DESY - H 15

Hamburg, den 19.6.67

TOUSCHEK-EFFEKT FÜR DEN FALL, DAß DIE MITTLEREN QUADRATISCHEN IMPULSE FÜR VERTIKALE UND RADIALE RICHTUNG GLEICH SIND

von

U. Völkel

Touschek-Effekt für den Fall, daß die mittleren quadratischen Impulse für vertikale und radiale Richtung gleich sind

Nach[1], Gleichung (9), ist die Elektronenverlustrate durch elastische e^--e^--Streuung innerhalb eines Bunches gegeben durch

$$R = \iint \frac{dN_1 \; dN_2}{V} \; \frac{2pc}{E_o} \; \sigma(p) \tag{1}$$

Hierbei ist V das Bunch-Volumen, E_o die Sollenergie, p der halbe Relativimpuls zweier herausgegriffener Elektronen der Impulse $\vec{P}_1$ und $\vec{P}_2$, $2p = \left| \vec{P}_2 - \vec{P}_1 \right|$, $\sigma(p)$ der Wirkungsquerschnitt nach[1] Gleichung (8)[†] und dN_i $(i = 1,2)$ die Anzahl der Teilchen im Bunch mit Impuls $\vec{P}_i$.

Wir benutzen das Koordinatensystem des Speicherrings; z in Richtung des closed orbit, x in radialer, y in vertikaler Richtung. Setzen wir weiter voraus, daß alle Teilchen im Bunch die gleiche Energie E_o besitzen und daß die Winkel der Impulse $\vec{P}_i$ gegen die z-Achse klein sind, so haben wir $(\vec{P}_i)_z \approx P_o$, und die

---

†) Wir schreiben hier p für p_x

1) U. Völkel, DESY 67/5 (1967)

Verteilungsfunktion für die Impulse $f(\vec{p}_i)$ hängt nur von der Projektion $\vec{p}_i$ des Vektors $\vec{P}_i$ auf die (x,y)-Ebene ab. Weiter setzen wir voraus, daß $f(\vec{P}_i)$ nur vom Betrag p_i des Vektors $\vec{p}_i$ abhängt. Damit betrachten wir den anderen Extremfall zu dem in[1] untersuchten, wo

$$f(\vec{p}_i) = f(p_{ix})\,\delta(p_{iy})$$

Wir haben somit

$$2p = \sqrt{p_1^{\,2} + p_2^{\,2} - 2p_1p_2\cos\phi}\ , \qquad \phi = \sphericalangle(\vec{p}_1,\vec{p}_2)$$

$$2\pi \int_0^{\delta p} f(p_i)p_i\,dp_i = 1 \tag{2}$$

$$dN_i = N\, f(p_i)\, dp_{ix}\, dp_{iy} \qquad , \quad N = \text{Anzahl der Teilchen im Bunch}$$

und

$$R = \frac{8\pi c N^2}{VE_o} \int_0^{\delta p} dp_1 p_1 f(p_1) \int_0^{\delta p} dp_2 p_2 f(p_2) \int_0^{\pi} d\phi\; p\,\sigma(p) \tag{3}$$

(δp ist der maximale Transversalimpuls)

Es wird sich zeigen, daß die Integrale in (3) auch für $\eta\to 0$ konvergieren (vergl.[1] Gleichung (8)) im Gegensatz zum Fall der eindimensionalen Verteilung in [1]. Wir setzen also $\eta=0$ in der Formel für $\sigma(p)$ und erhalten

$$\sigma(p) = \frac{\pi r_o^{\,2} E_o}{2(\delta p_{max})^2}\, \frac{\sqrt{1+p^2}}{p^2} \left(1 + \frac{p^2}{1+p^2}\right)^2 \tag{4}$$

Weiterhin führen wir in (3) neue Integrationsvariabeln ein:

$$\left.\begin{aligned} p &= \frac{1}{2}\sqrt{p_1{}^2 + p_2{}^2 - 2p_1p_2\cos\phi} \\ a &= \frac{1}{2}\,(p_2 + p_1) \\ b &= \frac{1}{2}\,(p_2 - p_1) \end{aligned}\right] \qquad (5)$$

Für eine Gaußverteilung der Transversalimpulse

$$f(p_i) = \frac{1}{\pi(\delta q)^2}\, e^{-\left(\frac{p_i}{\delta q}\right)^2}, \quad (\delta p = \infty) \qquad (6)$$

erhalten wir dann

$$R = \frac{32 r_o{}^2 c N^2}{V(\delta p_{max})^2(\delta q)^4}\int_0^\infty g(p)\,dp\int_0^p db\,\frac{e^{-\frac{2\,b^2}{(\delta q)^2}}}{\sqrt{p^2 - b^2}}\int_p^\infty da\,(a^2-b^2)\,\frac{e^{-\frac{2}{(\delta q)^2}a^2}}{\sqrt{a^2 - p^2}} \qquad (7)$$

mit
$$g(p) = \sqrt{1 + p^2}\left(1 + \frac{p^2}{1 + p^2}\right)^2$$

Die Integration von (7) liefert:

$$R = \frac{4\pi r_o{}^2\, c\, N^2}{V(\delta p_{max})^2}\cdot J \qquad (8)$$

mit $J = \frac{1}{(\delta q)^2}\left(1 + \frac{1}{(\delta q)^2}\right) e^{\frac{1}{(\delta q)^2}}\left[K_1\left(\frac{1}{(\delta q)^2}\right) - K_o\left(\frac{1}{(\delta q)^2}\right)\right]$,

wobei K_ν die Besselfunktionen 2. Art bedeuten.

Für die beiden Grenzfälle extremrelativistischer und unrelativistischer Transversalimpulse erhalten wir

$$\delta q \gg 1: \qquad J = 1 \tag{9a}$$

$$\delta q \ll 1: \qquad J = \frac{\sqrt{2\pi}}{4\delta q} = \frac{0{,}626}{\delta q} \tag{9b}$$

Der Fehler ΔI in der asymptotischen Formel (9b) ist begrenzt durch $0 < \Delta I < 0{,}392\delta q$.

Benutzen wir statt (6) eine Rechteckverteilung:

$$f(p_i) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi(\delta p)^2} & \text{für } p_i \leq \delta p \\ 0 & \text{für } p_i > \delta p \end{cases} \tag{10}$$

$$\delta q = \delta p/\sqrt{2} \quad ,$$

so werden wegen der endlichen Integrationsgrenzen die Integrationen in (3) wesentlich komplizierter. Lediglich die beiden (9a,b) entsprechenden Grenzfälle lassen sich geschlossen integrieren, und wir erhalten

$$\delta q \gg 1: \qquad J = 1 \tag{11a}$$

$$\delta q \ll 1: \qquad J = \frac{0{,}657}{\delta q} \tag{11b}$$

Der wichtigste Punkt ist, daß hier, im Gegensatz zu den Ergebnissen der Arbeit[1)], die Verlustrate R von η unabhängig wird, wenn nur $\frac{\eta}{\delta q} \to 0$.

In Fig. 1 haben wir $J(\delta q)$ nach Formel (8) gegen δq aufgetragen, zusammen mit den beiden Kurven für $J(\delta q)$ nach[1)] Gleichung (21) für $\eta = 10^{-3}$ und $\eta = 10^{-4}$. Für jede reale Verteilung $f(\vec{p}_i)$ sollte der Wert für J zwischen diesen Grenzkurven liegen.

Die Halbwertszeit τ ist gegeben durch

$$\tau = \frac{1}{\alpha N_o}$$

mit:
$$\alpha = \frac{R}{N^2} = \frac{4\pi r_o{}^2 c}{V(\delta p_{max})^2} \cdot J \quad ^{+)} \tag{12}$$

N_o = Zahl der Teilchen im Bunch zur Zeit $t = 0$

+) Beim Vergleich mit [1] beachte man, daß wir hier in (3) über alle Teilchen im Bunch zweimal integriert haben, daß andererseits bei jedem Prozeß zwei Teilchen verloren gehen, so daß jetzt $\frac{dN}{dt} = -R$

A N H A N G

Der allgemeine Fall verschiedener mittlerer quadratischer Impulse für radiale und vertikale Richtung (δq_x bzw. δq_y) läßt noch eine Abschätzung für die beiden Extremfälle (unrelativistisch bzw. extremrelativistisch) zu. Die Impulsverteilungsfunktion hat dann die Gestalt:

$$\left.\begin{aligned} f(\vec{p}) &= \frac{1}{\pi}\sqrt{AB}\; e^{-(Ap_x^2 + Bp_y^2)} \quad , \quad B \geq A \\ (\delta q_x)^2 &= \overline{p_x^2} = \frac{1}{2A} \quad , \quad (\delta q_y)^2 = \overline{p_y^2} = \frac{1}{2B} \\ (\delta q)^2 &= \overline{p_x^2} + \overline{p_y^2} = \frac{A+B}{2AB} \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

In Gleichung (1) haben wir jetzt vier nicht triviale Integrationen auszuführen, und statt (3) erhalten wir:

$$R = \frac{8cN^2AB}{VE_o\pi} \int_o^\infty p_1 dp_1 \int_o^\infty p_2 dp_2 \, e^{-\frac{1}{2}(A+B)(p_1^2+p_2^2)} \int_o^\pi d\phi \, p\sigma(p) \, I_o\left(\frac{B-A}{2}\sqrt{p_1^4+p_2^4+2p_1^2p_2^2\cos(2\phi)}\right) \tag{14}$$

$I_o(x)$ ist die modifizierte Besselfunktion 1. Art, $I_o(0) = 1$, so daß wir für A = B wieder die Gleichung (3) erhalten mit $f(p_i)$ aus (6).

Die Koordinatentransformation (5) liefert jetzt

$$R = \frac{32r_o^2cN^2AB}{V(\delta p_{max})^2} \int_o^\infty db \int_b^\infty da \, (a^2-b^2) \, e^{-(A+B)(a^2+b^2)} \; * \tag{15}$$

$$\times \int_b^a \frac{dp\, g(p)}{\sqrt{(a^2-p^2)(p^2-b^2)}}\; I_o\left((B-A)\sqrt{(a^2+b^2)^2 - 4(a^2-p^2)(p^2-b^2)}\right)$$

$$\text{mit } g(p) = \sqrt{1+p^2}\,\left(1 + \frac{p^2}{1+p^2}\right)^2$$

Da $I_o(x)$ monoton wächst, haben wir

$$I_o\left((B-A)\sqrt{(a^2+b^2)^2-4(a^2-p^2)(p^2-b^2)}\right) \quad I_o\left((B-A)(a^2+b^2)\right),$$

so daß wir für R die obere Grenze erhalten:

$$R \leq \frac{32 r_o^2 c N^2 AB}{V(\delta p_{max})^2} \int_o^\infty db \int_b^\infty da (a^2-b^2)\, e^{-(A+B)(a^2+b^2)}\, I_o\left((B-A)(a^2+b^2)\right) \times \tag{16}$$

$$\times \int_b^a \frac{dp\, g(p)}{\sqrt{(a^2-p^2)(p^2-b^2)}} \qquad {}^{+)}$$

Definieren wir wieder J durch

$$R = \frac{4\pi r_o^2 c N^2}{V(\delta p_{max})^2} \cdot J \qquad ,$$

so erhalten wir für die beiden Extremfälle:

a) extrem relativistisch: $g(p) = 4p$

$$J \leq \frac{A+B}{2\sqrt{AB}} \tag{17}$$

+) Das Gleichheitszeichen gilt in (16) genau für B = A

b) unrelativistisch: $g(p) = 1$

$$\left.\begin{aligned} & J \leq \frac{\sqrt{2\pi}}{4} \sqrt{\frac{2AB}{A+B}} \cdot D \frac{1}{\pi} \frac{\sqrt{v^2-1}}{v} {}_2F_1 \left(\tfrac{5}{4}, \tfrac{3}{4}; 1; \tfrac{1}{v^2}\right) \\ & \text{mit } v = \frac{B+A}{B-A} \\ & D = \int_0^1 \frac{x\,dx}{(1+x)\sqrt{1-x}} K\left(\sqrt{\frac{2x}{1+x}}\right) \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

In (18) bedeutet ${}_2F_1$ die hypergeometrische Funktion, K das vollständige elliptische Integral 1. Art.

Für den Fall A = B ($v \to \infty$) muß (18) in (9b) übergehen. Das ergibt $D = \pi$. Die hypergeometrische Funktion lautet in der Reihendarstellung

$$ {}_2F_1 \left(\tfrac{5}{4}, \tfrac{3}{4}; 1; \tfrac{1}{v^2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n+1)!!}{(n!)^2} \frac{1}{(4v)^{2n}} \quad (19)$$

Beachten wir noch, daß nach (13) $\sqrt{\frac{2AB}{A+B}} = \frac{1}{\delta q}$, so erhalten wir schließlich

a) extremrelativistisch:

$$J \leqslant \frac{A+B}{2\sqrt{AB}}$$

b) unrelativistisch:

$$J \leqslant \frac{\sqrt{2\pi}}{4} \frac{1}{\delta q} \frac{\sqrt{v^2-1}}{v} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n+1)!!}{(n!)^2} \frac{1}{(4v)^{2n}}$$

$$v = \frac{B+A}{B-A}$$

(20)

Betrachten wir ein Verhältnis der mittleren quadratischen Impulse

$\frac{\delta q_y}{\delta q_x} = \frac{1}{2}$, wie es überwiegend in unserem Speicherring vorliegt. Es ergibt sich dann $\frac{A}{B} = \frac{1}{4}$, $v = \frac{5}{3}$

a) $J \leq 1{,}25$ für $\delta q >> 1$

b) $J \leq \frac{\sqrt{2\pi}}{4} \frac{1}{\delta q} \cdot 1{,}22$ für $\delta q << 1$

Für $\frac{q_y}{q_x} = \frac{2}{3}$ erhält man entsprechend

a) $J \leq 1.083$ für $\delta q >> 1$

b) $J \leq \frac{\sqrt{2\pi}}{4} \frac{1}{\delta q} \cdot 1{,}074$ für $\delta q << 1$

Bezeichnen wir mit ΔJ die Differenz zwischen dem richtigen Wert J und demjenigen Wert, bei dem wir ein Impulsverhältnis $\delta q_y/\delta q_x = 1$ voraussetzen (also die Gleichung (8) benutzen). Die obigen Zahlenbeispiele liefern dann:

$\frac{\delta q_y}{\delta q_x} = \frac{1}{2}$: a) $\frac{\Delta J}{J} \leq 25\%$ für $\delta q >> 1$

b) $\frac{\Delta J}{J} \leq 22\%$ für $\delta q << 1$

$\frac{\delta q_y}{\delta q_x} = \frac{2}{3}$: a) $\frac{\Delta J}{J} \leq 8{,}3\%$ für $\delta q >> 1$

b) $\frac{\Delta J}{J} \leq 7{,}4\%$ für $\delta q << 1$

In jedem Fall sind die oberen Schranken für den relativen Fehler $\Delta J/J$ im Bereich sehr kleiner δq und sehr großer δq von der gleichen Größenordnung, so daß wir annehmen können, daß auch im Zwischenbereich diese Schranken gelten.
Für den extremrelativistischen Fall $\delta q >> 1$ ($g(p) = 4p$) kann man Gleichung (15) auch exakt integrieren und erhält dann, wie schon gewohnt, $J = 1$.

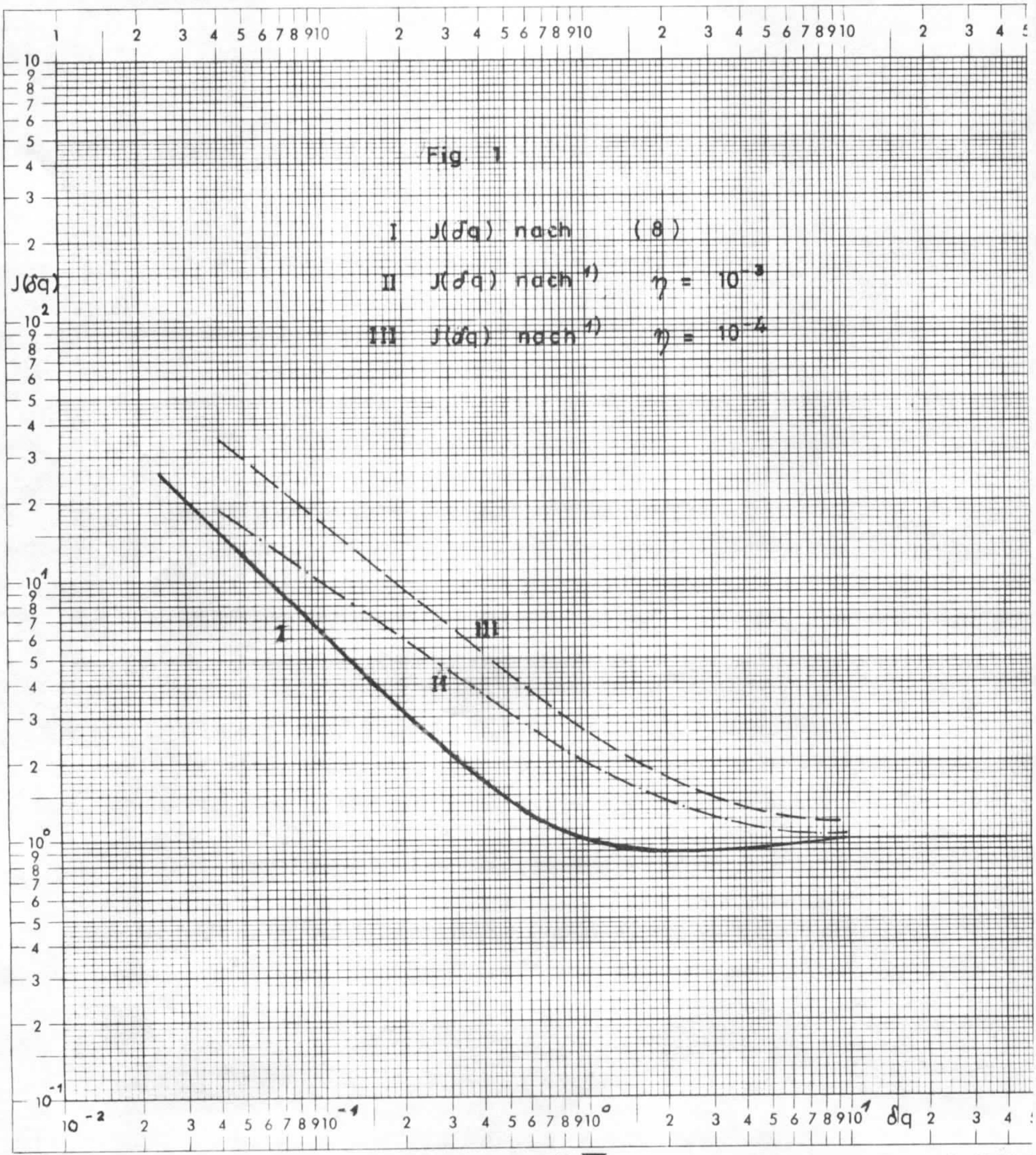
Fig. 1
I J(δq) nach (8)
II J(δq) nach [1] η = 10^-3
III J(δq) nach [1] η = 10^-4
J(δq)
δq
I
II
III