G. Ripken

Hamburg, den 6.4.65
- H/2 - Dr. Ri/Mö

BERECHNUNG DES BEI EINEM BELIEBIGEN TEILCHENPROZESS FÜR DIE UMSETZUNG IN MATERIE VERFÜGBAREN ENERGIEANTEILS MIT ANWENDUNGEN AUF PROZESSE IM STORAGE - RING

I. Problemstellung

Stößt ein Elementarteilchen A_1 (Masse M_1, Impuls $\vec{P}_1$) mit hoher Geschwindigkeit auf ein Target - Teilchen A_2 (Masse M_2, Impuls $\vec{P}_2$), so können bekanntlich infolge der Wechselwirkung neue Teilchen B_n erzeugt werden nach der Reaktionsgleichung

$$A_1 + A_2 \rightarrow B_1 + B_2 + \cdots + B_N . \tag{1}$$

Solche Teilchenprozesse sind ein Beispiel für die Verwandlung von Energie in Materie: Die Bewegungsenergie stoßender Partikel setzt sich nach der Einsteinschen Beziehung

$$E = mc^2$$

in Masse neuentstehender Elementarteilchen um.

Bei diesen Reaktionen steht jedoch im allgemeinen auf Grund des Impuls-Erhaltungssatzes nicht der gesamte Energiebetrag

$$E = E_1 + E_2, \tag{2}$$

$$E_1 = \sqrt{M_1^2 + \vec{P}_1^{\,2}} , \tag{2a}$$

$$E_2 = \sqrt{M_2^2 + \vec{P}_2^{\,2}} \tag{2b}$$

der Primärteilchen A_1 und A_2, sondern nur ein Bruchteil E_o von E

$$E_o = \alpha E \quad (0 \leq \alpha \leq 1)$$

zur Umsetzung in Masse zur Verfügung. Die Sekundärteilchen B_n besitzen ja nach dem Impulssatz den gleichen Gesamtimpuls $\vec{P}$ wie die Stoßteilchen A_1 und A_2:

$$\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 \tag{3}$$

Mit $\vec{P}$ ist aber notwendigerweise eine kinetische Energie E_{kin} der erzeugten Partikel B_n verknüpft, die gerade denjenigen Anteil von E darstellt, der für die Verwandlung in Masse verloren geht. Nur in dem Sonderfall, daß $\vec{P}$ gleich Null ist, der Schwerpunkt des Gesamtsystems also ruht (und somit Schwerpunkt- und Laborsystem übereinstimmen), kann die Bewegungsenergie der Teilchen B_n verschwinden, und es ist im Prinzip eine vollständige Umwandlung der Gesamtenergie E in Materie möglich. Dieser Fall ist in einem Storage-Ring realisiert, wo Elektronen und Positronen mit entgegengesetzter Geschwindigkeit aufeinander geschossen werden.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit soll nun sein, den Bruchteil E_o von E bei beliebiger Vorgabe der Anfangsimpulse $\vec{P}_1$ und $\vec{P}_2$ zu berechnen. Als Anwendungsbeispiel werden wir sodann die Elektron-Positron-Streuung betrachten und den Energieanteil E_o für die beiden Fälle ermitteln, daß einmal die Elektronen und Positronen mit entgegengesetzter Geschwindigkeit (Impulsbetrag P) aufeinanderprallen (Storage-Ring!) und zweitens die Positronen mit dem Impuls P auf ruhende Elektronen geschossen werden. Das Verhältnis der beiden Werte von E_o kann man dann als "Gewinnfaktor" eines Storage-Rings ansehen, in dem Elektronen und Positronen mit dem Impuls P gespeichert sind.

II. Berechnung des Energieanteils E_o

Den Ausgangspunkt zur Bestimmung des für die Verwandlung in Masse verfügbaren Energiebetrages E_o bilden der Energie- und Impulssatz der Reaktion (1) in der Form

$$\vec{P} = \sum_n \vec{p}_n \tag{4}$$

$$E = \sum_n E_n \tag{5a}$$

mit

$$E_n = \sqrt{(\vec{p}_n)^2 + m_n^2} \tag{5b}$$

Dabei ist $\vec{p}_n$ der Impuls, E_n die Energie und m_n die Masse des Teilchens B_n. Der Gesamtimpuls $\vec{P}$ sowie die Gesamtenergie E sind nach Gl. (2) und (3) bei Vorgabe von $\vec{P}_1$ (= Impuls des Teilchens A_1) und $\vec{P}_2$ (= Impuls des Teilchens A_2) bekannt.

Mathematisch können wir nun unser Problem folgendermaßen formulieren:

Gegeben sind die Anfangsenergie E und der Gesamtimpuls $\vec{P}$.

Gesucht wird die größtmögliche Summe der Massen m_n

$$\text{Max} \sum_{n=1}^{N} m_n ,$$

die noch mit den Gln. (4) und (5) verträglich ist. Diese Summe stellt gerade denjenigen Bruchteil E_o der Gesamtenergie E dar, der im günstigsten Fall in Materie umgesetzt werden kann.

Zur Lösung dieser Aufgabe machen wir von einer relativistischen Umformung der Formeln (4) und (5) Gebrauch.

Da sich E und $\vec{P}$ sowie E_n und $\vec{p}_n$ als Vierervektoren schreiben lassen:

$P_v = (E,\vec{P})$ Energie-Impuls-Vektor des Gesamtsystems,

$p_\nu^{(n)} = (E_n, \vec{p}_n)$ Energie-Impuls-Vektor des Teilchens B_n,

kann man (4) und (5) zusammenfassen zu

$$P_\nu = \sum_{n=1}^{N} p_\nu^{(n)} \tag{6}$$

Diese Gleichung stellt den Energie-Impulssatz in relativistischer Schreibweise dar, und zwar für das Laborsystem Σ.

Wir gehen jetzt zu einem anderen System Σ' über, das sich mit konstanter Geschwindigkeit gegenüber Σ bewegt, indem wir auf die linke und rechte Seite von (6) die entsprechende Matrix $a_{\mu\nu}$ der Lorentz-Transformation anwenden. Dann wird (alle Größen im System Σ' sollen durch einen Strich gekennzeichnet werden)

$$P_\mu' \equiv \sum_n p_\mu^{(n)'} \tag{7}$$

wobei

$$P_\mu' \equiv a_{\mu\nu} P_\nu = (E', \vec{P}') \tag{8}$$

und

$$p_\mu^{(n)'} \equiv a_{\mu\nu}\, p_\nu^{(n)} = (E_n', \vec{p}_n') \tag{9a}$$

mit

$$E_n' = \sqrt{(\vec{p}_n')^2 + m_n^2} \tag{9b}$$

den Energie-Impuls-Vektor des Gesamtsystems und der einzelnen Teilchen B_n in Σ' bedeuten.

Gl. (7) gibt den Energie-Impulssatz für das System Σ' an.

Da die Länge eines Vierervektors gegenüber Lorentz-Transformationen invariant ist, besteht zwischen P_μ und P_μ' die Beziehung

$$E^2 - \vec{P}^2 = E'^2 - \vec{P}'^2 \tag{10}$$

Wählen wir für Σ' insbesondere das Schwerpunktsystem Σ^* (alle Größen im System Σ^* kennzeichnen wir durch einen Stern), so

ergibt sich

$$\vec{P}' = \vec{P}^* = 0 \,, \qquad (11)$$

also nach (10)

$$E'^2 - \vec{P}'^2 = E^{*2} = E^2 - \vec{P}^2, \qquad (12)$$

und wir bekommen aus (7) unter Berücksichtigung von (8), (9), (11) und (12)

$$\sqrt{E^2 - \vec{P}^2} = \sum_n \sqrt{m_n^2 + (\vec{p}_n^{\,*})^2} \,, \qquad (13a)$$

$$0 = \sum_n \vec{p}^{(n)*} . \qquad (13b)$$

Aus (13a) folgt sofort die Ungleichung

$$\sum_{n=1}^{N} m_n \leqq \sqrt{E^2 - \vec{P}^2} \,,$$

und das Gleichheitszeichen wird angenommen für

$$\vec{p}_n^{\,*} = 0 \,,$$

also genau dann, wenn alle Teilchen B_n im Schwerpunktsystem ruhen. Diese Bedingung

$$\vec{p}_n^{\,*} = 0 \quad \text{für alle } n$$

ist aber mit Gl. (13b) verträglich. Damit haben wir die Beziehung gewonnen

$$E_o \equiv \operatorname{Max} \sum_{n=1}^{N} m_n = \sqrt{E^2 - \vec{P}^2} \equiv E^* . \qquad (14)$$

Sie besagt, daß nur die Schwerpunktsenergie der Teilchen A_1 und A_2 in Masse umgesetzt werden kann, während die Differenz

$$T = E - E^*, \qquad (15)$$

die Translationsenergie des Schwerpunkts, in jedem Fall in Form kinetischer Energie erhalten bleibt. T verschwindet, wenn $\vec{P}$ gleich Null wird. Dann fallen Labor- und Schwerpunktsystem zusammen, und für die Umwandlung in Masse steht, wie schon erwähnt, der gesamte Energiebetrag E zur Verfügung.

III. Ermittlung des Gewinnfaktors eines Storage-Ringes

Wir wenden jetzt Gl. (14) auf Prozesse der Elektron-Positron-Streuung an. Dann gilt

$$M_1 = M_2 = m_e, \text{ (Masse des Elektrons und Positrons)}$$

$$E = \sqrt{\vec{p}_1^{\,2} + m_e^{\,2}} + \sqrt{\vec{p}_2^{\,2} + m_e^{\,2}},$$

$$\vec{p}_1 = \text{Elektronen-Impuls},$$

$$\vec{p}_2 = \text{Positronen-Impuls}.$$

In einem Storage-Ring ist

$$\vec{p}_1 = \vec{p},$$

$$\vec{p}_2 = -\vec{p},$$

also

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0,$$

und wir bekommen aus (14)

$$(E_o)_{St} \equiv (\text{Max} \sum_{n=1}^{N} m_n)_{St} = E$$

$$= 2 \sqrt{\vec{p}^{\,2} + m_e^{\,2}}$$

$$\approx 2\,|\vec{p}|\ , \text{ wenn } |\vec{p}| \gg m_e.$$

Werden Positronen mit dem Impuls $\vec{p}$ auf ruhende Elektronen geschossen, so wird

$$\vec{p}_1 = \vec{p}$$

$$\vec{p}_2 = 0,$$

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p},$$

$$E = \sqrt{\vec{p}^{\,2} + m_e^{\,2}} + m_e$$

und damit

$$(E_o)_L \equiv (\mathrm{Max} \sum_{n=1}^{N} m_n)_L = \left\{ (\sqrt{\vec{p}^2 + m_e^2} + m_e)^2 - \vec{p}^2 \right\}^{1/2}$$

$$= \left\{ 2\, m_e^2 + 2\, m_e \sqrt{\vec{p}^2 + m_e^2} \right\}^{1/2}$$

$$\approx \sqrt{2\, m_e \cdot |\vec{p}|}\ , \text{ wenn } |\vec{p}| \gg m_e .$$

Der Quotient $^{(E_o)_{St}}/_{(E_o)_2}$ ergibt sich zu

$$\frac{(E_o)_{St}}{(E_o)_L} = \frac{2\,|\vec{p}|}{\sqrt{2\, m_e |\vec{p}|}} = \sqrt{\frac{2\,|\vec{p}|}{m_e}} \qquad (16)$$

Beispielsweise erhält man für den bei DESY geplanten Storage-Ring mit einem 3 GeV-Elektronen- und Positronenstrahl (m_e = 0,51 MeV) den "Gewinnfaktor"

$$\frac{(E_o)_{St}}{(E_o)_L} = 110$$

In einem solchen Speicherring können also Elementarteilchen erzeugt werden, die insgesamt 110-mal schwerer sind als diejenigen Partikel, die beim Beschuß ruhender Positronen mit 3 GeV-Elektronen entstehen. Dieser Faktor "110" rechtfertigt den Bau eines 3 GeV-Storage-Ringes.

Gerhard Ripken