

DESY - H 15

DESY-Bibliothek

29. JUNI 1967 ✓

Hamburg, den 19.6.67

TOUSCHEK-EFFEKT FÜR DEN FALL, DAß DIE MITTLEREN

QUADRATISCHEN IMPULSE FÜR

VERTIKALE UND RADIALE RICHTUNG GLEICH SIND

von

U. Völkel



Touschek-Effekt für den Fall, daß die mittleren  
quadratischen Impulse für  
vertikale und radiale Richtung gleich sind

Nach<sup>1)</sup>, Gleichung (9), ist die Elektronenverlustrate durch elastische  $e^-e^-$ -Streuung innerhalb eines Bunches gegeben durch

$$R = \iint \frac{dN_1 dN_2}{V} \frac{2pc}{E_0} \sigma(p) \quad (1)$$

Hierbei ist  $V$  das Bunch-Volumen,  $E_0$  die Sollenergie,  $p$  der halbe Relativimpuls zweier herausgegriffener Elektronen der Impulse  $\vec{P}_1$  und  $\vec{P}_2$ ,  $2p = |\vec{P}_2 - \vec{P}_1|$ ,  $\sigma(p)$  der Wirkungsquerschnitt nach<sup>1)</sup> Gleichung (8)<sup>†)</sup> und  $dN_i$  ( $i = 1, 2$ ) die Anzahl der Teilchen im Bunch mit Impuls  $\vec{P}_i$ .

Wir benutzen das Koordinatensystem des Speicherrings;  $z$  in Richtung des closed orbit,  $x$  in radialer,  $y$  in vertikaler Richtung. Setzen wir weiter voraus, daß alle Teilchen im Bunch die gleiche Energie  $E_0$  besitzen und daß die Winkel der Impulse  $\vec{P}_i$  gegen die  $z$ -Achse klein sind, so haben wir  $(\vec{P}_i)_z \approx P_0$ , und die

---

†) Wir schreiben hier  $p$  für  $p_x$

1) U. Völkel, DESY 67/5 (1967)



Verteilungsfunktion für die Impulse  $f(\vec{p}_i)$  hängt nur von der Projektion  $\vec{p}_i$  des Vektors  $\vec{P}_i$  auf die  $(x,y)$ -Ebene ab. Weiter setzen wir voraus, daß  $f(\vec{P}_i)$  nur vom Betrag  $p_i$  des Vektors  $\vec{P}_i$  abhängt. Damit betrachten wir den anderen Extremfall zu dem in<sup>1)</sup> untersuchten, wo

$$f(\vec{P}_i) = f(p_{ix}) \delta(p_{iy})$$

Wir haben somit

$$2p = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 - 2p_1p_2 \cos \phi}, \quad \phi = \angle(\vec{P}_1, \vec{P}_2)$$

$$2\pi \int_0^{\delta p} f(p_i) p_i dp_i = 1 \quad (2)$$

$$dN_i = N f(p_i) dp_{ix} dp_{iy}, \quad N = \text{Anzahl der Teilchen im Bunch}$$

und

$$R = \frac{8\pi c N^2}{VE_0} \int_0^{\delta p} dp_1 p_1 f(p_1) \int_0^{\delta p} dp_2 p_2 f(p_2) \int_0^\pi d\phi p \sigma(p) \quad (3)$$

( $\delta p$  ist der maximale Transversalimpuls)

Es wird sich zeigen, daß die Integrale in (3) auch für  $n \rightarrow 0$  konvergieren (vergl.<sup>1)</sup> Gleichung (8)) im Gegensatz zum Fall der eindimensionalen Verteilung in<sup>1)</sup>. Wir setzen also  $n=0$  in der Formel für  $\sigma(p)$  und erhalten

$$\sigma(p) = \frac{\pi r_0^2 E_0}{2(\delta p_{\max})^2} \frac{\sqrt{1+p^2}}{p^2} \left( 1 + \frac{p^2}{1+p^2} \right)^2 \quad (4)$$

1. The first part of the document discusses the importance of maintaining accurate records of all transactions. It emphasizes that this is crucial for ensuring the integrity and reliability of the financial data.

2. The second part of the document outlines the various methods used to collect and analyze data. It includes a detailed description of the sampling process and the statistical techniques employed.

3. The third part of the document presents the results of the study. It includes a series of tables and graphs that illustrate the findings and provide a clear visual representation of the data.

4. The fourth part of the document discusses the implications of the study and offers recommendations for future research. It highlights the need for continued monitoring and evaluation of the system to ensure its long-term effectiveness.

5. The final part of the document provides a summary of the key findings and conclusions. It reiterates the importance of the study and the need for ongoing research in this field.

Weiterhin führen wir in (3) neue Integrationsvariablen ein:

$$\left. \begin{aligned} p &= \frac{1}{2} \sqrt{p_1^2 + p_2^2 - 2p_1p_2 \cos \phi} \\ a &= \frac{1}{2} (p_2 + p_1) \\ b &= \frac{1}{2} (p_2 - p_1) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Für eine Gaußverteilung der Transversalimpulse

$$f(p_i) = \frac{1}{\pi(\delta q)^2} e^{-\left(\frac{p_i}{\delta q}\right)^2}, \quad (\delta p = \infty) \quad (6)$$

erhalten wir dann

$$R = \frac{32r_o^2 c N^2}{V(\delta p_{\max})^2 (\delta q)^4} \int_0^\infty g(p) dp \int_0^p db \frac{e^{-\frac{2b^2}{(\delta q)^2}}}{\sqrt{p^2 - b^2}} \int_p^\infty da (a^2 - b^2) \frac{e^{-\frac{2}{(\delta q)^2} a^2}}{\sqrt{a^2 - p^2}} \quad (7)$$

mit

$$g(p) = \sqrt{1 + p^2} \left(1 + \frac{p^2}{1 + p^2}\right)^2$$

Die Integration von (7) liefert:

$$R = \frac{4\pi r_o^2 c N^2}{V(\delta p_{\max})^2} \cdot J \quad (8)$$

$$\text{mit } J = \frac{1}{(\delta q)^2} \left(1 + \frac{1}{(\delta q)^2}\right) e^{-\frac{1}{(\delta q)^2}} \left[ K_1\left(\frac{1}{(\delta q)^2}\right) - K_0\left(\frac{1}{(\delta q)^2}\right) \right],$$

wobei  $K_\nu$  die Besselfunktionen 2. Art bedeuten.

(c)



(d)



(e)

$$\left[ \left( \frac{1}{s} \right)^n \left( \frac{1}{(s+1)^n} \right)^n \right] \left( \frac{1}{(s+1)^n} \right)^n = \dots$$

Reference: ...

Für die beiden Grenzfälle extremrelativistischer und unrelativistischer Transversalimpulse erhalten wir

$$\delta q \gg 1: \quad J = 1 \quad (9a)$$

$$\delta q \ll 1: \quad J = \frac{\sqrt{2\pi}}{4\delta q} = \frac{0,626}{\delta q} \quad (9b)$$

Der Fehler  $\Delta I$  in der asymptotischen Formel (9b) ist begrenzt durch  $0 < \Delta I < 0,392\delta q$ .

Benutzen wir statt (6) eine Rechteckverteilung:

$$f(p_i) = \begin{cases} \frac{1}{\pi(\delta p)^2} & \text{für } p_i \leq \delta p \\ 0 & \text{für } p_i > \delta p \end{cases} \quad (10)$$
$$\delta q = \delta p / \sqrt{2} \quad ,$$

so werden wegen der endlichen Integrationsgrenzen die Integrationen in (3) wesentlich komplizierter. Lediglich die beiden (9a,b) entsprechenden Grenzfälle lassen sich geschlossen integrieren, und wir erhalten

$$\delta q \gg 1: \quad J = 1 \quad (11a)$$

$$\delta q \ll 1: \quad J = \frac{0,657}{\delta q} \quad (11b)$$

Der wichtigste Punkt ist, daß hier, im Gegensatz zu den Ergebnissen der Arbeit<sup>1)</sup>, die Verlustrate  $R$  von  $n$  unabhängig wird, wenn nur  $\frac{n}{\delta q} \rightarrow 0$ .

In Fig. 1 haben wir  $J(\delta q)$  nach Formel (8) gegen  $\delta q$  aufgetragen, zusammen mit den beiden Kurven für  $J(\delta q)$  nach<sup>1)</sup> Gleichung (21) für  $n = 10^{-3}$  und  $n = 10^{-4}$ . Für jede reale Verteilung  $f(\vec{p}_i)$  sollte der Wert für  $J$  zwischen diesen Grenzkurven liegen.



Die Halbwertszeit  $\tau$  ist gegeben durch

$$\tau = \frac{1}{\alpha N_0}$$

mit: 
$$\alpha = \frac{R}{N^2} = \frac{4\pi r_0^2 c}{V(\delta p_{\max})^2} \cdot J \quad \dagger) \quad (12)$$

$N_0$  = Zahl der Teilchen im Bunch zur Zeit  $t = 0$

---

$\dagger)$  Beim Vergleich mit <sup>1)</sup> beachte man, daß wir hier in (3) über alle Teilchen im Bunch zweimal integriert haben, daß andererseits bei jedem Prozeß zwei Teilchen verloren gehen, so daß jetzt 
$$\frac{dN}{dt} = -R$$

(11)

THE UNIVERSITY OF CHICAGO  
DIVISION OF THE PHYSICAL SCIENCES  
DEPARTMENT OF CHEMISTRY  
5708 SOUTH CAMPUS DRIVE  
CHICAGO, ILLINOIS 60637

A N H A N G

Der allgemeine Fall verschiedener mittlerer quadratischer Impulse für radiale und vertikale Richtung ( $\delta q_x$  bzw.  $\delta q_y$ ) läßt noch eine Abschätzung für die beiden Extremfälle (unrelativistisch bzw. extremrelativistisch) zu. Die Impulsverteilungsfunktion hat dann die Gestalt:

$$\left. \begin{aligned} f(\vec{p}) &= \frac{1}{\pi} \sqrt{AB} e^{-(Ap_x^2 + Bp_y^2)}, \quad B \geq A \\ (\delta q_x)^2 &= \overline{p_x^2} = \frac{1}{2A}, \quad (\delta q_y)^2 = \overline{p_y^2} = \frac{1}{2B} \\ (\delta q)^2 &= \overline{p_x^2} + \overline{p_y^2} = \frac{A+B}{2AB} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

In Gleichung (1) haben wir jetzt vier nicht triviale Integrationen auszuführen, und statt (3) erhalten wir:

$$R = \frac{8cN^2AB}{VE_0\pi} \int_0^\infty p_1 dp_1 \int_0^\infty p_2 dp_2 e^{-\frac{1}{2}(A+B)(p_1^2+p_2^2)} \int_0^\pi d\phi p^\sigma(p) I_0\left(\frac{B-A}{2} \sqrt{p_1^4+p_2^4+2p_1^2p_2^2\cos(2\phi)}\right) \quad (14)$$

$I_0(x)$  ist die modifizierte Besselfunktion 1. Art,  $I_0(0) = 1$ , so daß wir für  $A = B$  wieder die Gleichung (3) erhalten mit  $f(p_i)$  aus (6).

Die Koordinatentransformation (5) liefert jetzt

$$R = \frac{32r_0^2cN^2AB}{V(\delta p_{\max})^2} \int_0^\infty db \int_b^\infty da (a^2-b^2) e^{-(A+B)(a^2+b^2)} \quad (15)$$

The first part of the proof is to show that the function  $f(x)$  is continuous at  $x_0$ . Let  $\epsilon > 0$  be given. We need to find  $\delta > 0$  such that if  $|x - x_0| < \delta$ , then  $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ .

$$\begin{aligned}
 |f(x) - f(x_0)| &= \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right| \\
 &= \left| \frac{x_0 - x}{xx_0} \right| \\
 &= \frac{|x_0 - x|}{|xx_0|}
 \end{aligned}$$

In order to make  $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ , we need to make  $\frac{|x_0 - x|}{|xx_0|} < \epsilon$ . This is equivalent to  $|x_0 - x| < \epsilon |xx_0|$ .

$$\begin{aligned}
 |x_0 - x| &< \epsilon |xx_0| \\
 |x_0 - x| &< \epsilon (|x| |x_0|)
 \end{aligned}$$

We can choose  $\delta$  such that  $|x - x_0| < \delta$  implies  $|x| < |x_0| + \delta$ . Let  $M = |x_0| + 1$ . Then  $|x| < M$  whenever  $|x - x_0| < 1$ .

$$\begin{aligned}
 |x_0 - x| &< \epsilon (|x| |x_0|) \\
 |x_0 - x| &< \epsilon (M |x_0|)
 \end{aligned}$$

Therefore, if we choose  $\delta = \min\left\{1, \frac{\epsilon}{M |x_0|}\right\}$ , then  $|x - x_0| < \delta$  implies  $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ .

$$\times \int_b^a \frac{dp \, g(p)}{\sqrt{(a^2-p^2)(p^2-b^2)}} I_0 \left( (B-A) \sqrt{(a^2+b^2)^2 - 4(a^2-p^2)(p^2-b^2)} \right)$$

$$\text{mit } g(p) = \sqrt{1+p^2} \left( 1 + \frac{p^2}{1+p^2} \right)^2$$

Da  $I_0(x)$  monoton wächst, haben wir

$$I_0 \left( (B-A) \sqrt{(a^2+b^2)^2 - 4(a^2-p^2)(p^2-b^2)} \right) I_0 \left( (B-A)(a^2+b^2) \right),$$

so daß wir für R die obere Grenze erhalten:

$$R \leq \frac{32 r_0^2 c N^2 AB}{V(\delta p_{\max})^2} \int_0^\infty db \int_b^\infty da (a^2-b^2) e^{-(A+B)(a^2+b^2)} I_0 \left( (B-A)(a^2+b^2) \right) \times \quad (16)$$

$$\times \int_b^a \frac{dp \, g(p)}{\sqrt{(a^2-p^2)(p^2-b^2)}} \quad \dagger)$$

Definieren wir wieder J durch

$$R = \frac{4 \pi r_0^2 c N^2}{V(\delta p_{\max})^2} \cdot J \quad ,$$

so erhalten wir für die beiden Extremfälle:

a) extrem relativistisch:  $g(p) = 4p$

$$J \leq \frac{A+B}{2\sqrt{AB}} \quad (17)$$

†) Das Gleichheitszeichen gilt in (16) genau für  $B = A$

$$\left( \sqrt{(a-b)^2 + c^2} - (a-b) \right) \left( \sqrt{(a-b)^2 + c^2} + (a-b) \right) = c^2$$

$$\sqrt{(a-b)^2 + c^2} = \frac{c^2}{2(a-b)}$$

$$\left( \sqrt{(a-b)^2 + c^2} - (a-b) \right) = \frac{c^2}{2(a-b) + \sqrt{(a-b)^2 + c^2}}$$

$$\left( \sqrt{(a-b)^2 + c^2} - (a-b) \right) \left( 2(a-b) + \sqrt{(a-b)^2 + c^2} \right) = c^2$$

(11)

$$\sqrt{(a-b)^2 + c^2} = \frac{c^2}{2(a-b) + \sqrt{(a-b)^2 + c^2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{(a-b)^2 + c^2}} = \frac{2(a-b) + \sqrt{(a-b)^2 + c^2}}{c^2}$$

(12)

$$\frac{1}{\sqrt{(a-b)^2 + c^2}}$$

b) unrelativistisch:  $g(p) = 1$

$$J \leq \frac{\sqrt{2\pi}}{4} \sqrt{\frac{2AB}{A+B}} \cdot D \frac{1}{\pi} \frac{\sqrt{v^2-1}}{v} {}_2F_1 \left( \frac{5}{4}, \frac{3}{4}; 1; \frac{1}{v^2} \right)$$

mit  $v = \frac{B+A}{B-A}$

$$D = \int_0^1 \frac{x dx}{(1+x) \sqrt{1-x}} K \left( \sqrt{\frac{2x}{1+x}} \right)$$

(18)

In (18) bedeutet  ${}_2F_1$  die hypergeometrische Funktion, K das vollständige elliptische Integral 1. Art.

Für den Fall  $A = B$  ( $v \rightarrow \infty$ ) muß (18) in (9b) übergehen. Das ergibt  $D = \pi$ . Die hypergeometrische Funktion lautet in der Reihendarstellung

$${}_2F_1 \left( \frac{5}{4}, \frac{3}{4}; 1; \frac{1}{v^2} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n+1)!!}{(n!)^2} \frac{1}{(4v)^{2n}} \quad (19)$$

Beachten wir noch, daß nach (13)  $\sqrt{\frac{2AB}{A+B}} = \frac{1}{\delta q}$ , so erhalten wir schließlich

a) extremrelativistisch:

$$J \leq \frac{A+B}{2\sqrt{AB}}$$

b) unrelativistisch:

$$J \leq \frac{\sqrt{2\pi}}{4} \frac{1}{\delta q} \frac{\sqrt{v^2-1}}{v} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n+1)!!}{(n!)^2} \frac{1}{(4v)^{2n}}$$

(20)

$$v = \frac{B+A}{B-A}$$

Betrachten wir ein Verhältnis der mittleren quadratischen Impulse

(1)  $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$   
 $\frac{d}{dx} x^{-2} = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$

(2)  $\frac{1}{x^3} = x^{-3}$   
 $\frac{d}{dx} x^{-3} = -3x^{-4} = -\frac{3}{x^4}$

(3)  $\frac{1}{x^4} = x^{-4}$   
 $\frac{d}{dx} x^{-4} = -4x^{-5} = -\frac{4}{x^5}$

(4)  $\frac{1}{x^5} = x^{-5}$   
 $\frac{d}{dx} x^{-5} = -5x^{-6} = -\frac{5}{x^6}$

$\frac{\delta q_y}{\delta q_x} = \frac{1}{2}$ , wie es überwiegend in unserem Speicherring vorliegt. Es ergibt sich dann  $\frac{A}{B} = \frac{1}{4}$ ,  $v = \frac{5}{3}$

a)  $J \leq 1,25$  für  $\delta q \gg 1$

b)  $J \leq \frac{\sqrt{2\pi}}{4} \frac{1}{\delta q} \cdot 1,22$  für  $\delta q \ll 1$

Für  $\frac{q_y}{q_x} = \frac{2}{3}$  erhält man entsprechend

a)  $J \leq 1,083$  für  $\delta q \gg 1$

b)  $J \leq \frac{\sqrt{2\pi}}{4} \frac{1}{\delta q} \cdot 1,074$  für  $\delta q \ll 1$

Bezeichnen wir mit  $\Delta J$  die Differenz zwischen dem richtigen Wert  $J$  und demjenigen Wert, bei dem wir ein Impulsverhältnis  $\delta q_y / \delta q_x = 1$  voraussetzen (also die Gleichung (8) benutzen).

Die obigen Zahlenbeispiele liefern dann:

$\frac{\delta q_y}{\delta q_x} = \frac{1}{2}$ : a)  $\frac{\Delta J}{J} \leq 25\%$  für  $\delta q \gg 1$

b)  $\frac{\Delta J}{J} \leq 22\%$  für  $\delta q \ll 1$

$\frac{\delta q_y}{\delta q_x} = \frac{2}{3}$ : a)  $\frac{\Delta J}{J} \leq 8,3\%$  für  $\delta q \gg 1$

b)  $\frac{\Delta J}{J} \leq 7,4\%$  für  $\delta q \ll 1$

In jedem Fall sind die oberen Schranken für den relativen Fehler  $\Delta J/J$  im Bereich sehr kleiner  $\delta q$  und sehr großer  $\delta q$  von der gleichen Größenordnung, so daß wir annehmen können, daß auch im Zwischenbereich diese Schranken gelten.

Für den extremrelativistischen Fall  $\delta q \gg 1$  ( $g(p) = 4p$ ) kann man Gleichung (15) auch exakt integrieren und erhält dann, wie schon gewohnt,  $J = 1$ .

Faint, illegible text at the top of the page, possibly a header or title.

Second block of faint, illegible text.

Third block of faint, illegible text.

Fourth block of faint, illegible text.

Fifth block of faint, illegible text.

Sixth block of faint, illegible text.

Seventh block of faint, illegible text.

Eighth block of faint, illegible text.

Ninth block of faint, illegible text at the bottom of the page.



