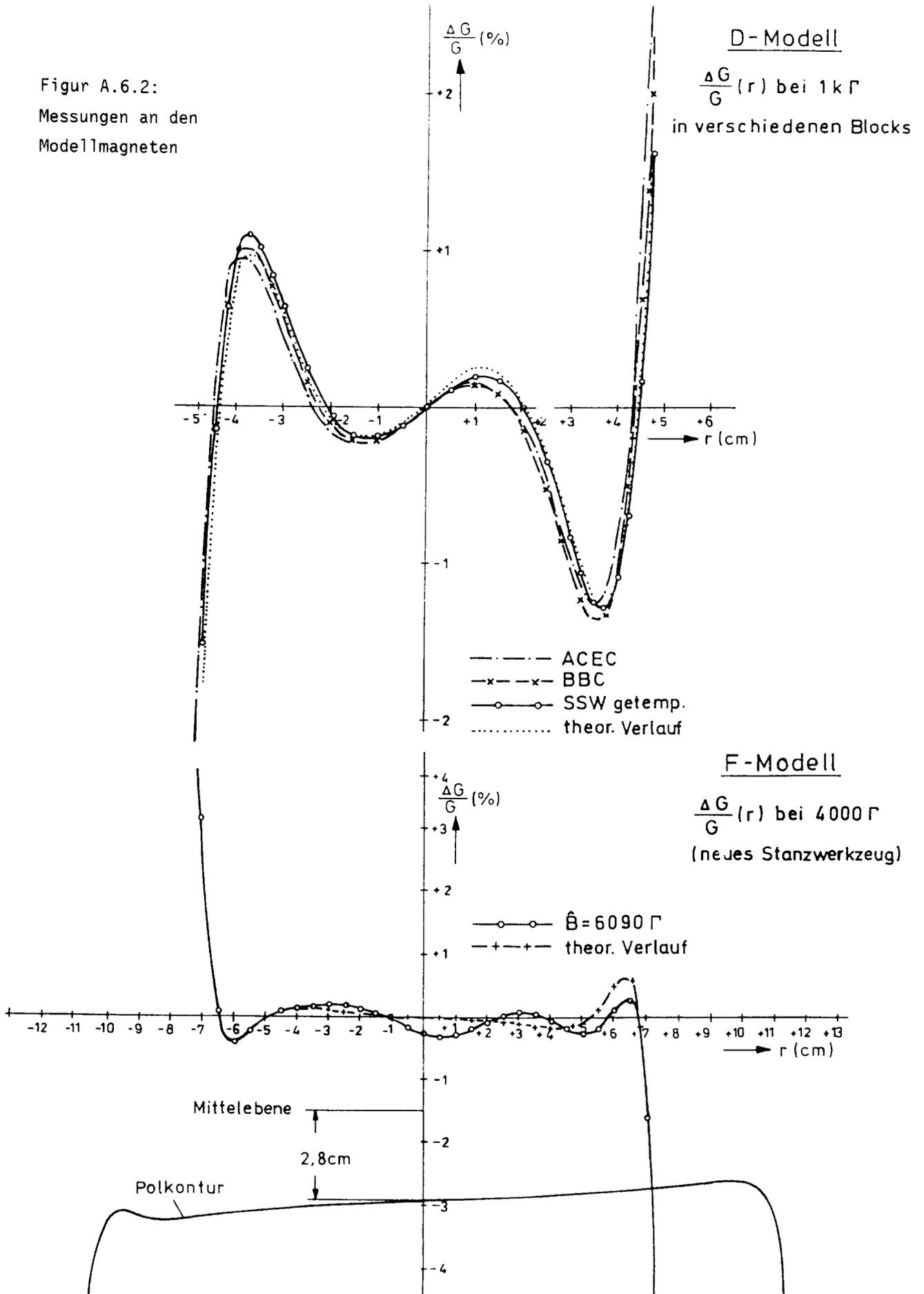
Aus den Meßkurven können keine gedrehten Multipolkoeffizienten bestimmt werden, deshalb enthält Tabelle A6.2 lediglich die b_n -Koeffizienten, die durch den Fit berechnet werden. Aufgrund der Vorzeichenkonvention von RACETRACK unterscheiden sich die Koeffizienten von Tabelle A6.1 und A6.2 jeweils um das Vorzeichen, ansonsten stimmen die Koeffizienten größenordnungsmäßig bis zur 5. Ordnung recht gut überein.

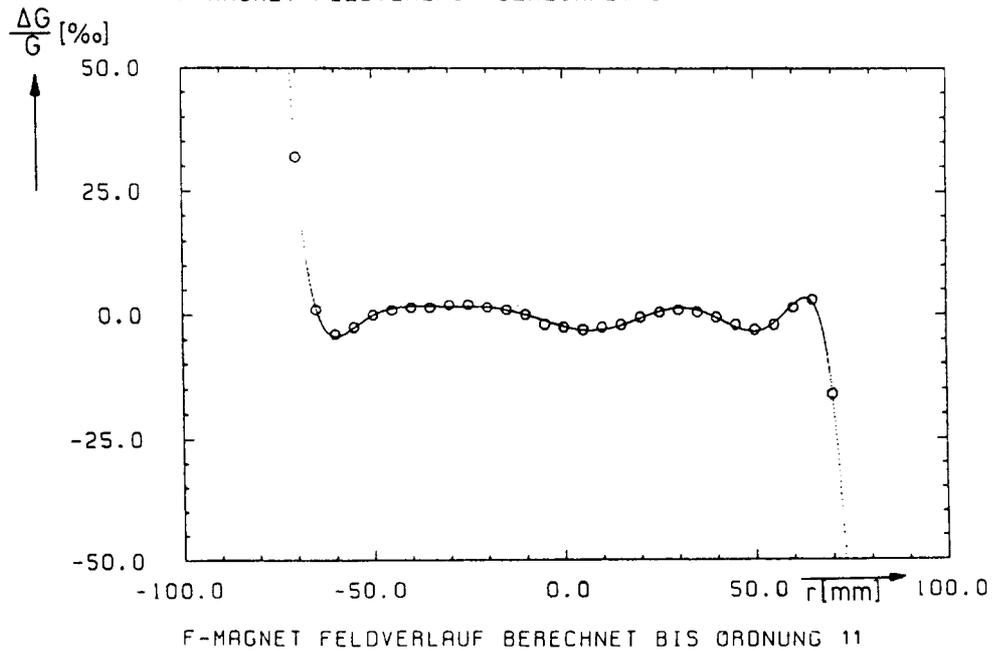
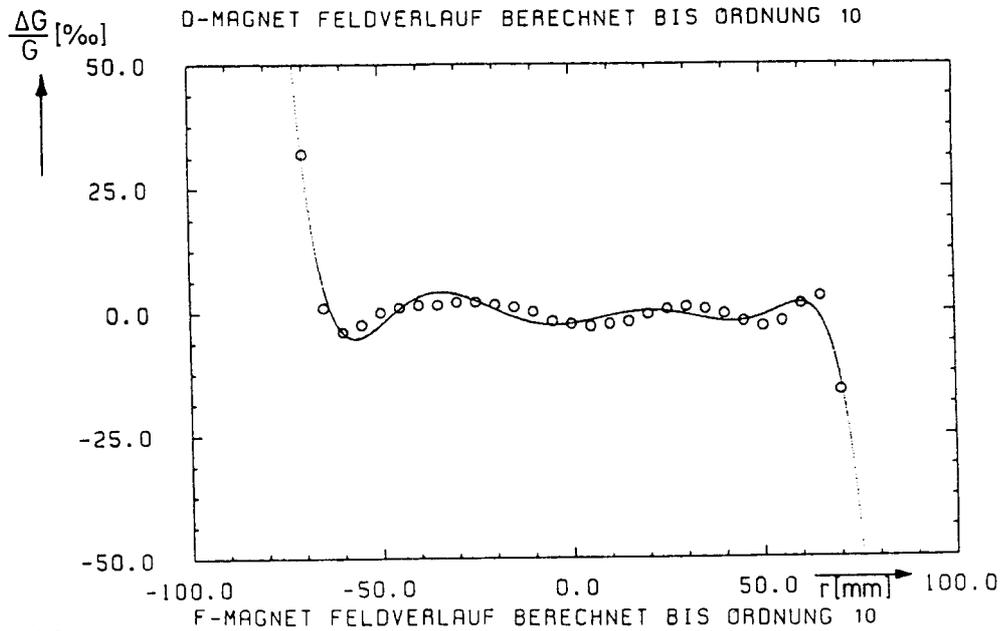
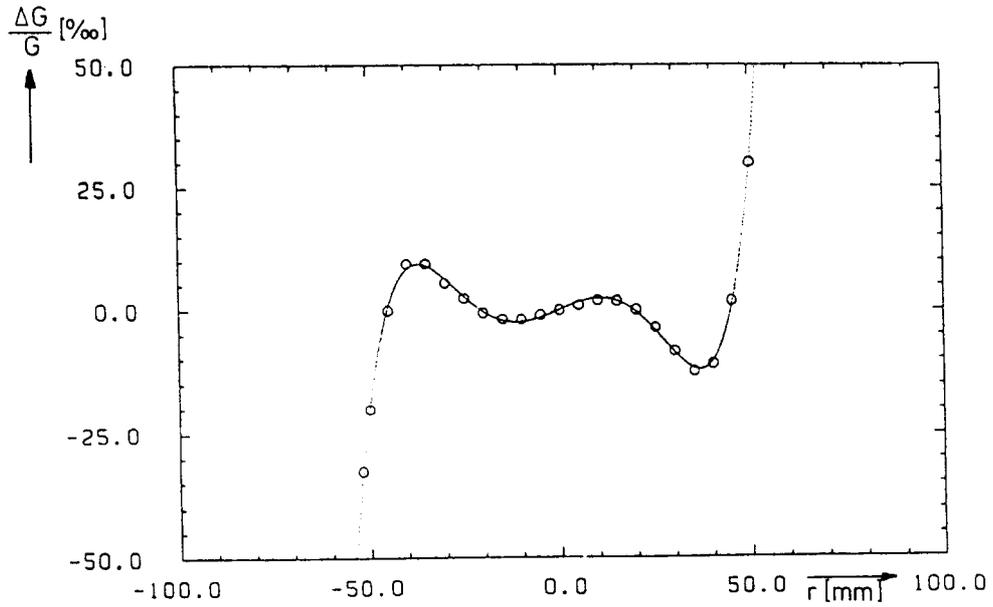
Als Standardabweichung werden 10 % der Mittelwerte angenommen, die gleichen Standardabweichungen werden auch für die gedrehten Multipolkoeffizienten verwendet.



Figur A.6.1: Multipolkoeffizienten der combined function-Magnete durch neue Messung /26/

Figur A.6.2:
Messungen an den
Modellmagneten





Figur A.6.3: Multipolfits der Modellmagnete

Tabelle A6.1a: Messungen der DESY III-Magnete

Ergebnisse der Magnetmessung für den DESY Magneten (defokussierend). Gemessen wurde bei 0.106 Tesla. Die Ergebnisse sind gemittelt über verschiedene longitudinale Positionen.

Die Multipolkoeffizienten (a_n , b_n) sind angegeben bei einem Referenzradius von $r_0 = 25$ mm und normiert auf die Dipolstärke.

Ord	a_n	rms	b_n	rms
1	0.000E+00	0.000E+00	1.000E+00	0.000E+00
2	-5.195E-04	3.753E-04	5.667E-02	7.932E-04
3	-2.498E-05	7.072E-05	-1.414E-04	1.379E-04
4	4.373E-05	4.700E-05	-1.409E-04	1.587E-04
5	1.710E-05	4.582E-05	1.374E-04	2.587E-05
6	-2.361E-05	2.951E-05	2.374E-06	4.981E-05
7	-1.265E-05	3.991E-05	-7.446E-06	4.160E-05
8	-2.162E-05	5.228E-05	2.276E-05	6.468E-05
9	8.106E-07	5.762E-05	-2.618E-05	5.599E-05
10	1.618E-05	6.063E-05	-1.214E-05	1.082E-04
11	5.875E-06	7.536E-05	-1.199E-05	8.414E-05
12	3.458E-05	1.091E-04	1.840E-05	4.316E-05
13	6.583E-06	1.029E-04	-1.641E-05	1.356E-04
14	-3.584E-07	1.199E-04	6.530E-05	1.556E-04
15	-1.957E-06	1.665E-04	-6.803E-05	1.585E-04
16	-7.301E-05	3.126E-04	-5.473E-05	2.566E-04

Tabelle A.6.1b: wie 1a, aber fokussierender Magnet

Ord.	an	rms	bn	rms
1	0.000E+00	0.000E+00	1.000E+00	0.000E+00
2	9.235E-06	1.201E-04	5.422E-02	3.469E-04
3	8.238E-05	4.086E-05	-1.570E-04	3.974E-05
4	-5.622E-06	2.731E-05	9.020E-05	1.825E-05
5	-3.444E-05	2.858E-05	1.672E-05	4.732E-05
6	-2.225E-05	3.013E-05	-4.275E-05	3.049E-05
7	6.478E-06	6.070E-05	-9.242E-06	1.705E-05
8	5.498E-05	2.592E-05	-1.106E-05	8.512E-05
9	3.846E-05	4.067E-05	-2.648E-05	9.890E-05
10	5.572E-05	5.877E-05	4.848E-05	5.775E-05
11	-9.326E-06	1.211E-04	1.123E-04	1.224E-04
12	-9.136E-05	1.042E-04	6.570E-05	1.073E-04
13	-1.000E-04	1.397E-04	-7.260E-05	1.130E-04
14	-8.453E-05	2.047E-04	-1.362E-04	1.513E-04
15	-2.330E-06	3.668E-04	-7.781E-05	2.633E-04
16	-6.484E-05	3.952E-04	7.517E-05	2.787E-04

Referenzen

- /1/ D. Notz: Data Processing System Based on the 370 E Emulator, DESY 85-46
- /2/ A. Wrulich: A Computer Code for the Simulation of Nonlinear Motion in a Accelerator, DESY 84-026 (1984)
- /3/ A.J. Lichtenberg, M.A. Lieberman: Regular and Stochastic Motion, Springer Verlag Nr. 38, 1983
- /4/ B.V. Chirikov: A Universal Instability of Mavy-Dimensional Oscillator Systems, Physics Reports 52, No.5 (1979),p.263-379
- /5/ F. Willeke: Analytic Study of the Tevatron Nonlinear Dynamics, Fermilab FN-422, 1985
- /6/ H. Goldstein: Classical Mechanics, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1951
- /7/ R. Hagedorn: Stability and Amplitude Rang of Two-Dimensional Non-Linear Oscillations with Periodic Hamiltonian Applied to Non-Linear Betatron Oscillations of Circular Particle Accelerators, CERN 57-1 (1957)
- /8/ A. Schoch: Theory of Linear and Non-Linear Perturbations of Betatron Oscillations in Alternating Gradient Synchrotrons, CERN 57-21 (1958)
- /9/ G. Guignard: A General Treatment of Resonances in Accelerators, CERN 78-11 (1978)
- /10/ R.S. MacKay: Renormalisation in Area Preserving Maps, Dissertation
- /11/ R. Brinkmann and F. Willeke: Chromatic Corrections and Dynamic Aperture in the HERA Electron Ring, Part I, DESY 86-079 (1986)
- /12/ V.I. Oseledec:
Trans. Moscow Math.Soc.19, 197 (1968)
- /13/ V.I. Arnold: Russian Math. Surveys 18, 85 (1964)
- /14/ J.L. Tennyson, M.A. Lieberman, and A.J. Lichtenberg: In M.Month and J.C. Herrera (eds.), op cit, p. 272 (1979)
- /15/ G. Ripken: Non-Linear Canonical Equations of Coupled Synchro-Betatron Motion and their Solution within the Framework of a Non-Linear 6-Dimensional (Symplectic) Tracking Program for Ultra-Relativistic Protons, DESY 85-084 (1985)

- /16/ P. Wilhelm and E. Lohrmann: Rounding Errors in Beam-Tracking Calculations, Particle Accelerators, Vol.19, pp.99-105 (1986)
- /17/ J.M. Greene: A Method of Determining a Stochastic Transition, J. Math. Phys. 20(6), 1979
- /18/ M. Furmann, Simple Method to Symplectify Matrices, SSC-TM-4001
- /19/ G. Benettin, L. Galgani and J.M. Strelayn: Phys. Rev. A14, 2338 (1976)
- /20/ F. Schmidt: Resonanzuntersuchungen bei HERA, DESY HERA 83-29 (1983)
- /21/ K. Steffen: Improved Beam Optic Layout for the HERA Proton Ring, DESY HERA 83-17 (1983)
- /22/ A. Piwinski: 1985 Particle Accelerator Conf., IEEE Trans. Nucl.Sci.NS-32, 2240 (1985)
- /23/ R. Brinkmann, private Mitteilung
- /24/ DESY III Group, Editor: J. R. Maidment, DESY III: Design Report, DESY HERA 86-11 (1986)
- /25/ E. A. Karantzoulis, J. R. Maidment: Beam Dynamics at Low Energies in DESY III, DESY HERA 86-01 (1986)
- /26/ H. Brück, private Mitteilung
- /27/ G. Hemmie, private Mitteilung
- /28/ D.P. Barber, G. Ripken, F. Schmidt: A Non-Linear Canonical Formalism for the Coupled Synchro-Betatron Motion of Protons with Arbitrary Energy, DESY 87-036 (1987)
- /29/ M. Sands: The Physics of Electron Storage Rings, SLAC-121
- /30/ E.J.N. Wilson: Proton Synchrotron Accelerator Theory, CERN 77-07 (1977)
- /31/ E.A. Karantzoulis, J.R. Maidment: private Mitteilung
- /32/ H. Mais, F. Schmidt, A. Wrulich: Proc. Part. Accel. Conf. Vancouver 1985, IEEE Trans.Nucl.Sci.NS-32,2252 (1985)
- /33/ H. Mais, G. Ripken, F. Schmidt, A. Wrulich: Particle Tracking, DESY 86-024 (1986)
- /34/ F. Willeke, private Mitteilung

Danksagung

Zunächst möchte ich Herrn B. H. Wiik dafür danken, mir diese Arbeit ermöglicht zu haben.

Am Anfang der Arbeit hat mich Herr A. Wrulich betreut, ohne dessen Impulse und Anregungen diese Arbeit nicht hätte erstellt werden können. Vor allem danke ich Herrn F. Willeke, der meine Betreuung an einem kritischen Zeitpunkt übernommen und mich mit viel Aufwand bei der Erstellung der Arbeit unterstützt hat. Weiterhin möchte ich mich bei Herrn P. Schmüser für die sehr sorgfältige Durchsicht der Arbeit bedanken.

Für die Erstellung der vielen Zeichnungen danke ich Frau M. Möller und Frau C. Lückemann. Für die sorgfältige und mühevollen Anfertigung des Manuskripts bedanke ich mich herzlich bei Frau I. Nikodem.

