Interner Bericht
DESY ~~F21/3~~
Mai 1968

INELASTISCHE ELEKTRON-PROTON-STREUUNG

E. Ganßauge

Inelastische Electron-Proton-Streuung

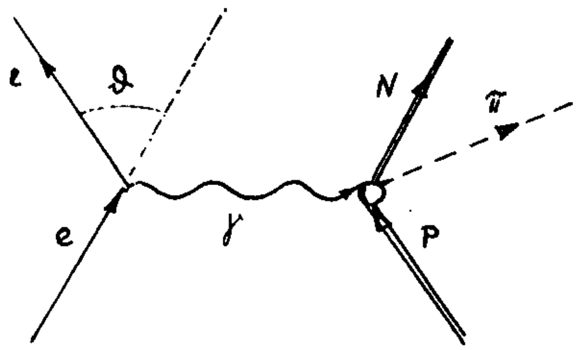
E. Ganßauge Vortrag Nr. 1/2 SS 1968

ÜBERSICHT

1. Einleitung

Es soll der Prozeß studiert werden: $e + p \rightarrow e + N^*$

$$\hookrightarrow \begin{cases} p + \pi^0 \\ n + \pi^+ \end{cases}$$



mit $M_{N^*} \gg M_p$

Spezialfälle: 1) Photoproduktion ($q^2 = 0$)

$\gamma + p \rightarrow N^*$

2) Elastische e-p-Streuung ($N^* \equiv p$)

Phänomenologische Beschreibung:

Das einlaufende Elektron wird im elektromagnetischen Feld des Targetprotons gestreut. Die Wechselwirkung wird beschrieben durch einen Austausch virtueller Photonen, die Energie und Impuls übertragen, charakterisiert durch den Viererimpulsübertrag q. Dadurch kann das Targetteilchen (analog zum Frank-Herz-Versuch) in verschiedene Anregungszustände versetzt werden, wenn immer die innere Energie des "aufgeheizten" Protons spezielle "Resonanzwerte" erreicht.

Mißt man bei fester Primärenergie der Elektronen unter vorgegebenem Streuwinkel ϑ das Energiespektrum der Elektronen, so findet man einen Verlauf, wie ihn Fig. 1 (am Schluß des Berichtes) zeigt. Jeder Peak in diesem Spektrum entspricht einem (u.U. auch mehreren) Anregungszuständen des Protons.

Im Frank-Herz-Versuch geht das angeregte Atom nach ca. 10^{-8} sec in seinen Grundzustand zurück unter Aussendung einer charakteristischen Lichtstrahlung. Das angeregte Proton sendet entsprechend seiner hadronischen Natur Pionen aus, indem es in seinen Grundzustand zurückfällt("Elektroproduktion von Pionen").
Jeder Resonanzzustand ist gekennzeichnet durch Isospin τ, Gesamtdrehimpuls J und Parität Π.

Für die erste Resonanz, $\Delta(1236)$, mit der inneren Energie bzw. "Masse" W = 1236 MeV sind diese Quantenzahlen (3/2,3/2,+).

Der Grenzfall der elastischen Streuung ist dadurch gekennzeichnet, daß im Schwerpunktsystem der einlaufenden Teilchen keine Masse bzw. Energie sondern nur Impuls auf das Proton übertragen wird $q = (0,\vec{q})$.*) Damit bleibt das Proton in seinem Grundzustand und erfährt lediglich einen Rückstoß. Die Dynamik dieses Prozesses wird charakterisiert durch zwei Formfaktoren G_E und G_M, die Funktionen lediglich des invarianten Impulsübertragsquadrates q^2 sind. Ihr Studium führte zu dem heuristischen Gesetz ("Dipolfit"):

$$G_E(q^2) = \frac{G_M(q^2)}{\mu} = \left(1 + \frac{- q^2}{0.71 \ (\frac{GeV}{c})^2} \right)^{-2} . \qquad (1)$$

Soweit die angeregten Zustände oder (πN)-Resonanzen einen Spin > 1/2 haben, müssen, wie Durand[1] allgemein gezeigt hat, drei Formfaktoren eingeführt werden.
Das Ziel der Experimente zur inelastischen e-p-Streuung besteht darin, die q^2-Abhängigkeit dieser Formfaktoren zu finden und damit Aussagen über die räumliche Struktur des Protons in seinen Anregungszuständen zu gewinnen.

Daß dieses Ziel mit Hilfe von Photoproduktionsexperimenten nicht zu erreichen ist, liegt auf der Hand, da hier der Energie-Impulsübertrag nicht variiert werden kann.

Die entscheidende Schwierigkeit liegt nun in dem Umstand, daß, wie in Fig. 1 zu sehen war,

---

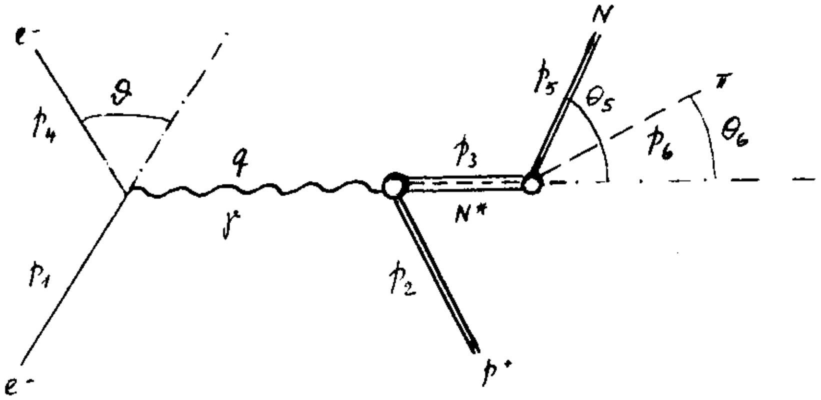
*) Auch im inelast. Fall läßt sich ein Bezugssystem (e-Breit-Syst.) finden, in dem $q_o = 0$, d.h. keine Energie übertragen wird. Doch nimmt das Targetteilchen hier Masse auf. (Vgl. 3.2.1)

die Resonanzpeaks über einem mehr oder weniger hohen nicht-resonanten Untergrund liegen, der seinerseits auch mit q^2 variiert. Dieser Untergrund ist insbesondere verschieden, je nachdem, welchen Ausgangskanal man betrachtet. Mißt man nur die Elektronen im Ausgangskanal, so erfaßt man beide Zerfallskanäle gleichzeitig und kann überdies die drei Formfaktoren (wie z.B. im Fall der 1. Resonanz) nicht vollständig voneinander isolieren. Solche "Einarmmessungen" können demnach nicht zur Erreichung unseres ursprünglichen Zieles dienen. Sie entsprechen in ihrem Gehalt den totalen Photoabsorptionsquerschnitt-Messungen und sind insbesondere von Interesse, wenn, wie im Fall der 1. Resonanz, ein einzelner Multipolübergang dominiert.

Die Untersuchungen zur elastischen e-p-Streuung haben gezeigt, daß sich der Prozeß in sehr guter Näherung durch die Annahme beschreiben läßt, daß zwischen den Teilchen im Eingangskanal ein einzelnes (virtuelles) Photon ausgetauscht wird. Auf der Basis dieser Näherung leitet man für den Wirkungsquerschnitt der elastischen e-p-Streuung die "Rosenbluth-Formel" ab (s. Abschnitt 4.3). Die gleiche Annahme wird bei der Ableitung eines Wirkungsquerschnittes für den inelastischen Prozeß zugrunde gelegt, obwohl sie zunächst noch nicht durch das Experiment gerechtfertigt ist.

2. Kinematik (Metrik: $a \cdot b = a_0 b_0 - \vec{a} \cdot \vec{b}$)

Die im Folgenden verwandte Bezeichnungsweise ist aus der Skizze zu entnehmen:



Wir verwenden jedoch gleichberechtigt nebeneinander folgende Definitionen:

einlauf. Elektron (1) $p = p_1 = (p_1^0 = E_1 = E, \vec{p}_1)$; $M_1 = m_e = 0$

Targetproton (L.S.)(2) $P = p_2 = (p_2^0 = M_2, 0)$; $M_2 = m_p = M$

(πN)-System (3) $p_3 = (p_3^0 = E_3, \vec{p}_3)$; $M_3 = m_{N^*} = W$

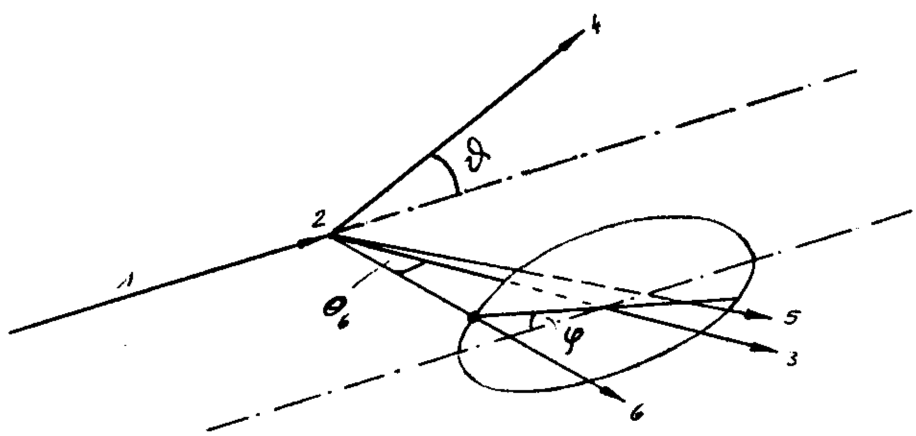
auslauf. Elektron (4) $p' = p_4 = (p_4^0 = E_4 = E', \vec{p}_4)$; $M_4 = m_e = 0$

auslauf. Proton (5) $P' = p_5 = (p_5^0 = E_5, \vec{p}_5 = \vec{P}')$; $M_5 = m_p = M$

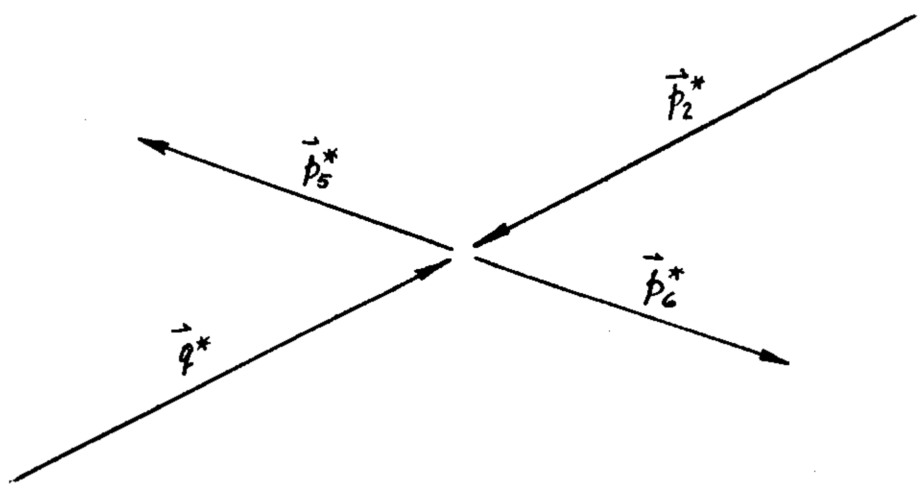
auslauf. Pion (6) $k = p_6 = (p_6^0 = E_6, \vec{p}_6 = \vec{k})$; $M_6 = m_\pi = \mu$

Das (πN)CMS wird jeweils durch einen Stern (*) gekennzeichnet.

L.S.



N*-CMS



Hier sind ohne Ableitung die wichtigsten kinematischen Formeln zusammengestellt, die in den nächsten Abschnitten verwendet werden.

Energieimpulsübertrag $q^2 = (p_1-p_4)^2 = q_o^2 - |\vec{q}|^2 = -4EE'\sin^2\vartheta/2$ (2.1)

intermediäre Masse $W^2 = (p_2+q)^2 = M^2 + 2MK = (p_5+p_6)^2$ (2.2)

äquivalente Photonenergie $K = \frac{1}{2M}(W^2-M^2) = q_o - \frac{-q^2}{2M}$ (2.3)

Photonenergie (LS) $q_o = E_1-E_4 = \frac{1}{M}\, q\cdot p_2$ (2.4)

Photonenergie (CMS) $q_o^* = \frac{M}{W}\left(K - \frac{-q^2}{2M}\right) = \frac{1}{2W}\left(W^2-M^2-(-q^2)\right)$ (2.5)

Photonimpuls (CMS) $|\vec{q}^*|^2 = \frac{1}{4W^2}\left(W^2 + M^2 + (-q^2)\right)^2 - M^2 = \frac{M^2}{W^2}|\vec{q}|^2$ (2.6)

Polarisation $\varepsilon = \left(1 + 2\,\frac{|\vec{q}|^2}{-q^2}\,\mathrm{tg}^2\vartheta/2\right)^{-1}$ (2.7)

$$\frac{2}{1-\varepsilon} = 2 + \frac{-q^2}{|\vec{q}|^2}\,\mathrm{ctg}^2\vartheta/2 \qquad (2.8)$$

Elektronenergie $E_4 = E_1 - K - \frac{-q^2}{2M} = \frac{E_1 - K}{1 + \frac{2E_1}{M}\sin^2\vartheta/2}$ (2.9)

Pionimpuls $|\vec{p}_6^*|^2 = \frac{1}{4W^2}\left(W^2 - (M-\mu)^2\right)\left(W^2 - (M+\mu)^2\right)$ (2.10)

Impuls der Resonanz (LS) $|\vec{p}_3|^2 = E_1^2 - 2E_1E_4\cos\vartheta + E_4^2$ (2.11)

Lorentzfaktor "" $\gamma_3 = \frac{E_3}{W} = \frac{1}{W}\sqrt{W^2 + |\vec{p}_3|^2}$ (2.12)

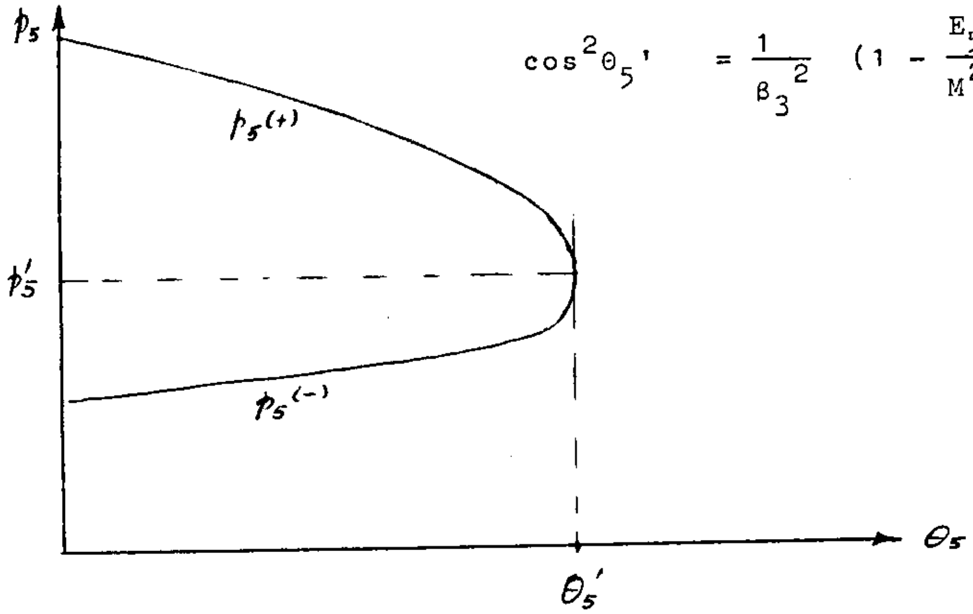
Geschwindigkeit " $\beta_3 = \frac{|\vec{p}_3|}{E_3} = \left(1 + \frac{W^2}{|\vec{p}_3|^2}\right)^{-1/2}$ (2.13)

Protonenergie (CMS) $E_5^* = \frac{1}{2W}\left(W^2 + M^2 - \mu^2\right)$ (2.14)

Protonimpuls (LS) $|\vec{p}_5| = \frac{E_5^*\beta_3\cos\Theta_5 \pm \sqrt{E_5^{*2} - M^2\gamma_3^2(1-\beta_3^2\cos^2\Theta_5)}}{\gamma_3\,(1 - \beta_3^2\cos^2\Theta_5)}$ (2.15)

In der Doppeldeutigkeit dieser letzten Formel drückt sich folgender Sachverhalt aus:

Zu jedem Laborwinkel Θ_5 des Protons gehören zwei verschiedene Impulse $p_5^{(+)}$ und $p_5^{(-)}$, die lediglich im Grenzwinkel Θ_5' in einen Wert zusammenfallen. Der Grenzwinkel ist definiert durch das Verschwinden des Radianten. Also gilt



$$\cos^2\Theta_5' = \frac{1}{\beta_3^2}\left(1 - \frac{E_5^{*2}}{M^2\gamma_3^2}\right) \qquad (2.16)$$

3. Der Wirkungsquerschnitt für inelastische e-p-Streuung

Normierung der Dirac-Spinoren: $\bar{u}u = 2m$ $\qquad \Lambda = \not{p} + m$

$$\bar{u}\gamma_0 u = 2p_0$$

Ausgehend von der invarianten Form des Wirkungsquerschnittes, die bei Bjorken und Drell(2) abgeleitet wird, kann man sofort hinschreiben:

$$\boxed{d\sigma = \int \frac{1}{4\sqrt{(p_1\cdot p_2)^2 - M_1^2 M_2^2}}\, \overline{|M_{fi}|}^2\, \frac{1}{(2\pi)^5}\, \frac{d^3\vec{p}_4}{2p_4^0}\, \frac{d^3\vec{p}_5}{2p_5^0}\, \frac{d^3\vec{p}_6}{2p_6^0}\, \delta^4(p_5 + p_6 - p_2 - q)} \qquad (3.1)$$

Hierin ist über soviele Variable zu integrieren, wie δ-Funktionen vorhanden sind.

3.1 Berechnung des Phasenraumes

1) $$\left.\begin{aligned} d^3\vec{p} &= |\vec{p}|^2 \, d|\vec{p}| \, d\Omega \\ |\vec{p}| \cdot d|\vec{p}| &= p_o dp_o \end{aligned}\right\} \quad \frac{d^3\vec{p}_4}{p_4^{\,o}} = E_4 dE_4 d\Omega_4$$

$$= E_4 dE_4 \cdot d\phi d\cos\vartheta \qquad (3.2)$$

2) $$\frac{d^3\vec{p}}{2p^o} = \int_0^\infty d^4p \; \delta(p^2-M^2) \qquad (3.3)$$

Damit läßt sich das invariante Phasenraumintegral für die hadronischen Teilchen im Ausgangskanal umschreiben in

$$P_{5,6} = \int_0^\infty d^4p_5^* d^4p_6^* \; \delta(p_5^2-M_5^2)\,\delta(p_6^2-M_6^2)\;\delta^4(p_5^*+p_6^*-p_2^*-q^*)$$

Aufgrund von $\delta^4(\cdots)$ läßt sich die Integration über p_5^* (oder p_6^*) sofort ausführen, und es bleibt:

$$= \int_0^\infty d^4p_6^* \; \delta(\;5\;)\,\delta(\;6\;)$$

$$= |\vec{p}_6^*|^2 \, d\Omega_6^* \int d\vec{p}_6^* \; dp_6^{o*} \; \delta(\;5\;)\,\delta(\;6\;)$$

$$= - - - - - \; \frac{\partial(\vec{p}_6^{\,*},\, p_6^{o*})}{\partial(p_5^{\,2},\, p_6^{\,2})} \int \underbrace{dp_5^{\,2}\, dp_6^{\,2}\; \delta(\;5\;)\,\delta(\;6\;)}_{=1}$$

Die Funktionaldeterminante

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\delta \vec{p}_6^*}{\delta p_5^2} & \dfrac{\delta \vec{p}_6^*}{\delta p_6^2} \\ \dfrac{\delta p_6^{o*}}{\delta p_5^2} & \dfrac{\delta p_6^{o*}}{\delta p_6^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\delta p_5^2}{\delta \vec{p}_6^*} & \dfrac{\delta p_5^2}{\delta p_6^{o*}} \\ \dfrac{\delta p_6^2}{\delta \vec{p}_6^*} & \dfrac{\delta p_6^2}{\delta p_6^{o*}} \end{vmatrix}^{-1}$$

bestimmt sich aus $p_6^2 = p_6^{o*2} - |\vec{p}_6|^2$

und $p_5^2 = (W - p_6^{o*})^2 - |\vec{p}_6^*|^2$

zu $$\begin{vmatrix} -2\,|\vec{p}_6^*| & -2(W - p_6^{o*}) \\ -2\,|\vec{p}_6^*| & 2\,p_6^{o*} \end{vmatrix}^{-1} = (4W|\vec{p}_6^*|)^{-1}$$

$$P_{5,6} = \frac{|p_6^*|\,d\Omega_6^*}{4W} \qquad (3.4)$$

Die Wurzel in Gl. (3.1) reduziert sich für relativistische Elektronen auf

$$\sqrt{(p_1p_2)^2 - M_1^2M_2^2} = M \cdot E_1$$

Damit und unter Berücksichtigung der Gleichungen (3.2) und (3.4) folgt aus Gl. (3.1) folgender Ausdruck für den Wirkungsquerschnitt:

$$\boxed{\frac{d^5\sigma}{dE_4\, d\cos\vartheta_4\, d\varphi_4\, d\cos\Theta_6^*\, d\varphi_6^*} = \frac{1}{32\,(2\pi)^5}\,\frac{E_4}{E_1}\,\frac{|\vec{p}_6^*|}{W}\,\frac{1}{M}\,\Sigma\overline{\Sigma}\,|M_{fi}|^2} \qquad (3.5)$$

Indem wir $\Sigma\overline{\Sigma}|M_{fi}|^2$ schreiben, setzen wir voraus, daß die Polarisationsrichtungen der Elektronen und Protonen nicht beobachtet werden. Daher ist über die Anfangs-Spinzustände zu mitteln und über die Spins im Endkanal zu summieren.

Die invariante Amplitude M_{fi}, die die Dynamik des Prozesses enthält, ist bei Bjorken-Drell definiert als

$$M_{fi} = \varepsilon_\mu \cdot \frac{e}{-q^2} \cdot J^\mu \quad \text{mit}$$

$$\varepsilon_\mu \equiv \bar{u}\,(p_4, s_4)\gamma_\mu \quad u(p_1, s_1) \tag{3.6}$$

$J^\mu \equiv < p_5, p_6 | j_\mu | p_2 >$: Strommatrixelement für den Übergang vom Nukleon zum (πN)-System

Spinsummation:

$$|\overline{M_{fi}}|^2 \equiv \frac{1}{2}\,\frac{1}{2\sigma+1}\,\Sigma\,\bar{\Sigma}|M_{fi}|^2 = \frac{1}{2}\,L^{\mu\nu}\,\frac{e^2}{q^4}\,\frac{1}{2\sigma+1}\,T_{\mu\nu}$$

σ = Targetspin=1/2

$$L^{\mu\nu} = \sum_s \varepsilon^\mu \varepsilon^{\nu *} = \mathrm{Sp}\,\Lambda_4 \gamma^\mu \Lambda_1 \gamma^\nu$$

$$= 4\left\{ p_1^{\ \mu} p_4^{\ \nu} + p_1^{\ \nu} p_4^{\ \mu} - g^{\mu\nu} \cdot \frac{-q^2}{2} \right\}$$

$$T_{\mu\nu} = \sum_{S,S'} <5,6|j_\mu|2><2|j_\nu|5,6>$$

$$\equiv \sum_{S,S'} J_\mu J_\nu \equiv \quad J_{\mu\nu}$$

(3.7)

In der Behandlung des hadronischen Teils des Prozesses unterscheiden sich die verschiedenen Publikationen z.T. wesentlich. Eine relativ durchsichtige und elegante Methode wurde von Jones[3] angegeben, der wir hier folgen wollen (siehe auch Seminarvorträge WS 1966/67 N° 8[13] und N° 12[12]).

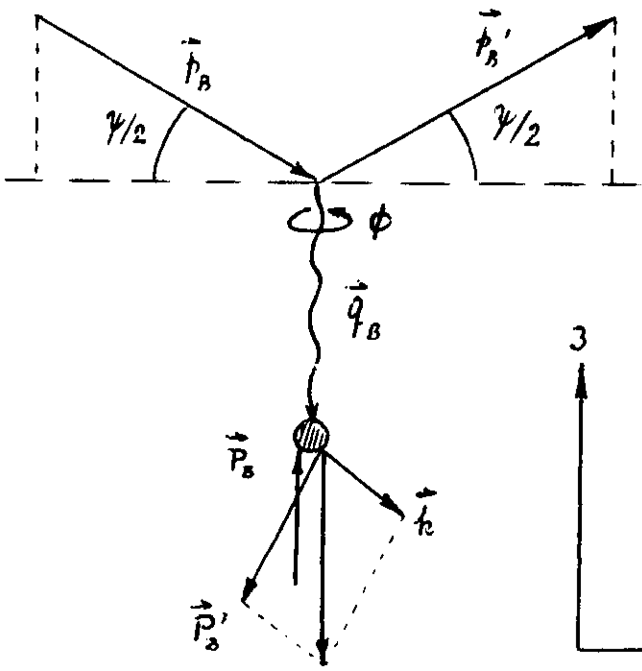
3.2 Berechnung des invarianten Übergangsmatrixelementes

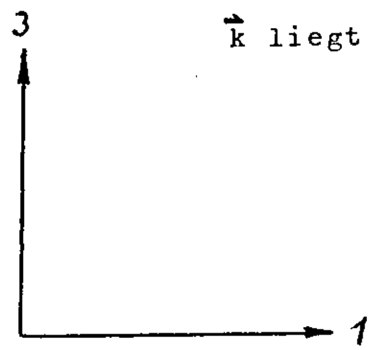
Die Berechnung der Summe $L^{\mu\nu}\, T_{\mu\nu}$ wird in einem speziellen Breitsystem vorgenommen, das so gewählt ist, daß ein Teil der Summanden von vornherein verschwindet. Die in diesem System gegebenen Matrixelemente $T^B_{\mu\nu}$ werden dann mittels einer Lorentztransformation längs der $\vec{q}$-Achse auf das (πN)CMS bezogen. Als Endresultat findet man einen Ausdruck für die CM-Winkelverteilung, in der die CM-Matrixelemente $T^C_{\mu\nu}$ auftreten.

Der Faktor $\frac{1}{2}\,\frac{1}{2\sigma+1} = \frac{1}{4}$ in der ersten Zeile von Gl. (3.7) wird in die Definition von $L^{\mu\nu}$ mit einbezogen, so daß sich statt (3.7) ergibt

$$L^{\mu\nu} = \left\{ p_1{}^{\mu} p_4{}^{\nu} + \;\ldots \right\} = \frac{1}{4}\, \Sigma \varepsilon^{\mu} \varepsilon^{\nu *} \qquad (3.8)$$

3.2.1 Definition des Breitsystems ($q_o = 0$, $\vec{q} \parallel \vec{p}$)





ϕ = Azimutwinkel von $\vec{p}_B{}'$

$$\mathrm{ctg}^2\psi/2 = \frac{-q^2}{|\vec{q}|^2}\,\mathrm{ctg}^2\vartheta/2 = \frac{2\,\varepsilon}{1-\varepsilon} \qquad (3.9)$$

$\vec{k}$ liegt in der 3,1-Ebene.

-11-

Der Index B charakterisiert die Größen im Breit-System.

$$p_B^\mu = \frac{|\vec{q}_B|}{2 \sin \psi/2} (1,\ \cos \psi/2 \cos \phi,\ \cos \psi/2 \sin \phi,\ - \sin \psi/2)$$

$$p_B'^\mu = \frac{|\vec{q}_B|}{2 \sin \psi/2} (1,\ \cos \psi/2 \cos \phi,\ \cos \psi/2 \sin \phi,\ + \sin \psi/2) \tag{3.10}$$

3.2.2 Betrachtung des Übergangsstromes J_μ

Der Übergangsstrom J_μ geht in Form des Tensors $J^\mu J^{\nu *} \equiv J^{\mu\nu}$ ein, der sich als Summe aus einem symmetrischen und einem antisymmetrischen Tensor darstellen läßt. Bleiben die Elektronspins unbeobachtet, so verschwindet beim "Überschieben" mit $L_{\mu\nu} = L_{\nu\mu}$ der antisymmetrische Anteil. Daher sind von den 4 x 4 Tensorkomponenten $J_{\mu\nu}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} J_{00} & J_{01} & J_{02} & J_{03} \\ J_{10} & \ddots & \cdot & \cdot \\ J_{20} & \cdot & \ddots & \cdot \\ \hline J_{30} & \cdot & \cdot & J_{33} \end{array}\right]$$

höchstens 10 meßbare, reelle Größen. (Bei Verwendung zirkular polarisierter Photonen wären alle 16 $J_{\mu\nu}$ -Elemente der Messung zugänglich[4].)

Für den Übergangsstrom J_μ gilt die Kontinuitätsgleichung

$$q^\mu J_\mu = 0$$

damit auch $$q^\mu J_{\mu\nu} = 0 \tag{3.11}$$

mit $\nu = 0,1,2,3$.

Zwischen den 10 Tensorkomponenten bestehen also 4 Relationen derart, daß nur 6 Komponenten linear unabhängig sind.
Das gilt zwar allgemein, aber im Breitsystem leuchtet es unmittelbar ein, da die Kontinuitätsgleichung hier fordert

$$q_B^3 \, J_3^B = 0 \;\rightarrow\; J_{3\nu} = J_{\mu 3} = 0 \quad , \quad T_{\mu 3}^B = 0 \tag{3.12}$$

3.2.3 Berechnung der Summe $L_{\mu\nu} T^{\mu\nu}$ im Breitsystem

Nach dem im vorigen Abschnitt Gesagten bleiben von der Summe $L_{\mu\nu}T^{\mu\nu}$ nur die folgenden Glieder stehen:

$$\begin{aligned} L_{\mu\nu}T^{\mu\nu} = {} & L^{oo}T_{oo} + L^{o1}T_{o1} + L^{o2}T_{o2} \\ & + L^{1o}T_{1o} + L^{11}T_{11} + L^{12}T_{12} \\ & + L^{2o}T_{2o} + L^{21}T_{21} + L^{22}T_{22} \end{aligned} \tag{3.13}$$

Nach Gl. (3.7) gilt $L_{\mu\nu} = L_{\nu\mu}$, somit läßt sich Gl. (3.13) zusammenfassen zu:

$$\begin{aligned} L_{\mu\nu}T^{\mu\nu} = {} & L^{oo}T_{oo} + L^{11}T_{11} + L^{22}T_{22} + L^{o1}(T_{10} + T_{o1}) \\ & + L^{o2}(T_{2o} + T_{o2}) + L^{12}(T_{21} + T_{12}) \end{aligned}$$

Der Tensor $T^{\mu\nu}$ baut sich auf aus $g_{\mu\nu}$ und den Vierervektoren q,P,P',und k, die an dem hadronischen Vertex angreifen. Von diesen sind jedoch wegen Energie-Impuls-Erhaltung nur 3 lin. unabhängig; wir wählen etwa q,P und k. Da diese Vierervektoren in unserem speziellen Breitsystem keine 2-Komponenten besitzen, gilt

$$T_{2o} + T_{o2} = T_{12} + T_{21} = 0$$

und damit

$$\boxed{L_{\mu\nu}\, T^{\mu\nu} = L^{oo}T_{oo} + L^{11}T_{11} + L^{22}T_{22} + L^{o1}(T_{1o} + T_{o1}).} \tag{3.14}$$

Aus den Gleichungen (3.8) bis (3.10) folgt für die $L^{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned}
L^{oo} &= \frac{-q^2}{2}\, \mathrm{ctg}^2 \frac{\psi}{2} = \frac{-q^2}{2} \cdot \frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon} \\
L^{11} &= \frac{-q^2}{2}\left(1 + \mathrm{ctg}^2 \frac{\psi}{2} \cos^2\phi\right) = \frac{-q^2}{2}\, \frac{1 + \varepsilon(1-2\sin^2\phi)}{1-\varepsilon} \\
L^{22} &= \frac{-q^2}{2}\left(1 + \mathrm{ctg}^2 \frac{\psi}{2} \sin^2\phi\right) = \frac{-q^2}{2}\, \frac{1 + \varepsilon(1-2\cos^2\phi)}{1-\varepsilon} \\
L^{o1} &= \frac{-q^2}{2}\, \frac{\cos \psi/2}{\sin^2\psi/2} \cos\phi = \frac{-q^2}{2}\, \frac{2\,(1+\varepsilon)}{1-\varepsilon} \cdot \cos\phi
\end{aligned} \tag{3.15}$$

3.2.4 Übergang vom Breitsystem zum (πN)-CMS

Der Übergang geschieht mittels einer Lorentztransformation längs der Achse $\vec{q}_B = -q_3$. Das Quadrat des Übergangsstromes ist eine vom Bezugssystem unabhängige Größe. Nach Gl. (3.12) verschwindet im B.S. die 3-Komponente $J_3^B = 0$; die Transversalkomponenten J_1, J_2 ändern sich nicht bei der Transformation. Demnach gilt

$$(J_B^0)^2 = (J_C^0)^2 - (J_C^3)^2 \tag{3.16}$$

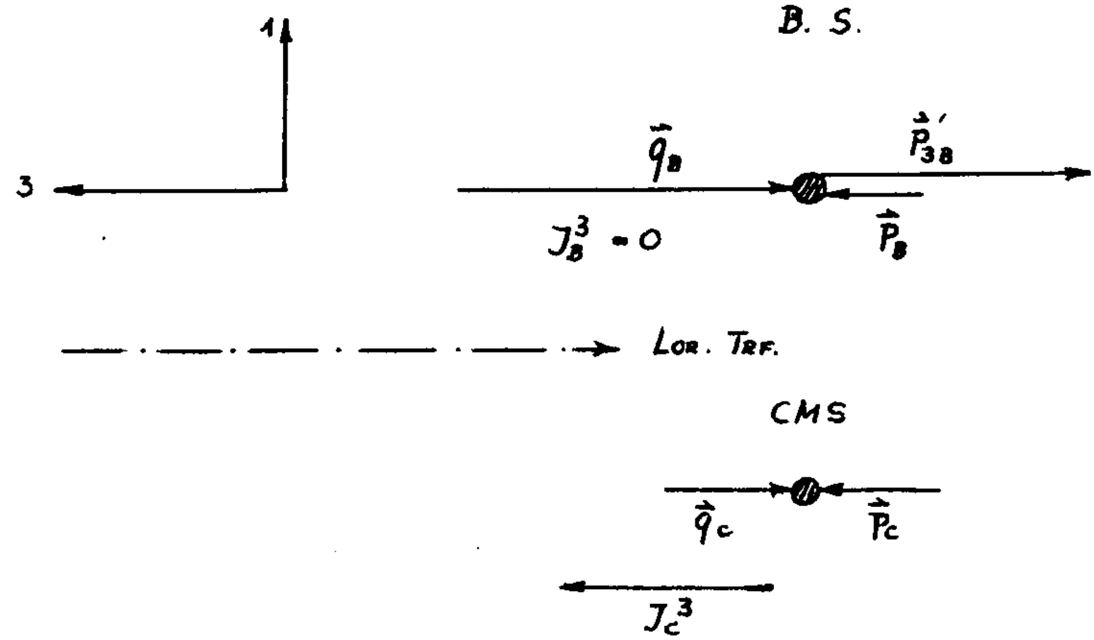
Aus der Kontinuitätsgleichung folgt andererseits, da $q_1 = q_2 = 0$,

$$q_o^* J_c^o = q_3^* \, J_c^3 \tag{3.17}$$

D.h.

$$\boxed{\begin{aligned} (J_B^o)^2 &= \underbrace{\left\{ \left(\frac{q_3^*}{q_o^*}\right)^2 - 1 \right\}}_{\displaystyle \frac{q_3^{*2} - q_o^{*2}}{q_o^{*2}} = \frac{-q^2}{q_o^{*2}} \equiv a^2} (J_c^3)^2 \\ J_B^o &= (\pm)\sqrt{\frac{-q^2}{q_o^*}}\; J_c^3 \equiv -a \cdot J_c^3 \end{aligned}} \qquad (3.18)$$

Im Breitsystem fliegt das (πN)-System in der Richtung q_3^B, d.h. in der (-3)-Richtung. Demnach ist die Lorentz-transformation in eben dieser Richtung durchzuführen, will man zum (πN)CMS gelangen. Damit entfällt das positive Vorzeichen in (3.18)



Aus $J_B^0 = - aJ_c^3$ und $J_B^{1,2} = J_c^{1,2}$ folgt für die Tensorkomponenten $T_{\mu\nu}$:

$$\boxed{\begin{aligned} T_{o1}^B &= -\sum_{s,s'} J_o^B J_1^{B*} = a \sum J_3^c J_1^{c*} = a \cdot T_{31}^c \\ T_{oo}^B &= \sum_{s,s'} J_o^B J_o^{B*} = a^2 \sum J_3^c J_3^{c*} = a^2 \cdot T_{33}^c \\ T_{11,22}^B &= T_{11,22}^C \end{aligned}} \qquad (3.19)$$

Damit lassen sich die Komponenten des Stromtensors $T_{\mu\nu}$, die in Gl. (3.14) im B.S. definiert waren, durch die CM-Größen ersetzen:

$$\boxed{L_{\mu\nu} T^{\mu\nu} = L^{oo} \cdot a^2 T_{33} + L^{11} T_{11} + L^{22} T_{22} + L^{o1} \cdot a(T_{31} + T_{13})} \qquad (3.20)$$

3.3 Die CM-Winkelverteilung

Wir spalten in Gl. (3.15) den gemeinsamen Faktor $-q^2/2 \cdot 1/1-\varepsilon$ in den $L_{\mu\nu}$ ab und definieren als Winkelverteilung

$$\boxed{W(\theta^*, \phi) \equiv \frac{2}{-q^2} (1-\varepsilon) L^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = \frac{2(1-\varepsilon)}{e^2} (-q^2) |\overline{M_{fi}}|^2}$$

$$= 2\varepsilon a^2 T_{33} + \left\{1 + \varepsilon(1-2\sin^2\phi)\right\} T_{11} + \left\{1+\varepsilon(1-2\cos^2\phi)\right\} T_{22} \qquad (3.21)$$

$$+ \sqrt{2\varepsilon(1+\varepsilon)} \cdot \cos\phi \cdot a\,(T_{13} + T_{31})$$

$$\boxed{\begin{aligned} W(\theta^*,\phi) = {} & (T_{11}+T_{22}) + 2\varepsilon a^2 T_{33} + \varepsilon(T_{11}-T_{22})\underbrace{(\cos^2\phi - \sin^2\phi)}_{= \cos 2\phi} \\ & + \sqrt{2\varepsilon(1+\varepsilon)}\cdot a\cdot(T_{13} + T_{31})\cdot\cos\phi \end{aligned}} \qquad (3.22)$$

Der Wirkungsquerschnitt (Gl. (3.5)) läßt sich dann in der Form schreiben:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d^5\sigma}{dE_4\, d\cos\vartheta_4\, d\phi_4\, d\cos\theta_6^*\, d\phi_6^*} & = \frac{e^2}{64(2\pi)^5}\cdot\frac{E_4}{E_1}\,\frac{|\vec{p}_6^{\,*}|}{MW(-q^2)}\,\frac{1}{1-\varepsilon}\,W(\theta^*,\phi) \\ & \equiv \Gamma_t\cdot\eta\cdot\frac{1}{4}\cdot W(\theta^*,\phi) \\ & \equiv \Gamma_t\cdot\frac{d\sigma_v}{d\Omega_6^*} \end{aligned}} \qquad (3.23)$$

$$\text{mit} \quad \Gamma_t \equiv \frac{\alpha}{2\pi^2}\,\frac{E_4}{E_1}\cdot\frac{K}{-q^2}\cdot\frac{1}{1-\varepsilon} \quad ; \quad \alpha = \frac{e^2}{4\pi} \quad ; \; k = \frac{W^2-M^2}{2M^2} \qquad (3.24)$$

$$\text{und} \quad \eta \equiv \frac{1}{16(2\pi)^2}\cdot\frac{|\vec{p}_6^{\,*}|}{MKW} \qquad (3.25)$$

$d\sigma_v/d\Omega_6^*$ läßt sich interpretieren als differentieller Wirkungsquerschnitt für Photoproduktion mit virtuellen Photonen. Er ist bis auf den kinematischen Faktor $1/4\eta$ gleich der Winkelverteilungsfunktion $W(\theta^*,\phi)$. Die 4 Glieder kann man folgendermaßen interpretieren:

$$\frac{1}{4}\eta \cdot (T_{11} + T_{22}) = \frac{d\sigma_t}{d\Omega_6^*} \;\hat{=}$$

diff. W.Qu. für Photoprod. mit unpol. transversalen Photonen

$q^2 \to 0 \;\hat{=}\; d\sigma_t \to d\sigma_\gamma$

$$\frac{1}{4}\eta \cdot 2a^2 T_{33} = \frac{d\sigma_l}{d\Omega_6^*} \;\hat{=}$$

diff. W.Qu. für Photoprod. mit longitudinalen Photonen

$q^2 \to 0 \;\hat{=}\; d\sigma_l \to 0$

$$\frac{1}{4}\eta \cdot (T_{11} - T_{22}) = \frac{d\sigma_p}{d\Omega_6^*} \;\hat{=}$$

diff. W.Qu. für Photoprod. mit pol. transversalen Photonen ($\sim \sin^2\theta^*$)

$q^2 \to 0 \;\hat{=}\; d\sigma_p \to d\sigma_{\gamma pol.}$ *)

$$\frac{1}{4}\eta \; a \,(T_{13} + T_{31}) = \frac{d\sigma_I}{d\Omega_6^*} \;\hat{=}$$

Interferenz zwischen lin.pol. transvers. und longitudinalen Photonen ($\sim \sin\theta^*$)

$q^2 \to 0 \;\hat{=}\; d\sigma_I \to 0$

---

*) $\sigma_{\gamma pol}$ ist der Wirkungsquerschnitt für Photoproduktion mit reellen, linear polarisierten Photonen. Messungen von $\sigma_{\gamma pol}$ wurden in Stanford (17) und Frascati (18) vorgenommen.

4. Wirkungsquerschnitt für den Nachweis des gestreuten Elektrons allein

4.1 Vergleich der Notationen

Weist man nur das gestreute Elektron nach, so entspricht das einer Integration der Gl. (3.23) über den Phasenraum $d\Omega_6^* = d\phi d \cos \theta^*$. Wegen $\int_0^{2\pi} \cos\phi d\phi = 0$ gilt somit in der Notierung von Hand (5)

$$\boxed{\frac{d^3\sigma}{dE_4 \; d\Omega_4} \equiv \sigma_3 = \Gamma_t \int \frac{d\sigma_v}{d\Omega_6^*} \; d\Omega_6^* = \Gamma_t \; (\sigma_t + \varepsilon\sigma_1)} \qquad (4.1)$$

mit

$$\sigma_t \equiv \int \frac{d\sigma_t}{d\Omega^*} \; d\Omega^* = \frac{\eta}{4} \int (T_{11} + T_{22}) d\Omega^*$$

und

$$\sigma_1 \equiv \int \frac{d\sigma_1}{d\Omega} \; d\Omega^* = \frac{-q^2}{q_o^{*2}} \frac{\eta}{2} \int T_{33} d\Omega^* \equiv a^2 \sigma_1' \qquad (4.2)$$

Die Photonenergie q_o^* hat (s.Gl.(2.5)) im CMS bei $W^2 = M^2 - (-q^2)$ den Wert Null.

Will man erreichen, daß der longitudinale Wirkungsquerschnitt für $q^2 = 0$ endlich bleibt, so spaltet man den kinematischen Faktor a^2 ab und definiert:

$$\sigma_\ell' \equiv \frac{1}{a^2} \sigma_\ell \qquad (4.3)$$

σ_ℓ' muß dann jedoch für $q_o = 0$ ebenfalls verschwinden, damit der longitudinale Anteil in σ_3 eine stetige Funktion ist.
Stellt man T_{33} durch skalare Multipolamplituden dar, so spaltet sich ein Faktor $\omega' \equiv q_o^*/|\vec{q}^*|$ ab (vgl. Gl. (6.9)'). Daraus wird ersichtlich, daß T_{33} das geforderte Verhalten zeigt, und damit ist σ_ℓ unabhängig von q_o^*.

σ_t ist der Wirkungsquerschnitt für Photoproduktion mit transversalen Photonen, er geht für $q^2 \to 0$ in den totalen Photoabsorptionsquerschnitt für normale Photoproduktion über.

Statt dieser Schreibweise, die den Zusammenhang der inelastischen e-p-Streuung mit der Photoproduktion deutlich macht, verwenden viele Autoren eine andere Notierung, die die Verwandschaft mit der elastischen Streuung verdeutlichen soll.

So führen z.B. Bjorken und Walecka(6) zwei Größen W_1 und W_2 ein, die mit σ_t, σ_l in folgendem Zusammenhang stehen:

$$\boxed{\begin{aligned} W_1 &= \frac{KM}{4\pi^2\alpha}\,\sigma_t \\ W_2 &= \frac{-q^2}{|\vec{q}|^2}\cdot\frac{KM}{4\pi^2\alpha}\cdot(\sigma_t+\sigma_l) \end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned} \sigma_t &= \frac{4\pi^2\alpha}{KM}\,W_1 \\ \sigma_l &= \frac{4\pi^2\alpha}{KM}\left(\frac{|\vec{q}|^2}{-q^2}\,W_2 - W_1\right) \end{aligned}} \tag{4.3}$$

Damit schreibt sich Gl. (4.1) als

$$\boxed{\frac{d^3\sigma}{dE_4\,d\Omega_4} = \frac{4\alpha^2}{q^4}\,\frac{E_4^2}{M}\,\cos^2\vartheta/2\left[W_2(q^2,W^2)+2W_1(q^2,W^2)\,\mathrm{tg}^2\vartheta/2\right]} \tag{4.3.1}$$

Eine etwas abweichende Nomenklatur findet sich bei Lynch(7) (G_M^* und G_E^*) und Dufner-Tsai(8) (G_1, G_2):

$$\boxed{\begin{aligned} |G_M^*|^2 &= \frac{W_1}{M} = \frac{K}{4\pi^2\alpha}\,\sigma_t \;;\quad G_i = \frac{W_i}{M} \\ |G_E^*|^2 &= \frac{|\vec{q}|^2}{-q^2}\,\frac{W_2}{M} - \frac{W_1}{M} = \frac{K}{4\pi^2\alpha}\,\sigma_l \end{aligned}} \tag{4.4}$$

eine weitere bei Gourdin(9), der schreibt

$$\boxed{\frac{d^3\sigma}{dE_4\,d\Omega_4} = \frac{4\alpha^2 M}{(2\pi)^3}\,\frac{E_4^2}{q^4}\,\cos^2\vartheta/2\left[V_o(q^2,W^2) + V_1(q^2,W^2)\,\mathrm{tg}^2\vartheta/2\right]} \tag{4.3.2}$$

Damit ist der Zusammenhang gegeben:

$$\boxed{\begin{array}{l|l} V_o = \frac{(2\pi)^3}{M^2} \cdot W_2 = \frac{2\pi}{\alpha} \frac{K}{M} \frac{-q^2}{|\vec{q}|^2} (\sigma_t + \sigma_l); & \sigma_t = \frac{\alpha}{4\pi} \frac{M}{K} V_1 \\ V_1 = 2 \frac{(2\pi)^3}{M^2} \cdot W_1 = \frac{4\pi}{\alpha} \frac{K}{M} \cdot \sigma_t & \sigma_l = \frac{\alpha}{4\pi} \frac{M}{K} \left(\frac{2|\vec{q}|^2}{-q^2} V_o - V_1 \right) \end{array}} \quad (4.5)$$

oder in einer anderen, oft zitierten Arbeiten (10)

$$\boxed{\frac{d^3\sigma}{dE_4 d\Omega_4} = \frac{\alpha}{(2\pi)^3} M \frac{E_4^2}{q^4} \cos^2 \vartheta/2 \cdot \frac{|\vec{p}_6^{\,*}|}{W} \left[\tilde{V}_1(q^2,W^2) + 2\tilde{V}_o(q^2,W^2) \operatorname{tg}^2 \frac{\vartheta}{2} \right]} \quad (4.3.3)$$

Hierin sind folgende Definitionen verwandt:

$$\boxed{\begin{array}{l|l} \tilde{V}_o = 2\alpha \frac{W}{|\vec{p}_6^{\,*}|} V_1 = 8\pi \frac{WK}{M|\vec{p}_6^{\,*}|} \cdot \sigma_t ; & \sigma_t = \frac{M|\vec{p}_6^{\,*}|}{WK\ 8\pi} \tilde{V}_o \\ \tilde{V}_1 = 4\alpha \frac{W}{|\vec{p}_6^{\,*}|} V_o = 8\pi \frac{WK}{M|\vec{p}_6^{\,*}|} \cdot \frac{-q^2}{|\vec{q}|^2} (\sigma_t + \sigma_l); & \sigma_l = \frac{1}{8\pi} \frac{M|\vec{p}_6^{\,*}|}{WK} \left[\frac{|\vec{q}|^2}{-q^2} \tilde{V}_1 - \tilde{V}_o \right] \end{array}} \quad (4.6)$$

$$\frac{|\vec{p}_6^{\,*}|}{W} \cdot \frac{M^2}{4\alpha(2\pi)^3} \cdot \tilde{V}_{o,1} \leftrightarrow W_{1,2} \quad (4.7)$$

Die Formeln (4.3) bis (4.3.3) sind ähnlich aufgebaut wie die Rosenbluth-Formel für die elast. Streuung. Insbesondere sind σ_t und σ_l prinzipiell in gleicher Weise meßbar wie G_E und G_M im elast. Fall ("Rosenbluthgerade"). D.h., die beiden "Formfaktoren" $\sigma_t(q^2,W)$ und $\sigma_l(q^2,W)$ lassen sich im Prinzip dadurch bestimmen, daß man bei festem q^2 und festen W Wirkungsquerschnittmessungen unter mehreren verschiedenen Streuwinkeln ϑ bzw. mit verschiedenen Werten ε durchführt.

Die verschiedenen Notationen sind in der Tab. I noch einmal zusammengestellt. (s. Schluß des Berichtes)

---

*) Anm. In Ref. (9) Gl. (16) sind zwei Druckfehler, und zwar steht

1) $\cos\vartheta/2$ statt $\cos^2\vartheta/2$

2) $\left[V_1 + 2\ \mathrm{tg}^2\vartheta/2 \cdot V_o \cdot \frac{K_B}{W}\right]$ statt $\left[V_1 + 2\ \mathrm{tg}^2\vartheta/2 \cdot V_o\right] \cdot \frac{K_B}{W}$

$\left(K_B \equiv |\vec{p}_6^{\,*}| \right)$

4.2 Einfachere Herleitung für den integrierten Wirkungsquerschnitt

Die im vorigen Abschnitt angegebenen Ausdrücke für den Wirkungsquerschnitt sind ohne den Umweg über den Koinzidenzquerschnitt leicht herzuleiten. Beobachtet man nur das Elektron im Endzustand, so kann man das Integral über den Phasenraum der hadronischen Teilchen in die Definition des Stromtensors $T_{\mu\nu}$ einbeziehen. So machen beispielsweise Bjorken und Walecka(6) anstelle unserer Gl. (3.1) folgenden Ansatz:

$$d\sigma\Big|_{L.S.} = \frac{1}{4E_1 M} \; \overline{|M'_{fi}|}^2 \cdot \frac{d^3p_4}{2\,p_4^o} \quad \text{mit} \quad \overline{|M'_{fi}|}^2 = \frac{\alpha^2}{q^4} L_{\mu\nu} W_{\mu\nu} \; ; \qquad (4.8)$$

somit entsprechen sich in den beiden Ansätzen (4.8) und (3.1):

$$e^2 \; L_{\mu\nu} \; W_{\mu\nu} \longleftrightarrow \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\vec{p}_5}{2\,p_5^o} \; \frac{d^3\vec{p}_6}{2\,p_6^o} \; \delta^4(p_5+p_6-p_2-q) \cdot L_{\mu\nu} \; T_{\mu\nu}.$$

Der Stromtensor ist in jedem Fall aufzubauen aus den n am hadronischen Vertex angreifenden Vierervektoren, von denen jedoch wegen Energie-Impulserhaltung nur n-1 linear unabhängig sind. Bei der Konstruktion von $W_{\mu\nu}$ ist zu beachten, daß folgende Forderungen zu erfüllen sind:

1) Lorentz-Invarianz: $W_{\mu\nu}$ muß ein Tensor 2ter Stufe sein, da der Stromoperator ein Vierervektor ist,

2) Paritätserhaltung: Da der Stromoperator sich gegenüber Raumspiegelungen wie ein Polarvektor verhält, können keine Glieder $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\, p_\rho q_\sigma$ auftreten,

3) Eichinvarianz: Der Stromoperator muß der Kontinuitätsgleichung genügen.

Die Koeffizienten in der Darstellung von $T_{\mu\nu}$ bzw. $W_{\mu\nu}$ als Summe von Lorentzkovarianten sind die sogenannten Formfaktoren. Sie sind Funktionen der Skalare, die sich aus den n-1 Vierervektoren bilden lassen. In unserem Spezialfall (n = 3) findet man damit den allgemeinsten Ansatz als(11):

$$W_{\mu\nu} = W_{\mu\nu} \;\; (q, p_2 \equiv p, \cancel{p_3}): \text{ Skalare } q^2 \text{ und } q \cdot p$$

$$W_{\mu\nu} = A(q^2, p\cdot q)\, g_{\mu\nu} + B(\cdots)\, q_\mu \cdot q_\nu + C(\cdots)\, p_\mu \cdot p_\nu \qquad (4.9)$$

$$+ D(\cdots)(q_\mu p_\nu + q_\nu p_\mu) + E(\cdots)(q_\mu p_\nu - q_\nu p_\mu)$$

Das Glied mit E entfällt beim "Überschieben" mit $L_{\mu\nu}$ wegen $L_{\mu\nu} = L_{\nu\mu}$. Außerdem folgt aus der Stromerhaltung $q^{\mu} W_{\mu\nu} = 0$, daß die Koeffizientenfunktionen A bis D nicht linear unabhängig sind:

$$q^{\mu} W_{\mu\nu} = (M^2 A - (-q^2) B + pq\, D)\, q_{\nu} + (pq\, C - (-q^2) D)\, p_{\nu} = 0$$

d.h.
$$D = \frac{pq}{-q^2}\, C \qquad (4.10)$$

$$B = \frac{1}{-q^2} \left(M^2 A + \frac{(pq)^2}{-q^2}\, C \right)$$

Damit läßt sich $W_{\mu\nu}$ in der symmetrischen Form schreiben:

$$W_{\mu\nu} = M^2 A \left(g_{\mu\nu} + \frac{1}{-q^2}\, q_{\mu} q_{\nu} \right) + C \left(p_{\mu} + \frac{pq}{-q^2}\, q_{\mu} \right) \left(p_{\nu} + \frac{pq}{-q^2}\, q_{\nu} \right) \qquad (4.11)$$

Mit $M^2 A \equiv - W_1$ und $M^2 C \equiv W_2$ ist das der von Bjorken-Walecka verwandte Ansatz.

Aus (3.8) und (4.11) folgt nach Ersetzung von q_{μ} durch $(p_1 - p_4)_{\mu}$

$$L^{\mu\nu} W_{\mu\nu} = 2M^2 A \left\{ (p_1 p_4) + q^2 \right\} + 2C \left\{ (p_1 p_2)(p_2 p_4) + M^2 \frac{q^2}{4} \right\} \qquad (4.12)$$

$$\equiv A \cdot \alpha + C \cdot \beta$$

Für relativistische Elektronen folgt:

$$\left. \begin{aligned} \beta &= - \frac{M^2}{2}\, q^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\vartheta}{2} \\ \alpha &= M^2 q^2 \end{aligned} \right\} \quad \frac{\beta}{\alpha} = - 2 \operatorname{tg}^2 \frac{\vartheta}{2} \qquad (4.13)$$

Setzt man diese Beziehungen in (4.8) ein, so erhält man (mit (3.2) für den Phasenraum des Elektrons) die als Gl. (4.3.1) angegebene Formel.

4.3 Vergleich mit der elastischen Streuung

Betrachtet man das Isobar als Endzustand, so spaltet man zweckmäßigerweise in (4.9) dessen Phasenraum als Faktor ab, indem man setzt:

$$\frac{1}{M^2} W_{\mu\nu} = \frac{d^3\vec{p}_3}{p_3^o} \; \delta^4 \; (p_2 - p_3 + q) \cdot \widetilde{T}_{\mu\nu} \,, \tag{4.14}$$

wobei $\widetilde{T}_{\mu\nu}$ dem gleichen allgemeinen Ansatz genügt wie $W_{\mu\nu}$.

Das Integral über den Phasenraum des Isobars und die Energie des Elektrons,

$$R \equiv \int |\vec{p}_4| \, dE_4 \cdot \frac{d^3\vec{p}_3}{2 \; p_3^o} \quad \delta^4 \; (p_2 - p_3 + q) \tag{4.15}$$

führt auf den sogenannten Rückstoßfaktor. Über die Beziehung (3.3) findet man

$$R \equiv \int \delta^4 \; (p_2 - p_3 + q) \; \delta \, ({p_3}^2 - W^2) |\vec{p}_4| \; dE_4 \; d^4 p_3$$

Wegen $\delta^4(\dots)$ läßt sich die Integration über p_3 sofort ausführen, so daß

$$R = \int |\vec{p}_4| \quad dE_4 \; \delta({p_3}^2 - W^2)$$

$$= \; |\vec{p}_4| \left| \frac{\delta \; E_4}{\delta {p_3}^2} \right| \underbrace{\int d{p_3}^2 \; \delta({p_3}^2 - W^2)}_{= \; 1.}$$

Aus ${p_3}^2 = (q + p_2)^2 = - 4E_1E_4 \sin^2\vartheta/2 + 2M(E_1 - E_4) + M^2$

folgt $\left| \dfrac{\delta {p_3}^2}{\delta E_4} \right| \; = \; 2M(1 + \dfrac{2E_1}{M} \sin^2\vartheta/2)$

Und damit für relativistische Elektronen:

$$R = \frac{E_4}{2M(1 + (2E_1/M)\sin^2\vartheta/2)} \tag{4.16}$$

Der Ausdruck für den einfach differentiellen Wirkungsquerschnitt lautet dann:

$$\boxed{\left. \frac{d\sigma}{d\Omega_4} \right|_{L.S.} = \frac{4\alpha^2}{q^4} \cdot \frac{{E_4}^2 \; \cos^2\vartheta/2}{(1 + (2E_1/M)\sin^2\vartheta/2)} \left\{ T_2 + 2 \cdot T_1 \; tg^2\vartheta/2 \right\}} \tag{4.17}$$

Eine Analyse der Vertexfunktion nach Helizitätsamplituden, die hier übergangen werden soll (vgl. dazu Ref. 6) ergibt die Substitution:

$$T_1 \equiv \frac{1}{2}\frac{W^2}{M^2}\left(|f+|^2 + |f-|^2\right) \equiv \frac{1}{2}\frac{W^2}{M^2}|f_t|^2$$

$$T_2 \equiv \frac{1}{2}\frac{-q^2}{|\vec{q}^{\,*}|^2}\left(|f_t|^2 + 2\frac{-q^2}{|\vec{q}^{\,*}|^2}|f_c|^2\right) \tag{4.18}$$

Damit erhalten wir unter Berücksichtigung von (2.6) die von Bjorken-Walecka[6] angegebene Formel für den Wirkungsquerschnitt

$$\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{L.S.} = \frac{\alpha^2\cos^2\vartheta/2}{4E_1^{\,2}\sin^4\vartheta/2\left(1+\frac{2E_1\sin^2\vartheta/2}{M}\right)}\left[\frac{q^4}{|\vec{q}^{\,*}|^4}|f_c|^2 + \left(\frac{-q^2}{2|\vec{q}^{\,*}|^2} + \frac{W^2}{M^2}\cdot tg^2\vartheta/2\right)\cdot|f_t|^2\right] \tag{4.19}$$

Der Zusammenhang zwischen den in Gl. (4.1) eingeführten σ_t, σ_ℓ mit den T_i bzw. $|f|^2$ ist gegeben durch die folgenden Beziehungen:

$$\int\sigma_t|\vec{p}_4|dE_4 = \frac{4\pi^2\alpha E_4}{K\left(1+\frac{2E_1}{M}\sin^2\vartheta/2\right)}\cdot T_1 = \frac{8\pi^2\alpha M\ R}{K}\cdot T_1$$

$$\int\sigma_\ell|\vec{p}_4|dE_4 = \frac{4\pi^2\alpha E_4}{K\left(1+\frac{2E_1}{M}\sin^2\vartheta/2\right)}\left[\frac{|\vec{q}|^2}{-q^2}T_2 - T_1\right] = \frac{8\pi^2\alpha M\ R}{K}\left(\frac{|\vec{q}|^2}{-q^2}T_2 - T_1\right)$$

bzw.

$$|f_t|^2 = \frac{KM}{4\pi^2\alpha\ RW^2}\int\sigma_t|\vec{p}_4|dE_4 = \frac{2M^2}{W^2}\cdot T_1$$

$$|f_c|^2 = \frac{KM}{4\pi^2\alpha\ RW^2}\cdot\frac{|\vec{q}^{\,*}|^2}{2(-q^2)}\int\sigma_\ell|\vec{p}_4|dE_4 = $$

$$= \frac{M^2}{W^2}\frac{|\vec{q}^{\,*}|^2}{(-q^2)}\left[\frac{|\vec{q}|^2}{-q^2}T_2 - T_1\right]$$

Gl. (4.19) ist direkt mit dem elastischen W.Qu. ($W = M$) zu vergleichen.

Für $W \to M$

gilt $|\vec{q}^*|^2 \to q^2 (1 + \tau)$ mit $\tau \equiv \dfrac{-q^2}{4M^2}$

$$\frac{q^2}{|\vec{q}^*|^2} \to \frac{1}{1+\tau}$$

also $$\left[T_2 + 2\,tg^2\vartheta/2 \cdot T_1\right] \to \frac{|f_c|^2}{(1+\tau)^2} + \left(\frac{1}{2(1+\tau)} + tg^2\vartheta/2\right)|f_t|^2 \qquad (4.20)$$

Im elastischen Fall gilt nach (2.9) wegen $K = 0$ für die Energie des gestreuten Elektrons

$$(E_4)_{elast.} = \frac{E_1}{1 + \frac{2E_1}{M} \sin^2\vartheta/2} \qquad (4.21)$$

Substituiert man

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{NS} \equiv \frac{\alpha^2}{-q^2}\; ctg^2\vartheta/2 \cdot \left(\frac{E_4}{E_1}\right)^2 \qquad (4.22)$$

sowie $\dfrac{|f_c|^2}{1+\tau} \to G_E^2$ und $\dfrac{|f_t|^2}{2\tau} \to G_M^2$ (4.23)

so findet man für (4.19) die bekannte Rosenbluthformel

$$\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{L.S.}^{elast.} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{NS} \left[\frac{G_E^2 + \tau G_M^2}{1+\tau} + 2\tau\, G_M^2\, tg^2\vartheta/2\right] \qquad (4.24)$$

$$= \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{NS} \cdot \frac{1}{1+\tau}\,\frac{1}{\varepsilon} \left[\tau\, G_M^2 + \varepsilon G_E^2\right] \qquad (4.25)$$

Somit ist in Analogie zu setzen:

$$\boxed{\begin{aligned} T_1 &\mathrel{\hat{=}} F_1^2 + \tau\kappa^2 F_2^2 \equiv \frac{G_E^2 + \tau G_M^2}{1+\tau} \\ T_2 &\mathrel{\hat{=}} \tau(F_1 + \kappa F_2)^2 \equiv \tau\, G_M^2 \end{aligned}} \tag{4.26}$$

5. Die Bedeutung des Parameters ε.

Die durch Gl. (2.7) definierte Größe ε wird als Grad der transversalen Polarisation der virtuellen Photonen bezeichnet. Die Begründung dafür wurde bereits in einem Seminarvortrag gegeben(13). Es soll deshalb hier nur das Wichtigste wiederholt werden.

In Gl. (3.6) war der el. mg. Viererstrom des Elektrons ε_μ eingeführt worden. Dieser Strom genügt der Gleichung

$$\Box A_\mu(x) = + \varepsilon_\mu(x), \tag{5.1}$$

wenn A_μ das vierdimensionale Vektorpotential des Photonenfeldes darstellt. Im Impulsraum schreiben sich $A_\mu(x)$ und $\varepsilon_\mu(x)$:

$$A_\mu(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int A_\mu(q)\, e^{-iqx} d^4q \tag{5.2}$$

$$\varepsilon_\mu(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \varepsilon_\mu(q)\, e^{-iqx} d^4q \tag{5.3}$$

und damit folgt aus (5.1):

$$\boxed{+\ A_\mu(q^2) = \frac{1}{-q^2} \quad \varepsilon_\mu(q)} \tag{5.4}$$

Der transversale Polarisationsgrad des Photonenstroms wird definiert über die Intensitäten $|A_x|^2$ und $|A_y|^2$ des Feldes in x- bzw. y-Richtung als

$$P_t \equiv \frac{|A_x|^2 - |A_y|^2}{|A_x|^2 + |A_y|^2} = \frac{A_1A_1^* - A_2A_2^*}{A_1A_1^* + A_2A_2^*} \tag{5.5}$$

Dabei ist angenommen, daß die Richtung $\vec{q}$ des Photonstrahls in 3-Richtung weist.
Der longitudinale Polarisationsgrad ist entsprechend

$$P_\ell = \frac{|A_z|^2}{|A_x|^2 + |A_y|^2} \tag{5.6}$$

Da über die Spins der Elektronen zu mitteln bzw. zu summieren ist, gilt nach (3.6) und (5.4):

$$A_iA_j^* = \frac{1}{q^4} \sum_{\text{Spin}} (\bar{u}(p')\gamma_i \; u(p))(\bar{u}(p')\gamma_j \; u(p))^* = \frac{1}{q^4} L_{ij} \tag{5.7}$$

Unter Verwendung der Gleichungen (3.15, $\phi = 0^\circ$) findet man dann

$$\boxed{P_t = \frac{L_{11} - L_{22}}{L_{11} + L_{22}} = \varepsilon} \quad \left(\text{bzw.} \quad P_\ell = \frac{L_{33}}{L_{11} + L_{22}} \right)_{\text{s.u.}} \tag{5.8}$$

L_{33} ist abhängig vom Lorentzsystem, demzufolge ist P_ℓ eine vom System abhängige Größe. Im (πN)CMS gilt wegen der Stromerhaltung, daß die 3-Komponente proportional der Zeitkomponente ist, wegen $L_{\mu\nu} = L_{\nu\mu}$ also, mit $\boxed{b \equiv |\vec{q}^*|/q_o^*}$,
$T^c_{03} = T^c_{30} = bT^c_{33} = 1/b\ T^c_{00}$, analog für $L^c_{\mu 3} = L^c_{3\mu}$.

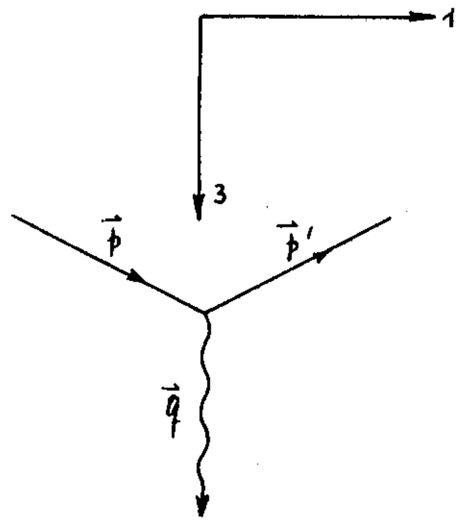
Damit lassen sich die 0- und 3-Glieder in $L_{\mu\nu}\ T^{\mu\nu}$ zusammenfassen zu

$$L^c_{33}\ T^{33}_c - L^c_{03}\ T^{03}_c - L^c_{30}\ T^{30}_c + L^c_{00}\ T^{00}_c = (1-b^2)^2 L^c_{33}\ T^{33}_c.$$

Um also die 0-Komponente mitzuerfassen, haben wir statt (5.8) zu setzen*)

$$\boxed{P_\ell = \frac{(1-b^2)^2 L_{33}^c}{L_{11} + L_{22}}}_{(\pi N)CMS} \qquad (5.9)$$

Für relativistische Elektronen ist
$-q^2 = 2pp'$.
Legen wir das Koordinatensystem so, daß $\vec{p}$ und $\vec{p}\,'$ die 1,3-Ebene aufspannen, und daß $\vec{q}$ in die 3-Richtung zeigt, so folgt



$$q \cdot p = q_o p_o - |\vec{q}| p_3$$

$$q \cdot p = q_o p_o' - |\vec{q}| p_3'$$

Damit läßt sich $p_3 p_3'$ durch die Komponenten von q^2 ausdrücken, und man findet

$$L_{33}^c = - \frac{q^2}{q_o^{*2}} (L_{11} - L_{22}), \text{ damit}$$

$$\boxed{P_\ell = \frac{-q^2}{q_o^{*2}} \cdot P_t} \quad . \qquad (5.10)$$

Reelle Photonen:

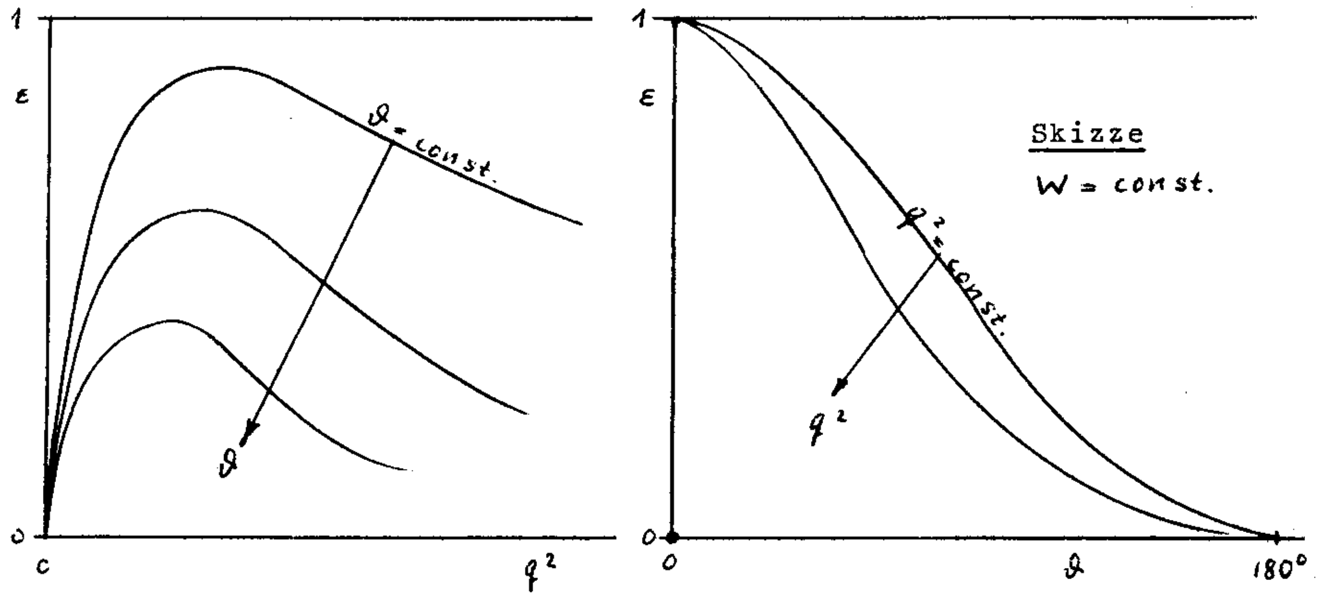
Im Fall reeller Photonen findet Gl. (5.5) eine unmittelbar anschauliche Interpretation, und zwar sind $|A_x|^2$ und $|A_y|^2$ die relativen Intensitäten, die man hinter einem Polarisationsfilter an einem elliptisch polarisierten Strahl mißt, wenn das Filter in x- bzw. y-Richtung gedreht ist.

*) Die Einbeziehung der 0-Komponente in die 3-Komponente ist deshalb geboten, weil das virtuelle Photon nur drei Freiheitsgrade besitzt.

$\varepsilon = 1$ entspricht dann vollständiger Polarisation des Strahls in x-Richtung. Im Falle reeller Photonen kann man eine spezielle Eichung (Coulomb-Eichung) so wählen, daß $A_o = 0$ ist; damit folgt aus der Kontinuitätsgleichung die Transversalitätsbedingung $\vec{A} \cdot \vec{q} = 0$, d.h. der Polarisationsvektor steht senkrecht zum Impuls des Photons. Das ist für virtuelle Photonen nicht mehr erfüllt, da diese auch eine longitudinale Komponente haben können.

Aus Gl. (2.7) folgt für $\vartheta \to 0$ und $q^2 \to 0$, d.h. für den Fall reeller γ-Quanten, $\varepsilon \to 1$. Das ist zwar im Grenzwert beliebig kleiner Streuwinkel richtig, Gl. (2.7) verliert jedoch ihre Gültigkeit für den Fall $\vartheta = 0$, in dem $\varepsilon = 0$ gelten muß, d.h. die Funktion ist hier nicht stetig. (Tatsächlich stellt sie eine Näherungsformel dar für vernachlässigbare Elektronenmasse.)

Die folgenden Skizzen zeigen einige charakteristische funktionale Abhängigkeiten. Die Figuren 2,3 und 4 am Schluß des Berichtes geben den ε-Verlauf als Funktion der Primärenergie für vorgegebene Massen W = 1236, 1688 und 938 wieder mit q^2 bzw. ϑ als Kurvenparameter.



6. Multipolentwicklung des Matrixelementes

Die in Gl. (3.22) auftretenden Tensorkomponenten $T_{ij} \equiv \Sigma J_i J_j^*$ enthalten das Strommatrixelement des (πN)-Übergangsstromes j. Die Größen J_i sind definiert als Matrixelemente von j_i zwischen durch ebene Wellen charakterisierten Zuständen

$$J_i \equiv \langle 5,6 \, | j_i | \, 2 \rangle \quad ; \quad i = 1,2,3.$$

Zum Studium von (πN)-Resonanzen ist es zweckmäßig, eine Zerlegung nach Multipolamplituden vorzunehmen. Es sei daran erinnert, daß sich jede elektromagnetische Strahlung als Überlagerung von Multipolstrahlungen verschiedenster Ordnungen ℓ auffassen läßt, wobei ℓ der Bahndrehimpuls des jeweiligen Photons ist. Zu jeder Multipolstrahlung der Ordnung ℓ gehören zwei "Strahlungstypen", die sich bezüglich der Spiegelungseigenschaften (Parität) des Strahlungsfeldes unterscheiden, und zwar bezeichnet man die durch die absorbierte γ-Strahlung angeregten Multipolübergänge als magnetisch oder elektrisch, je nach dem, ob der von den Photonen übertragene Drehimpuls ℓ_γ mit dem Bahndrehimpuls ℓ des (πN)-Systems durch $\ell = \ell_\gamma$ oder $\ell = \ell_\gamma \pm 1$ verknüpft ist.

In der Sprache der Kernphysik bezieht man sich durchweg auf den Drehimpuls des Photons ℓ_γ. Damit überträgt ein 2^{ℓ_γ}-Pol den Drehimpuls ℓ_γ; bewirkt er eine Paritätsänderung von $(-1)^{\ell_\gamma}$, so heißt er "elektrisch", ist die bewirkte Paritätsänderung $(-1)^{\ell_\gamma+1}$, so heißt er "magnetisch"(14).

Demgegenüber ist es in der Hochenergiephysik üblich, die Multipolamplituden mit dem Bahndrehimpuls ℓ des (πN)-Systems zu indizieren. In dieser Sprache führen $M_{\ell\pm}$ und $E_{\ell\pm}$ zu einem Endzustand mit dem Bahndrehimpuls ℓ und dem Gesamtdrehimpuls $J = \ell \pm 1/2$.

In Ref. (12) ist eine tabellarische Gegenüberstellung der niedrigsten Multipolamplituden in den beiden Schreibweisen gegeben.

Im Fall der Resonanzanregung bzw. Isobarerzeugung wissen wir, daß die Dynamik durch eine Anzahl Formfaktoren charakterisiert wird. Die Multipolamplituden können als solche Formfaktoren interpretiert werden, und es wird bei der Messung schließlich darauf ankommen, diese resonanten Multipolamplituden bzw. Formfaktoren zu isolieren und in ihrer q^2-Abhängigkeit zu untersuchen.

Man sucht also eine Entwicklung für die Komponenten des Strommatrixelements, in der die Multipolamplituden als Koeffizienten auftreten.

Um die Spinabhängigkeit transparent zu machen, schreibt man das Strommatrixelement im (πN)CMS:

$$\vec{J} = \chi^{+} \underline{\vec{F}} \chi \tag{6.1}$$

Hier sind χ Pauli- (nicht Dirac-) Spinoren.
Die allgemeinste Form für $\underline{\vec{F}}$ gewinnt man wieder nach den unter Abs. 4.2 skizzierten Gesichtspunkten, sie ist gegeben durch[3),(15),(16]:

$$\underline{\vec{F}} = \sum_{k=1}^{6} F_k \vec{C}_k \tag{6.2}$$

mit[3),(15]

$$\begin{aligned}
\vec{C}_1 &= i\vec{\sigma} \\
\vec{C}_2 &= (\vec{\sigma}\cdot\hat{\vec{k}})(\vec{\sigma} \times \hat{\vec{q}}) \\
\vec{C}_3 &= (i\vec{\sigma}\cdot\hat{\vec{q}})\,\hat{\vec{k}} \\
\vec{C}_4 &= (i\vec{\sigma}\cdot\hat{\vec{k}})\,\hat{\vec{k}} \\
\vec{C}_5 &= (i\vec{\sigma}\cdot\hat{\vec{q}})\cdot\hat{\vec{q}} \\
\vec{C}_6 &= (i\vec{\sigma}\cdot\hat{\vec{k}})\cdot\hat{\vec{q}}
\end{aligned} \tag{6.3}$$

Die Vektorschreibweise $\vec{F}, \vec{C}_i$ steht symbolisch für die 3 Komponenten

$j = 1,2,3 : \underline{F}^j = \sum_{k=1}^{6} F_K C_k^j$

($\wedge \hat{=}$ Einheitsvektor)

Die Amplitudenfunktionen F_k lassen sich nun nach Legendrepolynomen derart entwickeln, daß die Entwicklungskoeffizienten gerade die Multipolamplituden sind.

Als Ergebnis findet man die Beziehung:

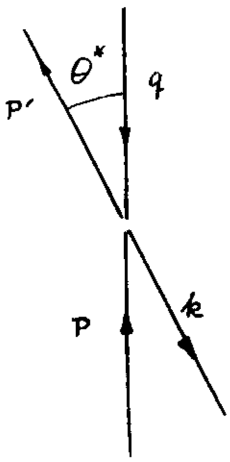
$$
\boxed{
\begin{aligned}
F_1 &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \left\{ (\ell M_{\ell+} + E_{\ell+})\, P'_{\ell+1}(x) + \big((\ell+1) M_{\ell-} + E_{\ell-}\big) P'_{\ell-1}(x) \right\} \\
F_2 &= \sum_{\ell=1} \left\{ (\ell+1)\, M_{\ell+} + \ell M_{\ell-} \right\} P'_{\ell}(x) \\
F_3 &= \sum_{\ell=1} \left\{ (E_{\ell+} - M_{\ell+})\, P''_{\ell+1}(x) + (E_{\ell-} + M_{\ell-})\, P''_{\ell-1}(x) \right\} \\
F_4 &= \sum_{\ell=1} (M_{\ell+} - E_{\ell+} - M_{\ell-} - E_{\ell-})\, P''_{\ell}(x) \\
F'_5 &= \sum_{\ell=0} \left\{ (\ell+1)\, L_{\ell+} P'_{\ell+1}(x) - \ell L_{\ell-} P'_{\ell-1}(x) \right\}; \qquad F'_5 \equiv F_5 + F_1 + x F_3 \\
F'_6 &= \sum_{\ell=0} (\ell L_{\ell-} - (\ell+1) L_{\ell+})\, P'_{\ell}(x); \qquad F'_6 \equiv F_6 + F_4 x;\; x = \cos\theta^*
\end{aligned}
}
\tag{6.4}
$$

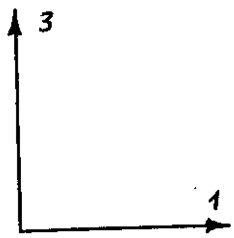
Die Mp.-Amplituden $M_{\ell\pm}$ usf. führen zu Endzuständen mit Drehimpuls ℓ und Gesamtdrehimpuls $\underline{J = \ell \pm 1/2}$

Für die Tensorkomponenten T^{ij} findet man im CMS:

$$
\begin{aligned}
T^{ij} &= \sum_{\text{Spin}} J^i J^{j*} = \Sigma(\chi' \underline{F}^i \chi)(\chi^\dagger \underline{F}^{j\dagger} \chi'^\dagger) \\
&= \mathrm{Spur}(\underline{F}^i\, \underline{F}^j)
\end{aligned}
\tag{6.5}
$$

Im (πN)CMS gilt





$$\hat{q} = (0, 0, -1)$$

$$\hat{k} = (\sin\theta^*, 0, -\cos\theta^*)$$

Damit errechnen sich die $T_{ij}\ (F_k,\ \theta^*)$ (+) zu

$$\frac{1}{2}\,T_{22} = |F_1|^2 - 2\,x\ \mathrm{Re}(F_1F_2{}^*) + |F_2|^2$$

$$\frac{1}{2}\,T_{11} = \frac{1}{2}\,T_{22} + \sin^2\theta^*\Big\{2\ \mathrm{Re}(F_1F_4{}^* + F_2F_3{}^*)+|F_3|^2+ 2\,x\cdot\mathrm{Re}(F_3F_4{}^*) + |F_4|^2\Big\}$$

$$\frac{1}{2}\,T_{33} = |F'_5|^2 + 2x\ \mathrm{Re}\ (F'_5\ F'^*_6) + |F'_6|^2$$

$$\frac{1}{2}(T_{13}+T_{31}) = -2\ \sin\theta^*\ \mathrm{Re}\Big\{F'_5(F_2+F_3+xF_4)^* + F'_6(F_1+xF_3+F_4)^*\Big\} \qquad (6.6)$$

6.1 Der Koinzidenzwirkungsquerschnitt in Multipoldarstellung

In dem Ausdruck (3.22) für die Winkelverteilung tauchen verschiedene Kombinationen von Tensorkomponenten auf, die wir als diff. Wirkungsquerschnitte für Photoproduktion mit virtuellen Photonen interpretiert hatten:

$$\frac{1}{\eta}\,\frac{d\sigma_t}{d\Omega_6^*} = \frac{1}{4}\,(T_{11} + T_{22})$$

$$\equiv A= |F_1|^2 + |F_2|^2 - 2x\ \mathrm{Re}\ F_1F_2^* + \frac{1}{4}\,(T_{11} - T_{22})$$

$$\frac{1}{\eta}\,\frac{d\sigma_\ell}{d\Omega_6^*} = \frac{a^2}{2}\,T_{33}$$

$$\equiv B= a^2\Big\{|F'_6|^2 + |F'_5|^2 + 2x\ \mathrm{Re}\ F'_5\ F'^*_6\Big\}$$

$$\frac{1}{\eta}\,\frac{d\sigma_p}{d\Omega_6^*} = \frac{1}{4}\,(T_{11} - T_{22})$$

$$\equiv \sin^2\theta^*_6\cdot C = \frac{1}{2}\,\sin^2\theta^*\Big\{|F_3|^2 + |F_4|^2 + 2\ \mathrm{Re}(F_2F_3{}^* + F_1F_4{}^* + x\,F_3F_4{}^*)\Big\}$$

(+) Beispiele zur Berechnung von $T_{ij}\ (F_K,\theta^*)$ und $T_{ij}\ (P_\ell(x),\ \Theta^*,$ MP-Ampl.) finden sich im Anhang von Ref. (12)

$$\frac{1}{\eta}\frac{d\sigma_I}{d\Omega_6^*} = \frac{a}{4}\left(T_{13} + T_{31}\right) \tag{6.7}$$

$$\equiv \sin\theta_6^* \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot D = -4\, a \sin\theta^* \Big\{ Re(F_1+F_4+xF_3)F_6'^* + Re(F_2+F_3+xF_4) \cdot F_5'^* \Big\}$$

Mit diesen Abkürzungen A...D läßt sich der Wirkungsquerschnitt für Photoproduktion mit virtuellen Photonen folgendermaßen schreiben:

$$\boxed{\frac{d\sigma_V}{d\Omega_6^*} = \eta\left\{A + \varepsilon B + \varepsilon C \sin^2\theta_6^* \cos 2\phi + \sqrt{\varepsilon(1+\varepsilon)} \cdot D \cdot \sin\theta_6^* \cos\phi\right\}} \tag{6.8}$$

Die A...D lassen sich mit Hilfe von (6.7) und (6.4) durch Multipolamplituden ausdrücken. Die spezielle Form ist abhängig vom betrachteten Endzustand.

Betrachtet man einen durch Gesamtdrehimpuls J und Parität Π charakterisierten Endzustand, der durch die virtuellen Photonen erzeugt wird, so hat man zunächst die Größe des Bahndrehimpulses ℓ_π des Endzustandes festzustellen. Handelt es sich um einen

<u>"Normalen" Übergang:</u> $\ell_\gamma + 1/2 \rightarrow J = 3/2^-, 5/2^+, 7/2^- \ldots$

so ist $\ell_\pi = \ell_\gamma + 1 \rightarrow J = \ell_\pi \ominus 1/2 \quad ; \Pi = (-1)^{\ell_\pi + 1}$

Lediglich die Multipolamplituden $M_{\ell-}$, $E_{\ell-}$, $L_{\ell-}$ mit $\ell = \ell_\pi$ tragen zu dem betrachteten Endzustand bei, alle anderen sind in Gl. (6.4) zu vernachlässigen.

Wird dagegen der Endzustand über einen

$$\boxed{\begin{array}{l}\underline{\text{"anomalen" Übergang}}:\ \ell_\gamma + 1/2 \rightarrow J = 3/2^+,\ 5/2^-,\ 7/2^+,\ldots \\ \text{erreicht, so ist } \ell_\pi = \ell_\gamma \quad J = \ell_\pi \oplus 1/2 \quad ; \quad \Pi = (-1)^{\ell_\pi + 1}\end{array}}$$

und die MP.-Amplituden $M_{\ell+}$ usf. mit $\ell = \ell_\pi$ tragen bei.

Beispiel: Für die 1. Resonanz $\Delta(1236,\ 3/2,+)$ ist

$$\ell_\gamma + 1/2 \rightarrow J = 3/2^+ \qquad \ell_\gamma = 1$$

$$\Pi = (-1)^{\ell_\pi + 1} = +1 \qquad \ell_\pi = 1 \qquad \ell_\gamma = \ell_\pi$$

MP.-Amplituden: $M1_+$, $E1_+$, $L1_+$.

(in kernphysikalischer Schreibweise: $M1_+$, $E2_-$, $L2_-$, zum Vergleich der beiden Notationen s. Ref. (12) pag.2.u.3)

Wir wollen die folgenden Amplituden in Betracht ziehen:

J^P	Symbol	$\begin{bmatrix}E\\M\\L\end{bmatrix} \ell_\gamma$	Amplitude	ℓ_π
$\frac{1}{2}^-$	S_{11}	E1 L1	$E0_+$ $L0_+$	0
$\frac{1}{2}^+$	P_{11}	L0 M1	$L1_-$ $M1_-$	1
$\frac{3}{2}^+$	P_{33}	M1 E2 L2	$M1_+$ $E1_+$ $L1_+$	1
$\frac{3}{2}^-$	d_{13}	E1 L1 M2	$E2_-$ $L2_-$ $M2_-$	2

Dann erhalten wir aus Gl. (6.4) folgende Ausdrücke für die F_k:

$$\boxed{\begin{aligned}
F_1 &= E0_+ + 3x\,(M1_+ + E1_+) + E2_- + 3\cdot M2_- \\
F_2 &= M1_- + 2M1_+ \qquad + 6x\,M2_- \\
F_3 &= 3(E1_+ - M1_+) \\
F_4 &= -3(E2_- + M2_-) \\
F_5' &= L0_+ + 6x\cdot L1_+ - 2\cdot L2_- \\
F_6' &= L1_- - 2\cdot L1_+ + 6x\cdot L2_-
\end{aligned}} \qquad (6.9)$$

Vergleich mit Zagury[16]

Unsere Nomenklatur ist nicht die einzig mögliche. Eine oft zitierte Arbeit ist die von N. Zagury[16], dessen Notierung wir hier im Vergleich zu der unsrigen betrachten wollen. Geht man davon aus, daß sich in Ref. (16) folgende Druckfehler finden, daß nämlich

in (3.1) W_4 durch εW_4 und in
(3.6)u.(3.7) k^2 durch k_o^2 zu ersetzen ist, so findet man

folgende Entsprechungen:

$$A = \omega \cdot W_1 \qquad \text{mit} \qquad \omega \equiv \frac{|\vec{q}^*|}{|\vec{p}_6^*|}$$

$$B = \omega \cdot W_4$$

$$C = \omega \cdot W_2$$

$$D = \omega\cdot\sqrt{2}\cdot W_3$$

$$F_5' = F_8 \cdot \omega' \qquad \text{mit} \qquad \omega' \equiv \frac{q_o}{|\vec{q}^*|}$$

$$F_6' = F_7 \cdot \omega'$$

$$\ell \cdot L_{\ell-} = S_{\ell-} \cdot \omega'$$

-38-

$$(\ell+1) L_{\ell+} = S_{\ell+} \cdot \omega'$$

Damit drückt sich Gl. (6.9) folgendermaßen aus:

$F_1 \ldots F_4$ unverändert

$$F_5' = (S0_+ + 3\,x\,S1_+ - S2_-)\cdot\omega'$$

$$F_6' = (S1_- - S1_+ + 3S2_-)\cdot\omega' \qquad (6.9)'$$

Tabelle II am Schluß des Berichtes enthält die Koeffizienten der verschiedenen Multipolbeiträge in diesen beiden Notierungen.

Für den speziellen Fall der $(3/2,3/2)^+$-Resonanz findet man, da man nur <u>p-Wellen</u> zu berücksichtigen hat:

$$A = \frac{1}{2}(5-3x^2)|M1_+|^2 + \frac{9}{2}(1+x^2)|E1_+|^2 - 3(1-3x^2)\mathrm{Re}(M1_+E1_+^*)$$

$$B = 4a^2(1+3x^2)|L1_+|^2$$

$$C = 3\left\{-\frac{1}{2}|M1_+|^2 + \frac{3}{2}|E1_+|^2 - \mathrm{Re}(M1_+E1_+^*)\right\}$$

$$D = \frac{3}{2}\sqrt{2}a\,x\,\mathrm{Re}\,(L1_+(E1_+^* - M1_+^*)) \qquad (6.10)$$

Ordnet man nach Multipolanteilen, so findet man hieraus für die Winkelverteilung $\overline{W}$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\cdot\overline{W}(\theta^*,\phi,\varepsilon,J=\tfrac{3^+}{2}) = {} & |M1_+|^2\cdot\frac{1}{2}\left\{5-3x^2-3\varepsilon(1-x^2)\cdot\cos 2\phi\right\}\\ & + |E1_+|^2\cdot\frac{9}{2}\left\{1+x^2+\varepsilon(1-x^2)\cdot\cos 2\phi\right\}\\ & + |L1_+|^2\cdot 4a^2\left\{1+3x^2\right\}\\ & - \mathrm{Re}(E1_+M1_+^*)\cdot 3\left\{1-3x^2+\varepsilon(1-x^2)\cos 2\phi\right\}\\ & + \mathrm{Re}(E1_+-M1_+)L1_+^*\cdot\frac{3\sqrt{2}}{2}\,a\left\{\sqrt{\varepsilon(1+\varepsilon)}\,x\sqrt{1-x^2}\cos\phi\right\}\end{aligned} \qquad (6.11)$$

6.2 Darstellung der CM-Winkelverteilung als Potenzreihe in $x \equiv \cos\theta^*$

Für die Analyse einer gemessenen CM-Winkelverteilung ist es zweckmäßig, diese als Potenzreihe in x anzugeben. Durch Umordnung findet man aus Tabelle II mit

$$A \equiv \sum_{k=0}^{N_A} A_k \cdot x^k \qquad \text{und analogen Ansätzen für B,C,D:}$$

$$\frac{1}{\eta}\frac{d\sigma_V}{d\Omega_6^*} \equiv \frac{1}{4}\,\overline{W}\,(\varepsilon,x,\phi)$$

$$= \sum_{k=0}^{N_A} a_k\, x^k + \sqrt{1-x^2}\cos\phi\cdot\sum_{k=0}^{N_D} d_k x^k + (1-x^2)\cos 2\phi \sum_{k=0}^{N_C} c_k x^k \tag{6.12}$$

Dabei ist gesetzt:

$$a_k \equiv A_k + \varepsilon B_k$$

$$d_k \equiv D_k \sqrt{\varepsilon(1+\varepsilon)}$$

$$c_k \equiv \varepsilon \cdot C_k \tag{6.13}$$

Für die $N_A\ldots$ findet man

	$N_A = N_B$	N_C	N_D
1) p-Wellen	$2, a_1=0$	0	1
2) s,p,d-Wellen	3	1	2

Im Spezialfall, daß <u>nur p-Wellen</u> berücksichtigt sind, gilt

$$a_o^{(3/2^+)} = (A_o + \varepsilon B_o)^{(3/2^+)} = \frac{5}{2}|M1_+|^2 + \frac{9}{2}|E1_+|^2 - 3\,\mathrm{Re}(M1_+, E1_+^*) + 4a^2\varepsilon|L1_+|^2$$

$$a_1^{(3/2^+)} = 0$$

$$a_2^{(3/2^+)} = (A_2 + \varepsilon B_2)^{(3/2^+)} = -\frac{3}{2}|M1_+|^2 + \frac{9}{2}|E1_+|^2 + 9\,\mathrm{Re}(M1_+, E1_+^*) + 12a^2\varepsilon|L1_+|^2$$

$$d_1^{(3/2^+)} = D_1^{(3/2^+)}\sqrt{\varepsilon(1+\varepsilon)} = \frac{3\sqrt{2}\cdot a}{2}\sqrt{\varepsilon(1+\varepsilon)}\,\mathrm{Re}\,L1_+^*\,(E1_+ - M1_+)$$

$$c_o^{(3/2^+)} = \varepsilon\, C_o = \varepsilon\,\frac{3}{2}\left\{3\,|E1_+|^2 - |M1_+|^2 - 2\,\mathrm{Re}(E1_+, M1_+^*)\right\}$$

$$(6.14)$$

Allgemein ist die Zusammensetzung der a_k, d_k, c_k aus Tab. II zu entnehmen.

7. Das Schwellenverhalten der Multipolamplituden bzw. Formfaktoren

Als Schwellenverhalten bezeichnet man die $|\vec{q}^{\,*}|$-Abhängigkeit des Wirkungsquerschnitts bzw. der Formfaktoren für $|\vec{q}^{\,*}| \to 0$. In der Kernphysik ist die Kenntnis dieses Verhaltens eine wesentliche Hilfe zur Bestimmung der Multipolarität eines Strahlungsübergangs, insbesondere erlaubt sie, Abschätzungen zu machen, welche Übergänge mit wachsendem Impulsübertrag in's Spiel kommen. So leitet man ab[19], daß bei Anregungen von Kernzuständen durch Elektronenstreuung die Wahrscheinlichkeit für elektrische Übergänge proportional zu $|\vec{q}|^{2\ell_\gamma - 2}$, für magnetische dagegen proportional $|\vec{q}|^{2\ell_\gamma}$ ist, solange der Impulsübertrag $|\vec{q}|$ klein ist. Genaugenommen bedeutet "klein" hier, daß die Bedingung

$$|\vec{q}|^2 \, R^2 \leq 1$$

erfüllt ist, wo R die Reichweite des Potentials eines als unendlich schwer angenommenen Kerns bedeutet, und daß die Wechselwirkung durch dieses Potential verursacht wird.
Im Fall der Elektroproduktion verliert dieses Bild seine Gültigkeit, trotzdem läßt sich zeigen, daß auch hier ein spezifisches Verhalten der verschiedenen Multipolamplituden zu erwarten ist. Die experimentelle Prüfung dieses Schwellenverhaltens macht es dann möglich, für die Beschreibung des Elektroproduktionsmechanismus bestimmte Modelle von vornherein auszuschalten.
Eine theoretische Untersuchung des Schwellenverhaltens für den Fall der Elektroproduktion findet sich in den Referenzen (3),(6) und (20); Messungen[21,22] zeigen jedoch, daß es allenfalls für die erste (πN)-Resonanz, nicht jedoch für höhere Resonanzen als erfüllt angesehen werden kann.

Im folgenden sind die Formeln zusammengestellt, die das Schwellenverhalten beschreiben:

-42-

Wir setzen der Einfachheit halber $|\vec{q}^{\,*}| \equiv k$,+) dann gilt mit $\ell = \ell_\pi$:

$$\begin{array}{ll} M_{\ell\pm},\ E_{\ell+},\ L_{\ell+} & \propto k^{\ell} \\ E_{\ell-},\ L_{\ell-} & \propto k^{\ell-2} \end{array} \qquad (7.1)$$

$\ell = \ell_\gamma$

In der kernphysikalischen Schreibweise heißt das wegen

$M_{\ell_\gamma \pm} = M_{\ell\pm}$, $E_{\ell_\gamma \pm} = E_{\ell\mp1,\mp}$:

$$\begin{array}{ll} M_{\ell_\gamma \pm} & \propto k^{\ell} = k^{\ell_\gamma} \\ E_{\ell_\gamma +}, L_{\ell_\gamma +} & \propto k^{\ell-2} = k^{\ell_\gamma - 1} \\ E_{\ell_\gamma -}, L_{\ell_\gamma -} & \propto k^{\ell} = k^{\ell_\gamma - 1} \end{array} \qquad (7.2)$$

Für die in Gl. (4.18) eingeführten Helizitätsamplituden gilt

bei normalen Paritäts-Übergängen:

$(J = \ell_\pi - 1/2 = \ell_\gamma + 1/2)$

$$\begin{array}{ll} f_c & \propto k^{J-1/2} = k^{\ell-1} = k^{\ell_\gamma} \\ f_\pm & \propto k^{J-3/2} = k^{\ell-2} = k^{\ell_\gamma - 1} \end{array}$$

sowie speziell für $J = 1/2$:

$$\begin{array}{ll} f_c & \propto k^{2} \\ f_\pm & \propto k^{1} \end{array} \qquad (7.3)$$

bei anomalen Paritäts-Übergängen:

$(J = \ell_\pi + 1/2 = \ell_\gamma + 1/2)$

$$\begin{array}{ll} f_c & \propto k^{J+1/2} = k^{\ell+1} = k^{\ell_\gamma + 1} \\ f_\pm & \propto k^{J-1/2} = k^{\ell} = k^{\ell_\gamma} \end{array} \qquad (7.4)$$

+) k ist hier nicht der Pion-Impuls, wie bisher!

Im Spezialfall der ersten (πN)-Resonanz $\Delta(1236)$ bedeutet das

$$M1_+,\ E1_+,\ L1_+ \ \propto k \Longrightarrow \sigma_t,\ \sigma_\ell \propto k^2 \quad (\text{exp.} \propto k^{1.7})$$

Für die zweite Resonanz $N(1518,1/2,3/2^-)$ erwartet man aus den Ergebnissen von Photoproduktionsmessungen einen elektrischen Dipol als dominierende Übergangsamplitude; damit, da es sich um einen Übergang normaler Parität handelt,

$$E2_- \propto k \Longrightarrow \sigma_t,\ \sigma_\ell \propto k^2 \quad (\text{exp.} \propto k^{3.3})$$

Ebensowenig stimmt das Experiment mit den Erwartungen für die Resonanz $N(1688,\ 1/2,5/2^+)$ überein, die durch einen elektrischen Quadrupolübergang entstehen sollte (normaler Übergang):

$$E3_- \propto k^1 \Longrightarrow \sigma_t,\ \sigma_\ell \propto k^2 \quad (\text{exp.} \propto k^4)\ .$$

Tab. I Einarm-Wirkungsquerschnitt für inelast. e-p-Streuung (Vergleich der Notierungen)

	$d^3\sigma/dE'd\Omega'$	σ_t	σ_l'
Hand[5]	$\frac{\alpha}{2\pi^2}\frac{E_4}{E_1}\frac{K}{-q^2}\frac{1}{1-\varepsilon}\left(\sigma_t+\varepsilon\frac{-q^2}{q_o^{*2}}\sigma_e'\right)$	$\frac{\eta}{4}\int(T_{11}+T_{22})\,d\Omega^*$	$\frac{\eta}{2}\int T_{33}\,d\Omega^*$
Bj.Wal.[6]	$\frac{4\alpha^2}{q^4}\frac{E_4^2}{M}\cos^2\vartheta/2\,(W_2+2W_1 tg^2\vartheta/2)$	$\frac{4\pi^2\alpha}{KM}\,W_1$	$\frac{4\pi^2\alpha}{KM}\frac{q_o^{*2}}{-q^2}\left(\frac{\vert\vec{q}\vert^2}{-q^2}W_2-W_1\right)$
Lynch[7]	$\frac{2\alpha^2}{-q^2}\frac{E_4}{E_1}\frac{1}{1-\varepsilon}\left(\vert G_M^*\vert^2+\varepsilon\vert G_E^*\vert^2\right)$	$\frac{4\pi^2\alpha}{K}\vert G_M^*\vert^2$	$\frac{4\pi^2\alpha}{K}\frac{q_o^{*2}}{-q^2}\cdot\vert G_E^*\vert^2$
Dufner-Tsai[8]	$\frac{4\alpha^2}{-q^2}\frac{E_4}{E_1}\cos^2\vartheta/2(G_2+2G_1 tg^2\vartheta/2)$	$\frac{4\pi^2\alpha}{K}G_1$	$\frac{4\pi^2\alpha}{K}\frac{q_o^{*2}}{-q^2}\left(\frac{\vert\vec{q}\vert^2}{-q^2}G_2-G_1\right)$
Gourdin(1961)[10]	$\frac{\alpha}{(2\pi)^3}M\frac{E_4^2}{q^4}\cos^2\vartheta/2\,\frac{\vert\vec{p}_6{}^*\vert}{W}(\tilde{V}_1+2\tilde{V}_o tg^2\vartheta/2)$;	$\frac{1}{8\pi}\frac{M\vert\vec{p}_6{}^*\vert}{WK}\tilde{V}_o$	$\frac{1}{8\pi}\frac{M\vert\vec{p}_6{}^*\vert}{WK}\frac{q_o^{*2}}{-q^2}\left(\frac{\vert\vec{q}\vert^2}{-q^2}\tilde{V}_1-\tilde{V}_o\right)$

Tab. II: $\frac{d\sigma_v}{d\Omega_6^*} = \eta \left\{ A + \varepsilon B + \varepsilon C \sin^2 \theta_6^* \cos 2\phi + \sqrt{\varepsilon(1+\varepsilon)} \cdot D \sin\theta_6^* \cos\phi \right\}$

A	$E0_+$	$M1_-$	$M1_+$	$E1_+$	$E2_-$	$M2_-$
$E0_+$	1	$-2x$	$2x$	$6x$	$-1+3x^2$	$3-9x^2$
$M1_-$		1	$1-3x^2$	$3-9x^2$	$-2x$	$6x$
$M1_+$			$\frac{5}{2} - \frac{3}{2}x^2$	$-3+9x^2$	$2x$	$12x - 18x^3$
$E1_+$				$9/2+(9/2)x^2$	$-12x+18x^3$	$18x-36x^3$
$E2_-$					$5/2-(3/2)x^2$	$3 - 9x^2$
$M2_-$						$9/2+(9/2)x^2$

$a^2 = -q^2/q_0^{*2}$

B/a^2	$L0_+$	$L1_-$	$L1_+$	$L2_-$
$L0_+$	1	$2x$	$8x$	$-4+12x^2$
$L1_-$		1	$-4+12x^2$	$8x$
$L1_+$			$4+12x^2$	$-40x+72x^3$
$L2_-$				$4 + 12x^2$

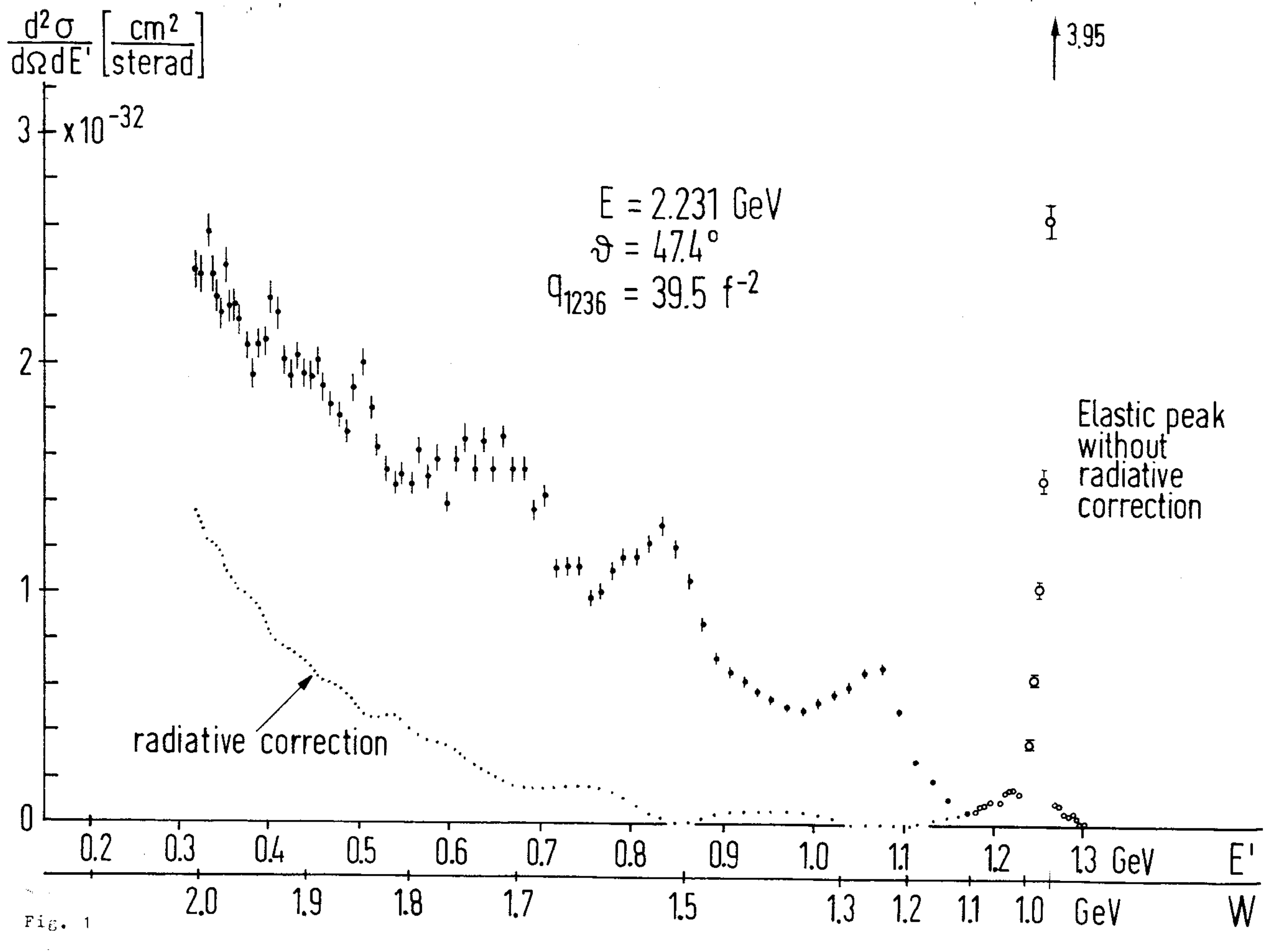
C	$E0_+$	$M1_-$	$M1_+$	$E1_+$	$E2_-$	$M2_-$
$E0_+$	-	-	-	-	-3	-3
$M1_-$			-3	$+3$	-	-
$M1_+$			$-3/2$	-3	-	$-18x$
$E1_+$				$9/2$	$-18x$	-
$E2_-$					$3/2$	-3
$M2_-$						$-9/2$

$\cancel{\frac{D/a}{2\sqrt{2}}}$ $-D/a\sqrt{2}$	LO_+	$L1_-$	$L1_+$	$L2_-$
EO_+	-	1	-2	$6x$
$M1_-$	1	-	$6x$	-2
$M1_+$	-1	-	$-6x$	2
$E1_+$	3	$6x$	$6x$	$-6 + 36x^2$
$E2_-$	$-3x$	-2	$4-18x^2$	$-6x$
$M2_-$	$3x$	-	$18x^2$	$-6x$

Vergleich mit Zagury [16]:

B/a^2	SO_+	$S1_-$	$S1_+$	$S2_-$
SO_+	1	$2x$	$4x$	$-2 + 6x^2$
$S1_-$		1	$-2 + 6x^2$	$4x$
$S1_+$			$1 + 3x^2$	$-10x + 18x^3$
$S2_-$				$1 + 3x^2$

$\cancel{\frac{D/a}{2\sqrt{2}}}$ $-D/a\sqrt{2}$				
EO_+	-	1	-1	$3x$
$M1_-$	1	-	$3x$	-1
$M1_+$	-1	-	$-3x$	1
$E1_+$	3	$6x$	$3x$	$-3 + 18x^2$
$E2_-$	$-3x$	-2	$2-9x^2$	$-3x$
$M2_-$	$3x$	-	$9x^2$	$-3x$



$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'} \left[\frac{cm^2}{sterad}\right]$
$\times 10^{-32}$
3
2
1
0
3.95
E = 2.231 GeV
ϑ = 47.4°
q_{1236} = 39.5 f^{-2}
Elastic peak without radiative correction
radiative correction
0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1.0 1.1 1.2 1.3 GeV E'
2.0 1.9 1.8 1.7 1.5 1.3 1.2 1.1 1.0 GeV W

Fig. 1

$$\varepsilon_{tr} = \left(1 + 2\,\frac{|\vec{q}|^2}{q^2}\,\mathrm{tg}^2\frac{\vartheta}{2} \right)^{-1}$$

$$|\vec{q}|^2 = \frac{(S + q^2 + M^2)^2}{4M^2} - S$$

$$S \equiv W^2$$

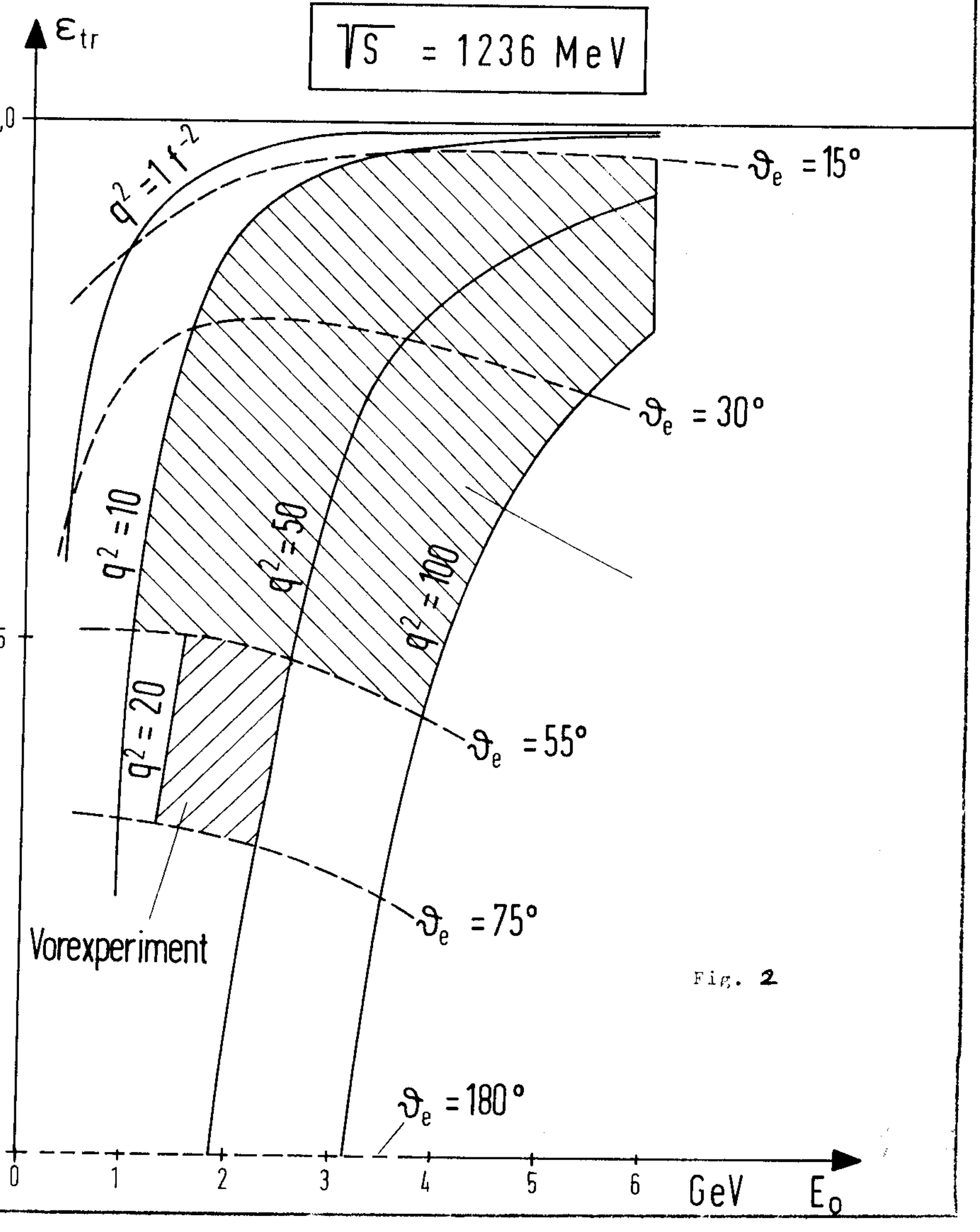
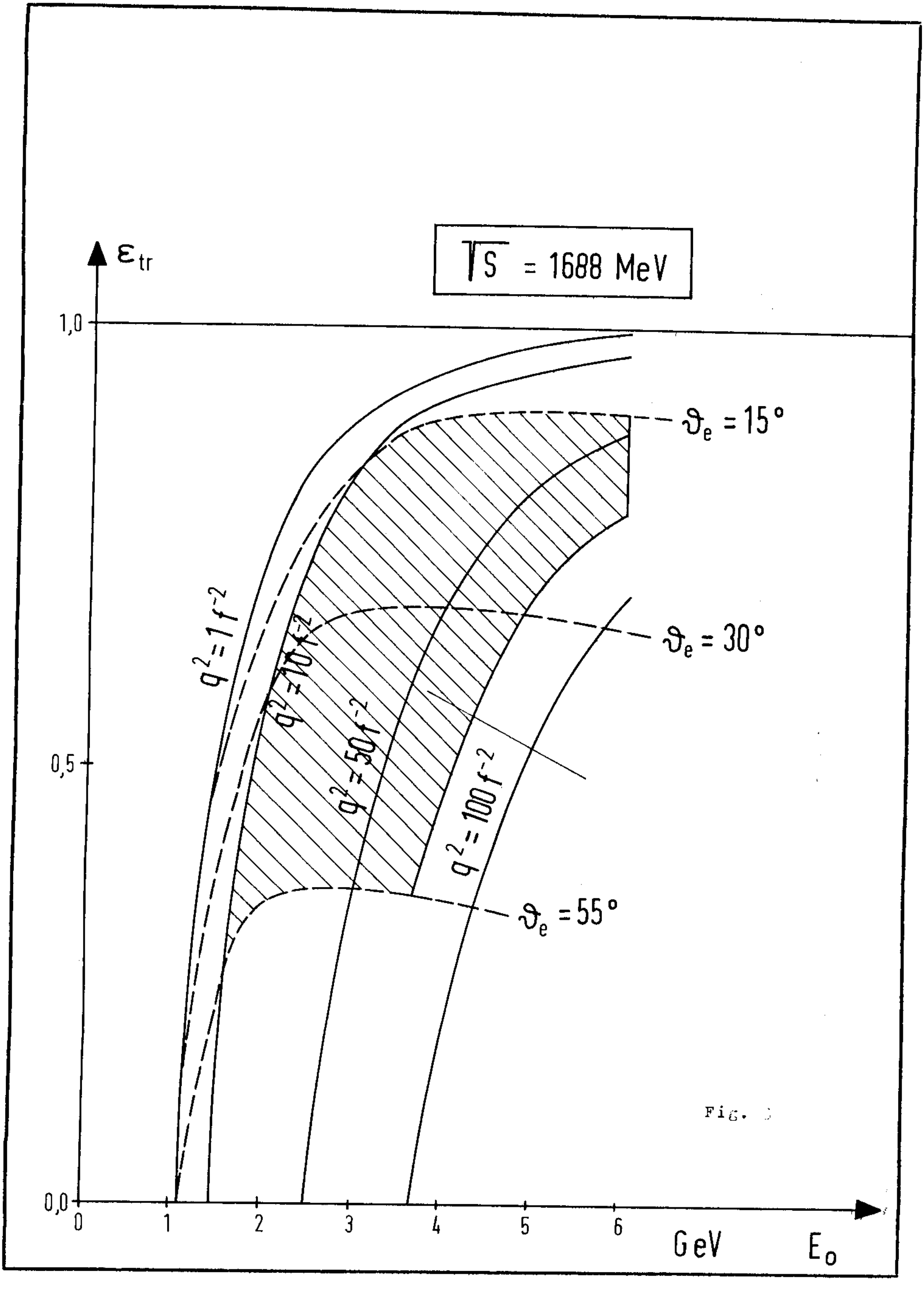
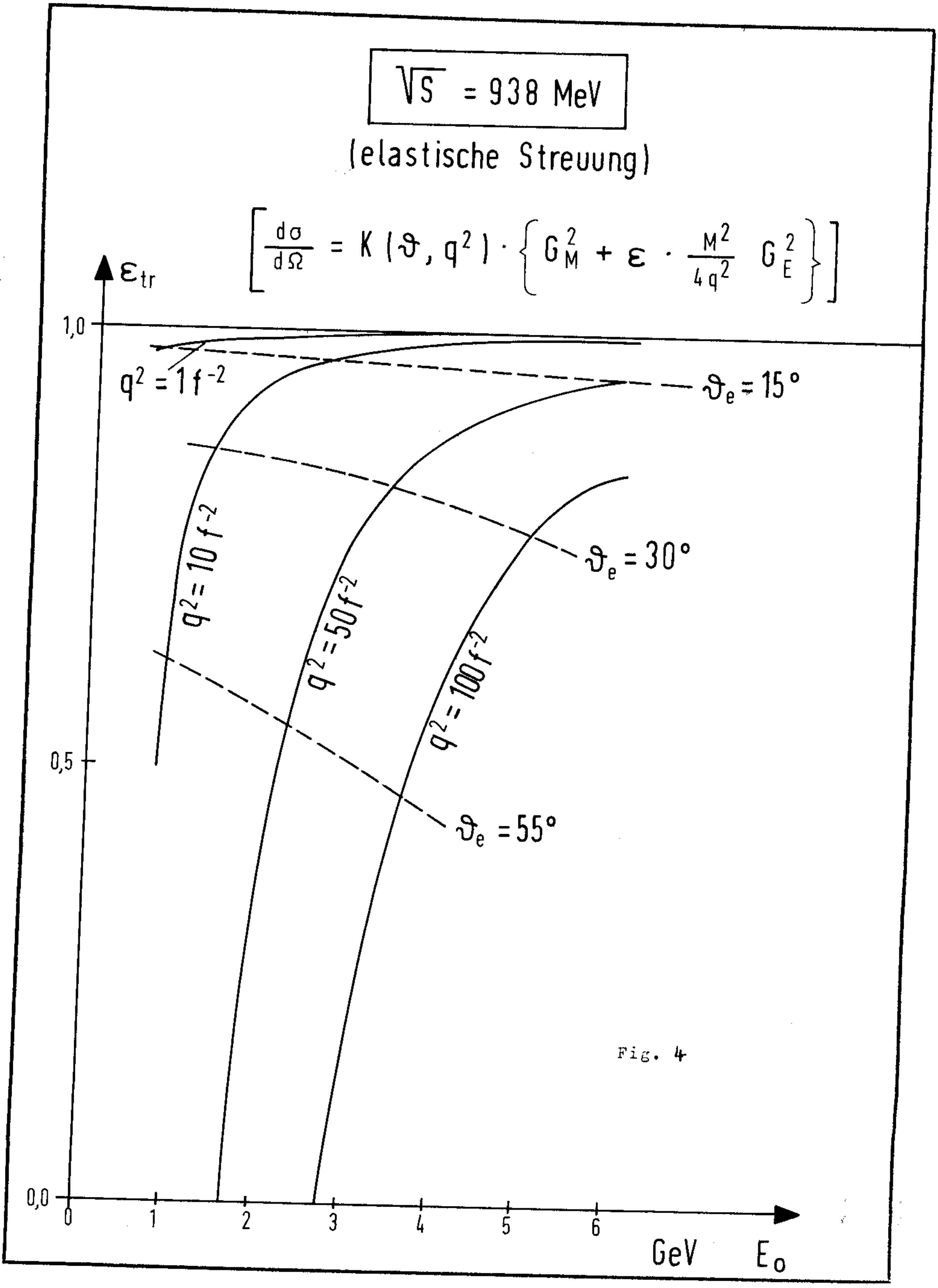


Fig. 2


√S = 1688 MeV
ε_tr
1,0
0,5
0,0
0
1
2
3
4
5
6
GeV
E_o
q² = 1 f⁻²
q² = 10 f⁻²
q² = 50 f⁻²
q² = 100 f⁻²
ϑ_e = 15°
ϑ_e = 30°
ϑ_e = 55°
Fig.



$\sqrt{S} = 938$ MeV
(elastische Streuung)
$\left[\frac{d\sigma}{d\Omega} = K(\vartheta, q^2) \cdot \left\{G_M^2 + \varepsilon \cdot \frac{M^2}{4q^2} G_E^2\right\}\right]$
ε_{tr}
1,0
0,5
0,0
$q^2 = 1 f^{-2}$
$q^2 = 10 f^{-2}$
$q^2 = 50 f^{-2}$
$q^2 = 100 f^{-2}$
$\vartheta_e = 15°$
$\vartheta_e = 30°$
$\vartheta_e = 55°$
0 1 2 3 4 5 6
GeV E_o

Fig. 4

Referenzen

1) L. Durand, P. De Celles, R. Marr,
Phys. Rev. 126, 1882 (1962)

2) J.D. Bjorken, S.D. Drell
BI Hochschultaschenbücher Bd. 98/98a

3) H.F. Jones
Il Nuovo Cimento 40A N.4, 1018(1965)

4) S.M. Berman
Phys. Rev. 135, B 1249 (1964)

5) L.N. Hand, Ph.D. Thesis, Stanford University
(unveröffentlicht), sowie
Phys.Rev. 129, 1834 (1963)

6) J.D. Bjorken, J.D. Walecka
SLAC-PUB-139 ITP-187 (1965)
Annals of Physics 38, 35 (1966)

7) H.L. Lynch, J.V. Allaby und D.M. Ritson
HEPL-494 B Juni 1967

8) A.J. Dufner, Y.S. Tsai
SLAC-PUB-364 (Nov.67)

9) M. Gourdin
Il Nuovo Cimento 37 N° 1, 208 (1965)

10) M. Gourdin
Il Nuovo Cimento 21, 1094 (1961)

11) S.D. Drell, J.D. Walecka
Annals of Physics 28, 18 (1964)

12) E. Ganßauge
Seminarvortrag WS 66/67, N$^{\underline{o}}$ 12, DESY

13) J. Rathje
Seminarvortrag WS 66/67, N$^{\underline{o}}$ 8, DESY

14) J.M. Blatt, V.F. Weißkopf
(1959) Teubner-Verlagsgesellschaft, Leipzig

15) S. Dennery
Phys. Rev. 124, 2000 (1961)

16) N. Zagury
Phys. Rev. 150, 1406 (1966)
Centro Brasileiro de Pesquisas,
Fisicas Vol 12 N$^{\underline{o}}$ 12, Aug. 67
Notas de Fisica, Rio de Janeiro

17) D.J. Drickey und R.F. Mozley
Phys. Rev. 136, B543 (1964)

18) G. Barbiellini, G. Bologna, J. DeWire,
G. Diambrini, G.P. Murtas und G. Sette
Proc. Sienna Conf., p.516 (1963)

19) W.C. Barber
Ann. Rev. Nucl. Sci. 12, 1 (1962)

20) R.C. Vik
UCSD-10P10-25 (Apr. 1967)

21) F.W. Brasse, J. Engler, E. Ganßauge, M. Schweizer
DESY 67/34 (Nov. 67)

22) W. Albrecht, F.W. Brasse, H. Dorner, W. Flauger, K.H. Frank
J. Gayler, H. Hultschig, J. May, E. Ganßauge
(noch unveröffentlicht)