

Interner Bericht
DESY H-70/21 ,
September 1970

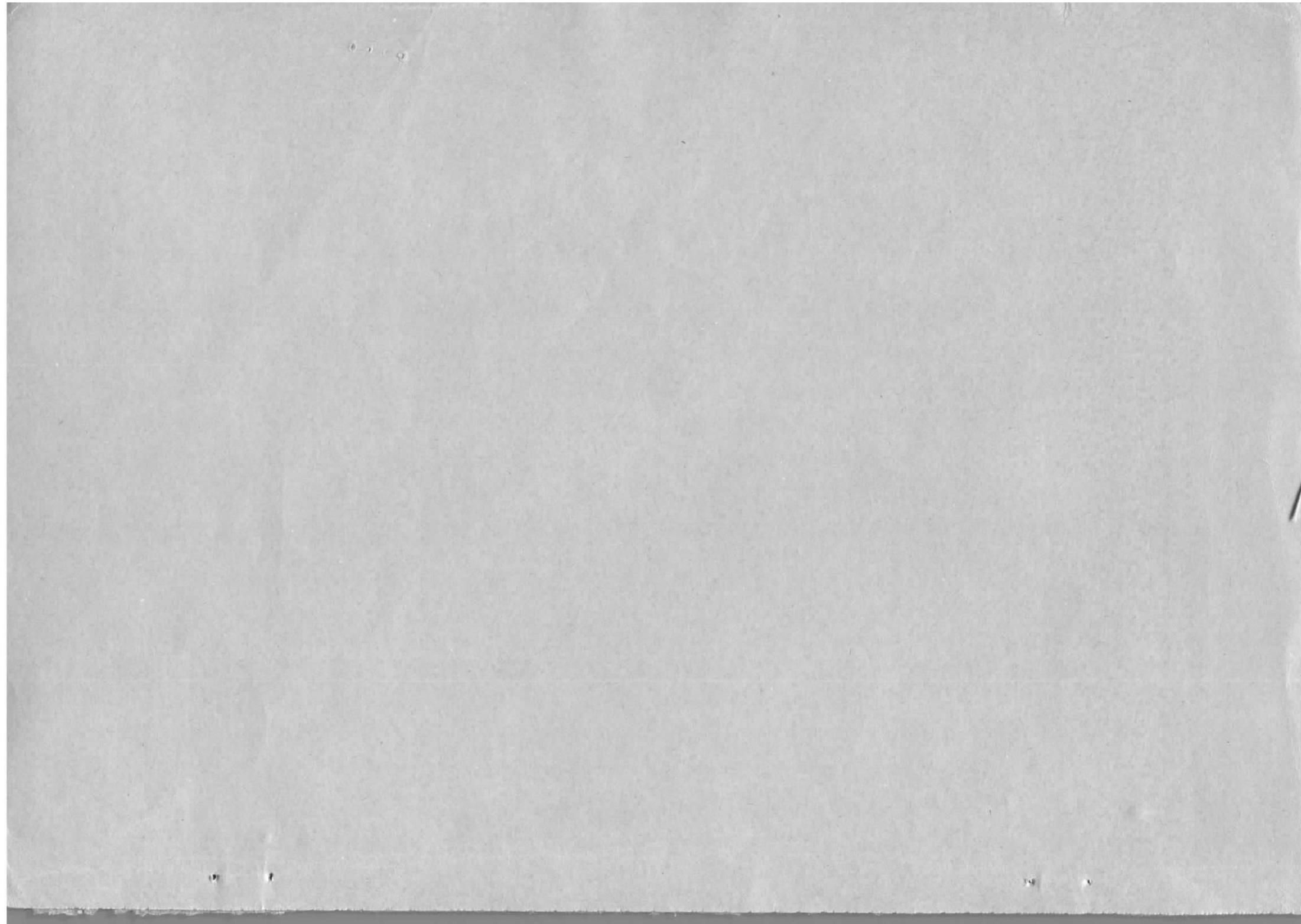
DESY-Bibliothek
15. DEZ. 1970

PHYSIK DER ELEKTRONEN-SPEICHERRINGE

(8 Vorträge)

von

R.D. Kohaupt
H. Neemann
A. Piwinski
K. Steffen
H. Wiedemann



PHYSIK DER ELEKTRONEN-SPEICHERRINGE

(8 Vorträge)

Die in diesem Heft zusammengestellten acht Beiträge wurden im Rahmen einer Vortragsreihe über die Physik der Elektronenspeicherringe vom Herbst 1969 bis Frühjahr 1970 bei DESY vorgetragen. Die Autoren haben versucht, die Beiträge inhaltlich und in den Bezeichnungen so aufeinander abzustimmen, daß sie ein knappes und möglichst übersichtliches Bild von den physikalischen Grundlagen und Ausführungsformen der Elektronenspeicherringe vermitteln.

		<u>S.</u>
1.	Optik der idealen Maschine	K. Steffen 5
2.	Feldfehler und Optik höherer Ordnung	H. Wiedemann 20
3.	Synchrotronschwingung und Wechselwirkung mit den HF-Resonatoren	A. Piwinski 41
4.	Strahlungseffekte	R.D. Kohaupt 65
5.	Teilchenverluste und Lebensdauer	H. Neemann 87
6.	Instabilitäten	A. Piwinski 121
7.	Luminositätsgrenzen	K. Steffen 144
8.	Übersicht über die Entwicklung der Elektronen-Speicherringe	H. Wiedemann 159

Bezeichnungen

a	Dämpfungskonstante
a_x	Dämpfungskonstante der horizontalen Betatronschwingung
a_z	Dämpfungskonstante der vertikalen Betatronschwingung
a_s	Dämpfungskonstante der Synchrotronschwingung
b	Halbe Vakuumkammerbreite
c	Lichtgeschwindigkeit
e	Elementarladung oder Basis der natürlichen Logarithmen
f	HF-Frequenz
f_0	Umlauffrequenz
f_{syn}	Synchrotronfrequenz
h	Krümmung der Sollbahn ($h = \frac{1}{\rho}$) oder halbe Vakuumkammerhöhe
j	Stromdichte
k	Quadrupolstärke
l	Länge auf der Sollbahn oder Elementlänge
m	Sextupolstärke
m_e	Masse des Elektrons
n	Bunch-Besetzungszahl
p	Betrag des Impuls \vec{p}
p_0	Sollimpuls
q	Harmonischenzahl
r	Oktupolstärke
r_e	Klassischer Elektronenradius

s	Koordinate auf der Sollbahn
t	Zeit
v	Teilchengeschwindigkeit
x	horizontale Koordinate
y	horizontale oder vertikale Koordinate
z	vertikale Koordinate
B	magnetische Feldstärke oder Bunchzahl ($B = \frac{q}{n}$)
C	Cosinusähnliche Bahn
D	periodische Dispersionsbahn
E	Energie oder Strahlenveloppe
H	Hamilton-Funktion
I	umlaufender Strom
K	Krümmung der Sollbahn
L	Gesamtlänge der Sollbahn oder Luminosität
N	Teilchenzahl pro Strahl
N_B	Teilchenzahl pro Bunch
P	Leistung
Q	Zahl der Betatronschwingungen pro Umlauf oder Cavity-Güte

R	Krümmungsradius der Sollbahn
\bar{R}	mittlerer Radius des Gesamtringes ($\bar{R} = \frac{L}{2\pi}$)
R_p	Shunt-Impedance
S	Sinusähnliche Bahn
U	Spitzen-Umfangsspannung
U_T	Teilchenumfangsspannung ($U_T = U \sin \psi_s$)

α	momentum compaction oder ($-\frac{1}{2}\beta'$)
β	Amplitudenfunktion
γ	Energie in Einheiten der Ruhenergie oder $\gamma = \frac{1+\alpha^2}{\beta}$
δ	$\frac{\Delta P}{P_0}$
ε	Emittanz oder Photonenenergie
θ	Streuwinkel
λ	HF-Wellenlänge

ρ	Krümmungsradius der Sollbahn
σ	Wirkungsquerschnitt oder Standardabweichung
τ	Lebensdauer
$\phi = \Delta\Psi = \Psi - \Psi_s$	Abweichung von der Sollphase
$\omega_0 = 2\pi f_0$	Umlaufkreisfrequenz
Ψ	Phase der Synchrotronschwingung
Ψ_s	Sollphase der Synchrotronschwingung
ϕ	halber Kreuzungswinkel im Wechselwirkungspunkt
Ω	Synchrotron-Kreisfrequenz

Optik der idealen Maschine

von

K. Steffen

	S.
1) Koordinatensystem	6
2) Lineare Bahngleichungen und Hauptbahnen	7
3) Amplituden- und Phasenfunktion	12
4) Amplitudenfunktion in der periodischen Maschine; Betatronschwingungen	16
5) Dispersion in der periodischen Maschine	18
6) Bahnlänge und Momentum Compaction Faktor	18

1. Koordinatensystem

Wir betrachten nur Strahlführungssysteme, die aus Magneten mit gemeinsamer horizontaler Symmetrieebene aufgebaut sind. In dieser Aquipotentialebene $z \equiv 0$ wählen wir eine mögliche, zum Sollimpuls p_0 gehörige Teilchenbahn aus und beschreiben alle anderen Teilchenbahnen bezogen auf diese Sollbahn.

Entlang dieser Sollbahn definieren wir ein mit dem zu betrachtenden Teilchen mitbewegtes, rechtwinkliges, rechtshändiges Koordinatensystem $\{z, x, s\}$ mit den Achsen $\vec{z}_0, \vec{x}_0, \vec{s}_0$ (Abb.1).

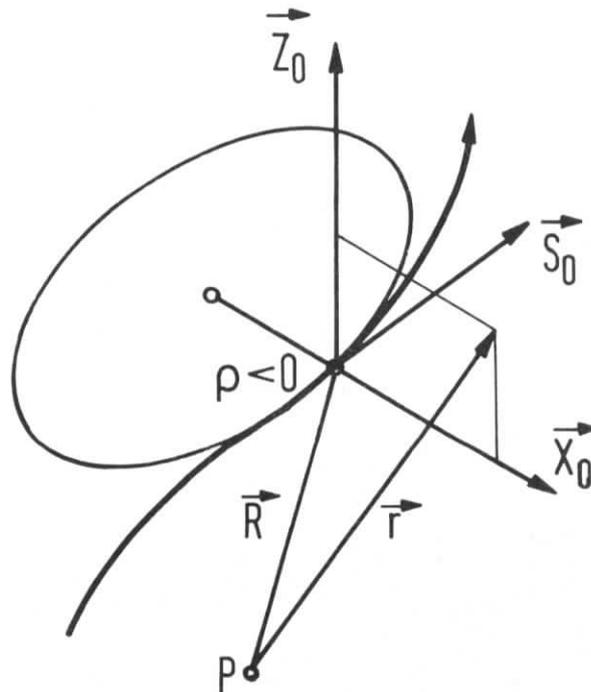


Abb.1 Mitbewegtes Koordinatensystem

- s ist die Koordinate des Ursprungs auf der Sollbahn
- z ist der Abstand von der Symmetrieebene
- x ist die Koordinate gemessen in der Symmetrieebene als Abstand von der Sollbahn.

Die Verlängerung der x-Achse geht durch den Krümmungsmittelpunkt; wir wählen den Krümmungsradius $\rho > 0$ wenn der Krümmungsmittelpunkt eine positive x-Koordinate hat.

Bezogen auf einen Aufpunkt P ist \vec{R} der Ortsvektor des Ursprungs und

$$\vec{r} = z \cdot \vec{z}_0 + x \cdot \vec{x}_0 + \vec{R} \quad (1)$$

der Ortsvektor des zu betrachtenden Teilchens.

2. Lineare Bahngleichungen und Hauptbahnen

Wir gehen aus von der Lorentz-Gleichung

$$\vec{p} = e [\vec{v}, \vec{B}] \quad \text{oder} \quad m \ddot{\vec{r}} = e [\dot{\vec{r}}, \vec{B}] \quad (2)$$

und erhalten daraus Bahngleichungen in den Koordinaten durch zweimaliges Differenzieren von (1) und Einsetzen in (2), wobei die Ableitungen der Koordinatenachsen wie folgt gegeben sind:

$$\dot{\vec{z}}_0 = 0 \quad ; \quad \dot{\vec{x}}_0 = -\frac{v}{\rho} \vec{s}_0 \quad ; \quad \dot{\vec{s}}_0 = \frac{v}{\rho} \vec{x}_0 \quad .$$

Setzen wir speziell für das mit dem Sollimpuls p_0 auf der Sollbahn laufende Teilchen

$$\vec{p} = p_0 \cdot \vec{s}_0 \quad ; \quad \vec{v} = v \cdot \vec{s}_0 \quad ; \quad \vec{B} = B \cdot \vec{z}_0$$

in Gleichung (2) ein, so folgt

$$p_0 \frac{v}{\rho} \vec{x}_0 = e v B [\vec{s}_0, \vec{z}_0] = e v B \vec{x}_0 \quad ,$$

also

$$\frac{e}{p_0} B = \frac{1}{\rho} \quad . \quad (3)$$

Das - im allgemeinen kleine - Glied $\frac{1}{\rho^2} x$ in der Bahngleichung für die x-Koordinate stellt die im Ablenkkfeld vorhandene sog. schwache Fokussierung dar, die sich wie folgt veranschaulichen läßt: Schreiben wir die Gleichung für $k = 0$ und $\frac{1}{\rho} = \text{const}$ in der Form

$$\ddot{x} + \frac{v^2}{\rho^2} x = 0$$

so beschreibt sie eine normale Schwingung mit der Kreisfrequenz

$$\omega = \frac{v}{\rho} = 2\pi \frac{v}{\lambda} ,$$

d.h. mit der Wellenlänge $\lambda = 2\pi\rho$.

Die Wellenlänge ist gleich dem Umfang der kreisförmigen Sollbahn, und ein Teilchen, das auf der Sollbahn unter einem Winkel startet, trifft sie zum zweiten Mal wieder nach genau einer Umfangslänge.



Die allgemeine Lösung der für $\frac{\Delta p}{p_0} = 0$ gegebenen homogenen Bahngleichung

$$y'' \pm Ky = 0 \tag{5a}$$

ist eine lineare Superposition zweier linear unabhängiger Lösungen $C(s)$ und $S(s)$ für die wir, an der Stelle $s = 0$, die folgenden Anfangsbedingungen wählen:

$$\begin{pmatrix} C \\ C' \end{pmatrix}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} S \\ S' \end{pmatrix}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} . \tag{6}$$

Wir bezeichnen $C(s)$ als "cosinusähnliche" und $S(s)$ als "sinusähnliche Bahn", und beide als "Hauptbahnen".

Führen wir noch als weitere Hauptbahn die "Dispersionsbahn" oder "Dispersion" $D(s)$ ein als diejenige partikuläre Lösung der inhomogenen Bahngleichung

$$D'' - \left(k - \frac{1}{\rho^2} \right) D = - \frac{1}{\rho} \tag{7}$$

die an der Stelle $s = 0$ mit den Anfangsbedingungen

Wir entwickeln nun das Magnetfeld in der Umgebung der Sollbahn nach Potenzen der Koordinaten:

$$\begin{aligned} \frac{e}{p_0} B_z &= \frac{1}{\rho} + kx + \dots \\ \frac{e}{p} B_x &= kz + \dots \end{aligned} \tag{4}$$

mit $\frac{1}{\rho} = \frac{e}{p_0} B_z$ und $k = \frac{e}{p_0} \frac{\partial B_z}{\partial x} = \frac{e}{p_0} \frac{\partial B_x}{\partial z}$.

$\frac{1}{\rho(s)}$ beschreibt das Dipolfeld und $k(s)$ den transversalen Feldgradienten, d.h. das Quadrupolfeld entlang der Sollbahn. Diese Feldanteile können sowohl getrennt auftreten (homogene Ablenkmagnete und Quadrupole) als auch an einer Stelle superponiert (Endfelder, Synchrotronmagnete).

Setzt man die Feldentwicklung (4) in die Lorentz-Gleichung (2) ein, schreibt für den Impuls

$$p = p_0 \left(1 + \frac{\Delta p}{p_0} \right)$$

drückt die Zeitableitungen aus durch Ableitungen nach s und vernachlässigt alle nichtlinearen Glieder in den Koordinaten, deren Ableitungen und $\frac{\Delta p}{p_0}$, so erhält man die linearen Bahngleichungen

$$\begin{aligned} z'' + kz &= 0 \\ x'' - \left(k - \frac{1}{\rho z} \right) x &= - \frac{1}{\rho} \frac{\Delta p}{p_0} \end{aligned} \tag{5}$$

Die lineare Strahloptik besteht in der Auswertung dieser Gleichungen. Für $\frac{1}{\rho} = 0$ sind die Gleichungen von der Form

$$y'' \pm ky = 0$$

Das durch k repräsentierte Quadrupolfeld wirkt in der einen Koordinate fokussierend, denn dort ist $y''/y < 0$ und die Teilchenbahn wird zur Sollbahn hingebogen. In der anderen Koordinate hat das Glied $k \cdot y$ das umgekehrte Vorzeichen, d.h. $y''/y > 0$, und die Bahn wird von der Sollbahn weggebogen, also defokussiert. Eine starke Gesamtfokussierung in beiden Koordinaten läßt sich nur erreichen durch Hintereinanderstellen von Quadrupolfeldern abwechselnden Vorzeichens.

3. Amplituden- und Phasenfunktion

Nachdem wir bisher nur die einzelne Teilchenbahn behandelt haben, wenden wir uns jetzt der Beschreibung eines Strahls, d.h. einer Gesamtheit von Teilchenbahnen in der Umgebung der Sollbahn zu.

Wir definieren den Strahl an der Stelle s in jeder Koordinate durch eine "Emittanzellipse" in der $\{y, y'\}$ -Phasenebene, die um die Sollbahn zentriert ist. Alle Bahnen, deren Anfangsbedingungen an der Stelle s auf dem Rand oder im Inneren dieser Ellipse liegen, bilden den "Strahl". Wir können dann den Strahlverlauf beschreiben, indem wir die Ellipse durch das optische System hindurchtransformieren. Dabei ändert die Ellipse als Funktion von s ihre Form und Lage, wobei ihr Flächeninhalt (und damit auch die Teilchendichte in der Phasenebene) ungeändert bleibt.

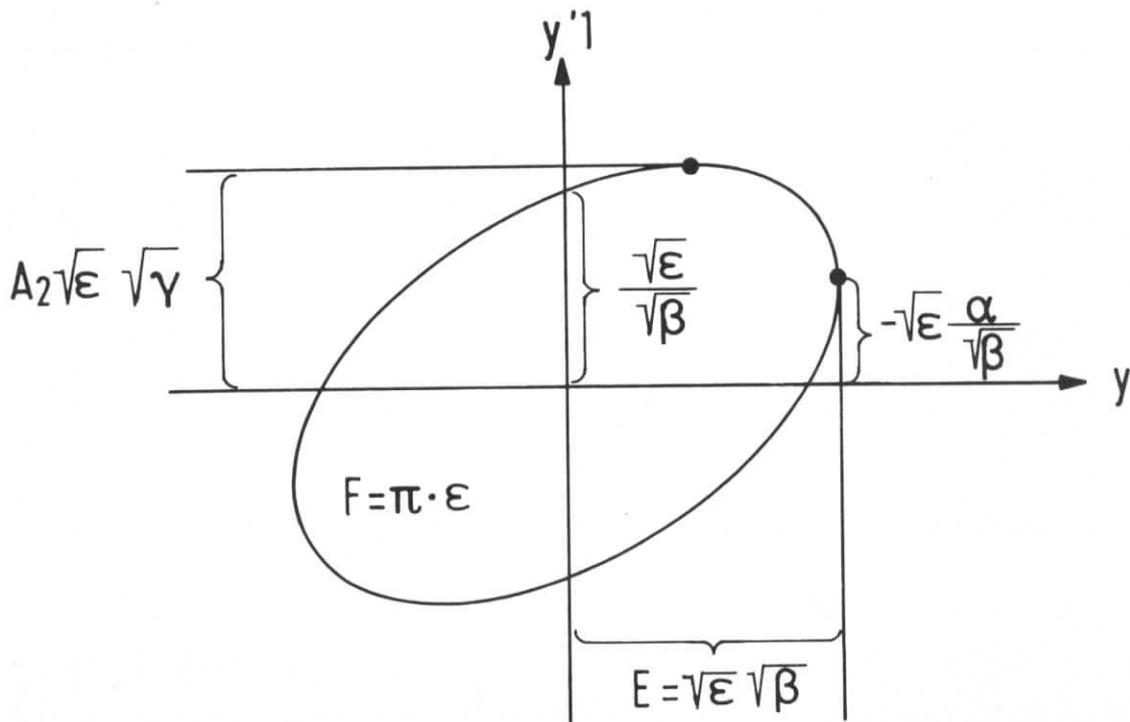


Abb.2 Emittanzellipse in der Phasenebene

Die Ellipsenfläche, geteilt durch π , bezeichnen wir als "Emittanz" ϵ und schreiben die Ellipsengleichung in normierter Form

$$\gamma \cdot y^2 + 2\alpha \cdot yy' + \beta \cdot y'^2 = \epsilon \quad . \quad (11)$$

Zwischen den Koeffizienten $\beta(s)$, $\alpha(s)$ und $\gamma(s)$ besteht dann die Beziehung

$$\beta\gamma - \alpha^2 = 1 \quad \text{oder} \quad \gamma = \frac{1 + \alpha^2}{\beta} \quad . \quad (12)$$

Bei der Transformation der Ellipse durch das System ist die "Strahlenvelope" $y_{\max}(s) = E(s)$ gegeben als

$$E = \sqrt{\epsilon} \sqrt{\beta} \quad (13)$$

$\beta(s)$ heißt "Amplitudenfunktion" und hängt ab von den Anfangsbedingungen β_0 und α_0 . Die Steigung E' der Enveloppe ist gleich der Steigung der Teilchenbahn, die an der Stelle s die Enveloppe definiert, d.h.

$$E' = -\sqrt{\epsilon} \frac{\alpha}{\sqrt{\beta}} \quad . \quad (14)$$

Andererseits folgt durch Differenzieren von (13)

$$E' = \sqrt{\epsilon} \frac{\beta'}{2\sqrt{\beta}} \quad .$$

Daher gilt

$$\beta' = -2\alpha \quad \text{oder} \quad \alpha = -\frac{1}{2}\beta' \quad . \quad (15)$$

Die "Strahldivergenz" $y'_{\max}(s) = A(s)$ ist gegeben durch

$$A = \sqrt{\epsilon} \sqrt{\gamma} \quad . \quad (16)$$

Die Ellipsenparameter β , α und γ lassen sich als Funktionen von s durch lineare Transformation mit einer dreireihigen Matrix berechnen. Setzt man nämlich in die Ellipsengleichung (11) die inverse Bahntransformation

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}_0 = \begin{pmatrix} S' & -S \\ -C & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}_S$$

ein, so erhält man in Matrixschreibweise

$$\begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \\ \gamma \end{pmatrix}_S = \begin{pmatrix} C^2 & -2CS & S^2 \\ -CC' & CS' + SC' & -SS' \\ C'^2 & -2C'S' & S'^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \\ \gamma \end{pmatrix}_0 \quad (17)$$

Ein einfacheres Berechnungsverfahren gewinnen wir jedoch, wenn wir die Ellipse in Parameterdarstellung schreiben. Wir führen eine "Phasenfunktion" $\phi(s)$ und einen Phasenparameter δ ein und setzen

$$y = \sqrt{\epsilon} \sqrt{\beta} \cos(\phi - \delta) \quad . \quad (18)$$

Durch Differenzieren folgt dann

$$y' = -\sqrt{\epsilon} \left\{ \frac{\alpha}{\sqrt{\beta}} \cos(\phi - \delta) + \sqrt{\beta} \phi' \sin(\phi - \delta) \right\} \quad .$$

Für $\cos(\phi - \delta) = 0$; $\sin(\phi - \delta) = -1$ muß gelten

$$\sqrt{\epsilon} \sqrt{\beta} \phi' = \frac{\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{\beta}} \quad ,$$

also

$$\phi' = \frac{1}{\beta} \quad \text{oder} \quad \phi(s) = \int_{s_0}^s \frac{1}{\beta(\tau)} d\tau \quad (19)$$

und damit

$$y' = -\sqrt{\epsilon} \left\{ \frac{\alpha}{\sqrt{\beta}} \cos(\phi - \delta) + \frac{1}{\sqrt{\beta}} \sin(\phi - \delta) \right\} \quad . \quad (18a)$$

Durchläuft der Phasenparameter δ alle Phasen von 0 bis 2π , so durchläuft der Punkt

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$$

einmal im Gegenuhrzeigersinn die Ellipse.

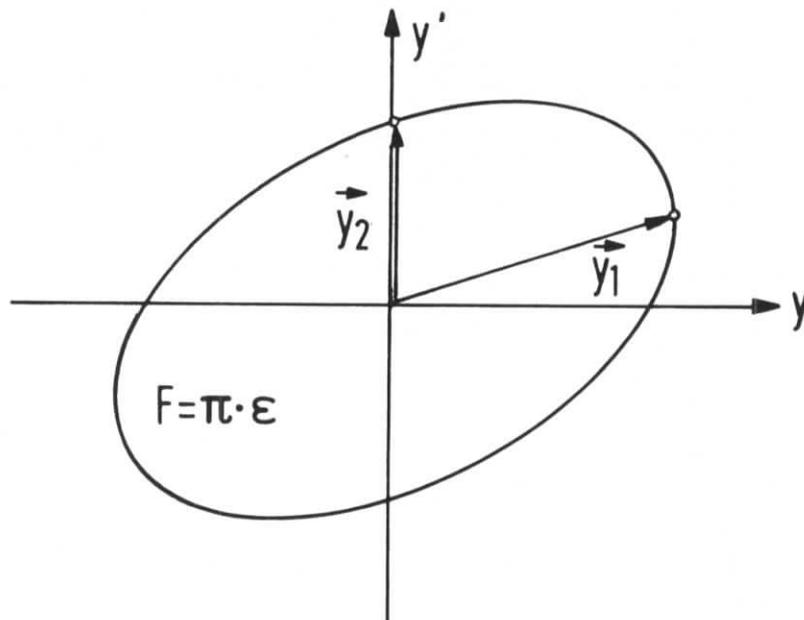


Abb.3: Emittanzellipse mit konjugierten Bahnen

Wählen wir zwei "konjugierte" Teilchenbahnen

$$\vec{y}_1 = \begin{pmatrix} y_1 \\ y'_1 \end{pmatrix} = \sqrt{\epsilon} \begin{pmatrix} \sqrt{\beta} \cos \phi \\ -\frac{\alpha}{\sqrt{\beta}} \cos \phi - \frac{1}{\sqrt{\beta}} \sin \phi \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

$$\vec{y}_2 = \begin{pmatrix} y_2 \\ y'_2 \end{pmatrix} = \sqrt{\epsilon} \begin{pmatrix} \sqrt{\beta} \sin \phi \\ -\frac{\alpha}{\sqrt{\beta}} \sin \phi + \frac{1}{\sqrt{\beta}} \cos \phi \end{pmatrix}$$

auf der Ellipse, so läßt diese sich schreiben

$$\vec{y} = \vec{y}_1 \cos \delta + \vec{y}_2 \sin \delta .$$

Mit Hilfe zweier solcher konjugierter Bahnen lassen sich die Ellipsenparameter als Funktion von s besonders einfach berechnen; es ergibt sich unmittelbar

$$\begin{aligned} \varepsilon \cdot \beta &= y_1^2 + y_2^2 \\ \varepsilon \cdot \gamma &= \varepsilon \cdot \frac{1 + \alpha^2}{\beta} = y_1'^2 + y_2'^2 \\ \varepsilon \cdot \beta' &= \varepsilon \cdot (-2\alpha) = 2(y_1 y_1' + y_2 y_2') \end{aligned} \quad (20)$$

Es ist vielfach nützlich, die Hauptbahnen $C(s)$ und $S(s)$ durch die Amplituden- und Phasenfunktionen auszudrücken; man erhält dann für die Transformationsmatrix

$$M = \begin{pmatrix} C & S \\ C' & S' \end{pmatrix} \quad (21)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\beta_0}} (\cos \phi + \alpha_0 \sin \phi) & \sqrt{\beta_0} \sqrt{\beta} \sin \phi \\ -\frac{1}{\sqrt{\beta_0} \sqrt{\beta}} [(\alpha - \alpha_0) \cos \phi + (1 + \alpha \alpha_0) \sin \phi] & \frac{\sqrt{\beta_0}}{\sqrt{\beta}} (\cos \phi - \alpha \sin \phi) \end{pmatrix}$$

Man sieht, daß C und S die Form (18) haben, also die Bahngleichung lösen, und daß sie die Anfangsbedingungen

$$C_0 = S'_0 = 1 \quad \text{und} \quad S_0 = C'_0 = 0$$

erfüllen.

4. Amplitudenfunktion in der periodischen Maschine; Betatronschwingungen

Die bisher betrachtete Amplitudenfunktion β ist nur definiert, wenn ihre Anfangswerte β_0 und $\beta'_0 = -2\alpha_0$ an einer Stelle des Systems vorgegeben

sind. Gehen wir jetzt zu einer in sich geschlossenen Maschine, d.h. einer periodischen optischen Struktur über, so gibt es in ihr im stabilen Betriebsfall genau eine in sich geschlossene Amplitudenfunktion, die sich berechnen läßt mit Hilfe der Periodizitätsbedingungen

$$\beta(s + L) = \beta(s) \quad ; \quad \beta'(s + L) = \beta'(s) \quad .$$

Diese periodische Amplitudenfunktion ist ein wichtiges Charakteristikum der Maschine, denn sie beschreibt - wenn die geforderte Strahlemittanz ϵ festliegt - die Enveloppe $E(s) = \sqrt{\epsilon} \sqrt{\beta(s)}$, die dem Strahl an der Stelle s als freie Halbapertur mindestens zur Verfügung stehen muß. Wird die freie Apertur dieser Enveloppe genau angepaßt, so werden alle Teilchen, die nicht innerhalb der durch $\epsilon \cdot \beta$ gegebenen Emittanzellipse liegen, früher oder später die Wand treffen und verloren gehen. Die anderen Teilchen führen innerhalb der Enveloppe Fokussierungsschwingungen, sog. "Betatronschwingungen" um die Sollbahn aus. Die Zahl Q der Betatronschwingungen pro Umlauf ist gegeben durch den Phasenzuwachs $\Delta\phi$ pro Umlauf:

$$Q = \frac{1}{2\pi} \Delta\phi = \frac{1}{2\pi} \int_s^{s+L} \frac{1}{\beta(\tau)} d\tau \quad .$$

Wegen der Periodizität von β ist das Integral unabhängig von s .

Zur Berechnung der periodischen Amplitudenfunktion β bilden wir die Matrix (21) für einen Umlauf, indem wir

$$\beta = \beta_0 \quad , \quad \alpha = \alpha_0 \quad \text{und} \quad \phi = 2\pi Q$$

einsetzen, und setzen sie gleich derjenigen Matrix, die sich - zahlenmäßig - aus der Multiplikation der Matrizen für die im Ring vorhandenen optischen Elemente errechnet:

(22)

$$M = \begin{pmatrix} \cos 2\pi Q + \alpha \sin 2\pi Q & \beta \sin 2\pi Q \\ -\gamma \sin 2\pi Q & \cos 2\pi Q - \alpha \sin 2\pi Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & S \\ C' & S' \end{pmatrix}$$

5. Dispersion in der periodischen Maschine

Die allgemeine Lösung der Bahngleichung

$$x'' - Kx = -\frac{1}{\rho}$$

kann man schreiben:

$$x = \sqrt{\epsilon} \sqrt{\beta} \cos(\phi - \delta) + \sqrt{\beta} \int_{s_0}^s \frac{1}{\rho(\tau)} \sqrt{\beta(\tau)} \sin(\phi(\tau) - \phi(s)) d\tau \quad (23)$$

wie man durch Einsetzen verifiziert.

Die geschlossenen Dispersionsbahn $D(s)$ erhält man hieraus, indem man

$$x(s_0 + L) = x(s_0) \quad \text{und}$$

$$x'(s_0 + L) = x'(s_0) \quad \text{setzt; es ergibt sich}$$

$$D = -\frac{\sqrt{\beta}}{2 \sin \pi Q} \int_s^{s+L} \frac{\sqrt{\beta(\tau)}}{\rho(\tau)} \cos(\phi(\tau) - \phi(s) - \pi Q) d\tau \quad (24)$$

Die Amplitude der Dispersionsbahn geht gegen ∞ , wenn die Zahl Q der Betatronschwingungen gegen eine ganze Zahl geht. Man spricht dann von einem "ganzzahligen Stopband", dessen Grenze erreicht ist, wenn die im Strahl vorhandenen Teilchen maximaler Impulsabweichung die Apertur streifen und verlorengelangen.

6. Bahnlänge und Momentum Compaction Factor

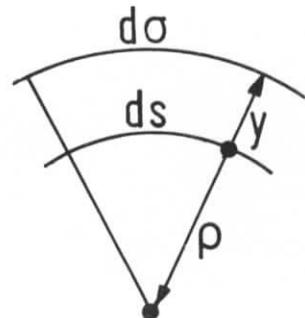
Berechnet man die Umlaufslänge einer Bahn

$$\text{mit } \tilde{L} = \oint d\sigma$$

so ist in linearer Approximation

$$d\sigma = \frac{\rho - y}{\rho} ds, \quad \text{d.h.}$$

$$\tilde{L} = \oint d\sigma = \oint ds - \oint \frac{y}{\rho} ds = L + \Delta L$$



Ein wichtiger Maschinenparameter für den Mechanismus der Synchrotron-
schwingung ist der "momentum compaction factor" α , der die Änderung ΔL
in der Länge der geschlossenen Bahn als Funktion der relativen Impulsab-
weichung $\frac{\Delta p}{p_0}$ angibt:

$$\frac{\Delta L}{L} = \alpha \cdot \frac{\Delta p}{p_0} \quad \text{oder, für } \frac{\Delta p}{p_0} = 1$$

$$\alpha = \frac{1}{L} \cdot \Delta L_D = - \frac{1}{L} \oint \frac{D}{\rho} ds \quad (25)$$

Der momentum compaction factor läßt sich also durch Integration über die
mit $\frac{1}{\rho(s)}$ multiplizierte Dispersionsbahn $D(s)$ berechnen.

Feldfehler
und
Optik höherer Ordnung
von

H. Wiedemann

	S.
1) Bewegungsgleichungen	21
2) Potentialentwicklung	22
3) Bewegungsgleichungen in II.Ordnung in den Koordinaten	23
4) Diskussion der Bewegungsgleichungen	24
5) Berücksichtigung der Endfelder in der homogenen Differentialgleichung	25
6) Lösung der allgemeinen Bewegungsgleichung	28
7) Amplitudenfunktion und Arbeitspunkt	29
8) Closed-Orbit - Ganzzahlige Resonanzen	30
9) Halbzahlige Resonanzen	32
10) Höhere Resonanzen	33
11) Stopband und Satellitenstopbänder	34
12) Der Beatfaktor	36
13) Sextupolkorrektur des Arbeitspunktes	36
14) Oktupoleinfluß und Landaudamping	37

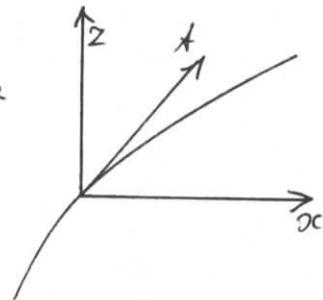
Die lineare Optik umfaßt die Methode, mit der man in einem System von Ablenkmagneten und Quadrupolen Teilchenbahnen, Dispersionsbahnen und Strahlenveloppen definiert und berechnet. Mit den Ergebnissen der linearen Optik ist es möglich ein geschlossenes Magnetsystem zu entwerfen, in dem die Strahlenveloppen geeigneten Periodizitätsbedingungen genügen, so daß geladene Teilchen über eine Vielzahl von Umläufen innerhalb der Apertur des Systems gehalten werden können. Eine Diskussion der höheren optischen Effekte zeigt jedoch, daß ein Kreisbeschleuniger, der nur nach den Ergebnissen der linearen Optik aufgebaut wird, nur per Zufall funktionieren würde. Die Optik höherer Ordnung ergibt nicht nur kleine Korrekturen in den Strahlendimensionen oder Teilchenbahnen, sondern wesentliche Bedingungen, die erfüllt sein müssen, damit ein Synchrotron oder Speicherring optisch sinnvoll betrieben werden kann.

1) Bewegungsgleichungen

Um die Effekte höherer Ordnung diskutieren zu können, gehen wir von den Bewegungsgleichungen in krummlinigen Koordinaten aus. Wenn $h = 1/\rho$ die Krümmung der Sollbahn im Ablenkmagneten bedeutet, ist das benutzte krummlinige Koordinatensystem durch das Linienelement

(1)

$$ds^2 = dx^2 + dz^2 + (1 - hx)^2 dt^2$$



definiert. Entwickelt man die Bewegungsgleichung

$$(2) \quad \frac{d\mathcal{P}}{dt} = \frac{e}{c^2} [\mathcal{W} \times \mathcal{L}]$$

im obigen Koordinatensystem, so ergeben sich in Komponentenschreibweise

folgende allgemeine Bewegungsgleichungen im Koordinatensystem
(x, t, z):

$$(3) \quad \begin{aligned} \ddot{x} + h(1-hx) - \frac{1}{2} \dot{x} \frac{d}{dt} \ln(\dot{s}^2) &= \frac{e\dot{s}}{cp} [(1-hx)B_z - \dot{z}B_t] \\ \ddot{z} - \frac{1}{2} \dot{z} \frac{d}{dt} \ln(\dot{s}^2) &= \frac{e\dot{s}}{cp} [\dot{x}B_t - (1-hx)B_x] \\ \dot{s}^2 &= \dot{x}^2 + \dot{z}^2 + (1-hx)^2 \end{aligned}$$

wobei die Ableitungen nach t durchgeführt werden sollen.

2) Potentialentwicklung

Um für die Bewegungsgleichungen die allgemeinen Magnetfeldentwicklungen zu erhalten, muß im krummlinigen Koordinatensystem (1) die Potentialgleichung

$$(4) \quad \Delta V \equiv 0$$

gelöst werden.

Setzt man für das Potential die Reihenentwicklung ¹⁾

$$(5) \quad V(x, t, z) = \sum_n \sum_m A_{n,m}(t) \frac{x^n}{n!} \frac{z^m}{m!}$$

an und setzt diesen Ansatz in die Potentialgleichung (4) ein, so erhält man eine Rekursionsformel für die Koeffizienten $A_{n, 2m+1}$. Der zweite Index durchläuft nur alle ungeraden Zahlen, da für alle Multipole Mittelebenensymmetrie angenommen wurde. Damit ergibt sich für das magnetische Potential in den Koordinaten bei bekannten Koeffizienten und daraus durch Differentiation die allgemeine Magnetfeldentwicklung für Multipole:

$$(6) \quad \mathcal{L}(x, t, z) = -\text{grad } V$$

3) Bewegungsgleichungen in II. Ordnung in den Koordinaten

Setzt man (6) in (3) ein und entwickelt bis zur II. Ordnung in den Koordinaten und in der Impulsabweichung δ , so erhält man:

$$\begin{aligned}
 \ddot{x} + (h^2 - k)x &= -h\dot{z} + h\dot{z}^2 + 2h^2\delta x + \frac{3}{2}x^2 h^3 \\
 &\quad - \frac{1}{2}(x^2 - z^2)h - (xx' + z\dot{z}')h \\
 &\quad - \frac{1}{2}h''z^2 + \frac{1}{2}hkz^2 - 2hkx^2 \\
 &\quad - k\delta x + \frac{1}{2}m(x^2 - z^2) \\
 &\quad + \frac{1}{6}r x(x^2 - 3z^2) + \dots
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
 \ddot{z} + kz &= -hx\dot{z} - h'xz + h'\dot{x}z \\
 &\quad + 2h'kxz \\
 &\quad + k\delta z - m'xz \\
 &\quad - \frac{1}{6}r z(3x^2 - z^2) + \dots
 \end{aligned}$$

Dabei ist die Impulsabweichung δ definiert durch $p = p_0 \cdot (1 + \delta)$

Die Multipolstärken sind wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}
 h(A) &= \frac{\epsilon}{cp_0} B_{z0} \Big|_{\substack{x=0 \\ z=0}} \\
 k(A) &= \frac{\epsilon}{cp_0} \frac{\partial B_z}{\partial x} \Big|_{\substack{x=0 \\ z=0}} \\
 m(A) &= \frac{\epsilon}{cp_0} \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} \Big|_{\substack{x=0 \\ z=0}} \\
 r(A) &= \frac{\epsilon}{cp_0} \frac{\partial^3 B_z}{\partial x^3} \Big|_{\substack{x=0 \\ z=0}}
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

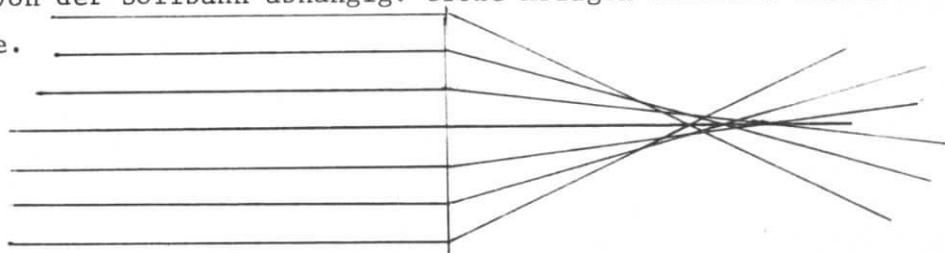
4) Diskussion der Bewegungsgleichungen (7)

Bevor wir die Bewegungsgleichungen (7) lösen, wollen wir die einzelnen Terme auf ihren physikalischen Gehalt prüfen.

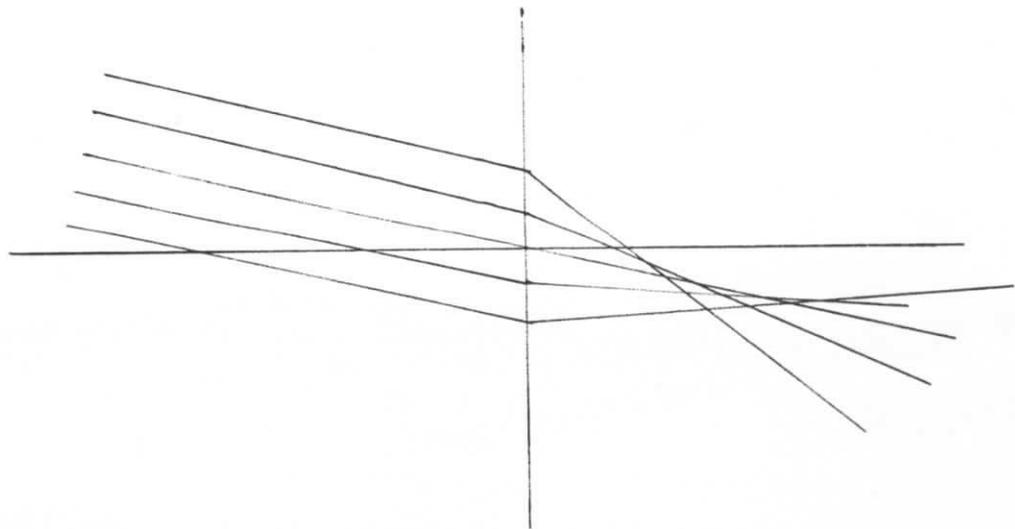
Im Term $(k-h^2)x$ bedeutet kx die Fokussierung der Teilchen im Quadrupol und $-h^2x$ eine Fokussierung im Ablenkmagneten. Das ablenkende Feld selbst kommt explizit in der Gleichung nicht vor, da es bereits in dem Koordinatensystem berücksichtigt ist, dagegen sind die Effekte, die ein von der Sollenergie abweichendes Teilchen erfährt, durch den niedrigsten Term auf der rechten Seite beschrieben $-h\delta(1-\delta)$. Die Berücksichtigung dieses Terms ergibt die Dispersionsbahn.

Die Terme $2h^2\delta x$ und $-k\delta x$ beschreiben die Fehlfokussierung, die die sollenergieabweichenden Teilchen erfahren. Alle vier Terme zusammen beschreiben die aus der Lichtoptik bekannte chromatische Aberration.

Bringt man den Term $\frac{3}{2}x^2h^3$ auf die linke Seite, so ergibt sich der Term: $(k-\frac{3}{2}h^3x)x$ d.h. die Fokussierungsstärke des Magnetsystems ist von der Ablage x von der Sollbahn abhängig. Große Ablagen bedeuten kürzere Brennweite.



Dieser Effekt ist aus der Lichtoptik als sphärische Aberration bekannt. Der dritte Linsenfehler aus der Lichtoptik ist der sog. Astigmatismus, welcher besagt, daß schräg durch eine Linse gehende Strahlen keinen gemeinsamen Brennpunkt haben.



Diese Erscheinung wird in den Bewegungsgleichungen (7) durch den Term $\frac{1}{2}(\dot{x}^2 - \dot{z}^2)h$ beschrieben.

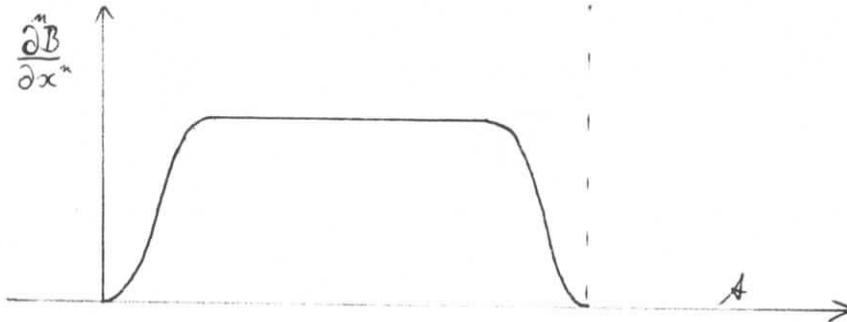
Die Terme $-(\dot{x}\ddot{x} + \dot{z}\ddot{z})h - \frac{1}{2}\ddot{z}^2h$ treten in der Lichtoptik nicht auf, da hier an der Linsenoberfläche der Brechungsindex unstetig ist, während in Magneten nur ein langsamer Übergang zum feldfreien Bereich möglich ist. Die Terme $+\frac{1}{2}hkz^2 - 2hkz$ sind nur in Synchrotronmagneten von Null verschieden und beschreiben den zu h^2x analogen fokussierenden Effekt des Quadrupolterms im Synchrotronmagneten.

Die Terme $\frac{1}{2}m(x^2 - z^2)$ und $1/6 r x(x^2 - 3z^2)$ sind endlich reine Sextupol- und Oktupolfelder, wobei die letzteren nur wegen ihrer grundsätzlichen Bedeutung für die Landaudämpfung als einziger Term III. Ordnung erwähnt werden sollen.

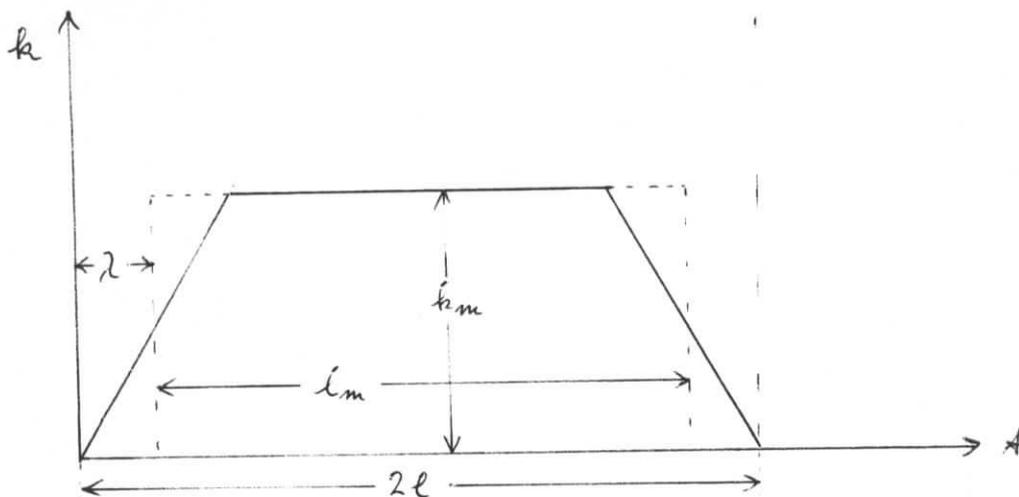
Es fällt auf, daß die sphärische Aberration und der Astigmatismus für den Quadrupol nicht vorkommt. Das erklärt sich daraus, daß ein Quadrupol außer in chromatischen Effekten bis zur II.Ordnung einschließlich linear ist und Feldstörungen erst in der III.Ordnung auftreten.

5) Berücksichtigung der Endfelder in der hom.Diffgl.(7)²⁾

Bevor die Lösung der inhom. Diffgl.(7) einen Sinn hat, muß die Abhängigkeit der Magnetstärken von der Bahnkoordinate bei der Lösung der hom.Diffgl. berücksichtigt werden. Das Feld bzw. seine Ableitungen durch einen Magneten hat etwa folgenden Verlauf:



Haben die Magnete Polabrundungen und Spiegelplatte, so fallen die Endfelder vorwiegend linear auf Null ab.



Im allgemeinen berücksichtigt man den Abfall des Endfeldes nicht und rechnet mit dem sogenannten "hard edge" Modell eines realen Magneten. Die Transformation durch einen Quadrupol nach dem hard edge Modell lautet in linearer Optik:

$$(9) \quad \begin{pmatrix} C & S \\ \dot{C} & \dot{S} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & \frac{\sin\varphi}{\sqrt{k_m}} \\ -\sqrt{k_m} \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(Ableitungen nach der Bahnkoordinate t)

wobei C und S die cosinus- und die sinusähnliche Teilchenbahn darstellt.

Diese Transformation entspricht nicht der tatsächlichen Transformation, andererseits möchte man aus rechentechnischen Gründen auf den Formalismus der linearen Optik nicht verzichten. Deshalb geht man hier den umgekehrten Weg vor: Man berechnet aus der tatsächlichen cosinus- oder sinusähnlichen Teilchenbahn über das Matrizenprodukt (9) effektive Linsenstärken k_{eff} und Linsenlängen l_{eff} eines äquivalenten "hard edge" Magneten.

Für den Fall eines Quadrupols folgt die zu lösende Gleichung aus (9) in der fokussierenden (+) Ebene:

$$(10) \quad \begin{pmatrix} C^+ & S^+ \\ \dot{C}^+ & \dot{S}^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi^+ - \lambda\sqrt{k^+} \sin\varphi^+ & \lambda \left\{ 2\cos\varphi^+ + \left(\frac{1}{\lambda\sqrt{k^+}} - \lambda\sqrt{k^+} \right) \sin\varphi^+ \right\} \\ -\sqrt{k^+} \sin\varphi^+ & \cos\varphi^+ - \lambda\sqrt{k^+} \sin\varphi^+ \end{pmatrix}$$

Etwas umgeformt ergeben sich folgende Bestimmungsgleichungen für die fokussierende Ebene:

$$\begin{aligned}
 C^+ - l^+ \dot{C}^+ &= \cos \varphi^+ + \frac{1}{2} \varphi^+ \sin \varphi^+ \\
 l^+ &= -\frac{\varphi^+}{\dot{C}^+} \sin \varphi^+
 \end{aligned}
 \tag{11a}$$

Die sich ergebenden effektiven Quadrupolstärken und -längen sind nicht mehr unabhängig von der betrachteten Ebene im Koordinatensystem und außerdem Funktionen von k_m .

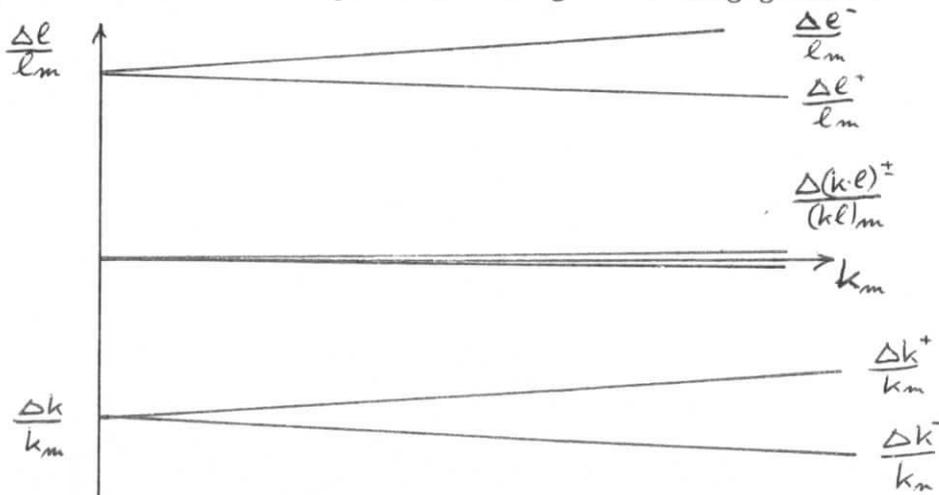
Analog zu (11a) ergibt sich für die defokussierende Ebene:

$$\begin{aligned}
 C^- - l^- \dot{C}^- &= \cos \varphi^- - \frac{1}{2} \varphi^- \sin \varphi^- \\
 l^- &= -\frac{\varphi^-}{\dot{C}^-} \sin \varphi^-
 \end{aligned}
 \tag{11b}$$

Aus (11a) und (11b) können die effektiven Größen l^+ , l^- , ϕ^+ , ϕ^- und mit $\phi = l\sqrt{k}$ auch k^+ und k^- berechnet werden.

Trägt man $\frac{k^+ - k_m}{k_m}$; $\frac{l^\pm - l_m}{l_m}$ und $\frac{(kl)^\pm - (kl)_m}{(kl)_m}$

gegen k_m auf, so erhält man qualitativ folgende Abhängigkeiten:



Bei Quadrupolen, deren magnetische Länge nicht größer als das 2-3fache der Apertur ist, sind die Fehler $\frac{\Delta l}{l_m}$ und $\frac{\Delta k}{k_m}$ etwa 8%. Dies entspricht in der Brennweite einem Fehler bis zu etwa 4% bei kleinen Brennweiten.

6) Lösung der allgem. Bewegungsgl. ¹⁾

Zur Lösung der Diffgl (7) werden die Taylorreihen :

$$(12) \quad x = \sum_{\lambda, \mu, \nu, \sigma} q_{x, \lambda \mu \nu \sigma} x_0^\lambda z_0^\mu \dot{x}_0^\nu \dot{z}_0^\sigma \delta^\sigma$$

$$z = \sum_{\lambda, \mu, \nu, \sigma} q_{z, \lambda \mu \nu \sigma} x_0^\lambda z_0^\mu \dot{x}_0^\nu \dot{z}_0^\sigma \delta^\sigma$$

eingesetzt.

Ordnet man nach den Potenzen $x_0^\lambda z_0^\mu \dot{x}_0^\nu \dot{z}_0^\sigma \delta^\sigma$

so erhält man für alle Koeffizienten q folgende Diffgl.:

$$(13) \quad \ddot{q}_{x,z} + K_{x,z} q_{x,z} = f(A) \quad \begin{matrix} K_x = h^2 - k \\ K_z = k \end{matrix}$$

wobei f die zu dem betreffenden Koeffizienten gehörende Störfunktion bedeutet.

Eine Lösung der inhomogenen Diffgl. lautet:

$$(14) \quad q(A) = \int_c^A f(\tau) [S(A) C(\tau) - C(A) S(\tau)] d\tau$$

wobei S und C wieder die sinus- und cosinusähnliche Teilchenbahn als Lösungen der homogenen Differentialgleichung sind.

Die Störfunktionen f sind zunächst von der Form:

$$(15) \quad f = f(x, \dot{x}, z, \dot{z}, \delta, h, k, m, \dots)$$

Wir haben also in (14) eine Integralgleichung, die man durch sukzessive Approximation löst, indem man in f für die Koordinaten die Lösungen der hom. Diffgl. einsetzt. Die Störfunktionen haben damit die Form :

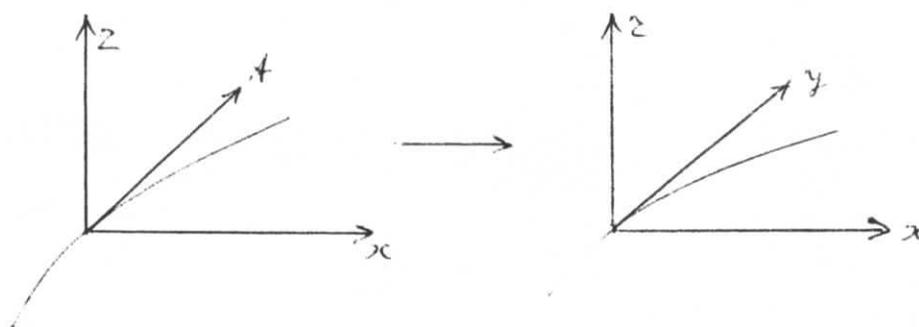
$$(16) \quad f = f(C_x, \dot{C}_x, C_z, \dot{C}_z, S_x, \dot{S}_x, \dots, \delta, h, k, \dots)$$

Damit kann die Lösung (12) der Diffgl.(7) als bekannt vorausgesetzt werden.

Für praktische Rechnungen muß noch das Ergebnis von krummlinigen Koordinaten in kartesische transformiert werden:

$$(17) \quad x' = \frac{dx}{dy} = \frac{\dot{x}}{1-hx} ; \quad z' = \frac{dz}{dy} = \frac{\dot{z}}{1-hx}$$

$$(x, y, z) \longrightarrow (x', y, z')$$



Man kann nun die Taylorentwicklung mit bekannten Koeffizienten für x, x', z, z' und Kombinationen aus diesen Größen angeben und dieses System von Gleichungen in Matrixschreibweise darstellen.

Mit diesen Matrizen lassen sich nun Strahlführungswege und Spektrometer in höherer Ordnung entwerfen.

8) Amplitudenfunktion und Arbeitspunkt ³⁾

Sehr aufwendig wird dieser Matrixformalismus, wenn man bei einem Kreisbeschleuniger für alle Komponenten Periodizitätsbedingungen erfüllen will. Hier ist es einfacher und übersichtlicher, den Einfluß jeder Störfunktion einzeln zu untersuchen.

Dabei werden wir die große Bedeutung, die die Amplitudenfunktion für das Verhalten des Strahls in einem Kreisbeschleuniger hat, kennenlernen. Aus diesem Grunde sollen die wichtigsten Eigenschaften der Amplitudenfunktion noch einmal aufgezeigt werden.

Die Gesamtheit eines Teilchenstrahls an irgendeiner Stelle wird durch

eine Phasenellipse dargestellt:

$$(18) \quad \gamma y^2 + 2\alpha y \dot{y} + \beta \dot{y}^2 = \varepsilon \quad y = x \text{ bzw. } z$$

Da γ und α Funktionen von β sind, kann (18) als Bestimmungsgleichung für β angesehen werden. Leitet man die Gl.(18) zweimal nach der Bahnkoordinate t ab und setzt $\ddot{y} = \mp ky$ ein, so erhält man eine Diffgl. für β , die nur noch von der Magnetstruktur abhängt:

$$(19) \quad \frac{d^2}{dt^2} \sqrt{\beta} \pm K \sqrt{\beta} - \frac{1}{\sqrt{\beta}} = 0$$

Nachdem β in (18) nur ein Ellipsenparameter war, ist in Gl.(19) ein direkter Zusammenhang von Magnetstruktur k^2 und Amplitudenfunktion hergestellt.

Ist für ein beliebiges Magnetsystem die Amplitudenfunktion bekannt, so können alle übrigen optischen Aussagen aus dieser Funktion abgeleitet werden.

Für unsere weitere Diskussion ist die Phasenbeziehung besonders wichtig:

$$(20) \quad \varphi(t) = \int_{t_0}^t \frac{dt}{\beta(t)}$$

Für einen Kreisbeschleuniger kann daraus der sog. Q-Wert oder Arbeitspunkt berechnet werden:

$$(21) \quad Q = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{dt}{\beta(t)}$$

9) Closed-Orbit - Ganzzahlige Resonanzen³⁾

Nach diesen allgemeinen Bemerkungen sollen spezielle Probleme beim Bau von Kreisbeschleunigern besprochen werden, die durch die nichtlineare Optik beschrieben werden können.

Zu jedem Kreisbeschleuniger gibt es für jeden Teilchenimpuls genau eine geschlossene Teilchenbahn, die man den "Closed orbit" nennt. Wir wollen die Eigenschaften dieses Closed orbit berechnen. Da er eine Teilchenbahn

ist, muß er der Gleichung

$$(22) \quad \ddot{y} + k y = f(A)$$

genügen, welche mit $\eta = \frac{y}{\beta}$ und $\psi = \int \frac{ds}{Q\beta}$
in:

$$(23) \quad \ddot{\eta} + Q^2 \eta = Q^2 F(\psi) \quad F(\psi) = \beta^{3/2} f(A)$$

übergeht. (Ableitungen nach ψ)

Die allgemeine Lösung lautet:

$$(24) \quad \eta(\psi) = \eta_0 \cos Q\psi + \frac{\dot{\eta}_0}{Q} \sin Q\psi + Q \int_0^\psi F(\psi) \sin Q(\psi - \tau) d\tau$$

Führt man in diese Gl. die Periodizitätsbedingung

$$\eta(2\pi) = \eta_0 \quad \dot{\eta}(2\pi) = \dot{\eta}_0$$

ein, so erhält man nach geeigneten Umformungen

$$(25) \quad \eta(\psi) = \frac{Q}{2 \sin \pi Q} \int_\psi^{\psi+2\pi} F(\tau) \cos Q(\psi - \tau + \pi) d\tau$$

Setzt man hier

$$F(\tau) = -\beta^{3/2} h c^\delta$$

so erhält man den Closed orbit für sollenergieabweichende Teilchen, oder für $\delta = 1$ die Dispersionsbahn. Man erkennt sofort, daß die Amplitude des Closed orbit über alle Grenzen wächst, falls man für den Arbeitspunkt Q des Beschleunigers eine ganze Zahl wählt. Diese Erscheinung nennt man eine ganzzahlige Resonanz.

Andererseits kann die Größe $h\delta$ auch als eine Fehleinstellung der Magneten für Sollteilchen gedeutet werden:

$$h c^\delta = -\Delta h \sim \Delta B$$

wobei

$$\begin{aligned} \Delta B &::= \Delta B \\ &= \chi \cdot B_0 \\ &= \Delta x \cdot k \end{aligned} \quad \text{bedeuten kann.}$$

Fehlerhafte Einstellungen ΔB und Drehungen χ der Ablenkmgnete sowie fehlerhafte Aufstellungen der Quadrupole Δx erzeugen auch für Sollteilchen einen von der Sollbahn abweichenden Closed orbit. Nehmen wir an, daß diese Fehler nur diskret auftreten, so kann (25) in eine Summe umgeschrieben werden:

$$(26) \quad y(A_i) = \frac{1}{2 \sin \pi Q} \sqrt{\beta_i} \sum_j \sqrt{\beta_j} \cdot f_j \cdot l_j \cos Q (\psi_i - \psi_j + \pi)$$

Das heißt Closed-orbit-Verbiegungen sind umso größer, je näher der Arbeitspunkt bei einer ganzen Zahl liegt und je größer die Betatronamplitude an den Stellen der Beobachtung i und des Fehlers j ist.

10) Halbzahlige Resonanzen³⁾

Als nächstes wollen wir in Gl. (7) die Terme, die nur linear von x abhängen, untersuchen. Es ergibt sich sofort, daß hier wieder die Sollbahn eine mögliche Lösung von (7) darstellt. Die Terme $2h^2 \delta x$ und $-k \delta x$ haben also keinen Einfluß auf den Closed orbit für Sollteilchen, dagegen wird, wie wir sehen werden, der Arbeitspunkt beeinflusst.

Wir betrachten also irgendeine Teilchenbahn über einen ganzen Umlauf:

$$(27) \quad \eta(2\pi) = \eta_0 \cos 2\pi Q + Q \oint F(\tau) \sin Q(2\pi - \tau) d\tau$$

Betrachtet man die Fehler $F(\tau)$ nicht als Fehler, sondern als Bestandteil der Sollstruktur eines Kreisbeschleunigers, so gilt:

$$(27a) \quad \eta(2\pi) = \eta_0 \cos 2\pi(Q + \Delta Q)$$

Setzt man (27a) in (27) ein, so erhält man nach Umformen:

$$(28) \quad \Delta Q = -\frac{1}{4\pi} \oint x \beta ds - \frac{1}{4\pi \sin 2\pi Q} \oint x \beta \sin 2Q(\pi - \tau(\sigma)) d\sigma$$

wobei $F(\tau) = \beta^{3/2} f(s) = \beta^{3/2} x \cdot x$ gesetzt wurde.

Dabei ist s nun die Bahnkoordinate im kartesischen Koordinatensystem.

Setzt man $\varkappa = -k\delta + 2h^2\delta$

so erhält man die Chromatizität der Maschine:

$$(29) \quad \frac{\Delta Q}{\delta} = \frac{1}{4\pi} \oint k \beta ds$$

Setzt man dagegen

$$\varkappa = -\Delta k$$

so ergibt sich die Verschiebung des Arbeitspunktes infolge der Quadrupolfehler Δk :

$$(30) \quad \Delta Q = \frac{1}{4\pi} \oint \Delta k \beta ds$$

11) Höhere Resonanzen³⁾

Aus (25) erkennt man, daß Fehler in den Ablenkmagneten oder Aufstellungsfehler eine Resonanz bei einem ganzzahligen Arbeitspunkt erzeugen können, die zum Verlust des Strahls führt. Analog führen Feldfehler in den Fokussierungselementen zu ganz- und halbzahligen Resonanzen.

Solche Resonanzen gibt es auch für höhere Multipole:

Sextupole können Drittel-Resonanzen erzeugen,
Oktupole Viertelresonanzen usw.

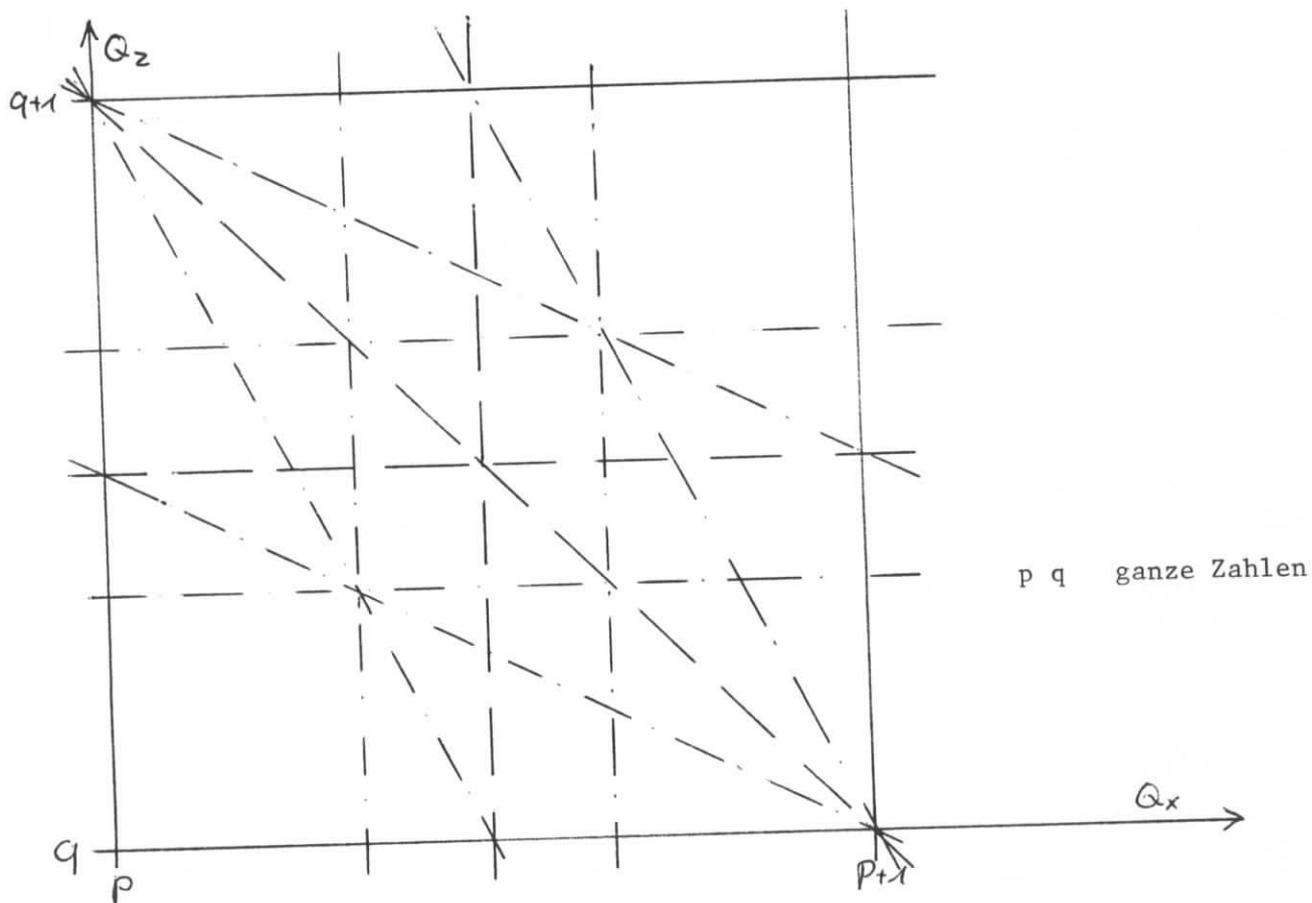
Während die ganz-, halb- und drittelzahligen Resonanzen immer zum Strahlverlust führen, können Viertelresonanzen den Strahl unter Umständen zerstören, während die höheren Resonanzen sich im allgemeinen in einer mehr oder weniger großen Aufweitung des Strahls äußern.

Neben diesen einfachen Resonanzen gibt es auch noch sog. gekoppelte Resonanzen, die durch folgende Gleichung gegeben sind:

$$(31) \quad aQ_x + bQ_z = n$$

(a,b,n ganze Zahlen)

wobei die Summe (a+b) den Grad der Resonanz bezeichnet:



In der Abbildung sind die Resonanzen bis zur dritten Ordnung im Q-Wert-Diagramm angegeben.

12) Stopband und Satellitenstopbänder³⁾

Gl.(28) stellt die Lösung der Integralgl.(27) in der ersten Näherung dar und ergibt die Stellen der möglichen Resonanzen im Arbeitspunkt-diagramm.

Beim Betrachten der Gl.(27) in Verbindung mit (27a) kann man jedoch sofort sehen, daß es einen gewissen Bereich um die Resonanzen gibt, in dem (27) nicht im Reellen lösbar ist und in dem keine optisch stabilen Bahnen existieren. Löst man (27) in zweiter Näherung, so erhält man folgende Form:

$$\eta(\psi) = \eta_0 \cos Q\psi + \int \dots + \iint \dots$$

$$\downarrow$$

$$\cos 2\pi(Q + \Delta Q) = \cos 2\pi Q + \int \dots + \iint \dots$$

(32) $Q = p + \epsilon$ $p = 1, 2, 3, \dots$

\downarrow

$$\cos 2\pi(Q + \Delta Q) - 1 = -2\pi^2 \epsilon^2 - \pi \epsilon Y_0 + \frac{1}{8} (|Y_{2p}|^2 - Y_0^2)$$

$$Y_m = -Q \int_0^{2\pi} \alpha \beta^2 e^{-im\psi} d\psi$$

Damit ergibt sich als die sog. Stopbandbreite δQ :

$$\delta Q = 2\epsilon = \frac{1}{2\pi} |Y_{2p}|$$

In den Gleichungen (33) sind die Stopbandbreiten für halb- und ganzzahlige Resonanzen und die Verschiebung des Arbeitspunktes infolge von Fehlern α zusammengestellt:

(33)
$$\delta Q_p = Q |(\alpha \beta^2)_{2p}|$$

$$\delta Q_{p+\frac{1}{2}} = Q |(\alpha \beta^2)_{2p+1}|$$

$$\Delta Q = Q \cdot (\alpha \beta^2)_0$$

Dabei sind die Größen $(\alpha \beta^2)_n$ die n-ten Fourierkomponenten der Funktion $\alpha \beta^2 = f(s)$:

$$(\alpha \beta^2)_n = \frac{1}{2\pi Q} Y_n$$

Der Begriff des Satellitenstopbandes soll durch ein Beispiel erläutert werden: Die Synchrotronschwingung äußert sich wegen ihrer Kopplung an die Dispersionsbahn in einer Betatronschwingung mit im allgemeinen sehr niedrigen Frequenzen (bis ≈ 100 KHz). Diese Frequenz überlagert sich der normalen Betatronschwingungsfrequenz von einigen MHz und erzeugt Seitenbänder, die als Satellitenstopbänder bezeichnet werden:

$$(34) \quad Q = Q_0 + Q_{\text{Synchr.}}$$

13) Der Beatfaktor³⁾

Bisher wurde nur der Einfluß von Feldfehlern auf die Betatronfrequenz berechnet. In Wirklichkeit machen sich die Fehler auch in der Amplitudenfunktion bemerkbar. Die größte Abweichung der Amplitudenfunktion vom Idealwert an jeder Stelle nennt man den Beatfaktor:

$$(35) \quad \text{BF} = 1 + \frac{\Delta\beta}{\beta_{\text{id}}}$$

Berechnet man die Größe $\frac{\Delta\beta}{\beta_0}$, so erhält man

$$(36) \quad \text{BF} = 1 + \frac{\Delta\beta}{\beta_{\text{id}}} = 1 + \frac{\delta Q_p}{2(Q - P/2)}$$

p ist dabei die nächste ganzzahlige Resonanz.

14) Sextupolkorrektur des Arbeitspunktes

Ausgehend von der Gleichung (24) mit $\eta_0 = 0$:

$$\eta(\psi) = \eta_0 \cos Q\psi + Q \int_0^\psi F(\tau) \sin Q(\psi - \tau) d\tau$$

soll nun der Gesamteffekt mit $F(\tau) = \beta^{3/2} \cdot (\frac{1}{2} m x^2 - k \delta x)$ untersucht werden. Zunächst setzen wir

$$x = x_0 + \delta$$

mit x_0 für den Closed orbit und δ die Abweichungen von diesem.

Der Fehlerterm lautet nun:

$$(36) \quad F(\tau) = \beta^{3/2} \left(\frac{1}{2} m x_0^2 - k \delta x_0 \right) + \beta^{3/2} (m x_0 - k \delta) \delta$$

Im ersten Term wird die Verschiebung des Arbeitspunktes infolge Dispersion und infolge des Sextupols beschrieben und soll hier nicht

weiter betrachtet werden.

Der zweite Term ist vom gleichen Typ wie in (28) und man kann die Arbeitspunktverschiebung für energieabweichende Teilchen sofort hinschreiben:

$$(37) \quad \frac{\Delta Q}{\delta} = - \frac{1}{4\pi} \oint \beta (mD - k) ds + \dots$$

Durch geeignete Anordnung von Sextupolen kann man also die Chromatizität ($\frac{\Delta Q}{\delta}$) eines Beschleunigers kompensieren. Bei symmetrischer Anordnung in einem Speicherring verschwindet der 2. Term in (37) und es ergibt sich für beide Ebenen:

$$(38) \quad \frac{\Delta Q_x}{\delta} = - \frac{1}{4\pi} \oint \beta_x (mD_x - k) ds$$

$$\frac{\Delta Q_z}{\delta} = + \frac{1}{4\pi} \oint \beta_z (mD_x - k) ds$$

15) Oktupoleinfluß und Landaudamping⁴⁾

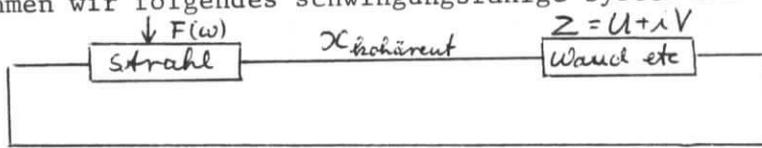
Berechnet man den Einfluß des Oktupolfeldes auf den Arbeitspunkt, so ergibt sich

$$(39) \quad \begin{aligned} \Delta Q_x &= A \bar{x}^2 + B \bar{z}^2 \\ \Delta Q_z &= C \bar{x}^2 + D \bar{z}^2 \end{aligned}$$

d.h. die Arbeitspunktverschiebung ist vom mittleren Abstand von der Sollbahn quadratisch abhängig.

Diese Abhängigkeit wird bei der Berechnung der Landaudämpfung benötigt.

Hierzu nehmen wir folgendes schwingungsfähige System an:



Die Schwingungsgleichung für ein Teilchen j in diesem rückgekoppelten System lautet

$$(40) \quad \ddot{x}_j + Q_j^2 \omega_0^2 x_j = (U + iV) \cdot S_0 e^{iQ\omega_0 t}$$

(ω_0 : Umlauffrequenz der Teilchen im Beschleuniger); t : Zeit)
 $S = S_0 \cdot e^{iQ\omega t}$ beschreibt dabei die Schwerpunktsbewegung des Strahls.
 Eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (40) ist

$$(41) \quad x_j = \frac{U + iV}{Q_j^2 - Q^2} \cdot S_0 \cdot \frac{e^{iQ\omega_0 t}}{\omega_0^2}$$

Ist $P(Q_j)$ die Verteilungsfunktion der Teilchen, so lautet die Lösung für die Schwerpunktsbewegung des gesamten Strahls:

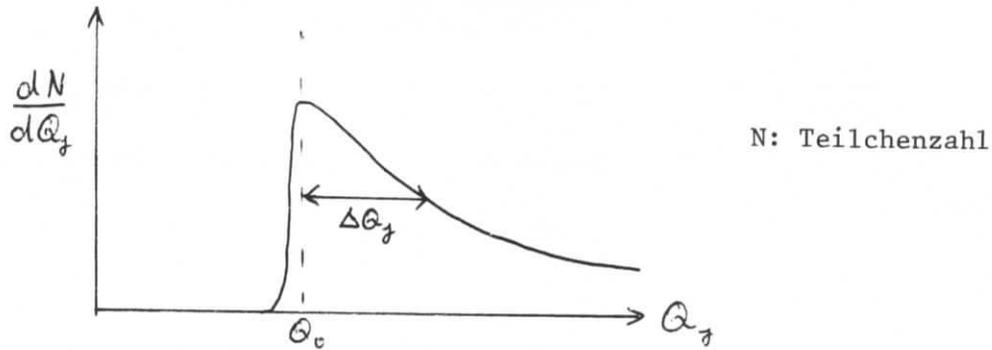
$$(42) \quad S = \int x_j \cdot P(Q_j) dQ_j = \frac{U + iV}{2Q_0 \omega_0^2} S_0 N \left[\int \frac{P(Q_j)}{Q_j - Q} dQ_j \right] e^{iQ\omega_0 t}$$

Hierbei wurde $\frac{1}{Q_j^2 - Q^2} \approx \frac{1}{2Q_0} \cdot \frac{1}{Q_j - Q}$ gesetzt, da angenommen werden kann, daß die Verteilung $P(Q_j)$ sehr eng in Q ist. Dabei ist $Q \cdot \omega_0$ die Resonanzfrequenz und $Q_0 \omega_0$ die Betatronschwingungsfrequenz des Strahls ohne Wechselwirkung mit der Impedanz Z .

Da die Schwerpunktsbewegung S ebenfalls eine Lösung der Differentialgleichung (40) darstellt, ergibt sich aus (40) und (42) die Bedingung:

$$(43) \quad \frac{1}{U + iV} = \frac{N}{2Q_0 \omega_0^2} \int \frac{P(Q_j)}{Q_j - Q} dQ_j$$

Durch Oktupolfelder ergibt sich aus (39) folgende qualitative Verteilung:



Mit

$$\Delta Q_f = K x_f^2$$

(K: Konstanten proportional der Oktupolstärke in x)

kann die Verteilung als Exponentialfunktion angesetzt werden:

$$(44) \quad P(Q_f) \sim e^{-\frac{\Delta Q_f}{\text{const}}} \quad \Delta Q_f \geq 0$$

Setzt man diese Verteilung in (43) ein, integriert und teilt man in Real- und Imaginärteil auf, so ergeben sich folgende Beziehungen:

$$(45) \quad \begin{aligned} Q &\sim K \cdot \sigma_x^2 \\ N &\sim K \cdot \sigma_x^2 \end{aligned}$$

d.h. durch das Oktupolfeld K wird die Resonanzfrequenz Q nach größeren Werten verschoben, wo nur noch wenige Teilchen existieren. Die zweite Gl.(44) stellt bei gegebenem Oktupolfeld eine Schwelle für den Teilchenstrom dar, unterhalb der der Strahl stabil bleibt. σ_x ist dabei die Standardabweichung der Teilchen von der Sollbahn.

Literatur

- 1.) K.L.Brown SLAC - 75 (1967) , Stanford
- 2.) K.G.Steffen High Energy Beam Optics,1965, John Wiley - Sons, New York
- 3.) E.D.Courant - H.S.Snyder Annals of Physics 3, 1-48 (1958)
- 4.) M.P.Level - J.Le Duff Rapport Technique 7-69, Orsay 1969

Synchrotronschwingung und Wechselwirkung
mit den HF-Resonatoren

von

A. Piwinski

	S.
1) Phasenfokussierung	42
2) Differentialgleichung der Synchrotronschwingung	45
3) Phasenstabiler Bereich	48
4) Berücksichtigung der diskreten Verteilung der Beschleunigungsstrecken	51
5) Rückwirkung des Strahls auf die Resonatoren	54
6) Verstimmung der Resonatoren durch Strahlbelastung	57
7) Stabilitätsbedingung für die Wechselwirkung des Strahls mit den Resonatoren	61

1) Phasenfokussierung

In den vorangegangenen Kapiteln wurde ausschließlich die Wechselwirkung der im Speicherring umlaufenden Elektronen oder Positronen mit dem Magnetfeld behandelt. Das Magnetfeld führte, wie im einzelnen gezeigt wurde, zu reinen transversalen Schwingungen der Teilchen, zu den sogenannten Betatronschwingungen. Wenn man einmal von der Dämpfung absieht, über die noch nicht gesprochen worden ist, dann wird die Betatronschwingung allein durch das Magnetfeld bestimmt.

In diesem Kapitel sollen Schwingungen der Teilchen in magnetischen und elektrischen Feldern behandelt werden. Bekanntlich strahlt ein geladenes Teilchen, das sich auf einer gekrümmten Bahn bewegt, Energie ab, die dem Teilchen mit Hilfe von elektrischen Feldern wieder zugeführt werden muß. Aus ganz allgemeinen physikalischen Prinzipien heraus folgt, daß dieser Energieverlust nicht mit Hilfe eines konstanten, sondern nur mit Hilfe eines zeitlich veränderlichen Feldes kompensiert werden kann. In dem zeitlich veränderlichen Feld können die Teilchen dann Schwingungen ausführen, und zwar die sogenannten Synchrotronschwingungen. Die Synchrotronschwingung führt, wie noch im einzelnen gezeigt wird, sowohl zu transversalen als auch zu longitudinalen Auslenkungen.

Das Prinzip der Synchrotronschwingung läßt sich durch zwei Beziehungen beschreiben:

- 1) Ein Teilchen, das die sich zeitlich ändernde Beschleunigungsspannung nicht im richtigen Augenblick durchläuft, bekommt zuviel oder zu wenig Energie, bezogen auf die abgestrahlte Energie.
- 2) Ein Teilchen, das im Vergleich zu einem Referenz- oder Sollteilchen zu viel oder zu wenig Energie besitzt, braucht für

einen Umlauf mehr oder weniger Zeit als das Sollteilchen und läuft deshalb beim nächsten Mal während einer anderen Phase durch die Beschleunigungsstrecke und nimmt dann auch einen anderen Energiebetrag auf.

Das Zusammenwirken dieser beiden Beziehungen soll nun etwas genauer erläutert werden. Abbildung 1 zeigt den zeitlichen Verlauf der Beschleunigungsspannung. Nach rechts ist $\omega_{\text{HF}} t$ aufgetragen, wobei t die Zeit und $\omega_{\text{HF}}/2\pi$ die Frequenz der Beschleunigungsspannung bedeutet. Nach oben kann man entweder die Spannung $u(t)$ auftragen oder, was praktisch dasselbe ist, den Energiegewinn eines Teilchens beim Durchgang durch eine Beschleunigungsstrecke, also $e u(t)$.

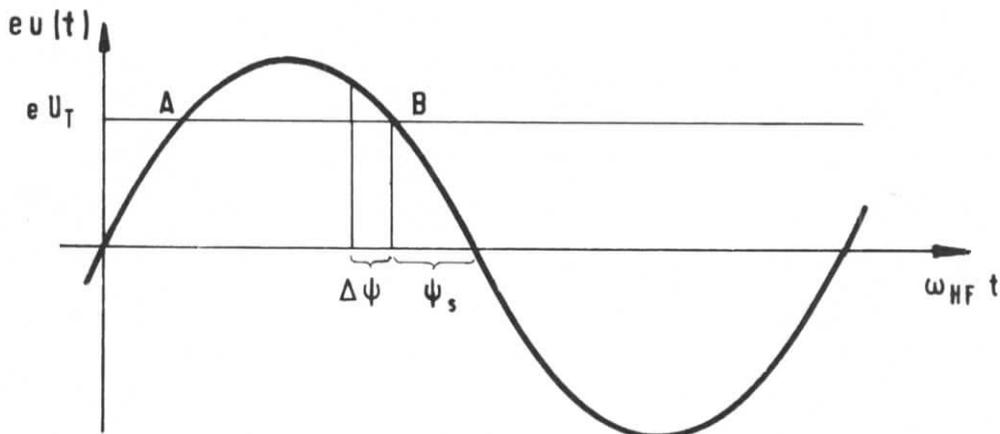


Abb. 1

Nun strahlt ein Teilchen in den gekrümmten Abschnitten des Speicherringes eine bestimmte Energiemenge ab, von der man für diese Betrachtung nicht mehr zu kennen braucht als ihren Betrag. Dieser Energiebetrag sei eU_T . Abb.1 zeigt, daß es, sofern die Amplitude der Beschleunigungsspannung groß genug ist, während jeder Periode zwei Phasen gibt, in denen ein Teilchen seine Verluste genau kompensieren kann, nämlich die

Punkte A und B. Aber nur eine der beiden Phasen ist, wie wir sofort sehen werden, stabil.

Angenommen die Sollphase eines Teilchens liege im Punkt A. Nun möge das Teilchen aus irgendeinem Grunde eine kleine Störung erfahren und etwas später durch die Beschleunigungsstrecke laufen. Später bedeutet weiter rechts auf der Zeitachse. Seine Phase liegt dann, wenn man aus Gründen der Platzersparnis alle Durchgänge in eine Periode einzeichnet, rechts neben A. Es bekommt jetzt etwas mehr Energie als das Sollteilchen und ist deshalb, da es nun ja auch mehr Energie besitzt, schwerer als das Sollteilchen. An dieser Stelle muß eine Bemerkung über die Energieabhängigkeit der Umlaufzeit eingeschoben werden. Die Energie eines Teilchens bestimmt durch zwei Effekte die Umlaufzeit:

- 1) Infolge der größeren Masse wird die Fliehkraft, die das Teilchen nach außen treibt, größer, das Teilchen läuft weiter außen im Ring und macht einen längeren Weg.
- 2) Das Teilchen hat infolge der größeren Energie auch eine größere Geschwindigkeit, was die Umlaufzeit verkürzt.

Bei den meisten Speicherringen überwiegt der erste Effekt bei weitem. Deshalb soll bei dieser Betrachtung eine größere Energie immer zu einer größeren Umlaufzeit führen. Mit anderen Worten heißt dies, daß die Geschwindigkeit des Teilchens bei hoher Energie so nahe an der Lichtgeschwindigkeit liegt, daß sie sich nur noch unwesentlich mit der Energie ändern kann. Man sagt auch, daß man oberhalb der kritischen Energie arbeitet, wobei man mit kritischer Energie die Energie bezeichnet, bei der die Umlaufzeit von kleinen Energieschwankungen unabhängig wird.

Aus dieser Bemerkung folgt, daß ein Teilchen, dessen Ausgangsphase bei A lag und das infolge einer Störung etwas zurückgeblieben

war und deshalb mehr Energie aufgenommen hatte, sich immer weiter von der Sollphase entfernt.

Dasselbe gilt für ein Teilchen, das aus irgendeinem Grunde zu früh eintrifft. Dieses Teilchen bekommt zu wenig Energie und wird deshalb beim nächsten Mal noch früher eintreffen. Dieses Teilchen entfernt sich von der Ausgangsphase A nach links. Hieraus folgt, daß die Sollphase bei A instabil ist.

Anders verhält es sich mit der Sollphase bei B. Ein Teilchen, das hier aus irgendeinem Grunde verzögert wird, bekommt zu wenig Energie, wird deshalb leichter und schneller und kommt beim nächsten Durchgang wieder näher an die Sollphase B heran. Dasselbe gilt für ein Teilchen, das zu früh eintrifft. Dieses Teilchen bekommt zu viel Energie, wird deshalb langsamer und kommt beim nächsten Mal später an. Die Sollphase bei B ist also stabil.

Diese Betrachtung zeigt, daß ein Teilchen um die Sollphase B schwingen kann. Solange es sich nicht zu weit von der Sollphase entfernt, wird es immer wieder zurückkehren. Man nennt dieses Verhalten deshalb auch "Phasenfokussierung" .

2) Differentialgleichung der Synchrotronschwingung

Das qualitativ diskutierte Verhalten der Synchrotronschwingung kann man auch ganz einfach quantitativ beschreiben ^{1,2)}. Die Energiebilanz für ein Teilchen mit einer beliebigen Phasenabweichung $\Delta\psi$ von der Sollphase lautet:

$$\frac{dE}{dt} = e U f_0 \sin(\psi_s + \Delta\psi) - W \quad (1)$$

Hierbei bedeuten

E = Teilchenergie

e = Elementarladung

U = Scheitelwert der gesamten Umfangsspannung

f_0 = Umlauffrequenz

ψ_s = Sollphase (bezogen auf den Nulldurchgang)

W = mittlere Strahlungsleistung

Für ein Sollteilchen, d.h. für ein Teilchen ohne Phasen- und Energieabweichung, lautet die Energiebilanz:

$$\frac{dE_s}{dt} = e U f_0 \sin \psi_s - W_s \quad (2)$$

Mit

$$\Delta E = E - E_s$$

und

$$W = W_s + \frac{dW}{dE} \Delta E$$

bekommt man für die Differenz der beiden Gleichungen (1) und (2) den Ausdruck

$$\frac{d\Delta E}{dt} = e U f_0 (\sin(\psi_s + \Delta\psi) - \sin \psi_s) - \frac{dW}{dE} \Delta E \quad (3)$$

Der letzte Term beschreibt die Dämpfung der Synchrotronschwingung. Dieser Term ist klein im Vergleich zu den anderen Gliedern und soll in diesem Kapitel vernachlässigt werden. Die Dämpfung wird im Kapitel über die Strahlungseffekte ausführlich behandelt werden. Für kleine Schwingungsamplituden, d.h. für kleine $\Delta\psi$, kann man Gl(3) linearisieren und bekommt

$$\frac{d\Delta E}{dt} = e U f_0 \sin \psi_s \Delta\psi \cdot \quad (4)$$

Damit ist eine der beiden Gleichungen, die die Synchrotronschwingung

beschreiben, gefunden. Die andere Gleichung erhält man, indem man die zeitliche Änderung der Phasenabweichung für ein Teilchen bestimmt, das eine beliebige Energieabweichung besitzt. Falls man mit ΔT die Verlängerung der Umlaufzeit infolge einer beliebigen Energieabweichung bezeichnet, bekommt man

$$\begin{aligned}\frac{d\Delta\psi}{dt} &= - \frac{\omega_{\text{HF}}\Delta T}{T_{\text{Uml}}} \\ &= - q\omega_0 \frac{\Delta C}{C}\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}\omega_0/2\pi &= \frac{1}{T_{\text{Uml}}} = \text{Umlauffrequenz} \\ q &= \frac{\omega_{\text{HF}}}{\omega_0} = \text{Harmonischenzahl} \\ C &= \text{Umfang} .\end{aligned}$$

Das Minuszeichen erscheint, da eine Verlängerung der Umlaufzeit ein Zurückbleiben der Phase verursacht. Wenn man nun noch den momentum-compaction-Faktor α berücksichtigt, der durch die Beziehung

$$\begin{aligned}\frac{\Delta C}{C} &= \alpha \frac{\Delta p}{p} \\ &\approx \alpha \frac{\Delta E}{E}\end{aligned}$$

definiert ist, wobei p der longitudinale Impuls des Teilchens ist, so bekommt man

$$\frac{d\Delta\psi}{dt} = - q \omega_0 \alpha \frac{\Delta E}{E} \quad (5)$$

Die Ableitung dieser Gleichung nach der Zeit t und die Berücksichtigung der Gl(4) liefert schließlich die Differentialgleichung der Synchrotron-schwingung in der Form

$$\frac{d^2\Delta\psi}{dt^2} + \Omega^2\Delta\psi = 0, \quad (6)$$

wobei die Synchrotronkreisfrequenz durch die Beziehung

$$\begin{aligned} \Omega^2 &= \omega_0^2 \frac{q\alpha eU \cos\psi_s}{2\pi E} \\ &= \omega_0^2 \frac{q\alpha eU_T \cot\psi_s}{2\pi E} \end{aligned} \quad (7)$$

bestimmt ist. Da die Spannung U_T , die ein Teilchen zur Deckung seiner Strahlungsverluste durchlaufen muß, bei vorgegebenen Maschinenparametern nur noch von der Energie abhängt, geht die Synchrotronfrequenz mit kleiner werdender Sollphase gegen Unendlich.

3) Phasenstabiler Bereich

Die Grenzen des phasenstabilen Bereichs werden durch das nicht-lineare Verhalten der Synchrotronschwingung bei großen Amplituden bestimmt. Man kann eine anschauliche Darstellung der Synchrotron-schwingung unter Berücksichtigung der Nichtlinearität bekommen, indem man eine Analogie zum nichtlinearen Oszillator herstellt. Man multipliziert die beiden Gleichungen (3) und (5) bei Vernachlässigung des Dämpfungsterms kreuzweise und integriert nach der Zeit t . Das Ergebnis kann man in der Form schreiben

$$(\Delta E)^2 - \frac{eUE}{\pi q\alpha} (\cos(\psi_s + \Delta\psi) + \Delta\psi \sin\psi_s) = H. \quad (8)$$

Die Integrationskonstante H ist die Hamiltonfunktion dieser Schwingung. Die graphische Darstellung für ΔE und $\Delta\psi$ ist in Abbildung 2 gezeigt.

$(\Delta E)^2$ entspricht der kinetischen Energie eines Oszillators, während die Differenz $H - (\Delta E)^2$ dem Potential entspricht. Ein Teilchen mit sehr

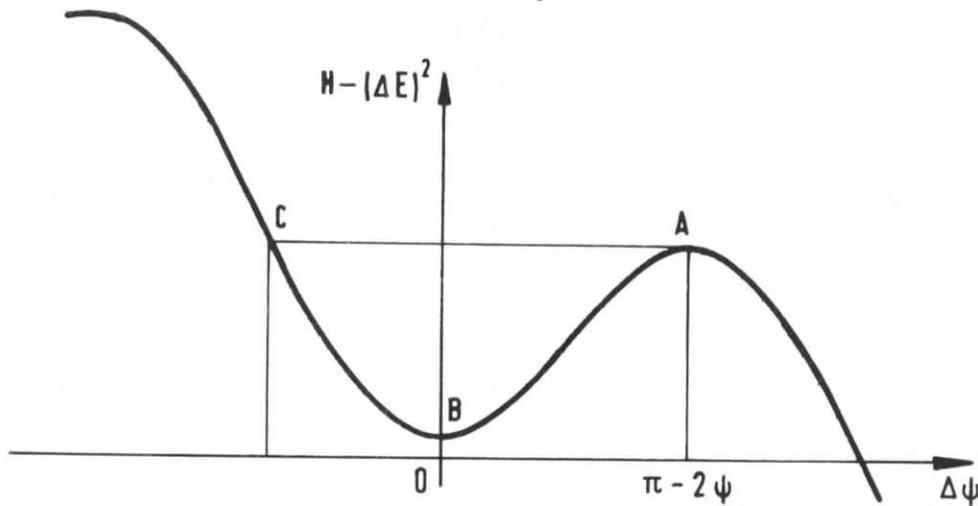


Abb. 2

kleiner Schwingungsamplitude verhält sich wie ein harmonischer Oszillator in einem parabelförmigen Potential. Mit wachsender Amplitude kommt das Teilchen in den nichtlinearen Bereich und geht schließlich bei Erreichen des Punktes A, der auch dem Punkt A in Abbildung 1 entspricht, verloren. Die Größe des phasenstabilen Bereichs läßt sich nun leicht angeben; er reicht von A bis C. Die Abszisse des Punktes A bekommt man durch Differenzieren der Gl(7), sie ergibt sich zu $\pi - 2\psi_s$. Die Abszisse des Punktes C bekommt man durch Gleichsetzen der Ordinaten in den Punkten A und C, so daß $\Delta\psi_1$ durch die transzendente Gleichung

$$\cos(\psi_s + \Delta\psi_1) + (2\psi_s + \Delta\psi_1 - \pi)\sin\psi_s + \cos\psi_s = 0$$

bestimmt ist.

Eine andere anschauliche Interpretation der Synchrotronschwingung erhält man mit Hilfe des Phasendiagramms in Abbildung 3. Im Phasendiagramm wird nach rechts die Phasenabweichung $\Delta\psi$ und nach oben entweder die zeitliche Ableitung von $\Delta\psi$ oder, was praktisch dasselbe ist, die Energieabweichung ΔE aufgetragen. Die Teilchen bewegen sich bei dieser Darstellung auf Trajektorien, die in der Mitte, d.h. bei kleinen Amplituden, Ellipsen sind. Weiter außen werden die Ellipsen infolge der Nichtlinearität deformiert und durch die sog. Separatrix begrenzt.

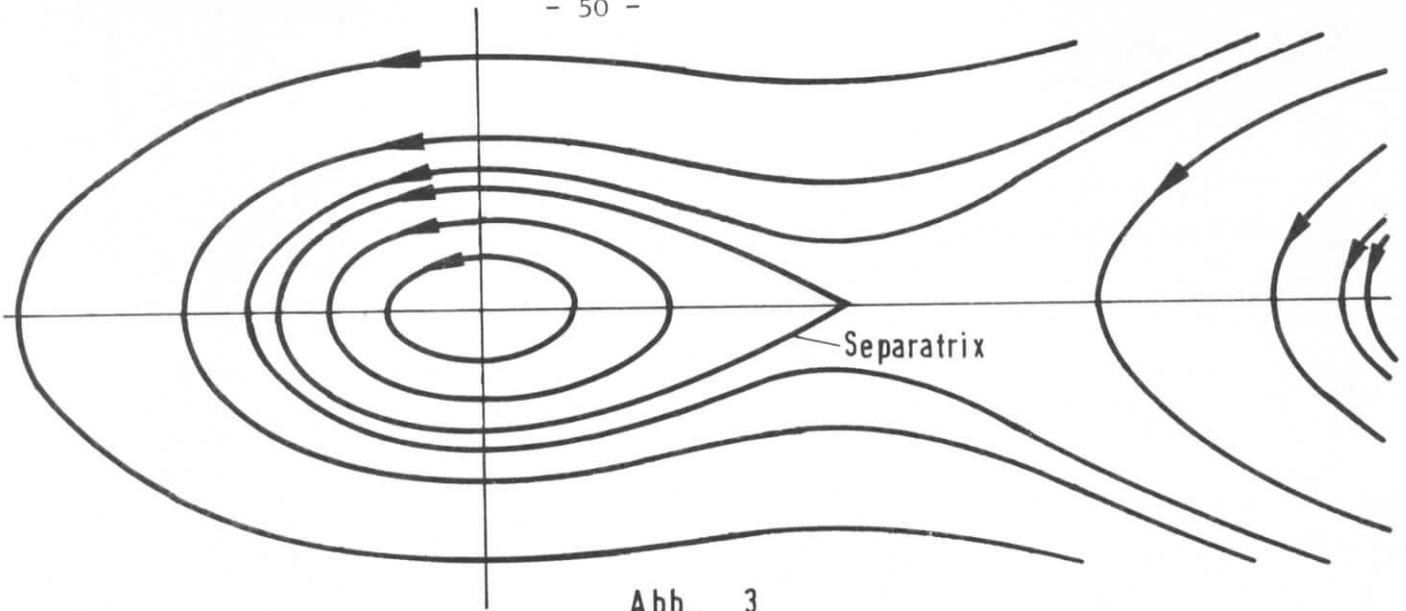


Abb. 3

Dieses Bild zeigt auch die tatsächliche Bunchform, wenn man einmal von der Betatronschwingung absieht, denn die Teilchen besitzen eine zur Energieabweichung proportionale seitliche Auslenkung, die durch die Dispersion beschrieben wird. Der phasenstabile Bereich hat also die Form eines Tropfens, der allerdings in die umgekehrte Richtung läuft. Innerhalb des Bunches laufen die Teilchen in der eingezeichneten Richtung um, wenn man annimmt, daß der Mittelpunkt des Speicherringes in der Zeichnung unten liegt.

Es sei darauf hingewiesen, daß Teilchen, die infolge einer Bahnstörung die Separatrix überqueren und dann verloren gehen, nicht etwa hinter dem Bunch zurückbleiben, sondern immer nach vorn laufen. Das folgt sowohl aus Abbildung 2 als auch aus Abbildung 3. Die letzte Abbildung zeigt außerdem, daß die verloren gehenden Teilchen dann gegen die dem Mittelpunkt des Speicherringes zugewandte Seite der Vakuumkammer laufen.

Es sei noch die Breite der Separatrix und damit die zulässige Energieabweichung eines Teilchens angegeben. Zunächst erhält man die Gleichung für die Separatrix aus Gl(8), indem man die Konstante H so bestimmt, daß für die rechte Grenze des phasenstabilen Bereichs, d.h. für $\Delta\psi = \pi - 2\psi_s$, die Energieabweichung ΔE verschwindet. Die Gleichung der Separatrix hat dann die Form

$$(\Delta E)^2 - \frac{eUE}{\pi q \alpha} \left[\cos(\psi_s + \Delta\psi) + 2\cos \psi_s + (2\psi_s + \Delta\psi - \pi)\sin \psi_s \right] = 0$$

Setzt man in dieser Gleichung $\Delta\psi$ gleich 0, so bekommt man für ΔE die maximale Energieabweichung. Wenn man noch die Spannung U_T einführt, erhält man

$$\Delta E_{\max} = \sqrt{\frac{2EeU_T}{\pi q \alpha} \left(\cot \psi_s + \psi_s - \frac{\pi}{2} \right)}$$

Die Breite wächst also stark mit kleiner werdender Sollphase. Es bringt jedoch keinen Gewinn mehr, wenn man die Separatrix breiter macht als die Vakuumkammer, denn dann werden die Teilchen vor Erreichen der Separatrix an der Vakuumkammer abgestreift.

4) Berücksichtigung der diskreten Verteilung der Beschleunigungsstrecken

Es sei auf eine Vereinfachung hingewiesen, die bei der Ableitung der Synchrotronschwingung gemacht worden ist. Bei der Bildung der Differentialquotienten in Gl(3) und Gl(4) wurden die Änderungen der Abweichungen ΔE und $\Delta\psi$ pro Umlauf durch die Umlaufszeit dividiert. Das ist natürlich nur dann richtig, wenn die Umlaufszeit klein ist im Vergleich zur Periodendauer der Schwingung oder, anders ausgedrückt, wenn die Synchrotronfrequenz klein ist im Vergleich zur Umlauffrequenz. Wenn diese Bedingung nicht erfüllt ist, verliert die Ableitung ihre Gültigkeit, und es muß ein anderer Weg genommen werden, der hier kurz skizziert werden soll.

Man kann die Bewegung eines Elektrons oder Positrons bei der Beschleunigung und bei der Abstrahlung auch mit Hilfe einer Matrix beschreiben. Man muß dann die beiden Abweichungen ΔE und $\Delta\psi$ zu einem Vektor zusammenfassen und bekommt die Änderung dieses Vektors beim Durchlaufen einer Beschleunigungsstrecke oder einer gekrümmten Strecke durch Multiplikation mit einer Matrix. Die Abweichungen am Ende einer Beschleunigungsstrecke

ergeben sich folgendermaßen aus den Abweichungen am Anfang einer Beschleunigungsstrecke. $\Delta\psi$ wird bei der Beschleunigung nicht geändert, denn die Beschleunigungsstrecke ist gerade und alle Teilchen laufen gleich schnell. Die Energieabweichung ΔE wird größer, falls $\Delta\psi$ positiv ist. Wenn man die Abhängigkeit der Änderung der Energieabweichung von $\Delta\psi$ linearisiert und die Proportionalitätskonstante mit A bezeichnet, bekommt man die Gleichung

$$\begin{pmatrix} \Delta E \\ \Delta\psi \end{pmatrix}_2 = \begin{pmatrix} 1 & A \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta E \\ \Delta\psi \end{pmatrix}_1 .$$

Analog erhält man die Matrix für ein gekrümmtes Stück ohne Beschleunigung. In diesem Falle bleibt die Energieabweichung konstant, d.h. jedes Teilchen strahlt genau so viel ab wie das Sollteilchen. Die Phasenabweichung wird bei positiver Energieabweichung kleiner, da das Teilchen zurückbleibt. Bezeichnet man die Proportionalitätskonstante zwischen der Änderung der Phasenabweichung und der Energieabweichung mit -B, so bekommt man

$$\begin{pmatrix} \Delta E \\ \Delta\psi \end{pmatrix}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -B & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta E \\ \Delta\psi \end{pmatrix}_2 .$$

Die Maschinenmatrix M ist dann, wenn nur eine Beschleunigungsstrecke auf dem Umfang vorhanden ist, gleich dem Produkt der beiden Matrizen, denn die geraden Stücke ohne Beschleunigung lassen sowohl ΔE als auch $\Delta\psi$ unverändert.

$$M = \begin{pmatrix} 1-AB & A \\ -B & 1 \end{pmatrix}$$

Nun möchte man wissen, wie sich ein Teilchen verhält, das sehr viele Umläufe macht. Es ist also die Frage zu untersuchen, wie sich der Vektor $(\Delta E, \Delta\psi)$ verhält, wenn die Matrix M k mal auf den Vektor angewandt

wird, d.h. wenn M^k gebildet wird, wobei k sehr groß sein soll. Damit die Abweichungen ΔE und $\Delta \psi$ auch für beliebig große k noch endlich bleiben, ist es notwendig und hinreichend, daß die Eigenwerte der Matrix M dem Betrage nach kleiner oder gleich 1 sind. Die Eigenwerte $\xi_{1,2}$ von M ergeben sich zu

$$\xi_{1,2} = 1 - \frac{AB}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{AB(AB-4)}$$

Da A und B reelle Größen sind, ist die Forderung

$$|\xi_{1,2}| \leq 1$$

nur dann erfüllt, wenn

$$AB \leq 4$$

gilt. Für die weitere Untersuchung ist es nun notwendig, die Größen A und B zu bestimmen, die man durch Integration der Gleichungen (4) und (5) erhalten kann. Die Rechnung ist in ³⁾ durchgeführt worden und soll hier nicht wiederholt werden. Für das Produkt AB bekommt man

$$AB = 4 \pi^2 \frac{\Omega^2}{\omega_0^2} .$$

Damit erhält man für die Synchrotronfrequenz Ω die Stabilitätsbedingung

$$\Omega \leq \frac{1}{\pi} \omega_0 .$$

Für den Fall, daß man μ gleiche Beschleunigungsstrecken hat, die durch μ gleiche gekrümmte Stücke getrennt sind, bekommt man die Bedingung 3)

$$\Omega \leq \frac{\mu}{\pi} \omega_0 .$$

Diese obere Grenze für die Synchrotronfrequenz liefert gleichzeitig nach Gl(7) eine untere Grenze für die Sollphase ψ_s .

5) Rückwirkung des Strahls auf die Resonatoren

Alles, was bisher gesagt wurde, bezog sich auf die Dynamik eines Elektrons oder Positrons ohne Rückwirkung auf die Beschleunigungsstrecken. Es wurde angenommen, daß die Beschleunigungsspannung unabhängig ist von der Bewegung der Teilchen. Das ist jedoch nur für kleine Ströme annähernd richtig, denn der Strahl induziert in den Beschleunigungsstrecken eine zusätzliche Spannung, die sich der von den Hochfrequenzsendern gelieferten Spannung überlagert. Diese induzierte Spannung ist proportional zum Strahlstrom und kann bei großen Strömen, falls man keine geeigneten Vorkehrungen trifft, um einige Größenordnungen größer sein als die zur Deckung der Strahlungsverluste notwendige Spannung. Außerdem ist die induzierte Spannung natürlich so gerichtet, daß sie dem Strahl Energie entzieht.

Es soll nun die vom Strahl in den Beschleunigungsstrecken induzierte Spannung bestimmt werden. Bei einem Kreisbeschleuniger bestehen die Beschleunigungsstrecken normalerweise aus zylindrischen Hohlraumresonatoren. Die für den DESY-Speicherring vorgesehenen Resonatoren oder Cavities haben eine Länge von $\lambda/2$, wobei λ die Wellenlänge der Hochfrequenz ist, und einen Durchmesser von $p_{01} \lambda/\pi$, wobei p_{01} die erste Nullstelle der Besselfunktion nullter Ordnung ist ($p_{01} \approx 2,4$). Das elektrische Feld, das über eine Schleife eingekoppelt wird, ist im Resonator, wenn man einmal von Störungen wie den Ein- und Austrittsöffnungen für den Strahl absieht, überall axial gerichtet. Die Feldstärke ist in axialer Richtung konstant und ändert sich in radialer Richtung wie die Besselfunktion nullter Ordnung, d.h. die Feldstärke besitzt auf der Achse ein Maximum und fällt zum Rand hin

auf Null ab. Man nennt diese Feldverteilung auch den E_{010} -Mode.

Die Spannung, die man durch Integration längs der Resonatorachse erhält, ist natürlich nicht die Spannung, die ein Teilchen durchlaufen kann, denn das Teilchen benötigt zum Durchlaufen eine halbe Schwingungsperiode, während der sich die Feldstärke im Resonator ändert. Die tatsächlich durchlaufene Spannung erhält man durch Integration über eine halbe Schwingungsperiode, wobei der Eintrittszeitpunkt so zu wählen ist, daß das Integral gemäß Gl(2) proportional zu $\sin\psi_s$ ist.

$$\frac{\omega_{\text{HF}}}{\pi} \int_0^{\pi/\omega_{\text{HF}}} \sin(\omega_{\text{HF}}t + \frac{\pi}{2} - \psi_s) dt = \frac{2}{\pi} \sin \psi_s$$

Die von einem Teilchen durchlaufene Spannung U_T ist dann durch folgende Beziehung mit der Resonator- oder Cavity-Spannung U_c verknüpft:

$$U_T = \frac{2}{\pi} m U_c \sin \psi_s \quad (9)$$

m = Zahl der Cavities.

Der von den Elektronen oder Positronen gebildete Strahlstrom I kann an jeder Stelle s des Umfangs in eine Fourierreihe zerlegt werden. Wenn man eine gaußförmige Verteilung der Teilchen im Bunch mit der Standardabweichung σ_s für eine longitudinale Richtung annimmt, bekommt man die Darstellung

$$i(s,t) = I + 2 I \sum_{\mu=1}^{\infty} \exp(-2\pi^2 \mu^2 \sigma_s^2 / \lambda^2) \cos(\mu \omega_{\text{HF}} t - 2\pi \mu s / \lambda) .$$

Da λ groß gegen σ_s ist, folgt hieraus, daß die Amplitude der Grundwelle etwa doppelt so groß ist wie der Gleichstromanteil. Die Amplituden der Oberwellen besitzen für kleine μ dieselbe Größenordnung wie die

Grundwelle und gehen für

$$\mu > \frac{\lambda}{\pi \sigma_s}$$

schnell gegen Null.

Um das vom Strahlstrom im Cavity induzierte Feld zu berechnen, kann man folgendermaßen vorgehen. Man stellt für jede Oberwelle μ des Strahlstroms die Feldverteilung als eine Summe über alle Eigenlösungen dieser Randwertaufgabe dar. Die Koeffizienten der Summanden bestimmt man so, daß die Raumladungs- und Stromdichte überall verschwinden mit Ausnahme auf der Cavityachse, wo sie den Strahlstrom darstellen. Für die Grundwelle sind außerdem die Wandverluste zu berücksichtigen, da dieser Schwingungstyp als einziger eine Resonanz darstellt und ohne Berücksichtigung der Dämpfung unbegrenzt anwachsen würde. Es zeigt sich dann ⁴⁾, daß die Amplitude der Grundwelle um mindestens den Faktor Q größer ist als alle übrigen Amplituden, wobei Q die Güte des Cavity's ist. Die Grundwelle wird dann durch

$$E_z = \frac{8}{\pi} \frac{R}{\lambda} I J_0(2\pi r/\lambda)$$

beschrieben, wobei r die radiale Koordinate ist, und die induzierte Spannung besitzt den Wert

$$\begin{aligned} U_i &= \frac{\lambda}{2} E_z \Big|_{r=0} \\ &= \frac{4}{\pi} R I . \end{aligned} \tag{10}$$

Der Widerstand R ist so definiert, daß die ohmschen Verluste im Cavity bei einer Cavityspannung U_c gleich $U_c^2/(2R)$ sind.

6) Verstimmung der Resonatoren durch Strahlbelastung

Bekanntlich läßt sich ein Cavity in der Nähe einer Resonanzfrequenz durch einen Reihen- oder Parallelschwingkreis beschreiben. Für die folgenden Rechnungen wird der in Abbildung 4 dargestellte Parallelschwingkreis benutzt⁵⁾.

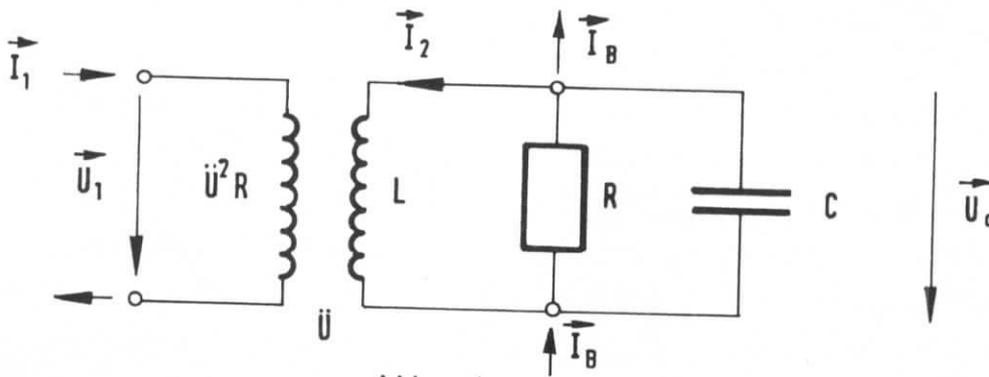


Abb. 4

Die Größen L und C sind durch die beiden Beziehungen

$$\omega_c^2 = \frac{1}{LC} \quad \text{und} \quad Q = \frac{R}{\omega_c L}$$

mit der Resonanzfrequenz ω_c und der Güte Q des Cavity's verknüpft. Die Ankoppelung des Cavity's an den Sender wird durch einen streuungslosen Transformator mit dem Übersetzungsverhältnis \ddot{u} dargestellt, so daß auf der Eingangsseite die Induktivität $\ddot{u}^2 L$ liegt. Die Belastung des Cavity's durch den Strahlstrom wird durch den Strom \vec{I}_B berücksichtigt, wobei aus Gl(10) die Beziehung

$$|\vec{I}_B| = \frac{4}{\pi} I$$

folgt. Die Größen $\vec{U}_1, \vec{U}_c, \vec{I}_1, \vec{I}_2$, und \vec{I}_B sind komplexe Scheitelwerte. Aus dem Ersatzschaltbild folgen die drei Gleichungen

$$\vec{U}_1 = \ddot{u} \vec{U}_c \quad (11)$$

$$\vec{U}_c = j\omega L (\ddot{u} \vec{I}_1 + \vec{I}_2) \quad (12)$$

$$\vec{I}_2 + \vec{I}_B + \left(\frac{1}{R} + j\omega c\right) \vec{U}_c = 0 \quad (13)$$

Hierbei ist $\omega/2\pi$ die Senderfrequenz. In Gl(12) ist berücksichtigt, daß die Gegeninduktivität bei dem streuungslosen Transformator gleich \dot{U}_L ist. Aus diesen drei Gleichungen kann man \dot{I}_2 eliminieren und bekommt:

$$\frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_1} = \frac{1}{\dot{U}^2 R} + \frac{1}{j\omega \dot{U}^2 L} \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_c^2} \right) + \frac{\dot{I}_B}{\dot{U}_c^2} \quad (14)$$

Damit die gesamte vom Sender gelieferte Leistung in das Cavity gelangt, muß dieses unter Berücksichtigung der Belastung durch den Strahlstrom an den Hohlleiter angepaßt sein, d.h. das Verhältnis \dot{U}_1 / \dot{I}_1 muß reell und gleich dem Wellenwiderstand des Hohlleiters sein. Aus der Bedingung

$$\frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_1} = \frac{1}{Z}$$

und aus Gl(14) folgen dann die beiden Gleichungen

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{\dot{U}^2 R} + \frac{1}{\dot{U}^2} \operatorname{Re} \left(\frac{\dot{I}_B}{\dot{U}_c} \right)$$

und

$$0 = \frac{1}{\omega L} \left(\frac{\omega^2}{\omega_c^2} - 1 \right) + \operatorname{Im} \left(\frac{\dot{I}_B}{\dot{U}_c} \right)$$

Wenn man berücksichtigt, daß bei dieser Zählweise für \dot{I}_B und \dot{U}_c die vom Strahl aufgenommene Leistung durch

$$P_B = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\dot{U}_c \dot{I}_B^* \right)$$

gegeben ist und daß die Cavity-Spannung \dot{U}_c dem Strom \dot{I}_B um den Winkel $\pi/2 - \psi_s$ vorseilt, findet man

$$\frac{\dot{I}_B}{\dot{U}_c} = \left| \frac{\dot{I}_B}{\dot{U}_c} \right| e^{i(\psi_s - \pi/2)}$$

Damit erhält man schließlich

$$\ddot{u}^2 = \frac{Z}{R} \left(1 + \frac{R |\vec{I}_B|}{|\vec{U}_c|} \sin \psi_s \right) \quad (15)$$

und

$$\frac{\omega}{\omega_c} = 1 + \frac{R |\vec{I}_B|}{2Q |\vec{U}_c|} \cos \psi_s \quad (16)$$

Bei der letzten Gleichung ist berücksichtigt worden, daß der \vec{I}_B enthaltende Term klein gegen Eins ist, so daß das Quadrat dieses Terms vernachlässigt werden kann. Wenn man statt der komplexen Größen \vec{U}_c und \vec{I}_B die auf den Strahl bezogenen Größen U_T und I einführt, bekommt man

$$\ddot{u}^2 = \frac{Z}{R} \left(1 + \frac{8m RI}{\pi^2 U_T} \sin^2 \psi_s \right)$$

und

$$\frac{\omega}{\omega_c} = 1 + \frac{2m RI}{\pi^2 Q U_T} \sin(2\psi_s)$$

Für den Fall, daß die Anpassungsbedingungen erfüllt sind, zeigt Abbildung 5 die Lage der benutzten Spannungen und Ströme im Phasendiagramm.

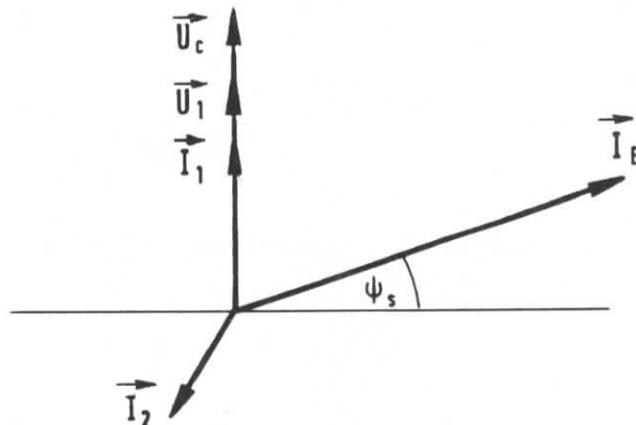


Abb. 5

Die technische Realisierung der Frequenzverschiebung ist einfacher als die einer variablen Abkopplung, d.h. einer Änderung des Übersetzungsverhältnisses \ddot{u} . Hinzu kommt, daß die Reflexion der Senderleistung am Eingang des Cavity's empfindlicher von einer Frequenzverstimmung als von einer Fehlankoppelung abhängt und daß, wie im nächsten Abschnitt gezeigt wird, bei nicht eingepaßter Frequenz unter Umständen Instabilitäten auftreten können. Man geht deshalb so vor, daß man die Ankopplung, d.h. \ddot{u} , nur dort anpaßt, wo man alle Leistung braucht, also bei hoher Energie und bei großen Strömen. In allen übrigen Arbeitspunkten läßt man die Ankopplung dann unverändert. Man nimmt dabei natürlich in Kauf, daß bei kleiner Energie und kleinen Strömen Senderleistung am Eingang reflektiert wird.

Die Frequenzanpassung kann man dagegen bei jeder Energie und bei jedem Strom durchführen. Man erreicht die Anpassung dadurch, daß man das Cavity mit Hilfe eines eintauchenden Stempels verstimmt. Dabei ändert sich die Resonanzfrequenz des Cavity's $\omega_c/2\pi$, so daß man Gl(16) erfüllen kann.

Für den Fall, daß die Frequenz angepaßt ist, das Übersetzungsverhältnis \ddot{u} jedoch nicht, kann man mit Hilfe von Gl(14) die reflektierte Leistung berechnen. Zunächst erhält man

$$\frac{\vec{I}_1}{\vec{U}_1} = \frac{1}{\ddot{u}^2 R} \left(1 + \frac{R |\vec{I}_B|}{|\vec{U}_c|} \sin \psi_s \right) \quad (17)$$

Zerlegt man nun \vec{U}_1 und \vec{I}_1 in eine hinlaufende und eine reflektierte Welle

$$\begin{aligned} \vec{U}_1 &= \vec{U}_h + \vec{U}_r \\ \vec{I}_1 &= \frac{\vec{U}_h}{Z} - \frac{\vec{U}_r}{Z} \end{aligned}$$

so ergibt sich der komplexe Reflexionsfaktor \vec{r} zu

$$\vec{r} = \frac{\vec{U}_r}{\vec{U}_h}$$

$$= \frac{\vec{U}_1 - Z\vec{I}_1}{\vec{U}_1 + Z\vec{I}_1} .$$

Mit Gl(17) erhält man den reellen Reflexionsfaktor

$$r = \frac{V_o \sin\psi_{so} - V \sin\psi_s}{2 + V_o \sin\psi_{so} + V \sin\psi_s}$$

mit den Abkürzungen

$$V_o = \left| \frac{R\vec{I}_{Bo}}{\vec{U}_{co}} \right| \quad \text{und} \quad V = \left| \frac{R\vec{I}_B}{\vec{U}_c} \right| .$$

Der Index o kennzeichnet den Strom und die Spannung, bei denen die Kopplung angepaßt ist. Für die Leistung ist der gesuchte Reflexionsfaktor r^2 .

7) Stabilitätsbedingung für die Wechselwirkung des Strahls mit den Resonatoren

Während die Abschnitte 1 bis 4 die Wirkung der Beschleunigungsspannung auf den Strahl beschreiben, behandeln die Abschnitte 5 und 6 die Rückwirkung des Strahls auf die Resonatoren. Im ersten Fall sollte die Beschleunigungsspannung konstant bleiben, und im zweiten Fall sollte der Strahlstrom konstant bleiben. Es war also noch nicht von einer echten Wechselwirkung die Rede, bei der eine kleine Änderung der Beschleunigungsspannung eine Änderung des Strahlstromes hervorruft, die sofort auf die Beschleunigungsspannung zurückwirkt.

Eine derartige Wechselwirkung zwischen dem Strahl und dem Beschleunigungssystem ist von Robinson^{6,7)} untersucht worden mit dem Ergebnis, daß unter bestimmten Bedingungen instabile Schwingungen auftreten können.

Bei der Ableitung dieses Stabilitätskriteriums kann man folgendermaßen vorgehen. In den Gleichungen, die die Synchrotronschwingung beschreiben, und in den Gleichungen, die aus dem Ersatzschaltbild für das Cavity folgen, addiert man zu den Größen ΔE , $\Delta\psi_s$, \vec{U}_c und \vec{I}_B kleine Änderungen, die mit $\exp(j\omega_s t)$ von der Zeit abhängen. So ersetzt man zum Beispiel ΔE durch $\Delta E + d\Delta E \exp(j\omega_s t)$. Die Frequenz ω_s ist unbekannt und braucht bei dieser Betrachtung auch nicht bestimmt zu werden. Es ist lediglich notwendig, festzustellen, unter welchen Bedingungen ω_s einen positiven Imaginärteil besitzt, denn in diesem Fall wird die Amplitude der Schwingung exponentiell anwachsen, und das bedeutet, daß das System instabil ist.

Zunächst kann man die Gleichungen für die genannten kleinen Änderungen linearisieren und bekommt ein homogenes, lineares Gleichungssystem mit 4 Unbekannten. Die Eigenwerte dieses Gleichungssystems bestimmen die Frequenzen ω_s . Damit alle 4 Eigenwerte auf Frequenzen führen, die keinen positiven Imaginärteil besitzen, muß die folgende doppelte Ungleichung erfüllt sein:

$$0 < \sin \phi_y \cos \phi_y < \frac{|\vec{U}_c|}{R_y |\vec{I}_B|} \cos \psi_s \quad (18)$$

R_y ist der Resonanzwiderstand des Cavity's einschließlich des Innenwiderstandes des Senders. ϕ_y ist die Phase des Leitwertes des Ersatzschwingkreises einschließlich des Leitwertes des Senders. Für den Fall, daß der Sender an den Hohlleiter angepaßt ist, bekommt man

$$R_y = \frac{R}{1 + \ddot{u}^2 \frac{R}{Z}}$$

$$\tan \phi_y = \omega_c C R_y \frac{\omega^2 - \omega_c^2}{\omega \omega_c}$$

Abbildung 6 zeigt die stabilen und instabilen Bereiche, die durch die Ungleichung (18) bestimmt sind.

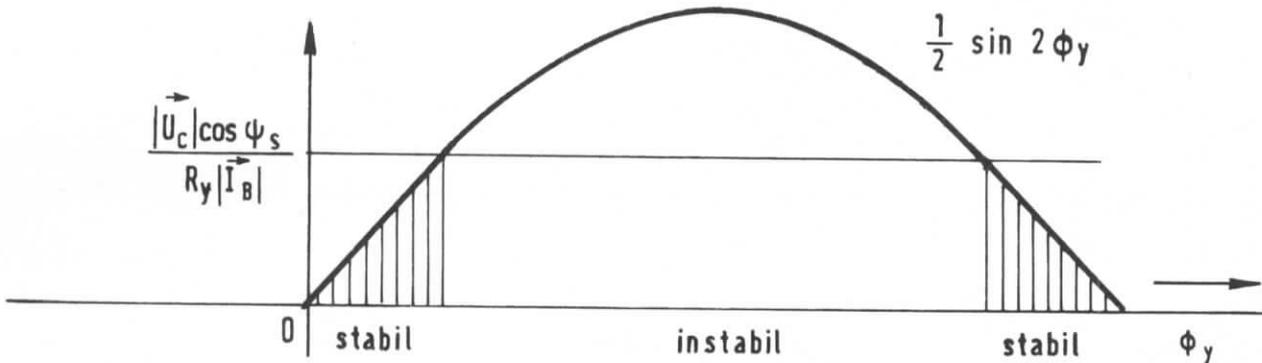


Abb. 6

Einen instabilen Bereich gibt es immer dann, wenn die Beziehung

$$|\vec{I}_B| > 2 \frac{|\vec{U}_c|}{R} (1 + \ddot{u}^2 \frac{R}{Z}) \cos \psi_s$$

erfüllt ist. Falls man sowohl die Frequenz als auch die Ankopplung an den Strom anpaßt, befindet man sich immer im stabilen Bereich. Man kann sich leicht hiervon überzeugen, indem man die Gleichungen (15) und (16) in die Ungleichung (18) einsetzt. Allerdings kann der Arbeitspunkt dann sehr dicht an der Grenze des stabilen Bereiches liegen. Falls nur die Frequenz, aber nicht die Ankopplung an den Strahl angepaßt ist, hat die Stabilitätsbedingung die Form

$$\frac{R}{|\vec{U}_c|} \frac{|\vec{I}_B|}{\sin \psi_s} < 1 + \ddot{u}^2 \frac{R}{Z}$$

Literatur

- 1) D.Bohm, L.Foldy, Phys.Rev. 70 , 249 (1946)
- 2) A.A.Kolomenski, A.N. Lebedev; "Theory of Cyclic Accelerators" ,
North-Holland (1966)
- 3) A.Piwinski; Nucl.Instr.Meth. 72, 79 (1969)
- 4) R.E. Collin ; "Foundations of Microwave Engineering"
- 5) H.Gerke, A.Piwinski ; Interner Bericht DESY H-17 (1968)
- 6) K.W.Robinson; CEA-11 (1956)
- 7) K.W.Robinson; CEAL-1010 (1964)

Strahlungseffekte

von

R. D. Kohaupt

	S.
1) Einleitung	66
2) Emission von Photonen und Spektrum der Synchrotronstrahlung in Abhängigkeit von der Teilchenenergie	67
3) Klassischer Strahlungsverlust und Dämpfungsmechanismen bei bei Betatron- und Synchrotronschwingungen	72
4) Spontane Emission von Photonen und "natürliche" Strahlausdehnung	77
5) Strahlaufweitung durch Streuprozesse	79
6) Berechnung von Dämpfungskonstanten und Strahldimensionen	80

1. Einleitung

Die Wechselwirkung mit dem elektromagnetischen Strahlungsfeld bewirkt für den in einem Speicherring umlaufenden Teilchenstrahl nicht nur einen Energieverlust, der in den Beschleunigungsstrecken (Cavity) zur Erhaltung des stationären Zustandes kompensiert werden muß, sondern sie bestimmt wesentlich die stationäre Strahlausdehnung, d. h. die "natürlichen" Strahldimensionen, deren Kenntnis zur optimalen Auslegung eines Speicherrings erforderlich ist. Wir können bei dieser Wechselwirkung davon ausgehen, daß die Teilchen im Strahl von einander unabhängig sind, so daß auch die elektromagnetische Wechselwirkung auf das einzelne Teilchen bezogen werden kann, unabhängig von allen übrigen. Weiterhin zeigt eine genaue Untersuchung der Wechselwirkung eines auf einer Kreisbahn zirkulierenden Elektrons mit dem Strahlungsfeld, daß es hinreichend ist, die Bewegung des Elektrons klassisch zu beschreiben. Die quantenmechanischen Korrekturen lassen sich durch einen Entwicklungsparameter ξ kennzeichnen, der gegeben ist durch¹:

$$\xi = \frac{3}{2} \cdot \gamma^2 \frac{\hbar}{R m_e c} \ll 1 ,$$

wobei R der Maschinenradius ist, so daß für die meisten Maschinen eine Berücksichtigung quantenmechanischer Effekte nicht erforderlich ist.

Das elektromagnetische Strahlungsfeld dagegen ist quantisiert zu behandeln, da die spontane Emission von Photonen wesentlich ist für die natürliche Strahlausdehnung. Bei der Lösung dieses Problems machen wir von der Tatsache Gebrauch, daß die elektromagnetische Wechselwirkung schwach ist, und wenden die Methoden der Störungstheorie an; d. h. die Wechselwirkung wird

in zwei Schritten beschrieben:

1. Das ungestörte Teilchen strahlt auf seiner gekrümmten Bahn

Photonen ab; $S_0 \rightarrow \gamma$

2. Die emittierten Photonen modifizieren die ungestörte

Teilchenbahn; $\gamma + S_0 \rightarrow S$

Der erste Schritt behandelt demnach die Synchrotronstrahlung, der zweite die Modifikation der idealen Teilchenbahn durch Strahlungsrückwirkung der Photonen. Dieser Einteilung entsprechend sollen im ersten Abschnitt dieses Berichts die wesentlichen Eigenschaften der Synchrotronstrahlung erörtert werden, während in den Abschnitten 3 und 5 die physikalischen Mechanismen beschrieben werden, die das "natürliche" Strahlverhalten bestimmen. In Abschnitt 6 wird der mathematische Weg zur Berechnung der Strahlparameter skizziert; die Ergebnisse der Rechnung werden zusammengestellt.

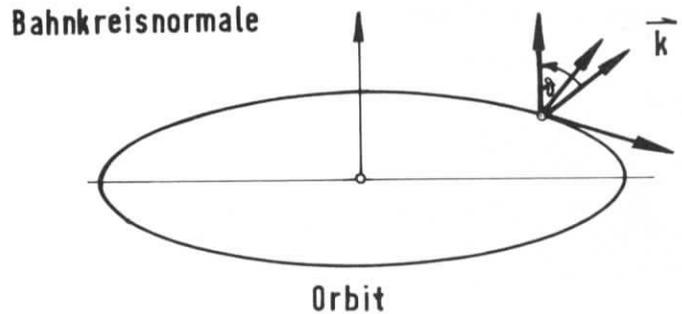
2. Emission von Photonen im Spektrum der Synchrotronstrahlung in Abhängigkeit von der Teilchenenergie

Bei der Berechnung der Synchrotronstrahlung machen wir die vereinfachende Annahme, daß sich die Teilchen auf einer Kreisbahn bewegen. Die Praxis hat erwiesen, daß diese Annahme auch für nicht kreisförmige Beschleuniger hinreichend realistisch ist.

Die recht umfangreiche Rechnung, bei der die Elektronen zwar klassisch, das elektromagnetische Feld jedoch quantisiert behandelt werden, liefert

für die mittlere zeitliche Photonenzahldichte bei einer Photonenenergie k und einem Winkel θ zwischen Photonrichtung und Bahnkreisnormalen (Fig. 1) das halbklassisch plausible Ergebnis^{1,2}:

Fig. 1 Richtung der emittierten Photonen relativ zur Bahnkreisnormalen



$$\bar{n}(k, \theta) = \frac{|S(\omega, \theta, \rho_w)| \rho_w}{\hbar \omega} \quad (1)$$

$$\omega = \frac{\hbar}{\pi} ,$$

wobei $|S(\omega, \theta, \pi)|$ der Betrag des Poynting-Vektors der klassischen Lösung des Problems ist und ρ_w den Abstand der Wellenzone kennzeichnet. Schreiben wir $\bar{n}(k, \theta)$ in der Form

$$\bar{n}(k, \theta) = \frac{P(\omega, \theta)}{\hbar \omega} , \quad (2)$$

so ist $P(\omega, \theta)$ der mittlere spektrale Energiestrom in das Raumwinkelement $d\Omega$ an der Stelle θ , für den man klassisch erhält^{1,2}:

$$P(\omega, \theta) = \frac{v^2 e_0^2}{2\pi c R^2} v \left\{ \cot\theta J_\nu \left(v \frac{v}{c} \sin\theta \right) + \frac{v^2}{c^2} J_\nu' \left(v \sin\theta \right) \right\} \quad (3)$$

Hierin ist $\omega = 2\pi\nu$, und J_ν, J_ν' sind Besselfunktionen und ihre Ableitungen.

Aus dieser Relation und den Eigenschaften der Besselfunktionen geht hervor, daß $P(\omega, \theta)$ nur in der Umgebung von $\theta = \frac{\pi}{2}$ in einem Bereich, der durch $\Delta\theta = \frac{1}{\gamma}$ charakterisiert ist, wesentlich von Null verschieden ist. Demnach ist die Synchrotronstrahlung scharf um die Bahnkreisebene gebündelt.

Falls man an der Winkelverteilung der Strahlung nicht interessiert ist, ist es zweckmäßig, daß Integral

$$P(\omega) = \int d\Omega P(\omega, \theta) \quad (4)$$

einzuführen. Den Gesamtenergiestrom erhält man dann durch Integration über

$$P = \int d\omega P(\omega) , \quad (5)$$

wobei P gegeben ist durch den Ausdruck

$$P = \frac{2}{3} \frac{r_e c \gamma^3 E}{R^2} , \quad (6)$$

wenn die Konstanten c , r_e Lichtgeschwindigkeit und Elektronenradius, die Variablen E , R Teilchenenergie und Bahnradius darstellen.

Formel (6) zeigt den steilen Anstieg des Strahlungsverlustes mit der Teilchenenergie, so daß für wachsende Energien bei erträglichen Strahlungsverlusten große Maschinenradien erforderlich werden.

Die spektrale Verteilung $P(\omega)$ kann mit Hilfe des Gesamtstromes P geschrieben werden in der Form

$$P(\omega) = P \cdot F(y) \quad (7a)$$

mit der Abkürzung

$$y = \frac{\omega}{\frac{3}{2} \omega_0 \gamma^3}, \quad (7b)$$

worin ω_0 die Umlaufkreisfrequenz

$$\omega_0 = 2 \pi f_0$$

ist. Die Funktion $F(y)$ erfüllt wegen (6) und (7) die Relation

$$\int F(y) d\omega = 1$$

und kann dargestellt werden mit Hilfe der McDonald-Funktion $K_{5/3}$ durch das Integral

$$F(y) = \frac{9\sqrt{3}}{8\pi} y \int_y^\infty K_{5/3}(x) dx. \quad (8)$$

Der Verlauf von $F(y)$ im Bereich $y \ll 1$ ist näherungsweise gegeben durch

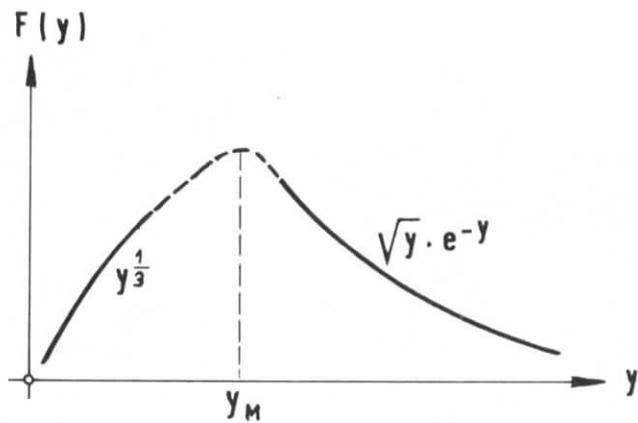
$$F(y) \sim y^{1/3}, \quad (9)$$

während für $y \rightarrow \infty$ gilt:

$$F(y) \sim \sqrt[3]{y} e^{-y} \quad (10)$$

Das Maximum der Funktion liegt bei $y_M \approx \frac{1}{3}$. Den qualitativen Verlauf von $F(y)$ zeigt Fig. 2.

Fig. 2 Energiespektrum der
Synchrotronstrahlung
(qualitativ)



Aus (7b) folgt $\omega_M = y_M \frac{3}{2} \omega_0 \gamma^3$, $k_M = \hbar \omega_M$, so daß sich die Photonenergie mit zunehmender Teilchenenergie zu größeren Werten verschiebt.

Für den geplanten Speicherring bei DESY sind für P , k_M bei einem mittleren Maschinenradius von

$$\bar{\rho} = 45,8 \text{ m}$$

und einer Energie von

$$E = 1 \text{ GeV}$$

folgende Werte charakteristisch:

$$k_M \approx 7,0 \cdot 10^{-2} \text{ KeV}$$

und

$$P = 1,2 \cdot 10^{-9} \text{ W}$$

was einem Energieverlust pro Umlauf von

$$\delta E = 7,5 \text{ KeV}$$

entspricht.

Den Regeln der Quantentheorie gemäß können wir mit Hilfe der mittleren Teilchenzahl pro Zeiteinheit $\bar{n}(k)$ für jede Funktion $f(k)$ die mittlere zeitliche Verschiebung berechnen nach der Relation

$$\frac{\overline{\delta f(k)}}{\tau} = \int dk \bar{n}(k) f(k) , \quad (11)$$

wobei τ das Zeitintervall kennzeichnet, über das gemittelt wird. Als zwei Spezialfälle betrachten wir $f(k) = k$ und $f(k) = k^2$ und erhalten

$$\frac{\overline{\delta k}}{\tau} = \int k \bar{n}(k) dk = P \quad \text{und} \quad \frac{\overline{\delta k^2}}{\tau} = \hbar \int \omega P(\omega) d\omega . \quad (12)$$

Aus (12) wird ersichtlich, daß die Synchrotronstrahlung zwei Effekte enthält, einen "klassischen", der durch $\frac{\overline{\delta k}}{\tau}$ gegeben ist und zum klassischen Energiestrom führt, und einen "Quanteneffekt", der durch $\frac{\overline{\delta k^2}}{\tau}$ gegeben ist und sich dadurch auszeichnet, daß er für $\hbar \rightarrow 0$ verschwindet.

In den folgenden Abschnitten soll gezeigt werden, daß sich beide Effekte auf den Strahl auswirken und seine natürlichen Dimensionen bestimmen.

3. Klassischer Strahlungsverlust und Dämpfungsmechanismen bei Betatron- und Synchrotronschwingungen

a) Betatroschwingungen

Wir betrachten ein Elektron (Positron), das sich auf einer Kreisbahn bewegt und dabei z. B. horizontale Betatronschwingungen ausführt, deren Auslenkung

bezogen auf die Sollbahn durch

$$x = \sqrt{\epsilon_x \beta_x(s)} \cos(\phi_x(s) + \delta), \quad \frac{dx}{ds} = x' \quad (13)$$

als Funktion des Bahnparameters s beschrieben wird³. Der Momentanimpuls des Teilchens sei \vec{p} , seine Orbitalkomponente \vec{p}_S und die dazu senkrechte Transversalkomponente \vec{p}_T (Fig. 3). Der Winkel zwischen \vec{p} und \vec{p}_S , der durch $\frac{dx}{ds} = x'$ gegeben ist, kennzeichnet die "Divergenz" des Strahles.

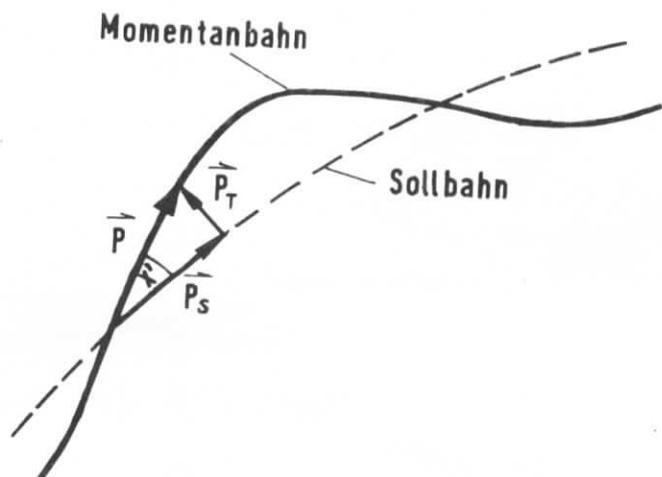
Infolge Strahlungsverlustes verliert das Teilchen die Energie

$$\delta E = \frac{c^2}{v} \delta p, \quad (14)$$

und es gilt für kleine Winkel

$$\delta p_T = x' \cdot \delta p. \quad (15)$$

Fig. 3 Impulszerlegung bei Betatronschwingungen



Die Orbitalkomponente dagegen wird nach jedem Umlauf in den Beschleunigungsstrecken restauriert, so daß nur die durch Betatronschwingungen bedingte Transversalkomponente abklingt. Für die Änderung von x' ergibt sich

$$\delta x' = - \frac{\delta p_T}{p_s} = - \frac{\delta E}{E_s} x' . \quad (16)$$

Gleichung (16) beschreibt eine Dämpfung für x' . Allgemein wird durch eine Gleichung der Form

$$\delta y = f(y) \quad (17)$$

für eine Größe y entweder eine Dämpfung oder eine Entdämpfung beschrieben, je nachdem bei einer Entwicklung von $f(y)$ in eine Reihe der Form

$$f(y) = \frac{\partial f(0)}{\partial y} y + \dots \quad (18)$$

$\frac{\partial f(0)}{\partial y}$ negativ oder positiv ist.

Im Falle der Betatronschwingung gilt nicht nur für x' eine Gleichung der Form (17), sondern auch für x ; denn mit der horizontalen Dispersion D_x erhält man

$$\delta x = \frac{\delta E}{E} D_x . \quad (19)$$

Da δE z. B. über das Magnetfeld $B(x)$ selbst von x abhängt, ergibt sich eine Gleichung der Form (18), und dieser Dämpfungsmechanismus führt zur Abhängigkeit der Dämpfung von der speziellen Magnetstruktur. Die durch (16)

und (19) beschriebene Dämpfung von Betatronschwingungen kann ausgedrückt werden durch die Dämpfung der Emittanz

$$\epsilon_x = \gamma_x^2(s) x^2 + 2 \alpha_x(s) x x' + \beta_x(s) x'^2 \quad (20)$$

wegen (13), (16) und (19)

gemäß

$$\delta \epsilon_x = 2 \gamma_x(s) x \delta x + 2 \alpha_x(s) (x' \delta x + x \delta x') + 2 \beta_x(s) x' \delta x' = f(\epsilon_x) \quad (21)$$

und der Relation

$$\frac{\partial f(0)}{\partial \epsilon_x} < 0 \quad (22)$$

b) Dämpfungsmechanismus bei Synchrotronschwingungen

Die Synchrotronschwingung wird gekennzeichnet durch die Abweichung $\Delta\psi$ von der Sollphase ψ_s und durch die Abweichung ΔE von der Sollenergie E_s , und es gilt für ein Zeitintervall τ

$$\delta \Delta E = f_0 e_0 U(\Delta\psi) \tau - P(\Delta E) \tau \quad \text{und} \quad \Delta E \tau \sim E_s \delta \Delta\psi \quad (23)$$

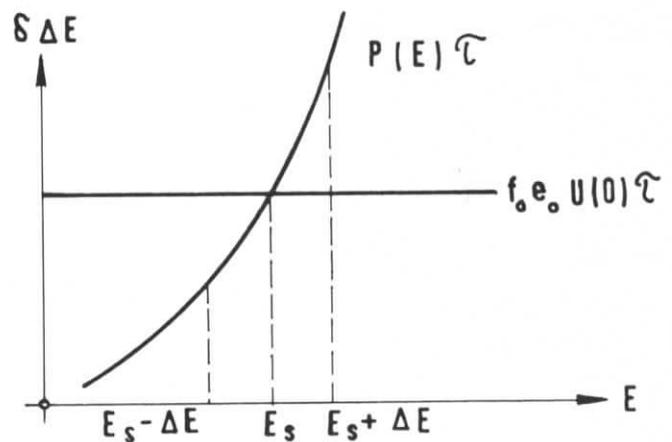
Während der erste Term die Energieänderung auf Grund der Beschleunigungsspannung $U(\Delta\psi)$ beschreibt, stellt der zweite Term die Energieänderung infolge Strahlungsverlustes dar:

$$\delta \Delta E_{\text{RAD}} = - P(\Delta E) \tau$$

Entwickelt man nach ΔE , so ergibt sich

$$\delta \Delta E_{\text{RAD}} = - \frac{dP(\Delta E)}{dE} \Delta E \cdot \tau \quad (24)$$

Fig. 4 Abhängigkeit von Energiegewinn und Strahlungsverlust von der Teilchenenergie bei Synchrotronschwingungen (qualitativ)



Aus (6) folgt, daß $\frac{dP}{dE}$ positiv ist, so daß Gleichung (24) die Dämpfung der Synchrotronschwingung beschreibt. Dieser zunächst formale Zusammenhang ist anhand von Fig. 4 auch anschaulich leicht zu durchschauen. Da Gleichgewicht zwischen abgestrahlter Energie und zugeführter Energie nur für ein Teilchen mit der eingestellten Sollenergie besteht, überwiegt gemäß (6) für $\Delta E > 0$ der Energieverlust, was zu einer Abnahme der Energie führt, während für $\Delta E < 0$ der Energiegewinn überwiegt, was zu einer Zunahme der Energie führt, so daß in jedem Fall die Energiedifferenz ΔE "aufgezehrt" wird und die Synchrotronschwingung gemäß (24) gedämpft wird. Daß es sich um die gewohnte Form der Schwingungsdämpfung handelt, läßt sich im Falle der Synchrotronschwingung leicht einsehen, wenn wir von der linearen Näherung Gebrauch machen. Dann gilt im Einklang mit (23) folgende Schwingungsdifferentialgleichung⁴:

$$\ddot{\Delta\psi} + \Omega^2 \Delta\psi + \frac{dP}{dE} \Delta\psi = 0$$

Ihre Lösung lautet:

$$\Delta\psi(t) = \Delta\psi(0) e^{-a_s t} e^{+i \Omega t}$$

mit der Dämpfungskonstanten

$$a_s = \frac{1}{2} \frac{dP}{dE} \quad (25)$$

Da die abgestrahlte Energie P einerseits vom Radius ρ abhängt, andererseits der Momentanradius ρ gemäß

$$\Delta x = D_x \frac{\Delta E}{E_s} \quad (26)$$

von ΔE abhängt, geht auch in die Größe $\frac{dP}{dE}$, d. h. in die Dämpfungskonstante a_s die spezielle Magnetstruktur der Maschine ein.

4. Spontane Emission von Photonen und "natürliche" Strahlausdehnung

Bisher haben wir die "klassische" Rückwirkung der Synchrotronstrahlung auf den gespeicherten Strahl, die klassische Strahlungsdämpfung, behandelt.

Jetzt sollen die Quanteneffekte und ihre Auswirkung auf die Strahldimensionen untersucht werden.

Auf Grund der Kompensation des klassischen Strahlungsverlustes in den Beschleunigungsstrecken und der klassischen Dämpfung befindet sich der Strahl im Rahmen einer quantentheoretischen Beschreibung nur im Mittel im Gleichgewicht. Da die Emission von Photonen spontan erfolgt, kann ein Teilchen auf seiner Bahn spontan die Energie

$$\Delta E = \hbar \omega \quad (27)$$

verlieren. Hierdurch werden sowohl horizontale als auch vertikale Betatronschwingungen angeregt gemäß

$$\delta x = D_x \frac{\hbar \omega}{E} \quad (28a)$$

$$\delta z = D_z \frac{\hbar \omega}{E} \quad (28b)$$

und eine Anregung von Synchrotronschwingungen gemäß

$$\delta \Delta \psi = -q \alpha \omega_0 \frac{\hbar \omega}{E} \quad (29)$$

erzeugt. Das Zusammenwirken der in (27) bis (28) formulierten spontanen Anregung mit der im Abschnitt 3 beschriebenen Dämpfung führt zu einem Gleichgewichtszustand, derart, daß sich für die Amplitude von Betatron- bzw. Synchrotronschwingung eine stationäre Wahrscheinlichkeitsverteilung $w(x)$ bzw. $w(\Delta\psi)$ ergibt, mit Hilfe derer die "mittlere Auslenkung" definiert werden kann durch:

$$\sigma_x^2 = \overline{x^2} = \int dx x^2 w_x(x) \quad (30)$$

$$\sigma_z^2 = \overline{z^2} = \int dz z^2 w_z(z) \quad (31)$$

$$\sigma_s^2 = \overline{\Delta\psi^2} = \int d\Delta\psi \Delta\psi^2 w_s(\Delta\psi) \quad (32)$$

Wie schon in der Einleitung erwähnt wurde, sind die Teilchen im Strahl bei der Emission von Strahlung von einander unabhängig, so daß durch w_x , w_z , w_s entsprechende Dichteverteilungen definiert sind. Sei N_B die Teilchenzahl im Bunch, so gilt:

$$\rho = N_B \cdot w \quad (33)$$

Die Größen σ_x , σ_z , σ_s charakterisieren demnach die Ausdehnung eines Bunches in horizontaler, vertikaler und orbitaler Richtung (Fig. 5).

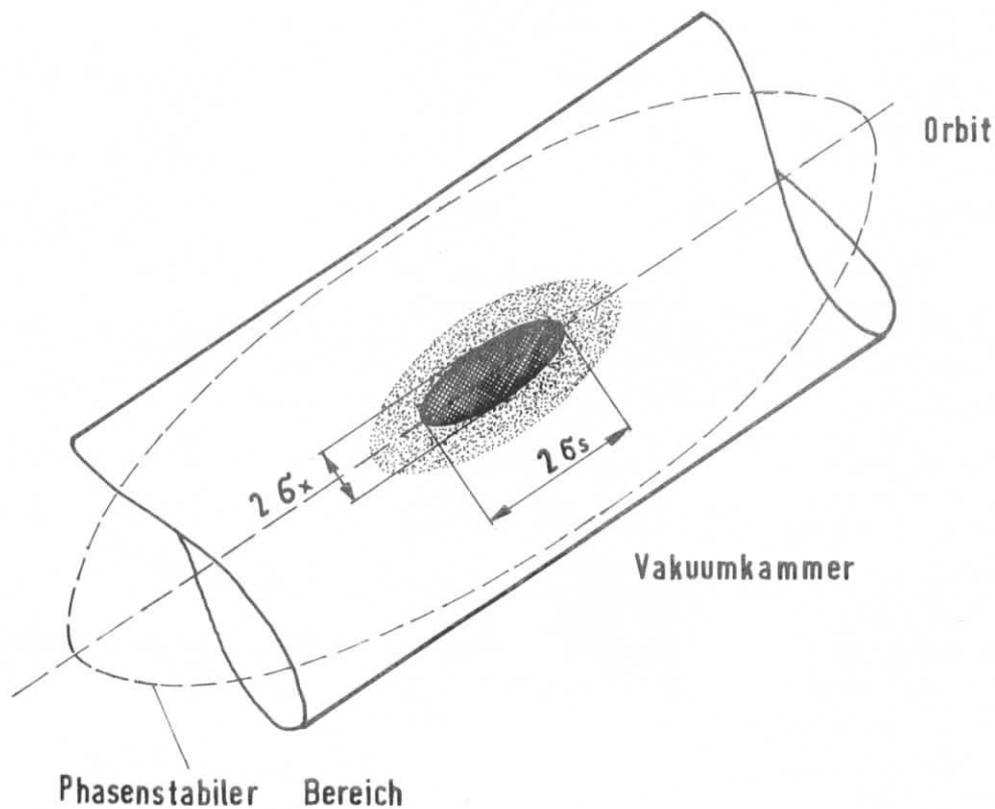


Fig. 5 Bunchstruktur in horizontaler und orbitaler Richtung

5. Strahlaufweitung durch Streuprozesse

Es muß erwähnt werden, daß die in (28) und (29) beschriebenen "natürlichen" Anregungsmechanismen nicht die einzigen Effekte sind, die die Wahrscheinlichkeitsverteilungen w_x , w_z , w_s und damit die Strahlausdehnung bestimmen. So kann ein Teilchen auf seiner Bahn an einem Restgasmolekül oder an einem Teilchen des gleichen Bunches gestreut werden. Dabei erfährt es im allgemeinen eine Winkelablenkung $\delta x_s'$, $\delta z_s'$ und auf Grund des Impulsübertrages eine Energieabweichung δE_s , so daß gemäß

$$\delta x', \delta x = D_x \frac{\delta E}{E_s} \quad (34)$$

$$\delta z', \delta z = D_z \frac{\delta E}{E_s} \quad (35)$$

$$\delta \Delta \psi = -q \alpha \omega_0 \frac{\delta E}{E_s} \quad (36)$$

Betatron- und Synchrotronschwingung angeregt werden können. Diese Anregung führt offenbar zu einer Aufweitung des Strahles. Im Falle der horizontalen Betatronschwingung und der Synchrotronschwingung überwiegen die Mechanismen (28) und (29) so stark, daß (34) und (36) vernachlässigt werden können. Im Falle der vertikalen Betatronschwingung jedoch ist bei einem ebenen Ring mit $D_z = 0$ die vertikale Ausdehnung wesentlich durch die Winkelabweichungen $\delta z'$ in (35) bestimmt. Auch für den bei DESY geplanten Speicherring ist wegen der kleinen mittleren Dispersion D_z die vertikale Ausdehnung $2\sigma_z$ durch Streuung am Restgas bestimmt.

6. Berechnung von Dämpfungskonstanten und Strahldimensionen

Während in den vorhergehenden Abschnitten die physikalischen Zusammenhänge erläutert wurden, soll in diesem Abschnitt auf das Verfahren zur quantitativen Bestimmung der Dämpfungskonstanten und Strahlparameter eingegangen werden, jedoch ohne die recht umfangreichen Rechnungen durchzuführen. Die Ergebnisse dieser Rechnungen werden am Ende dieses Abschnittes zusammengestellt.

Für das Verständnis der physikalischen Zusammenhänge war es zweckmäßig, zwischen "klassischen" Effekten und Quanteneffekten zu unterscheiden. Bei

der quantitativen Formulierung ist diese etwas unnatürliche Aufspaltung nicht sinnvoll. Für die Berechnung der Wahrscheinlichkeitsverteilungen w_x , w_z , w_s erweist es sich als bequem, als Variable jeweils eine Größe zu verwenden, die im wechselwirkungsfreien Falle eine Konstante der Bewegung ist. Für die Betatronschiwingung verwenden wir daher als Variable der Verteilung die horizontale und vertikale Emittanz

$$\epsilon_x = \gamma_x(s) x^2 + 2 \alpha_x(s) x x' + \beta_x(s) x'^2; \quad \frac{d \epsilon_x}{dt} = 0$$

$$\epsilon_z = \gamma_z(s) z^2 + 2 \alpha_z(s) z z' + \beta_z(s) z'^2; \quad \frac{d \epsilon_z}{dt} = 0$$

und für die Synchrotronschiwingung die Hamiltonfunktion H , die in linearer Näherung lautet:

$$H = \frac{\dot{\Delta\psi}^2}{2} + \frac{\Omega^2}{2} \Delta\psi^2; \quad \frac{dH}{dt} = 0 \quad (37)$$

Bei Wechselwirkung mit dem Strahlungsfeld kann der Schwingungszustand eines Teilchens im Strahl durch die im allgemeinen zeitabhängigen Verteilungsfunktionen $w_x(\epsilon_x, t)$, $w_z(\epsilon_z, t)$, $w_s(H, t)$ beschrieben werden, die allerdings nach einiger Zeit in stationäre oder quasistationäre Verteilungen übergehen:

$$w_x(\epsilon_x, t) \rightarrow w_x(\epsilon_x)$$

$$w_z(\epsilon_z, t) \rightarrow w_z(\epsilon_z)$$

$$w_s(H, t) \rightarrow w_s(H)$$

Da der Vorgang des sich zwischen Anregung und Dämpfung einstellenden Gleichgewichtes einer Diffusion sehr ähnlich ist, genügen die Funktionen w_x , w_z

w_S jeweils einer Diffusionsgleichung (Fokker-Planck-Gleichung) der Form²

$$\frac{\partial w(u,t)}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} \frac{\overline{\delta u}}{\tau} w(u,t) + \frac{\partial^2}{\partial u^2} \frac{\overline{\delta u^2}}{\tau} w(u,t), \quad (38)$$

wenn u die Größen ϵ_x , ϵ_z , H kennzeichnet. Die mittleren zeitlichen Verschiebungen $\frac{\overline{\delta u}}{\tau}$ und die mittleren zeitlichen Verschiebungsquadrate $\frac{\overline{\delta u^2}}{\tau}$ sind gemäß (12) aus (21), (28), (29) und (37) zu berechnen. Die recht umfangreichen Rechnungen zur Lösung der Differentialgleichungen (38) liefern folgendes Resultat: Eine zu Anfang vorliegende Verteilung $w_x(\epsilon_x, t)$; $w_z(\epsilon_z, t)$, $w_S(H, t)$ geht innerhalb der Zeiten τ_x , τ_z , τ_S in die stationäre oder quasi-stationäre Verteilung über

$$\begin{aligned} w_x(\epsilon_x, t) &\rightarrow w(\epsilon_x) + o(e^{-\frac{t}{\tau_x}}), & \tau_x &= \frac{1}{2 a_x} \\ w_z(\epsilon_z, t) &\rightarrow w(\epsilon_z) + o(e^{-\frac{t}{\tau_z}}), & \tau_z &= \frac{1}{2 a_z} \\ w_S(H, t) &\rightarrow w(H) + o(e^{-\frac{t}{\tau_S}}), & \tau_S &= \frac{1}{2 a_S}, \end{aligned} \quad (39)$$

wobei a_x , a_z , a_S die Dämpfungskonstanten für horizontale bzw. vertikale Betatronschwingungen und Synchrotronschwingungen sind. Die stationäre Verteilung hat die Form:

$$\begin{aligned} w(\epsilon_x) &\sim e^{-\frac{\epsilon_x}{\epsilon_x^0}}, & \epsilon_x^0 &= \frac{Q_x^0}{2 a_x} \\ w(\epsilon_z) &\sim e^{-\frac{\epsilon_z}{\epsilon_z^0}}, & \epsilon_z^0 &= \frac{Q_z^0}{2 a_z} \\ w(H) &\sim e^{-\frac{H}{H^0}}, & H^0 &= \frac{Q_S^0}{2 a_S} \end{aligned} \quad (40)$$

Hierin sind Q_x^0 , Q_z^0 , Q_s^0 von π abhängige Größen und beschreiben nach Abschnitt 2 "Quanteneffekte". Die Bedeutung der Relationen für ϵ^0 und H_0 in (40) wird deutlich, wenn man den Ausdruck für die mittlere zeitliche Verschiebung

$$\frac{\overline{\delta u}}{\tau} = -2 a u + Q$$

auffaßt als Differentialgleichung für u . Im stationären Fall muß dann gelten

$$\frac{\overline{\delta u}}{\tau} = 0$$

oder

$$-2 a u + Q = 0 .$$

Diese Relation ist nur für ein bestimmtes u_0 erfüllt, das gegeben ist durch

$$u_0 = \frac{Q}{2 a}$$

im Einklang mit (40), so daß durch diese Gleichungen tatsächlich das Gleichgewicht von Anregung und Dämpfung beschrieben wird.

Der Definition nach sind ϵ_x , ϵ_z , H quadratische Funktionen der Auslenkung x , z und $\Delta\psi = \frac{q\omega_0}{c}\Delta s$. Somit liefern die Verteilungen $w_x(\epsilon_x)$, $w_z(\epsilon_z)$, $w_s(H)$ Gauß-Verteilungen bezüglich dieser Auslenkungen:

$$w_x(x) \sim e^{-x^2/\sigma_x^2}$$

$$w_z(z) \sim e^{-z^2/\sigma_z^2}$$

$$w_s(\Delta s) \sim e^{-\Delta s^2/\sigma_s^2} ,$$

und zwar erscheinen die in Abschnitt 4 durch (30), (31), (32) definierten Größen als Standardabweichungen der entsprechenden Gaußverteilung. Für die Dämpfungskonstanten und die Strahldimensionen ergeben sich in Abhängigkeit von den Maschinenparametern folgende Ausdrücke:

$$a_x = \left\langle \frac{P}{2 E_s} (1 - D_x C_x) \right\rangle_s \quad (41)$$

$$a_z = \left\langle \frac{P}{2 E_s} (1 - D_z C_z) \right\rangle_s \quad (42)$$

$$a = \left\langle \frac{P}{E_s} \left[1 + \left(\frac{1}{2} D_x C_x + D_z C_z \right) \right] \right\rangle_s \quad (43)$$

$$\sigma_x = \sqrt{\beta_x(s) \left\langle Q \left[D_x^2 \left(1 + \frac{\beta_x'^2}{4} \right) \frac{1}{\beta_x} + D_x'^2 \beta_x - D_x D_x' \beta_x' \right] \right\rangle_s} \quad (44)$$

$$\sigma_z = \sqrt{\beta_z(s) \frac{3 \pi r_e}{2 k T \gamma^5} \langle \beta_z \rangle_s \left\langle \frac{1}{R} \right\rangle_s \sum_i P_i \sum_j Z_{ij} \log \frac{183}{Z_{ij}^{1/3}}} \quad (45)$$

$$\sigma_s = \sqrt{\frac{55 \sqrt{3}}{64} \frac{\hbar \bar{\alpha} \langle R \rangle_s}{r_e q E_s} \frac{\left\langle \frac{1}{R^3} \right\rangle_s \tan \psi_s}{\left\langle \frac{1}{R^2} \right\rangle_s \left\langle \frac{1}{R} \right\rangle_s (2 + D_x C_x + D_z C_z)} \right\rangle_s} \quad (46)$$

mit den Abkürzungen

$$C_x = \frac{1}{R_x} + 2 \left(\frac{B_z}{B^2} \frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{B_x}{B^2} \frac{\partial B_z}{\partial z} \right)$$

$$C_z = \frac{1}{R_z} + 2 \left(\frac{B_x}{B^2} \frac{\partial B_z}{\partial x} + \frac{B_z}{B^2} \frac{\partial B_z}{\partial z} \right)$$

$$Q = \frac{55}{24 \sqrt{3}} r_e c^2 \pi \left| \frac{1}{R^3} \right| \gamma^6 E$$

und unter Verwendung des Symbols $\langle \dots \rangle_S$ für die Mittelung über die Sollbahn. Die Größen $k T$, P_i , Z_{ij} kennzeichnen Boltzmannfaktor, Partialdruck der i -ten Restgaskomponente und Ordnungszahl des j -ten Atoms in der i -ten Komponente.

Die Standardabweichung für die Energieverteilung läßt sich mit Hilfe der Verteilung $w(H)$ berechnen. Man erhält:

$$\sigma_E = \sqrt{\frac{1}{2} \frac{E_S \langle Q \rangle_S}{\langle P(2 + D_x C_x + D_z C_z) \rangle}} \quad (47)$$

Eine für die praktischen Rechnungen recht zweckmäßige Relation liest man aus (41), (42) und (43) ab:

$$a_x + a_z + a_s = -2 \frac{\langle P \rangle_S}{E_S} \quad (48)$$

Diese Beziehung wurde von K.W. Robinson⁵ entdeckt und zeigt, daß bei der Summation über die Dämpfungskonstanten die spezielle Magnetstruktur der Maschine herausfällt, und gestattet bei Kenntnis zweier Dämpfungskonstanten, die dritte in einfacher Weise zu berechnen.

Um eine numerische Vorstellung zu vermitteln, seien für den bei DESY geplanten Speicherring einige charakteristische Strahlparameter angeführt. Bei einer Teilchenenergie von 1.5 GeV gilt:

$$\begin{array}{lll} \tau_x = 80 \text{ m sec}; & \sigma_x = \beta_x(s) \epsilon_x; & \epsilon_x = 1.4 \cdot 10^{-7} \text{ radm} \\ & \sigma_z = \beta_z(s) \epsilon_z; & \epsilon_z = 7.0 \cdot 10^{-11} \text{ radm} \\ \tau_s = 37 \text{ m sec}; & 2 \sigma_s \approx 3 \text{ cm}; & \frac{\sigma_E}{E_S} \approx 3 \cdot 10^{-2} \% \end{array}$$

Referenzen

1. Sokolov A.A., J.N. Ternov, "Synchrotronstrahlung", Moskau 1966
2. Kolomenski A.A., A. N. Lebedev, "Theory of Cyclic Accelerators", North-Holland 1966
3. Steffen K. G., Interner Bericht DESY H-69/19 (1969)
4. Piwinski A., DESY Bericht 68/51 (1968)
5. Robinson K. W., Phys. Rev. 111, 373 (1958)

Teilchenverluste und Lebensdauer

von

H. Nesemann

	S.
1) Zeitabhängigkeit der Speicherringstromstärke und Lebensdauer	88
2) Teilchenverluste an den Grenzen des phasenstabilen Bereiches	91
a) Teilchenverluste durch Synchrotronstrahlung	95
b) Teilchenverluste durch Schwankungen der HF-Sollphase	101
3) Teilchenverluste an der Kammerwand	103
4) Teilchenverluste durch Streuung am Restgas	104
a) Streuung an den Kernen des Restgases	105
b) Bremsstrahlung am Restgas	109
c) Streuung an den Elektronen des Restgases	111
5) Teilchenverluste durch Touschek-Effekt	112
6) Teilchenverluste durch Streuung am anderen Strahl	114
7) Strahllebensdauer für den DESY-Speicherring	115

An Speicherringen kann nur dann sinnvoll experimentiert werden, wenn die Teilchenverluste so gering gehalten werden, daß die Strahl-Lebensdauer in der Größenordnung von einigen Stunden liegt. Diese Forderung ist um einige Größenordnungen schärfer als an den bisher betriebenen Beschleunigern. Die offensichtlich erforderliche Untersuchung der Lebensdauer soll im folgenden durchgeführt werden. Dabei soll von Strahlinstabilitäten, die immer zu Teilchenverlusten führen können, abgesehen und nur die Verluste betrachtet werden, die auch bei einer idealen Maschine auftreten. Bei allen Überlegungen wird angenommen, daß die Sollenergie des Speicherringes konstant ist. Selbst wenn die Energie nach der Füllung variiert wird, kann dies in Zeiten geschehen, die groß sind gegenüber den Dämpfungszeiten, so daß nur stationäre Zustände durchlaufen werden.

1) Zeitabhängigkeit der Speicherringstromstärke und Lebensdauer

Bei vielen Prozessen ist die Änderung pro Zeiteinheit einer Größe I proportional zu ihrem augenblicklichen Betrag

$$(1a) \quad dI = - BI \, dt$$

Für $I(t)$ erhält man dann

$$(1b) \quad I(t) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Dabei bedeutet

$$(1c) \quad \tau = \frac{1}{B}$$

die Lebensdauer.

Es gibt Prozesse an einem Speicherring, bei dem die Stromabnahme ebenfalls durch dieses Exponentialgesetz beschrieben wird. Daneben gibt es aber auch Prozesse, bei denen die Stromabnahme proportional zum Quadrat des augenblicklichen Betrages ist

$$(2a) \quad dI = - BI^2 dt$$

Ein Beispiel für derartige Prozesse ist die Streuung am Restgas. Es ist verständlich, daß die Stromabnahme proportional zum Druck P ist.

$$dI = - CPI dt$$

P setzt sich aus zwei Anteilen zusammen. Der erste Anteil ist der durch die Pumpen erzeugte Grunddruck P_0 im Vakuumsystem; der zweite Anteil, der über die Synchrotronstrahlung durch Gasdesorption an den Kammerwänden erzeugte Druck, ist selber proportional zum Strom, so daß gilt

$$P = P_0 + DI$$

Wenn P_0 zu vernachlässigen ist, erhält man sofort (2a). Das zugehörige Zerfallsgesetz ist

$$(2b) \quad I(t) = \frac{I_0}{1 + BI_0 t}$$

Versucht man jetzt die Lebensdauer τ in der üblichen Weise durch

$$\tau = \frac{\int_0^{\infty} t I(t) dt}{\int_0^{\infty} I(t) dt}$$

Außerdem besteht für $\dot{\phi}$ die Beziehung

$$(7) \quad \dot{\phi} = -q \omega_0 \alpha \frac{\Delta E}{E}$$

Dabei ist ΔE die Energieabweichung eines Teilchens von der Sollenergie. Nach Definition ist sie positiv, wenn die Energie des Teilchens größer ist als die Sollenergie.

Integriert man (5) einmal über die Zeit, erhält man

$$(8) \quad \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + \Omega^2 F(\phi) = H$$

mit

$$(9) \quad F(\phi) = \int f(\phi) d\phi$$

das für kleine ϕ übergeht in

$$(9a) \quad F(\phi) = \frac{1}{2} \phi^2$$

$F(\phi)$ wird in Analogie vom harmonischen Oszillator als Potential der Synchrotronschwingung bezeichnet und ist in Abbildung 1 für zwei verschiedene Sollphasen aufgetragen. Teilchen deren maximale Schwingungsamplitude ϕ_m oder - in anderer Sprechweise - deren maximale Energieabweichung $(\Delta E)_m$ so groß ist, daß sie den Potentialwall überwinden können, gehen dem Speicherprozeß verloren. Je kleiner die Sollphase, um so höher ist der Potentialwall. Daher sind die Teilchenverluste um so kleiner, je kleiner die Sollphase ist.

Abbildung 2 gibt die Darstellung der Synchrotronschwingung in ihrer Phasenebene $(\phi, \dot{\phi})$ bzw. $(\phi, \frac{\Delta E}{E})$. Kurvenparameter ist H. Für kleine

Abb. 1: Potential der Synchronschwingung

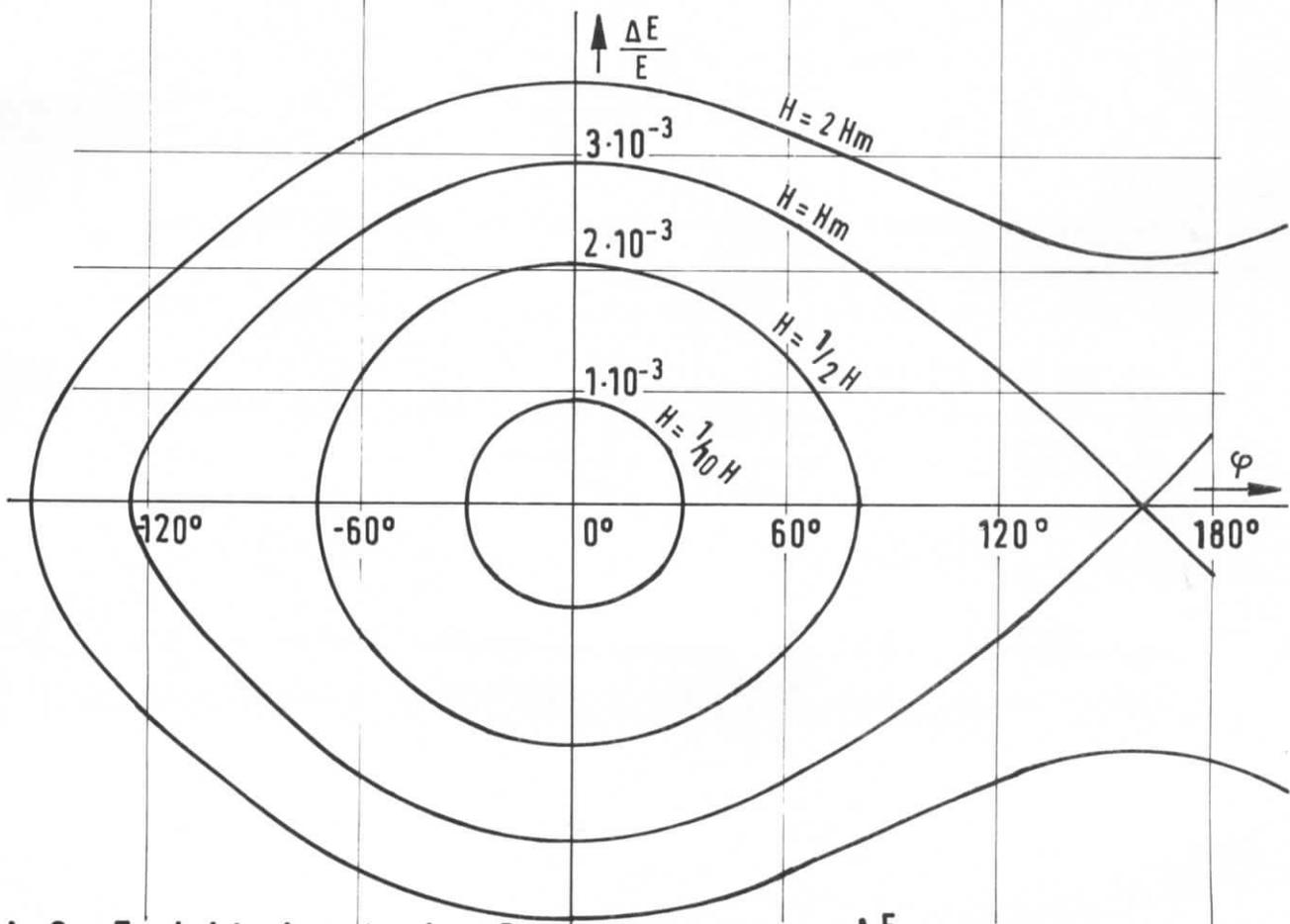
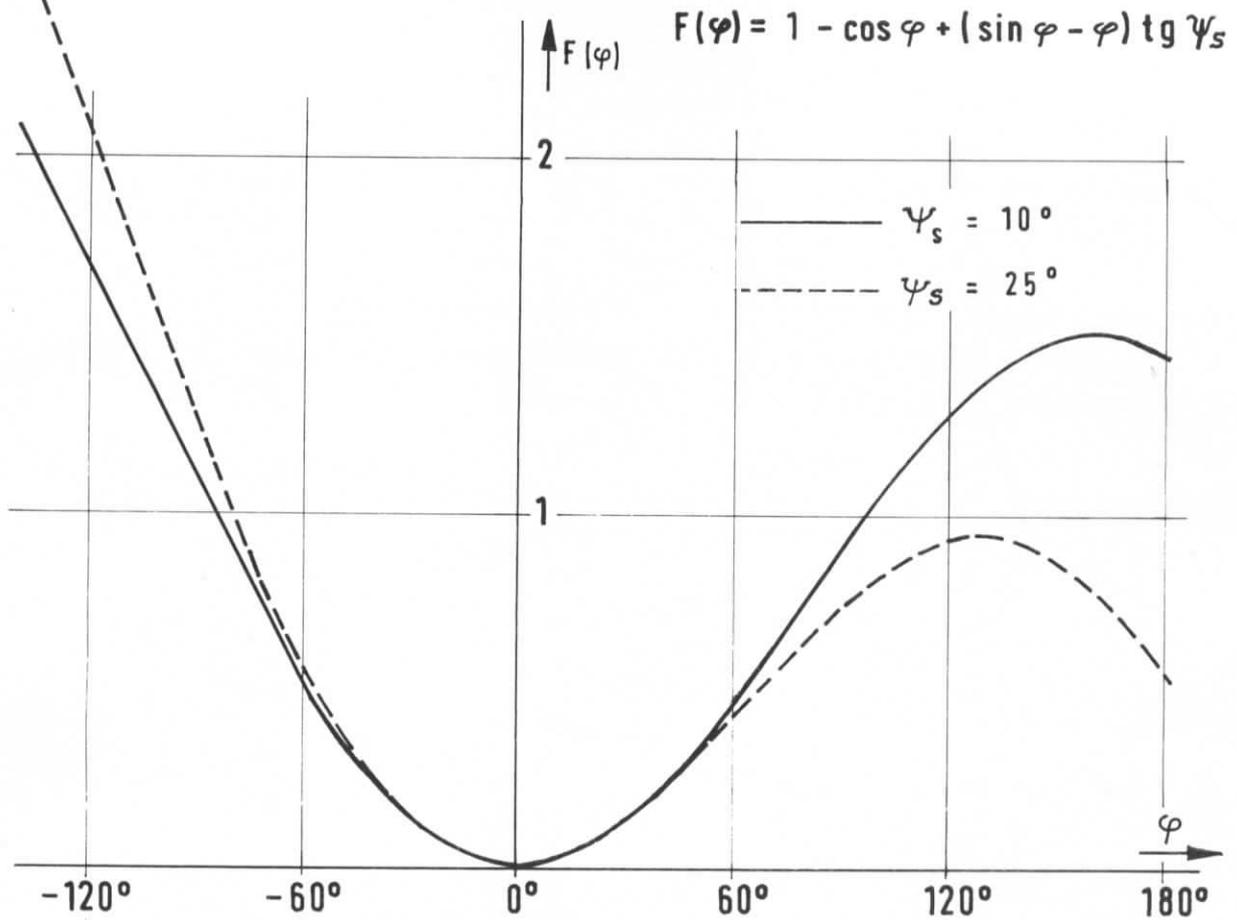


Abb. 2: Trajektorien in der Phasebene $(\varphi, \frac{\Delta E}{E})$ der Synchronschwingung

H ist die zugehörige maximale Schwingungsamplitude ϕ_m klein, so daß für $F(\phi)$ die Näherung $F(\phi) = \frac{1}{2} \phi^2$ verwendet werden kann. Dann ergeben sich Ellipsen, also geschlossene Kurven, auf denen die Teilchen stabil umlaufen können. Mit wachsendem H gehen diese Bahnen allmählich in die Separatrix über, die durch

$$(10) \quad H_m = \Omega^2 F(\pi - 2\psi_s)$$

charakterisiert ist. Für Teilchen mit noch größerem H existieren keine geschlossenen Bahnen mehr. Ihre Phasen- und Energieabweichung wird immer größer. Sie werden schließlich an den Wänden der Vakuumkammer abgestreift. Bei der Berechnung der Lebensdauer wird genau nach der Zahl dieser Teilchen gefragt.

Der Bereich, in dem die Teilchen gespeichert werden können, ist der phasen- bzw. energiestabile Bereich. Er läßt sich beschreiben entweder durch H_m oder durch die maximale stabile Phasenabweichung

$$(11) \quad \phi_m = \pi - 2\psi_s$$

oder durch die maximale stabile Energieabweichung

$$(12a) \quad (\Delta E)_m^2 = \frac{2H_m E^2}{q^2 \omega^2 \alpha^2}$$

$$(12b) \quad (\Delta E)_m^2 = \frac{eUE}{\pi q \alpha} \left[2\cos\psi_s - (\pi - 2\psi_s) \sin\psi_s \right]$$

Drückt man die Spitzenumfangsspannung durch den Energieverlust pro Umlauf aus, geht (12b) über in

$$(12c) \quad (\Delta \gamma)^2 = \frac{8}{3} \frac{r_e \bar{R} \gamma^5}{q \alpha} \langle K^2 \rangle \left[\cotg\psi_s + \psi_s - \frac{\pi}{2} \right]$$

mit	r_e	klassischer Elektronenradius
	\bar{R}	mittlerer Maschinenradius
	K	Krümmung der Sollbahn
	$\Delta\gamma = \frac{(\Delta E)_m}{mc^2}$	
	$\gamma = \frac{E}{mc^2}$	
	mc^2	Ruhenergie des Elektrons
	$\langle a \rangle$	Mittel von a über den Umfang der Maschine

2a) Teilchenverluste durch Synchrotronstrahlung

Bisher wurden einzelne Teilchen betrachtet. Im Bunch liegt aber eine Teilchengesamtheit mit allen möglichen Werten für H vor. Die Dichteverteilung dieser Teilchen sei $P(H,t)$. Für $P(H_m,t)$ muß gelten

$$(13) \quad P(H_m,t) = 0$$

da Teilchen mit $H > H_m$ nicht gespeichert werden können.

Ohne Störung ist die Größe H eine Bewegungskonstante. Eine Störung, die eine Änderung von H ermöglicht, ist die Synchrotronstrahlung. Durch Synchrotronstrahlung verliert das Teilchen Energie. Geschieht das in der oberen Hälfte der Phasenebene, läuft das Teilchen in das Innere der Separatrix, geschieht es in der unteren Halbebene, läuft es nach außen. Auf diese Weise können die Teilchen in der Phasenebene diffundieren. Für $P(H,t)$ muß also eine Diffusionsgleichung, die Fokker-Planck-Gleichung, gelten

$$(14) \quad \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial H} \left[- \left(\frac{\overline{\Delta H}}{\tau} \right) P + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial H} \left\{ \left(\frac{\overline{\Delta^2 H}}{\tau} \right) P \right\} \right]$$

Sie beschreibt $P(H,t)$ unter dem Einfluß der mittleren Änderungen $(\overline{\Delta H})$ und $(\overline{\Delta^2 H})$. τ ist der mittlere zeitliche Abstand zweier Störungen.

$P(H,t)$ allein gestattet es noch nicht, die Zahl bzw. den Strom $I_m = I(H_m, t)$ der Teilchen zu bestimmen, die über die Separatrix hinweg diffundieren und damit verloren gehen. Für I gilt die Kontinuitätsgleichung

$$(15) \quad \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial H} = 0$$

Durch (14) und (15) unter der Randbedingung (13) kann I_m berechnet werden.

Zuvor müssen noch die Koeffizienten der Fokker-Planck-Gleichung $(\frac{\overline{\Delta H}}{\tau})$ und $(\frac{\overline{\Delta^2 H}}{\tau})$ bestimmt werden. Die Rechnung hat folgenden Gedankengang.

Jede Emission eines Photons durch ein Teilchen hat eine Änderung seiner Energieabweichung ΔE von der Sollenergie und damit nach (7) eine Änderung $\Delta \dot{\phi}$ von $\dot{\phi}$ zur Folge. Das hinwiederum bedingt nach (8) eine Änderung von H um ΔH . ΔH bzw. $\Delta^2 H$ muß zweimal gemittelt werden, einmal über alle möglichen Photonenenergien, zum anderen über eine Synchrotronschwingung. Die letzte Mittelung ist notwendig, weil bei gegebenem $\Delta \dot{\phi}$ die Änderung ΔH von der Schwingungsamplitude ϕ abhängt. Sie darf über die ungestörte Synchrotronschwingung durchgeführt werden, da gilt

$$\Sigma (\overline{\Delta^2 H}) \ll \overline{H^2}$$

Die Summe gibt an, daß über alle Änderungen von \overline{H} während einer Synchrotronschwingung summiert werden soll, und $\overline{H^2}$ bedeutet das mittlere H^2 der Teilchengesamtheit.

Das Ergebnis der Rechnung zur Bestimmung der Koeffizienten der Fokker-Planck-Gleichung ist ¹⁾

$$(16) \quad \overline{\left(\frac{\Delta H}{\tau}\right)} = -2a_s H + \frac{1}{2} N$$

$$(17) \quad \overline{\left(\frac{\Delta^2 H}{\tau}\right)} = \frac{q^2 \omega_0^2 \alpha^2}{E^2} H \langle Q_s \rangle = NH$$

mit

a_s Dämpfungskonstante der Synchrotronschwingung

$$a_s = \frac{2}{3} r_e c \gamma^3 \langle K^2 + K^3 D \left(\frac{1}{2} - n\right) \rangle$$

$$\langle Q_s \rangle = \frac{55}{24\sqrt{3}} r_e c^2 \hbar \gamma^6 E \langle K^3 \rangle$$

c Lichtgeschwindigkeit

D Dispersion

n Feldindex

Für $F(\phi)$ wurde die Näherung (9a) benutzt.

Nachdem die Koeffizienten der Fokker-Planck-Gleichung bekannt sind, kann der für die Teilchenverluste maßgebliche Diffusionsstrom I_m aus (13), (14) und (15) bestimmt werden.

Zunächst bestätigt man durch Einsetzen, daß

$$P(H) = G e^{-\frac{4a_s H}{N}}$$

eine stationäre Lösung der Fokker-Planck Gleichung ist. Diese Lösung ist wichtig, weil sich bei den im Vergleich zu den Dämpfungszeiten langen Speicherzeiten eine stationäre Dichteverteilung einstellt, stationär in dem Sinne, daß $P(H,t)$ als Funktion von H unabhängig von t die gleiche Gestalt hat. Dieses Verhalten beschreibt der Ansatz

$$(18) \quad P(H,t) = P(0,t) e^{-\frac{4a_s H}{N}}$$

Unter der Bedingung

$$\frac{4a_s H_m}{N} \gg 1$$

ist die Randbedingung (13) näherungsweise erfüllt.

Mit Hilfe des Ansatzes (18) erhält man in guter Näherung aus (13), (14) und (15)

$$(19) \quad I_m = 2a_s H_m P(0,t) e^{-\frac{4a_s H_m}{N}}$$

I_m ist gleich der Änderung der Teilchenzahl z im bucket pro Zeiteinheit

$$(20) \quad -\frac{dz}{dt} = I_m$$

Weiterhin gilt

$$z(t) = \int_0^{H_m} P(H,t) dH$$

$$(21) \quad z(t) \approx P(0,t) \frac{N}{4a_s}$$

Die Größe

$$(22) \quad -\frac{1}{z(t)} \frac{dz}{dt} = 2a_s \frac{4a_s H_m}{N} e^{-\frac{4a_s H_m}{N}}$$

hat die Gestalt (1a).

Daher ist die Lebensdauer

$$(23) \quad \tau = \frac{1}{2a_s} \cdot \frac{1}{r} e^r \quad \text{mit } r = \frac{4a_s H_m}{N}$$

Je größer die Dämpfungskonstante ist, um so mehr werden sich die Teilchen um $H = 0$, also im Inneren der Separatrix, konzentrieren. Das läßt eine große Lebensdauer erwarten, wie auch die Formel ausweist. Auch ein großes H_m läßt eine große Lebensdauer erwarten, weil dann die Separatrix viel Platz für die Diffusion der Teilchen bietet.

H_m ist durch (12a) auf die maximale stabile Energieabweichung zurückgeführt

$$H_m = \frac{1}{2} q^2 \omega_0^2 \alpha^2 \left(\frac{\Delta E_m}{E} \right)^2$$

N läßt sich durch die mittlere Energiestreuung σ_E im Strahl ausdrücken

$$(24) \quad N = 4a_s q^2 \omega_0^2 \alpha^2 \left(\frac{\sigma_E}{E} \right)^2$$

Für σ_E gilt

$$(25) \quad \sigma_E^2 = \frac{55}{64\sqrt{3}} \hbar c \gamma^3 E \frac{\langle K^3 \rangle}{\langle K^2 + K^3 D \left(\frac{1}{2} - n \right) \rangle}$$

Setzt man (12a) und (24) in (23) ein, erhält man

$$(26) \quad r = \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta E_m}{\sigma_E} \right)^2$$

Je größer das Verhältnis der maximalen stabilen Energieabweichung zur mittleren Energieabweichung ist, um so größer ist die Lebensdauer.

Drückt man noch (ΔE_m) und σ_E nach (12c) und (25) aus, ergibt sich schließlich

$$(27) \quad r = \frac{256\sqrt{3}}{165} \frac{r_e \bar{R} E \langle K^2 \rangle \langle K^2 + K^3 D \left(\frac{1}{2} - n \right) \left[\cotg \psi_s + \psi_s - \frac{\pi}{2} \right]}{q \alpha \hbar c \langle K^3 \rangle}$$

Dazu einige Bemerkungen:

- 1) r ist umgekehrt proportional zur Harmonischnzahl q . Die Lebensdauer nimmt also bei Gleichheit aller übrigen Größen mit wachsender Harmonischnzahl stark ab. Der Effekt kann durch kleinere Sollphasen ψ kompensiert werden; und das ist genau der Grund dafür, daß ein Speicherring mit großer Harmonischnzahl bei kleineren Sollphasen arbeiten muß.
- 2) Da $r \propto E$ kann bei großen Energien zu größeren Sollphasen übergegangen werden. Das ist von Vorteil, weil damit die notwendige Spitzenumfangsspannung und daraus folgend die Verlustleistung in den Cavities klein gehalten werden kann.
- 3) Ein kleiner Momentum Compaction Faktor

$$\alpha = \langle KD \rangle$$

vergrößert die Lebensdauer.

2b) Teilchenverluste durch statistische Schwankungen der Sollphase

Nicht nur die Synchrotronstrahlung verursacht eine endliche Energiebreite des Strahles, sondern auch statistische Schwankungen der HF-Phase. Das ist verständlich, denn wenn die Teilchen verschiedene Spannungen im Beschleunigungscavity erfahren, wird sich die Energiebreite im Strahl vergrößern. Auch dieser Prozeß führt zu einer Diffusion in der Phasenebene der Synchrotronschwingung, weil mit jeder sprunghaften Änderung der Schwingungsamplitude ϕ um $\Delta\phi$ eine Änderung von H um ΔH verbunden ist.

Die mathematische Behandlung läuft völlig analog zu der der Synchrotronstrahlung. Allerdings ist es sinnlos, Energiestreuungen und Lebensdauern allein aufgrund von statistischen Schwankungen der Sollphase zu betrachten. Die aufgrund der Synchrotronstrahlung auftretende Dämpfung beeinflußt die Ergebnisse wesentlich. Das Ergebnis der Rechnungen unter Berücksichtigung beider Effekte ist ¹⁾

$$(28) \quad \tau = \frac{1}{2a_s} \cdot \frac{1}{r} e^r \quad \text{mit}$$

$$r = \frac{256\sqrt{3} \quad r_e \quad \bar{R} \quad E \quad \langle K^2 \rangle \langle K^2 + K^3 D \rangle \left(\frac{1}{2} - n \right) \left[\cotg \psi_s + \psi_s - \frac{\pi}{2} \right]}{165 \quad q \quad \alpha \quad \hbar c \quad \langle K^3 \rangle + \frac{16\sqrt{3}}{55} \frac{\bar{R}}{c} \frac{\overline{\Delta^2 \phi}}{\Delta t} \langle K^2 \rangle E \cotg \psi_s \gamma^3}$$

Der zweite Term im Nenner ist durch die statistischen Phasenschwankungen verursacht, deren Mittelwert $\overline{\Delta^2 \phi}$ ist. Δt ist der mittlere Abstand zwischen zwei solchen Sprüngen.

Der Effekt ist höchst unerwünscht; denn wenn der zweite Term groß gegen den ersten wird, kürzt sich $\cotg \psi_s$, so daß die Lebensdauer nicht mehr durch eine kleine Sollphase verlängert werden kann. Das einzige Gegenmittel ist, die HF-Sender so zu spezifizieren, daß $\frac{\overline{\Delta^2 \phi}}{\Delta t}$ hinreichend klein ist.

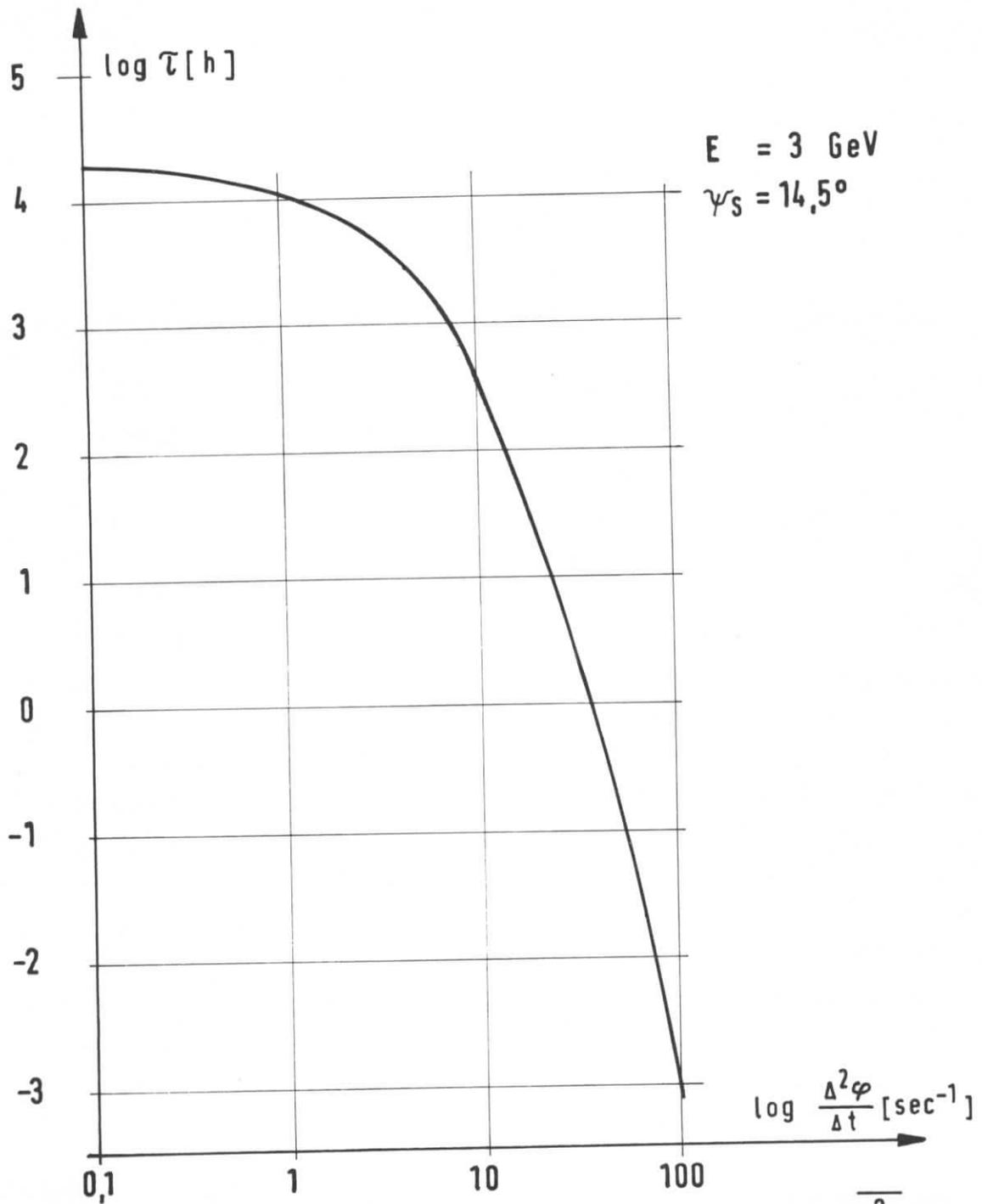


Abb. 3: Einfluß statistischer Phasensprünge $\frac{\Delta^2 \varphi}{\Delta t}$ auf die Lebensdauer bei Verlusten an den Grenzen des phasenstabilen Bereichs

In Abb. 3 ist der Einfluß von $\overline{\frac{\Delta^2 \phi}{\Delta t}}$ auf die Lebensdauer für den DESY-Speicherring bei einer Energie von 3 GeV und einer Sollphase von $14,5^\circ$ dargestellt.

3) Teilchenverluste an der Kammerwand

Die Synchrotronstrahlung verursacht nicht nur eine Diffusion in der Phasenebene der Synchrotronschwingungen $(\phi, \frac{\Delta E}{E})$, sondern auch in der Phasenebene der Betatronschwingungen (y, y') . y steht für die beiden Koordinaten x, z der zur Sollbahn senkrechten Ebene. Die Koordinate auf der Sollbahn sei s . y' bedeutet die Ableitung von y nach s .

Die Diffusion in der Phasenebene der Betatronschwingungen ist verständlich; denn durch die Emission von Photonen werden die Betatronschwingungsamplituden geändert. Ein Teilchen, dessen Abstand vom Krümmungsmittelpunkt - gemessen in der Ebene, in der die Krümmungen auftreten - größer ist als der Abstand seiner Sollbahn vom Krümmungsmittelpunkt, hat nach der Emission eines Photons eine neue Sollbahn, deren Abstand vom Krümmungsmittelpunkt kleiner ist als der ursprünglichen. Die Amplitude der Betatronschwingungen ist also vergrößert worden. Umgekehrt wird die Amplitude eines Teilchens, dessen Abstand vom Krümmungsmittelpunkt vor der Emission kleiner war als der Abstand seiner Sollbahn, verkleinert.

Neben der Synchrotronstrahlung trägt die Streuung am Restgas zur Diffusion in der Phasenebene bei, denn durch die Streuung werden die Winkel und damit y' geändert.

Die Teilchen gehen verloren, wenn ihre Schwingungsamplitude so groß geworden ist, daß sie die Vakuumkammer berühren.

Die mathematische Behandlung ist analog zu der der Synchrotronschwingung. Das Ergebnis ist

$$(29) \quad \tau_y = \frac{1}{2a_y} \frac{1}{r_y} e^{r_y} \quad \text{mit } r_y = \frac{4a_y H_{my}}{N_y}$$

und hat die gleiche Gestalt wie (23). Die Dämpfungskonstante der Synchrotronschwingung a_s in (23) ist durch die Dämpfungskonstante a_y der Betatronschwingung ersetzt werden. Außerdem muß H_{my} auf die Vakuumkammerapertur $2b_y$ und N_y auf die Standardabweichung der zur Bewegungsrichtung senkrechten Strahldimension zurückgeführt werden. Man erhält in Analogie zu (26)

$$(30) \quad r_y = \frac{1}{2} \left(\frac{b_y}{\sigma_y} \right)^2 = \frac{n_y^2}{2}$$

Bei einer Lebensdauer $\tau_y = 10$ h variiert das Verhältnis $n_y = \frac{b_y}{\sigma_y}$ als Funktion der Speicherringenergie entsprechend der Variation der Dämpfungskonstanten zwischen $n_y = 5$ bei 400 MeV und $n_y = 6,5$ bei 4,5 GeV für den DESY-Speicherring. Eine Verkleinerung von n_y unter die angegebenen Zahlen führt zu kurzen Lebensdauern, da τ_y proportional zu $\frac{1}{n_y^2} e^{\frac{n_y^2}{2}}$ ist.

4) Teilchenverluste durch Streuung am Restgas

Im vorangehenden wurden Prozesse beschrieben, die Teilchenverluste durch Diffusion verursachen. Die im folgenden zu beschreibenden Prozesse bewirken einerseits ebenfalls Diffusionsverluste, nämlich dann, wenn bei einem einzelnen Stoß die Bewegung der Teilchen in der Phasenebene der Betatron- oder Synchrotronschwingung nur so

geringfügig geändert wird, daß die Teilchen erst nach vielen Stößen die Grenze des stabilen Bereiches erreichen. Andererseits bewirken sie Verluste durch einen einzelnen Stoß. Der Wirkungsquerschnitt für eine große Änderung der Bewegung ist zwar kleiner als der für eine kleine Änderung, aber da erst viele kleine Änderungen zum Teilchenverlust führen, wird die Lebensdauer durch die Einzelstreuung bestimmt.

4a) Teilchenverluste durch Streuung an den Kernen des Restgases

Durch elastische Streuung an den Kernen des Restgases wird die Richtung der einfallenden Teilchen verändert. Dadurch ändert sich auch die Amplitude der Betatronschwingungen, und wenn die Richtungsänderung groß genug ist, erhalten die Teilchen eine so große Amplitude, daß sie an den Wänden der Vakuumkammer abgestreift werden. Im Prinzip wird bei der Streuung Energie auf den Kern übertragen. Der Energieverlust des einfallenden Teilchens ist jedoch im Mittel so klein, daß er nur unwesentliche Teilchenverluste verursacht.

Der Wirkungsquerschnitt für die elastische Streuung in einer Ebene an einem Kern der Ordnungszahl Z um den Winkel θ unter Berücksichtigung der Abschirmung des Kerns durch die Elektronenhülle ist für kleine Streuwinkel gegeben durch ²⁾

$$(31) \quad \sigma = 2\pi \frac{Z r_e^2}{\gamma^2} \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} \frac{d\theta}{(\theta^2 + \theta_1^2)^{3/2}}$$

Der durch die Abschirmung der Elektronenhülle bedingte Abschneiderwinkel θ_1 hat den Wert ²⁾

$$(32) \quad \theta_1 = \frac{1}{137} \frac{Z^{1/3}}{\sqrt{\gamma(\gamma - 1)}}$$

$$\theta_1 \approx 5 \cdot 10^{-5} \quad \text{für } E = 200 \text{ MeV}$$

Eine Abschätzung über den kleinsten Streuwinkel θ_{\min} , der zu Teilchenverlusten führt, läßt sich auf folgende Weise gewinnen.

Infolge der Betatronschwingungen hat jeder Strahl eine natürliche Winkeldivergenz. An jeder Stelle des Maschinenumfangs ist die maximale Neigung $\text{tg } \alpha_{\max}$ einer Teilchenbahn gegenüber der Sollbahn gegeben durch die Winkelenveloppe A

$$(33) \quad \text{tg}^2 \alpha_{\max} = A^2 = \epsilon \frac{1 + \frac{\beta'^2}{4}}{\beta} \approx \alpha_{\max}^2$$

Die Teilchen gehen verloren, wenn sie um einen Winkel gestreut werden, der größer ist als α_{\max} , so daß für θ_{\min} gilt

$$(34) \quad \theta_{\min}^2 = \epsilon \frac{1 + \frac{\beta'^2}{4}}{\beta}$$

Dabei bedeuten

ϵ Akzeptanz der Maschine

β Amplitudenfunktion

β' Ableitung der Amplitudenfunktion nach der Sollbahnkoordinate

Mit den Parametern des DESY-Speicherringes liegt θ_{\min} gemittelt über den Umfang der Maschine in der Größenordnung von 5 mrad.

Daher kann in (31) θ_1^2 gegen θ^2 vernachlässigt werden, so daß folgt

$$(35) \quad \sigma = \pi \frac{Z^2 r_e^2}{\gamma^2} \left(\frac{1}{\theta_{\min}^2} - \frac{1}{\theta_{\max}^2} \right)$$

Der maximale Streuwinkel θ_{\max} ist infolge des endlichen Kern-
durchmessers beschränkt. Für ihn gilt ³⁾

$$(36) \quad \theta_{\max} = \frac{280}{A^{1/3} \sqrt{\gamma(\gamma - 1)}}$$

Als Funktion der Energie variiert θ_{\max} bei einem Atomgewicht von $A = 1$ zwischen 700 mrad bei 200 MeV und 30 mrad bei 4,5 GeV. Die Näherung kleiner Streuwinkel ist also bei kleinen Energien nicht besonders gut. Eine genauere Rechnung ändert jedoch nichts wesentliches.

Mittelt man θ_{\min}^{-2} nach (34) über die Sollbahn und berücksichtigt Streuprozesse in der horizontalen und vertikalen Ebene, erhält man schließlich

$$(37) \quad \sigma = \frac{Z^2 r_e^2}{\gamma^2} \left[\frac{1}{\epsilon_x} \left\langle \frac{4\beta_x}{4 + \beta'^2} \right\rangle + \frac{1}{\epsilon_z} \left\langle \frac{4\beta_z}{4 + \beta'^2} \right\rangle - \right. \\ \left. - 2 \left(\frac{A^{1/3}}{280} \right)^2 \gamma(\gamma - 1) \right]$$

Die Abnahme dN der Teilchenzahl N über die Strecke dx ist gegeben durch

$$(40) \quad \begin{aligned} - dN &= n \sigma N dx \\ - dN &= n \sigma c N dt \end{aligned}$$

Daher ergibt sich für das durch Gleichung (4) definierte \bar{A}

$$\bar{A} = n \sigma c$$

Drückt man die Zahl der Streuzentren n pro Volumeneinheit durch den Gasdruck P aus

$$(41) \quad n = \frac{P}{kT}$$

und berücksichtigt, daß das Restgas aus verschiedenen Gasarten zusammengesetzt ist, folgt

$$(42) \quad \bar{A} = \frac{\pi r_e^2 c}{\gamma^2 kT} \sum_i \sum_j \sum_m P_i Z_{ij}^2 \left[\frac{1}{\epsilon_m} \left\langle \frac{4\beta_m}{4 + \beta_m'^2} \right\rangle - \left(\frac{A_{ij}^{1/3}}{280} \right)^2 \gamma(\gamma-1) \right]$$

Dabei bedeuten

- k Boltzmann-Konstante
- T absolute Temperatur
- i Index für das i -te Restgas
- j Index für das j -te Atom im i -ten Restgas
- m x oder z
- P_i Partialdruck des i -ten Restgases

Der Partialdruck P_i setzt sich zusammen aus dem Grunddruck P_{oi} der ohne Strahlbelastung im Vakuumsystem erreicht wird, und dem Druck, der durch Desorption infolge der Synchrotronstrahlung aufgebaut wird.

$$(43) \quad P_i = P_{oi} + f_i(E) I$$

Der von der Energie und von der Art des Restgases abhängige Druckanstieg pro Ampere $f_i(E)$ muß durch Messungen bestimmt werden.

4b) Teilchenverluste durch Bremsstrahlung am Restgas

Durch Bremsstrahlung können die Teilchen soviel Energie verlieren, daß sie aus dem energiestabilen Bereich $\Delta\gamma$ (12c) fallen.

Bei der Berechnung der Verluste kann der Kern als punktförmig angenommen werden.³⁾ Ob die Abschirmung durch die Elektronenhülle berücksichtigt werden muß, hängt ab von dem Parameter

$$(44) \quad s = \frac{100}{\gamma} \frac{\epsilon}{\gamma - \epsilon} Z^{-1/3}$$

ϵ Energie des Bremsstrahlungsquants in Einheiten der Ruhenergie des Elektrons

Falls $s \ll 1$, muß sie in die Rechnung einbezogen werden. Die Energie der meisten Bremsstrahlungsquants, die einen Teilchenverlust verursachen, ist beschränkt durch

$$\Delta\gamma \leq \epsilon \leq \frac{\gamma}{4}$$

Für alle diese Photonen gilt bei der kleinsten eventuell erreichbaren Speicherringenergie von $E = 200 \text{ MeV}$

$$s < \frac{1}{10}$$

In diesem Falle ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß pro Strahlungslänge ein Photon mit der relativen Energie $v = \frac{\epsilon}{\gamma}$ im Intervall dv ausgesandt wird, gegeben durch ³

$$(45) \quad w dv = \frac{1}{v} \left[1 + (1-v)^2 - (1-v) \left(\frac{2}{3} - 2g \right) \right]$$

Integriert man (45) und vernachlässigt dann $2g = \frac{1}{91 \ln 183 Z^{-1/3}}$ und $\frac{\Delta\gamma}{\gamma}$ gegen 1, erhält man die Wahrscheinlichkeit w dafür, daß pro Strahlungslänge ein Teilchen infolge Bremsstrahlung aus dem energiestabilen Bereich fällt.

$$(46) \quad w = \frac{4}{3} \ln \frac{\gamma}{\Delta\gamma} - \frac{5}{6}$$

Bedeutet X_0 die Strahlungslänge eines Gases und ρ seine Dichte, folgt für die Änderung der Teilchenzahl N , wenn das Restgas nur diese eine Komponente enthält,

$$- dN = \frac{w \cdot \rho}{X_0} c N dt$$

Vernachlässigt man den zweiten Summanden in (46), drückt ρ durch den Gasdruck P aus

$$\rho = \frac{A \cdot P}{R \cdot T}$$

und berücksichtigt die Zusammensetzung des Restgases, erhält man für das durch (4) definierte \bar{A}

$$(47) \quad \bar{A} = \frac{4}{3} \frac{c}{R \cdot T} \ln \frac{\gamma}{\Delta\gamma} \sum_{i,j} \frac{P_i A_{ij}}{X_{oij}}$$

mit

R Gaskonstante

A_{ij} Atomgewicht des j-ten Atoms im i-ten Molekül

Für den Partialdruck P_i gilt wieder (43)

Wie sich noch zeigen wird, bestimmt die Bremsstrahlung am Restgas in großen Energiebereichen des Speicherringes die Strahllebensdauer. Da die Strahlungslänge proportional zu Z^{-2} ist, sind Gaskomponenten mit hohem Z für die Lebensdauer besonders ungünstig. Im übrigen hängt die Lebensdauer nur logarithmisch von der Energie γ und dem energiestabilen Bereich $\Delta\gamma$ ab. Vergrößerung von $\Delta\gamma$, d. h. bei gegebener Energie Verkleinerung der Sollphase, bringen daher bezüglich der Lebensdauer keinen großen Gewinn.

4c) Teilchenverluste durch Streuung an den Elektronen des Restgases

Bei diesem Streuprozess übertragen die Teilchen im Strahl Energie auf die Elektronen des Restgases. Wenn die übertragene Energie größer ist als der energiestabile Bereich $\Delta\gamma$ (12c), gehen sie verloren.

Der Teilchenverlust durch die mit der Streuung verknüpfte Winkeländerung kann vernachlässigt werden.

Der Wirkungsquerschnitt pro Elektron dafür, daß das Teilchen beim Stoß eine Energie q im Intervall dq auf das Elektron des Restgases überträgt, ist ⁴⁾

$$d\sigma = 2\pi r_e^2 \frac{dq}{q^2}$$

wenn $\gamma^2 \gg 1$ und q in Einheiten der Ruhenergie des Elektrons gemessen wird. Der maximal übertragbare Energiebetrag ist $\frac{1}{2} \gamma$. Vernachlässigt man $\frac{2}{\gamma}$ gegenüber $\frac{1}{\Delta\gamma}$, erhält man als Wirkungsquerschnitt für den Teilchenverlust

$$(48) \quad \sigma = 2\pi r_e^2 \frac{1}{\Delta\gamma}$$

Unter Berücksichtigung der Gaszusammensetzung folgt daraus genau wie beim Übergang von (39) zu (42) für die durch Gleichung (4) definierte Größe \bar{A}

$$(49) \quad \bar{A} = \frac{2\pi r_e^2 c}{kT \Delta\gamma} \sum_{ij} P_i Z_{ij}$$

5) Teilchenverluste durch Touschek-Effekt

Infolge der Betatronschwingungen haben die Strahlteilchen Impulskomponenten, die transversal zur Sollbahn sind. Zwei Teilchen innerhalb desselben Bunches können durch Möllerstreuung ihren Transversal-

impuls in einen Longitudinalimpuls umwandeln. Dadurch gewinnt das eine Teilchen Energie, während das andere Energie verliert. Wenn die Energieänderung größer ist als der energiestabile Bereich $\Delta\gamma$ (12c), gehen beide Teilchen verloren. Dieser Prozeß wird als Tauschek-Effekt bezeichnet.

Sei dN_1 die Zahl der Streuzentren mit dem Impuls \vec{p}_1 im Intervall $d\vec{p}_1$, dN_2 die Zahl der einfallenden Teilchen mit dem Impuls \vec{p}_2 im Intervall $d\vec{p}_2$ und dV ein Volumenelement des Bunches. Der Betrag des Relativimpulses zwischen den Teilchen dN_1 und dN_2 sei $2p$. Dann ist der einfallende Teilchenstrom

$$I = \frac{dN_2}{dV} \frac{2pc}{E}$$

Bedeutet $\sigma(p)$ den Wirkungsquerschnitt für eine Streuung mit Teilchenverlust durch Tauschek-Effekt, so gilt für die Zahl dieser Streuprozesse pro Zeiteinheit

$$R = \int dN_1 \frac{dN_2}{dV} \frac{2pc}{E} \sigma(p)$$

Die Berechnung ⁵⁾ dieses Integrals unter Berücksichtigung der Impulsverteilung im Bunch liefert nach Mittelung der Bunchdimensionen über den Umfang der Maschine

$$(50) \quad R = \frac{r_e^2 c \left\langle \frac{1}{\sigma_x \sigma_z \sigma_s} \right\rangle N_B^2}{4\sqrt{\pi} (\Delta\gamma)^2} J$$

mit σ_x Standardabweichung der Bunchdimensionen in der Horizontalen
 σ_z " " " " " Vertikalen
 σ_s " " " " " Richtung der Sollbahn
 N_B Teilchenzahl pro Bunch

Der Korrekturfaktor J hängt vom mittleren Transversalimpuls \bar{p} ab. Ist \bar{p} hochrelativistisch, gilt $J = 1$. Mit kleiner werdendem \bar{p} wächst J und hat am DESY-Speicherring etwa den Wert 1,1 bei einer Energie von 200 MeV.

Da mit jedem Streuprozeß zwei Teilchen verloren gehen, gilt für die Teilchenabnahme

$$dN_B = - 2 R dt$$

Daraus folgt für die Lebensdauer

$$(51) \quad \tau = \frac{2(e - 1) \sqrt{\pi} q (\Delta\gamma)^2}{1} \cdot \frac{1}{J} < \frac{1}{\sigma_x \sigma_z \sigma_s} > r_e^2 c N_0$$

mit N_0 Teilchenzahl pro Strahl zu Beginn der Speicherung.

6) Teilchenverluste durch Streuung am anderen Strahl

Von allen Prozessen, die in der Wechselwirkungszone ablaufen, führt die Einfach-Bremsstrahlung



mit dem größten Wirkungsquerschnitt zum Teilchenverlust.

Die Teilchen gehen verloren, wenn sie soviel Energie abgeben, daß sie aus dem energiestabilen Bereich $\Delta\gamma$ (12c) fallen. Der Wirkungsquerschnitt ist ⁶⁾

$$(52) \quad \sigma = \frac{16}{3} r_e^2 \alpha \left[\left(\ln 4\gamma^2 - \frac{1}{2} \right) \left(\ln \frac{\Delta\gamma}{\gamma} - \frac{5}{8} \right) + \frac{1}{2} \left(\ln \frac{\Delta\gamma}{\gamma} \right)^2 - \right. \\ \left. - 0,804 \ln \frac{\gamma}{\Delta\gamma} - 0,20 \right]$$

mit α Feinstrukturkonstante

Für die Abnahme dN der Teilchenzahl N gilt

$$- dN = L \sigma dt$$

Da die Luminosität L proportional zu N^2 ist, folgt für die Lebensdauer

$$(53) \quad \tau = \frac{(e - 1) N_0}{L \sigma}$$

7) Strahllebensdauer für den DESY-Speicherring

Wie die bisherige Diskussion gezeigt hat, hängt die Lebensdauer in relativ komplizierter Weise von sehr vielen Parametern ab. Die wichtigsten sind die Energie, der Gasdruck, die Sollphase der Hochfrequenz und die Stromstärke. Die erreichbare Stromstärke ihrerseits ist hauptsächlich bestimmt durch das HF-System und Strahl-

instabilitäten, während die Sollphase so gewählt wird, daß sich eine möglichst große Luminosität ergibt. Wie bereits erwähnt, setzt sich der Gasdruck aus dem Grunddruck ohne Strahl und dem Druck zusammen, der durch Gasdesorption infolge der Synchrotronstrahlung aufgebaut wird. Der Desorptionsdruck ist proportional zur Stromstärke.

Um ein Gefühl für die Größenordnungen und die Abhängigkeiten zu geben, ist in Abb. 4 die Lebensdauer als Funktion der Energie für einen möglichen Betriebszustand des Speicherringes aufgetragen. Die eingeklammerten Zahlen an der Abzisse enthalten Angaben über die Stromstärke und die Sollphase bei der jeweiligen Energie.

Oberhalb 600 MeV ist die Lebensdauer im wesentlichen durch die Bremsstrahlung am Restgas bestimmt. In diesem experimentell wichtigen Bereich kann eine Mindestlebensdauer von 2 h erwartet werden. Unterhalb von 600 MeV bestimmt hauptsächlich der Touschek-Effekt die Lebensdauer.

Der Verlauf der einzelnen Lebensdauerkurven kann qualitativ auf folgende Weise eingesehen werden:

- 1) Touschek-Effekt: Von 200 MeV bis 400 MeV ist die Lebensdauer konstant, weil die Teilchenzahl N_0 (51) so gewählt wurde, daß eine Mindestlebensdauer von 1 h eingehalten wird. Zwischen 400 MeV und 1,5 GeV wächst die Lebensdauer, weil sie proportional zu γ^5 ist. {(51) und (12c)}. Die wachsende Teilchenzahl und die langsam wachsende Sollphase können diese Proportionalität nur zum Teil kompensieren. Das geschieht erst zwischen 1,5 GeV und 2 GeV, aufgrund der nunmehr schnell wachsenden Sollphase. Oberhalb 2 GeV steigt die Lebensdauer wieder, weil jetzt

die Energie- und Teilchenzahlabhängigkeit die Abhängigkeit von der Sollphase überwiegen.

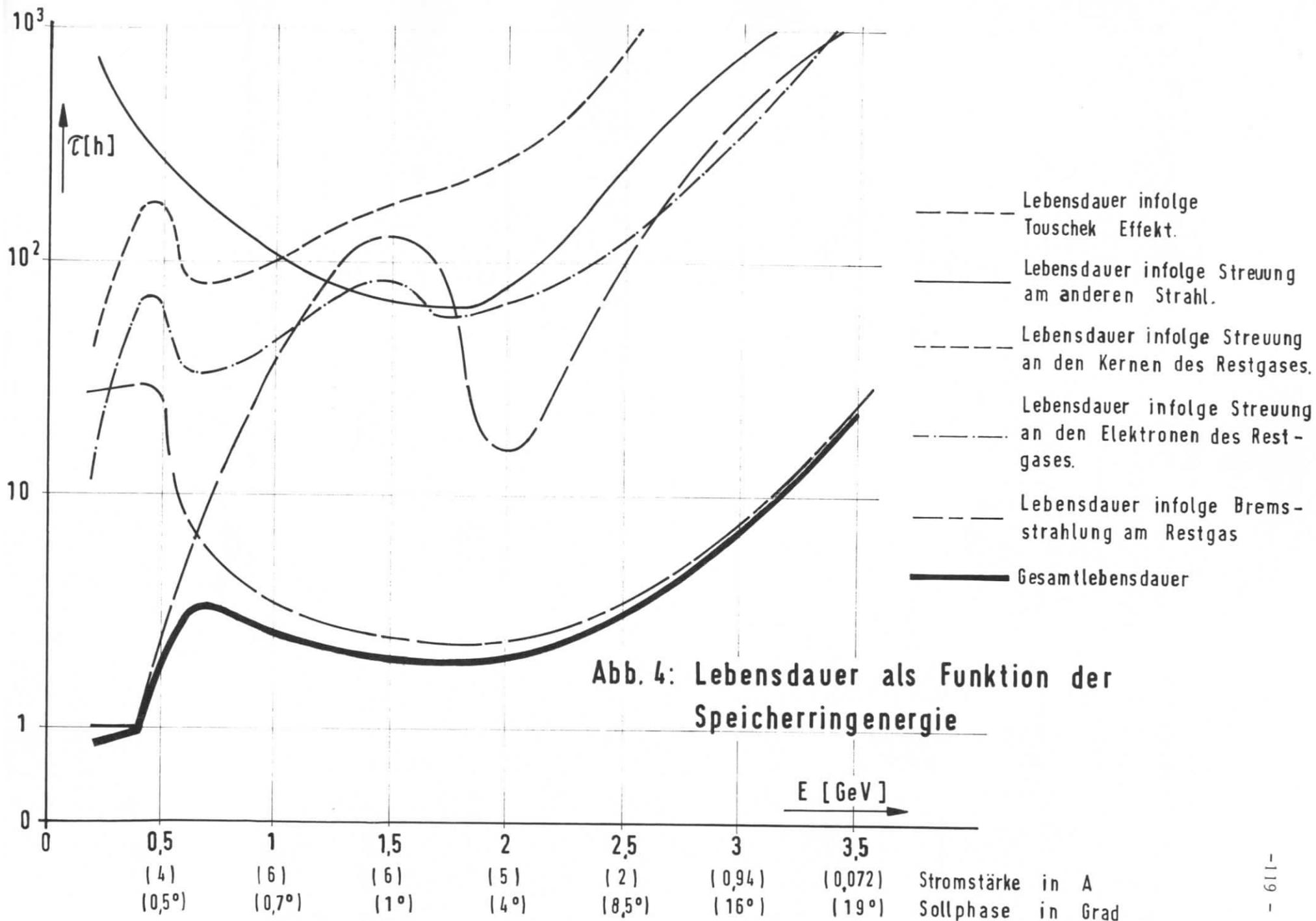
- 2) Bremsstrahlung am Restgas:

Zwischen 200 MeV und 500 MeV ist die Lebensdauer nahezu konstant, weil sie nur logarithmisch von γ und $\Delta\gamma$ abhängt (47) und der Desorptionsdruck in diesem Energiebereich zu vernachlässigen ist. Bei etwa 1,8 GeV hat sie ein Minimum, weil große Ströme vorliegen und außerdem die Desorptionsrate pro Ampere groß ist. Zu größeren Energien nimmt die Lebensdauer aufgrund abnehmenden Stromes zu; und zu kleineren Energien hauptsächlich aufgrund der abnehmenden Desorptionsrate.
- 3) Streuung an den Elektronen des Restgases:

Bei vom Strom unabhängigem Gasdruck und nahezu konstanter Sollphase wächst die Lebensdauer zwischen 200 MeV und 500 MeV etwa proportional zu $\gamma^{2,5}$ {Gl. (49) und (12c)}. Oberhalb von 500 MeV variiert die Lebensdauer nach Maßgabe des Wechselspiels zwischen Desorption und energiestabilem Bereich $\Delta\gamma$. Bei etwa 1,5 GeV wird ein schwach ausgebildetes Maximum erreicht, weil die Sollphase noch klein (1^0) und damit der energiestabile Bereich groß ist.
- 4) Streuung an den Kernen des Restgases:

Unterhalb 500 MeV wächst die Lebensdauer bei konstantem Gasdruck proportional zu γ^2 . Oberhalb 500 MeV überlagern sich die γ^2 -Abhängigkeit und die Gasdesorption.

- 5) Streuung am anderen Strahl: Die Lebensdauer hängt nur logarithmisch von γ und $\Delta\gamma$ ab. {Gl. (52) und (53)} . Infolgedessen hat sie ein Minimum, wo die Luminosität ein Maximum hat, nämlich bei etwa 1,8 GeV.
- 6) Wandverluste: Obwohl die vertikale Strahlemittanz die Akzeptanz bei kleinen Energien ausfüllt, ist im ganzen Energiebereich die Lebensdauer größer als 10^3 h. Das liegt an dem Sicherheitsfaktor von etwa 1,2 im Verhältnis n {Gl.(30)}
- 7) Verluste an den Grenzen des energie-stabilen Bereiches: Weil die Lebensdauer außerordentlich stark von der Sollphase ψ_s abhängt, {Gl. (28)} wurde sie aus Sicherheitsgründen so gewählt, daß die Lebensdauer im ganzen Energiebereich größer als 10^3 h ist.



L i t e r a t u r

- 1) A. Piwinski, Electron Losses in Storage Rings due to Phase Fluctuations of the rf Voltage.
DESY 68/51
- 2) A.A. Kolomensky u. A.N. Lebedev: Theory of Cyclic Accelerators.
North Holland Publishing Company, Amsterdam, 1966
- 3) B. Rossi: High Energy Particles
Prentice Hall, New York, 1952
- 4) W. Heitler: The Quantum Theory of Radiation
Clarendon Press, Oxford 1960
- 5) U. Völkel: Particle Loss by Touschek-Effect in a Storage Ring
DESY 67/5
- 6) Proposal for a High-Energy Electron-Positron Colliding-Beam
Storage Ring at the Stanford Linear Accelerator Center
Stanford 1966

Instabilitäten

von

A. Piwinski

	S.
1) Effekt der negativen Masse	122
2) Resistive - Wall - Effekte	127
3) Longitudinale Phasenschwingungen	130
4) Head-Tail-Effekt	134
5) Raumladungseffekt	138

Da in jedem neuen Speicherring neue Instabilitäten entdeckt werden, ist die Zahl der bekannten Instabilitäten inzwischen beträchtlich angewachsen. Hinzu kommt, daß die mathematische Behandlung solcher Effekte im allgemeinen kompliziert und umfangreich ist. Es kann deshalb an dieser Stelle nur ein ganz grober Überblick über die wichtigsten Instabilitäten gegeben werden, wobei insgesamt 5 Effekte diskutiert werden sollen.

1) Effekt der negativen Masse

Zu Beginn soll eine Instabilität diskutiert werden, die schon seit langem bekannt ist und die wegen ihrer relativen Einfachheit als Muster für die Behandlung ähnlicher Instabilitäten dienen kann. Diese Instabilität beruht auf folgendem, etwas überraschendem Effekt: Wenn man auf ein Elektron oder Positron im Speicherring eine vorwärtstreibende Kraft ausübt, dann wird das Teilchen langsamer, und wenn man eine rücktreibende Kraft anlegt, dann wird es schneller. Das passiert natürlich nur oberhalb der kritischen Energie, und der Grund hierfür ist bereits an anderer Stelle genannt worden. Das Teilchen besitzt eine Geschwindigkeit, die sehr nahe bei der Lichtgeschwindigkeit liegt und die sich nicht mehr wesentlich ändern kann. Dagegen ändert sich die Masse des Teilchens, es wird schwerer, läuft deshalb weiter außen im Ring um und bleibt dadurch zurück. Eine positive Kraft hat also eine negative Winkelbeschleunigung zur Folge. Das wäre aber auch dann der Fall, wenn in der Grundgleichung der Mechanik eine negative Masse stände. Man spricht deshalb vom "Effekt der negativen Masse".

Man kann sich nun eine Schwingung vorstellen, die folgendermaßen durch diesen Effekt verursacht wird. Man betrachtet zwei Teilchen, die im Ring hintereinander herlaufen. Zwischen den Teilchen wirken abstoßende Kräfte. Das hintere Teilchen stößt das vordere Teilchen

nach vorn, wodurch dieses langsamer wird. Umgekehrt stößt das vordere Teilchen das hintere zurück, so daß dieses schneller wird. Die Teilchen nähern sich dadurch einander, wobei die abstoßenden Kräfte und damit auch die Annäherungsgeschwindigkeit größer werden. Da das schnellere Teilchen, also das hintere, auch das leichtere ist, läuft es weiter innen im Ring um und überholt das langsamere Teilchen innen. Wenn dann das schnellere Teilchen vorn ist, werden die Rollen vertauscht. Das schnellere Teilchen wird gebremst und das langsamere beschleunigt. Sobald die beiden Teilchen gleich schnell sind, und zwar bei einer maximalen Entfernung voneinander, kehren sie um, und der ganze Vorgang wiederholt sich.

Solange es sich nur um zwei Teilchen handelt, kann man sich die Schwingung anschaulich vorstellen. Die Situation ändert sich jedoch, wenn sehr viele Teilchen an der Schwingung beteiligt sind. Man kann dann nicht mehr verfolgen, wie sich ein einzelnes Teilchen bewegt, sondern man kann dann nur noch die Dichteschwankungen beschreiben, die durch die Bewegung vieler Teilchen verursacht werden.

Der Einfachheit halber wird ein ungebunchter Strahl angenommen, d.h. alle Teilchen sollen zunächst gleichmäßig über den Umfang verteilt sein. Weiter ist es zweckmäßig, die Dichteschwankungen im Phasenraum zu beschreiben. Die Dichte sei dann durch $w(\theta, \dot{\theta}, t)$ gegeben, wobei θ der Winkel auf dem Umfang ist, der von einer beliebigen Stelle aus gemessen wird. t ist die Zeit, und $\dot{\theta}$ die Ableitung des Winkels nach der Zeit. $w(\theta, \dot{\theta}, t)$ möge sich aus einem ungestörten Term und einem Störterm zusammensetzen:

$$w(\theta, \dot{\theta}, t) = w_0(\dot{\theta}) + w_n(\dot{\theta}) e^{j(n\theta - \omega t)} \quad (1)$$

Der ungestörte Term hängt, da $\dot{\theta}$ durch die Energie des Teilchens bestimmt wird, nur von der Energie oder von der Energieabweichung ab. Der Störterm beschreibt eine Schwingung, die über dem ganzen

Umfang geschlossen ist. Die Frequenz ω ist zunächst noch unbekannt. Nun wendet man, wie bei vielen Problemen, bei denen Dichteschwankungen auftreten, den Liouville'schen Satz an:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial w}{\partial \dot{\theta}} \frac{d\dot{\theta}}{dt} = 0 \quad (2)$$

$\dot{\theta}$ ist gleich $2\pi/T$, wobei T die Umlaufzeit ist, so daß man auch schreiben kann

$$\begin{aligned} \frac{d\dot{\theta}}{dt} &= \frac{d\dot{\theta}}{dE} \frac{dE}{dt} \\ &= - \frac{2\pi}{T^2} \frac{dT}{dE} \frac{dE}{dt} \end{aligned} .$$

dT/dE ist, wie bei der Einführung des momentum-compaction-Faktors α gezeigt wurde, gleich $\alpha T/E$, während dE/dt gleich der elektrischen Kraft $e|\vec{E}|$ multipliziert mit der Geschwindigkeit c des Teilchens ist. Damit erhält man

$$\frac{d\dot{\theta}}{dt} = - \frac{2\pi c e \alpha}{TE} |\vec{E}| \quad (3)$$

Die elektrische Feldstärke $|\vec{E}|$, die durch die Dichteschwankungen hervorgerufen wird, soll hier nicht ausgerechnet werden. Sie ist natürlich proportional zum Gradienten der Raumladungsdichte, d.h.

$$|\vec{E}| \sim \frac{\partial}{\partial \theta} \int w_n(\dot{\theta}) e^{j(n\theta - \omega t)} d\theta .$$

Wenn man Gl(3) in Gl(2) einsetzt und alle Konstanten zu der positiven Konstanten A zusammenfaßt, bekommt man

$$(n\dot{\theta} - \omega) w_n(\dot{\theta}) = - A \frac{\partial w_0}{\partial \dot{\theta}} \int w_n(\dot{\theta}) d\dot{\theta} \quad (4)$$

Für die Problemstellung ist es nicht erforderlich, die unbekannte Funktion $w_n(\dot{\theta})$ zu bestimmen, sondern es genügt festzustellen, für welche Werte von ω Gl(4) eine Lösung besitzt. Dazu kann man Gl(4) zunächst in der Form

$$w_n(\dot{\theta}) = \frac{A}{\omega - n\dot{\theta}} \frac{\partial w_0}{\partial \dot{\theta}} \int w_n(\dot{\theta}) d\dot{\theta}$$

schreiben und nun $w_n(\dot{\theta})$ wieder in Gl(4) einsetzen. Das Integral über $w_n(\dot{\theta})$ läßt sich dann herauskürzen und man bekommt

$$1 = A \int \frac{\partial w_0}{\partial \dot{\theta}} \frac{d\dot{\theta}}{\omega - n\dot{\theta}} \quad (5)$$

Durch diese Gleichung wird ω bestimmt. ω hängt natürlich sehr stark von der Verteilung über $\dot{\theta}$ ab oder, was dasselbe bedeutet, von der Energieverteilung. Wenn man zum Beispiel annimmt, daß alle Teilchen dieselbe Energie besitzen, d.h. daß

$$w_0(\dot{\theta}) = \delta(\dot{\theta} - \dot{\theta}_0)$$

gilt, so findet man nach einer partiellen Integration aus Gl(5)

$$\omega = n \dot{\theta}_0 \pm j\sqrt{nA}$$

Damit nimmt Gl(1) die Form an:

$$w(\theta, \dot{\theta}, t) = \delta(\dot{\theta} - \dot{\theta}_0) + w_n(\dot{\theta}) e^{jn(\theta - \dot{\theta}_0 t) \pm \sqrt{nA} t}$$

Es gibt also immer eine Lösung, die exponentiell mit der Zeit wächst, so daß die Schwingung instabil wird. Die Stärke der Instabilität wird durch die Ansteigszeit bestimmt. Die Konstante A ist in ^{1,2)} berechnet worden und führt auf den Ausdruck

$$\sqrt{nA} = 2\pi f_0 n \sqrt{\frac{r_e \alpha N}{R\gamma^3}}$$

mit

- f_o = Umlauffrequenz
- r_e = klassischer Elektronenradius
- N = Zahl der Teilchen im Strahl
- \bar{R} = mittlerer Maschinenradius
- γ = Elektronenenergie bezogen auf die Ruheenergie

Man sieht, daß der Effekt mit der Intensität des Strahlstromes stärker wird, daß er aber mit wachsender Energie sehr schnell abfällt. Um eine Vorstellung von der Größenordnung zu vermitteln, sollen die in ^{3,4)} angegebenen Parameter bei 500 MeV eingesetzt werden ($f_o = 1$ MHz, $\bar{R} = 45,8$ m, $\alpha = 0,02$, $N = 1,2 \cdot 10^{13}$ oder $I = 2A$). Die Anstiegszeit ist dann

$$T_{an} = \frac{1}{\sqrt{nA}}$$

$$\approx \frac{1,3}{n} \text{ sec.}$$

Die Dämpfungszeit der Synchrotronschwingung beträgt bei dieser Energie etwa 1 sec. Für $n > 1$ würde dann die Anwachszeit kleiner sein als die Dämpfungszeit und die Schwingung wäre instabil. Nun wurde aber vorausgesetzt, daß alle Teilchen die gleiche Energie besitzen. Falls die Teilchen verschiedene Energien und damit verschiedene Umlaufzeiten besitzen, wird ein Effekt spürbar, der bei allen Instabilitäten eine große Rolle spielt und der mit Landaudämpfung^{5,6)} bezeichnet wird. Die Landaudämpfung läßt sich bei diesem Beispiel besonders einfach berücksichtigen und soll deshalb hier kurz erläutert werden. Die Energie der Teilchen möge rechteckförmig verteilt sein. Die Funktion $w_o(\dot{\theta})$ ist dann durch den Ausdruck

$$w_o(\dot{\theta}) = \begin{cases} 0 & \text{für } |\dot{\theta} - \dot{\theta}_o| > \Delta\dot{\theta}/2 \\ 1/\Delta\dot{\theta} & \text{für } |\dot{\theta} - \dot{\theta}_o| < \Delta\dot{\theta}/2 \end{cases}$$

gegeben, und die Ableitung der Dichtefunktion hat die Form

$$\frac{\partial w}{\partial \dot{\theta}} = \frac{1}{\Delta \dot{\theta}} \left[\delta(\dot{\theta} - \dot{\theta}_0 + \Delta \dot{\theta}/2) - \delta(\dot{\theta} - \dot{\theta}_0 - \Delta \dot{\theta}/2) \right] .$$

Wenn man diesen Ausdruck in Gl(5) einsetzt, findet man für ω :

$$\omega = n\dot{\theta}_0 \pm \sqrt{(n\Delta \dot{\theta}/2)^2 - nA}$$

Die Breite der Verteilung verkleinert entweder den Imaginärteil von ω oder bringt ihn ganz zum Verschwinden. Die Wirkung ist daher die gleiche wie die einer Dämpfung. Die Mindestbreite der Energieverteilung, bei der keine Instabilität mehr auftritt, ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \frac{\Delta E}{E} &= \frac{\Delta \dot{\theta}}{\alpha \dot{\theta}} \\ &= \frac{2}{\alpha V} \sqrt{\frac{r_e \alpha N}{R\gamma^3}} \end{aligned}$$

Wenn man hier die oben angegebenen Parameter einsetzt, bekommt man für die erforderliche relative Energiebreite $1,2 \cdot 10^{-5}$. Die natürliche Energiebreite des Strahls infolge der Quantenfluktuation hat bei 500 MeV einen Wert von etwa 10^{-4} , so daß die Landaudämpfung zur Stabilisierung ausreicht.

2) Resistive - Wall - Effekte

Als nächstes sollen der longitudinale und der transversale Resistive-Wall-Effekt erläutert werden. Die Rechnung verläuft bei diesen Effekten genau so wie beim Effekt der negativen Masse, ist jedoch wegen der komplizierten Verteilung des elektrischen Feldes langwieriger und soll deshalb hier nicht angegeben werden.

Zunächst muß man sich vorstellen, daß durch den Strahl in den Wänden der Vakuumkammer Ströme induziert werden, die ihrerseits Felder induzieren, die wieder auf den Strahl zurückwirken. Da die Wandströme je nach der Größe der Leitfähigkeit der Kammerwände langsam abklingen, wird ein Teilchen nach einem Umlauf immer noch das Feld vorfinden, das es selbst induziert hat. Aber auch die Felder der anderen Bunche, falls mehrere Bunche im Ring vorhanden sind, können die Bewegung eines Teilchens beeinflussen. Wenn die Bunche Schwingungen ausführen, werden diese Schwingungen auch in den Wandströmen und in den induzierten Feldern vorhanden sein. Je nach Phasenlage der Bunche zu den induzierten Feldern werden die Schwingungen durch diese Rückkopplung über die Wände entweder verstärkt oder unterdrückt.

Bei den longitudinalen Schwingungen gibt es immer eine exponentiell anwachsende Lösung⁷⁾, wenn der Strahl monoenergetisch ist. Die Anwachszeit hat hier dieselbe Größenordnung wie beim Effekt der negativen Masse. Durch eine Energiebreite kann auch hier die Anwachszeit verkleinert oder zum Verschwinden gebracht werden. Der Effekt ist deshalb nicht so kritisch.

Kritischer sind dagegen die transversalen Schwingungen. Beim transversalen Resistive-Wall-Effekt führen die einzelnen Bunche kohärente Betatronschwingungen aus. Die Stabilitätsbedingungen hängen deshalb von der Frequenz der Betatronschwingung ab. Für den Fall, daß nur ein Bunch im Ring ist, besitzt die Stabilitätsbedingung die einfache Form

$$m < Q < m + \frac{1}{2} .$$

Hierbei ist Q die Zahl der Betatronschwingungen pro Umlauf und m eine ganze Zahl. Dieses Kriterium kann man immer erfüllen, wenn man Q geeignet wählt. Für den Fall, daß mehrere Bunche im Ring sind, reicht dieses Kriterium nur dann aus, wenn die Bunche verschiedene Intensitäten besitzen, und zwar müssen sich die Intensitäten der einzelnen Bunche

um wenigstens einige Prozent voneinander unterscheiden. Wenn die Bunche ungefähr gleich sind, dann gilt das folgende Stabilitätskriterium:

$$m < \frac{Q+s}{B} < m + \frac{1}{2}$$

mit

B = Zahl der Bunche

s = 0, 1, 2, ... B-1

Es gibt insgesamt B verschiedene Eigenschwingungen, die durch s nummeriert werden. Man sieht, daß die letzte Bedingung nicht für alle s erfüllt werden kann, denn der mittlere Ausdruck läuft von Q bis ungefähr Q+1. Daher ist ungefähr die Hälfte aller Eigenschwingungen stabil und die andere Hälfte instabil.

Die Anstiegszeit der instabilen Eigenschwingungen hat die Größe⁹⁾

$$T_{an} = \frac{b^3 \gamma Q B}{r_e c \bar{R} N} \sqrt{\frac{\sigma \pi}{\epsilon_o f_o}} T(s, Q)$$

mit

b = Kammerradius

σ = el. Leitfähigkeit der Kammerwand

ϵ_o = Dielektrizitätskonstante

T(s,Q) ist eine von der Eigenschwingung und von der Betatronfrequenz abhängende Funktion, die in⁹⁾ berechnet worden ist. T(s,Q) ändert sich von 0 bis ∞ , kann jedoch bei geeignetem Q für alle s in der Größenordnung von 1 gehalten werden. Mit den oben genannten Parametern und b = 2,5 cm, Q = 4,1, $\sigma = 1 \text{ m}/(\Omega \text{ mm}^2)$ erhält man bei 500 MeV

$$T_{an} = 40 \text{ msec } T(s, Q) .$$

Diese Anstiegszeit ist so klein, daß sie, falls keine zusätzliche Dämpfung für kohärente Betatronschwingungen vorhanden ist, zu einer Instabilität führen kann. Es ist jedoch zu berücksichtigen, daß auch hier eine immer vorhandene Landaudämpfung die Anstiegszeit vergrößert. Außerdem kann diese Schwingung, da sie kohärent ist, durch ein Feedback-System unterdrückt werden.

3) Longitudinale Phasenschwingungen

Longitudinale Phasenschwingungen sind kohärente Synchrotronschwingungen aller Bunche, die durch die Wechselwirkung der Bunche mit den Beschleunigungsstrecken oder mit anderen resonanzfähigen Abschnitten der Vakuumkammer entstehen. Bei der Beschreibung der Schwingung kann man folgendermaßen vorgehen. Man nimmt zunächst eine Störung $U_{St} \sin \Omega t$ in der Amplitude der Beschleunigungsspannung an, so daß die gesamte Beschleunigungsspannung die Form ¹⁰⁾

$$u(t) = (U + U_{St} \sin \Omega t) \sin \omega_{HF} t \quad (6)$$

besitzt. Die Frequenz Ω ist zunächst unbestimmt, möge aber in der Nähe der Synchrotronfrequenz Ω_s liegen. Diese Störspannung regt eine kohärente Schwingung aller Bunche an. Die Amplitude der Schwingung läßt sich durch Lösen der inhomogenen Differentialgleichung für die Synchrotron-schwingung bestimmen und ergibt

$$\Delta\psi_{ko} = \frac{\Omega_s}{2\sqrt{a_s^2 + (\Omega - \Omega_s)^2}} \frac{U_{St}}{U \cos \psi_s}$$

Hierbei ist a_s die Dämpfungskonstante der Synchrotronschwingung. Der Strahlstrom erhält durch diese Schwingung eine Phasenmodulation, und die Grundwelle des Strahlstromes besitzt nun die Form

$$\begin{aligned}
 i_1(t) &= I_1 \sin(\omega_{\text{HF}} t + \Delta\psi_{\text{ko}} \sin(\Omega t + \delta)) \\
 &\approx I_1 \sin(\omega_{\text{HF}} t) + \frac{1}{2} I_1 \Delta\psi_{\text{ko}} \left(\sin((\omega_{\text{HF}} + \Omega)t + \delta) \right. \\
 &\quad \left. - \sin((\omega_{\text{HF}} - \Omega)t - \delta) \right) \quad (7)
 \end{aligned}$$

mit der beliebig angenommenen konstanten Phase δ . Es entstehen also zwei neue Komponenten neben der Grundwelle des Strahlstromes mit den Frequenzen $\omega_{\text{HF}} + \Omega$ und $\omega_{\text{HF}} - \Omega$. Diese beiden Stromkomponenten induzieren nun im Resonator zwei zusätzliche Spannungen mit den entsprechenden Frequenzen. Obwohl die beiden Ströme gleich große Amplituden haben, gilt dies nicht für die beiden induzierten Spannungen, denn auf Grund der verschiedenen Frequenzen wirken die Ströme auch auf verschiedene Widerstände, so daß die Spannungen verschieden groß werden. Ebenso sind natürlich auch die Phasen zwischen den Spannungen und den induzierten Strömen verschieden groß.

Die beiden Spannungen wirken nun ihrerseits wieder auf den Strahl und beeinflussen die angeregte Schwingung. Man kann die beiden Spannungen zusammen mit der Beschleunigungsspannung so zusammenfassen, wie dies in Gl(6) mit den Strömen getan worden ist, und bekommt dann einen Ausdruck, der mit Gl(6) verglichen werden kann. Wenn dann die induzierte Spannung dieselbe Phase hat wie die angenommene Störspannung, und wenn außerdem die induzierte Spannung größer ist als die angenommene Störspannung, dann ist die Schwingung instabil, denn dann wächst die Schwingungsamplitude mit der Zeit. Die Bedingung dafür, daß die induzierte Spannung kleiner ist als die angenommene Spannung, d.h. die Stabilitätsbedingung, lautet

$$\frac{(R^+ - R^-) I_1}{U \cos\psi_s} < 4 \frac{a_s}{\Omega_s} \quad (8)$$

R^+ und R^- sind die Wirkwiderstände des Resonators bei den Frequenzen $\omega_{\text{HF}} + \Omega$ und $\omega_{\text{HF}} - \Omega$. Abbildung 1 zeigt den Wirkwiderstand des

Resonators in Abhängigkeit von der Frequenz. Solange die Senderfrequenz auf der rechten Flanke der Hauptresoanz liegt, ist die Stabilitätsbedingung erfüllt. Dieses Ergebnis stimmt auch mit dem Stabilitätskriterium von Robinson überein. Gl(8) berücksichtigt außerdem Nebenresonanzen, wie in Abbildung 1 gezeigt ist. Derartige Nebenresonanzen entstehen durch Störungen der Resonatorgeometrie und führen dann, wenn die Senderfrequenz auf der linken Flanke der Nebenresonanz liegt, ebenfalls zu einer Instabilität.

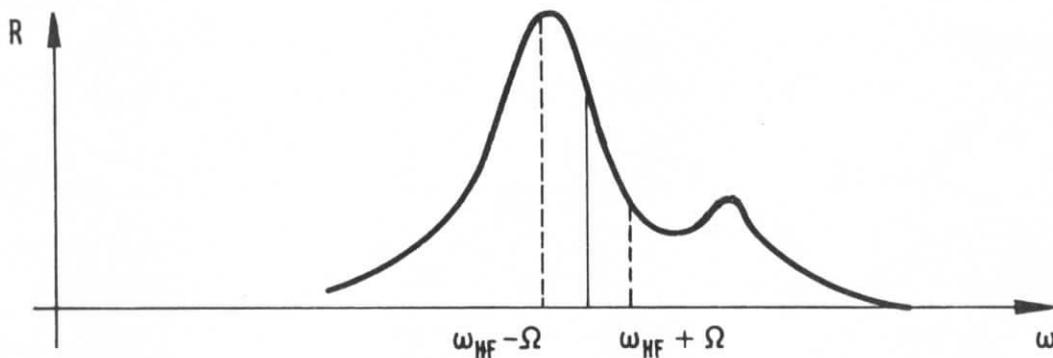


Abb 1

Die bisher diskutierte Phasenschwingung kann nun in zweierlei Hinsicht verallgemeinert werden^{10,11)}. Erstens kann man alle Oberwellen des Strahlstromes, d.h. alle Vielfachen der Senderfrequenz, hinzunehmen. Man bekommt dann für jede Oberwelle eine Stabilitätsbedingung, die die Form der Gl(8) hat. Zweitens kann man annehmen, daß die Bunche zwar alle mit derselben Frequenz, aber mit unterschiedlicher Phasenlage zu einander schwingen. So können zum Beispiel, falls die Zahl der Bunche gerade ist, immer zwei benachbarte Bunche gegeneinander schwingen. Bei insgesamt B Bunchen in einem Strahl bekommt man B verschiedene Schwingungsformen. Das Spektrum aller möglichen Schwingungsformen zeigt Abbildung 2.

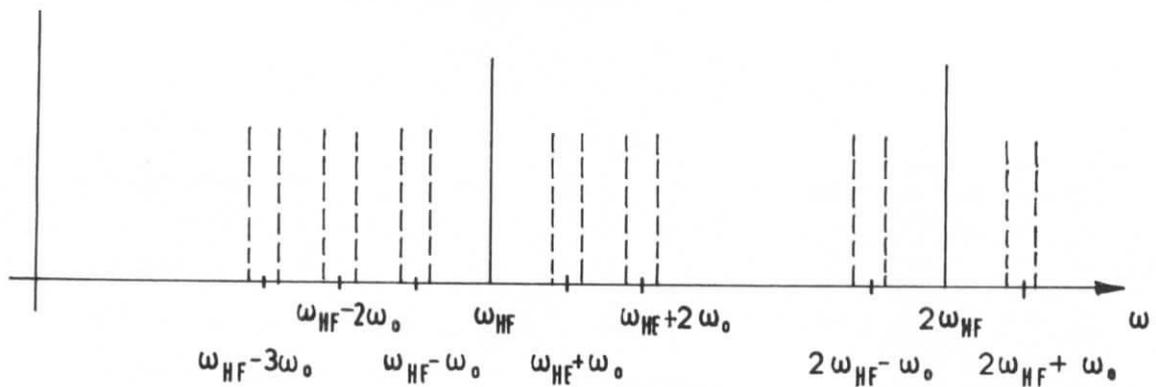


Abb. 2

Die schraffierten Linien geben die Frequenzen der durch die Phasenschwingungen im Resonator induzierten Spannungen an. Es treten jeweils zwei Seitenbänder bei allen Vielfachen der Umlauffrequenz auf. Natürlich besitzen nur die Seitenbänder der Vielfachen der Beschleunigungsfrequenz eine mittlere Frequenz oder "Trägerfrequenz". Auch für diese Schwingungsformen lassen sich Stabilitätsbedingungen ableiten¹¹⁾, die komplizierte Summen über die Widerstände bei den Störfrequenzen enthalten.

Es sollen noch die Möglichkeiten aufgezählt werden, mit denen die longitudinalen Phasenschwingungen unterdrückt werden können:

- 1) Vergrößerung der Landaudämpfung durch Verlängerung der Bunche,
- 2) zusätzliche Beschleunigungsspannung mit kleinerer Frequenz zur Trennung der Synchrotronfrequenzen der einzelnen Bunche,
- 3) Passives Cavity mit Resonanz in der Nähe einer Vielfachen der Umlauffrequenz zur Änderung der Widerstände R^+ und R^- ,
- 4) Aktives Cavity als Feedback,
- 5) Ungleiche Bunchfüllung.

4. Head-Tail-Effekt

Beim Head-Tail-Effekt breiten sich Betatronschwingungen, die vorn im Bunch entstehen, über den ganzen Bunch aus^{11,12)}. Wenn man einmal den einfachen Fall betrachtet, bei dem sich nur zwei Teilchen im Bunch befinden, dann kann man sich das Anwachsen der Betatronschwingungen der beiden Teilchen mit Hilfe von Abbildung 3 erklären.

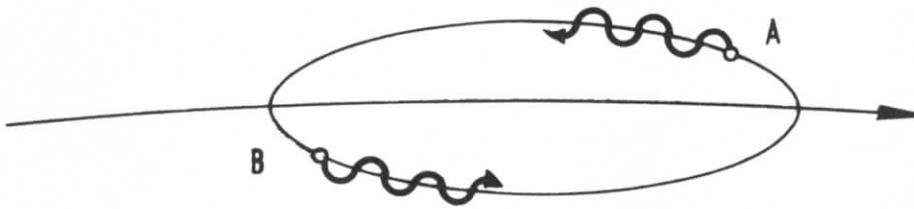


Abb. 3

Die Ellipse kennzeichnet eine Bewegung der Teilchen infolge der Synchrotronschwingung und die Wellenlinie die Bewegung infolge der Betatronschwingung. Das vordere Teilchen bei A kann über reflektierende Teile der Vakuumkammer die Betatronschwingung des Teilchens bei B beeinflussen, zum Beispiel aufschaukeln. Nach einer halben Synchrotronschwingung haben die Teilchen ihre Positionen vertauscht, und das Teilchen, das zuerst antrieb, wird nun angetrieben und umgekehrt. Auf diese Art und Weise kann die Schwingung beider Teilchen aufgeschaukelt werden.

Damit nun tatsächlich immer das hintere Teilchen angetrieben wird und Energie aufnimmt, muß eine wichtige Bedingung erfüllt sein. Wenn eine periodisch wirkende Kraft einen Oszillator antreibt, muß die Kraft in der Phase etwas vorlaufen. Das bedeutet für die beiden Teilchen, daß die Betatronschwingung des vorderen Teilchens in der Phase immer etwas vorlaufen muß und daß sich die Phasendifferenz der beiden Betatronschwingungen mit der Synchrotronschwingung ändern muß. Andernfalls würde ein Teilchen abwechselnd antreiben und gebremst werden, und es könnte sich keine Schwingung aufbauen. Diese Phasenänderung ist nun durch die Abhängigkeit der Betatronfrequenz

von der Energie eines Teilchens und damit von der Synchrotron-
schwingung durch die Chromatizität gegeben.

Schreibt man die Betatronfrequenz in der Form $Q\omega_0$, wobei ω_0 die
Umlauffrequenz ist, so erhält man für die Änderung von ω_β

$$\begin{aligned}\frac{\Delta\omega_\beta}{\omega_\beta} &= \frac{\Delta Q}{Q} + \frac{\Delta\omega_0}{\omega_0} \\ &= \left(\xi - \alpha \right) \frac{\Delta E}{E} .\end{aligned}$$

Hierbei ist ξ die Chromatizität, die durch die Beziehung

$$\xi = \frac{E}{Q} \frac{\partial Q}{\partial E}$$

definiert ist. Die maximale Phasenänderung ergibt sich durch
Integration der Frequenzabweichung über eine halbe Synchrotron-
schwingungsperiode.

$$\begin{aligned}\Delta\theta &= \int_0^{T_s/2} \Delta\omega_\beta dt \\ &= \frac{\xi - \alpha}{E} \omega_\beta \int_0^{T_s/2} \Delta E dt \\ &= 2(\xi - \alpha) \frac{\omega_\beta}{\Omega_s} \frac{\Delta E}{E}\end{aligned}$$

Der mittlere Phasenunterschied für die Zeit, in der eines der beiden
Teilchen antreibt, ist natürlich nur halb so groß.

Die Differentialgleichung für einen Oszillator, der von einer
periodischen Kraft mit der Amplitude F und der voreilenden Phase
 $\Delta\theta/2$ angetrieben wird, besitzt die Form

$$m \ddot{y} = - \lambda y + F \sin (\omega_{\beta} t + \Delta\theta/2),$$

wobei m die Masse und λy die Rückstellkraft des Oszillators sind. Schreibt man die Lösung in der Form

$$y = A(t) \sin(\sqrt{\frac{\lambda}{m}} t) ,$$

so findet man für die mittlere zeitliche Änderung der Amplitude A

$$\begin{aligned} \dot{A} &= \frac{F\omega_{\beta}}{2\lambda} \sin(\Delta\theta/2) \\ &\approx \frac{F\omega_{\beta} \Delta\theta}{4\lambda} \end{aligned}$$

Wenn man nun die Störkraft proportional zur Amplitude des vorderen Teilchens einsetzt und annimmt, daß beide Teilchen die gleiche Amplitude besitzen, bekommt man

$$F = SA .$$

Wenn man noch berücksichtigt, daß jedes Teilchen nur während der Hälfte der Zeit angetrieben wird, erhält man

$$\dot{A} = \frac{S\omega_{\beta} \Delta\theta}{8\lambda} A .$$

Die Anstiegszeit ergibt sich dann nach Einsetzen von $\Delta\theta$ zu

$$\begin{aligned} T_{\text{an}} &= \frac{A}{\dot{A}} \\ &= \frac{4\lambda\Omega_s E}{(\xi-\alpha) S\omega_{\beta}^2 \hat{\Delta E}} \end{aligned}$$

Drückt man die maximale Energieabweichung $\hat{\Delta E}$ mit Hilfe der Beziehung

$$\frac{\hat{\Delta E}}{E} = \frac{\Omega_s}{\alpha c} \Delta\ell$$

durch die Bunchlänge $\Delta\lambda$ aus, so bekommt man schließlich

$$T_{\text{an}} = \frac{4c\alpha\lambda}{(\xi-\alpha)S\omega_{\beta}^2\Delta\lambda}$$

Obwohl dieses Modell sehr einfach ist, liefert es bereits die wichtigsten Abhängigkeiten der Anstiegszeit. Natürlich kann die Abhängigkeit von der Strahlintensität nicht erfaßt werden, da nur zwei Teilchen im Bunch angenommen wurden. Wenn man ein Modell betrachtet, bei dem sich N_B Teilchen im Bunch befinden, die jedoch der Einfachheit halber alle die gleiche Synchrotron-schwingungsamplitude besitzen sollen, so daß die Teilchen alle auf einer Ellipse sitzen, dann erhält man für die Anstiegszeit

$$T_{\text{an}} = \frac{\pi^2 c\alpha\lambda (4\mu^2 - 1)}{2(\xi-\alpha)S\omega_{\beta}^2\Delta\lambda N_B}$$

mit $\mu = 0, 1, 2, \dots$

Die Analyse dieses Modells zeigt, daß es verschiedene Schwingungsformen gibt, bei denen die Teilchen mit unterschiedlicher Phase zueinander schwingen. Der Phasenunterschied wird durch die Zahl μ bestimmt. Für $\mu = 0$ erhält man eine starke kohärente Schwingung, die jedoch nur dann instabil ist, wenn $S(\xi-\alpha)$ negativ ist. Der Ausdruck für die Anstiegszeit zeigt, daß es für beide Vorzeichen von $S(\xi-\alpha)$ mindestens eine instabile Schwingungsform gibt.

Die wirksamste Möglichkeit, diese Instabilität zu unterdrücken, besteht darin, die Fokussierung des Speicherringes so auszulegen, daß die Chromatizität ξ gleich dem momentum-compaction-Faktor α wird. In diesem Fall kann keine instabile Schwingungsform mehr auftreten. Aber auch Landaudämpfung und Feedback für die kohärente Schwingungsform können den Effekt schwächen.

5) Raumladungseffekt

Der Raumladungseffekt tritt sowohl in einem einzelnen Strahl als auch bei der Wechselwirkung zweier Strahlen auf. In beiden Fällen beeinflussen die Raumladungskräfte, also die elektrischen und magnetischen Kräfte, die zwischen den einzelnen Teilchen wirken, die Fokussierungseigenschaften des Speicherrings.

In einem einzelnen Strahl sind die Raumladungskräfte sehr schwach, weil sich die elektrischen und magnetischen Kräfte zwischen Teilchen, die fast mit Lichtgeschwindigkeit parallel zueinander fliegen, kompensieren. Die resultierende Kraft geht mit der Energie wie $1/\gamma^2$ gegen 0. Auf der anderen Seite wirken diese Kräfte auf dem ganzen Umfang, während die stärkeren Raumladungskräfte zwischen zwei einander entgegenlaufenden Strahlen nur in der kurzen Wechselwirkungszone vorhanden sind. Die Raumladungskräfte in einem Strahl werden deshalb nur bei kleinen Energien eine Rolle spielen, während die Raumladungskräfte zwischen zwei Strahlen bei großen Energien eine scharfe Grenze für den gespeicherten Teilchenstrahl darstellen.

Die transversalen Raumladungskräfte sind in der Mitte eines Bunches aus Symmetriegründen gleich Null. In horizontaler oder in vertikaler Richtung steigen diese nach außen gerichteten Kräfte zunächst linear an. Wenn der Strahl bei einem ellipsenförmigen Querschnitt eine konstante Raumladungsdichte besäße, würden die Kräfte bis zum Rand des Strahls linear ansteigen und erst außerhalb des Strahls nichtlinear abfallen. Infolge der Gaußverteilung der Raumladung werden die Kräfte jedoch bereits von der Mitte an allmählich nichtlinear. Der lineare Anteil der Raumladungskräfte ist nichts anderes als ein zusätzlicher Gradient für die Fokussierung der Betatronschwingungen. Ein zusätzlicher Gradient oder eine Störung des vorhandenen Gradienten führt, wie bereits an anderer Stelle gezeigt wurde, zu einer Verschiebung der Betatronfrequenz. Mit den dort angegebenen Formeln bekommt man, wenn man nur die Kräfte in einem Strahl betrachtet, für die Änderung der Zahl der vertikalen Schwingungen pro Umlauf den

Ausdruck

$$\Delta Q_z = - \frac{N_B r_e \bar{R}}{\sqrt{2\pi} \gamma^3 \sigma_s} \left\langle \frac{\beta_z}{\sigma_z (\sigma_z + \sigma_x)} \right\rangle \quad (9)$$

mit

β_z = vertikale Amplitudenfunktion

$\sigma_{s,x,z}$ = Standardabweichung für die longitudinale bzw. horizontale bzw. vertikale Bunchausdehnung

Die Mittelung erstreckt sich über den ganzen Umfang. Da die Kräfte in einem Strahl abstoßend sind, ist ΔQ_z natürlich negativ. ΔQ_x bekommt man aus Gl(9), indem man die Indizes x und z miteinander vertauscht.

Die Wechselwirkung zwischen zwei einander entgegenlaufenden Strahlen, die auch Amman-Ritson-Effekt¹⁴⁾ genannt wird, führt ebenfalls zu einer Verschiebung der Betatronfrequenzen. Wenn man annimmt, daß die beiden Strahlen nicht frontal aufeinandertreffen, sondern den vertikalen Kreuzungswinkel 2ϕ einschließen, bekommt man für die Q-Verschiebungen die Ausdrücke¹⁵⁾

$$\Delta Q_x = \pm \frac{r_e \beta_x N_B}{2\pi\gamma} \frac{1}{\sigma_x (\sigma_x + \sqrt{\sigma_z^2 + \sigma_s^2 \tan^2 \phi})} \quad (10)$$

$$\Delta Q_z = \pm \frac{r_e \beta_z N_B}{2\pi\gamma} \frac{1}{\sqrt{\sigma_z^2 + \sigma_s^2 \tan^2 \phi} (\sigma_x + \sqrt{\sigma_z^2 + \sigma_s^2 \tan^2 \phi})} \quad (11)$$

β_x und β_z sind die Amplitudenfunktionen im Wechselwirkungspunkt. Das Plus- bzw. Minuszeichen gilt für Strahlen mit verschiedenen bzw. gleichen Ladungen. Die Q-Verschiebungen bei einem horizontalen Kreuzungswinkel ergeben sich aus den Gleichungen (10 und (11) durch Vertauschen der Indizes x und z.

Aus der Theorie der starken Fokussierung ¹⁶⁾ folgt, daß die Q-Verschiebung nicht so groß werden darf, daß der Arbeitspunkt der Maschine auf ein Stoppband geschoben wird. An dieser Stelle stimmt die Erfahrung nicht mit der Theorie des Raumladungseffektes oder, genauer gesagt, mit der linearen Theorie überein. Man beobachtet nämlich ein Aufplatzen des Strahls bei einem ΔQ_z von etwa 0,025, während der Abstand zu den benachbarten Stoppbändern fast eine Größenordnung größer ist. Da es noch keine Erklärung für den Wert von 0,025 gibt, führt man ihn auf den Einfluß des nichtlinearen Anteils des Raumladungseffektes zurück. Die Gleichungen (10) und (11) liefern dann mit diesem Wert für ΔQ_x und ΔQ_z eine Grenze für den Strom, die mit den bisherigen Beobachtungen gut übereinstimmt.

Aus den beiden letzten Gleichungen geht außerdem hervor, daß es zweckmäßig ist, die Amplitudenfunktionen im Wechselwirkungspunkt möglichst klein zu machen. Man kommt dann zu der sogenannten "Taille" des Strahls im Wechselwirkungspunkt. Allerdings gibt es eine untere Grenze für die Taille, die aus den Gleichungen nicht ersichtlich ist. Die Amplitudenfunktionen genügen in der Wechselwirkungszone, in der keine Fokussierungselemente aufgestellt sind, der Gleichung ¹⁶⁾

$$\beta = \beta_0 + \frac{s^2}{\beta_0} . \quad (12)$$

s ist der Abstand vom Mittelpunkt der Wechselwirkungszone und durchläuft bei dieser Betrachtung den Bereich, in dem sich die Bunche durchdringen. Wenn man β_0 immer kleiner werden läßt, kommt man zu einem Wert, bei dem der zweite Summand der Gl(12) für ein mittleres s überwiegt, und eine weitere Verkleinerung von β_0 führt dann zu einem größeren mittleren β .

Solange die beiden Bunche frontal aufeinandertreffen, können die elektromagnetischen Felder nur die transversalen Impulse der Teilchen ändern. Wenn jedoch ein von Null verschiedener Kreuzungswinkel zwischen den Strahlen vorhanden ist, kann auch der longitudinale

Impuls eines Teilchens, das sich nicht in der Mitte des Bunchs in bezug auf die longitudinale Richtung befindet, geändert werden. Das wird in Abbildung 4 gezeigt.

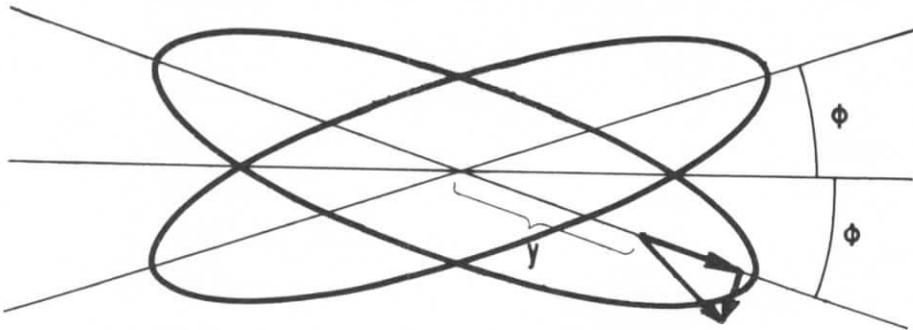


Abb. 4

Da diese Änderung des longitudinalen Impulses zunächst linear mit dem Abstand y von der Bunchmitte wächst, ist die Wirkung auf die Synchrotronoschwingung ähnlich wie die des Beschleunigungsfeldes¹⁷⁾. Bei Strahlen mit gleicher Ladung ergibt sich eine Vergrößerung der Synchrotronfrequenz und eine Verkürzung des Bunches. Umgekehrt erhält man bei Strahlen mit ungleicher Ladung eine Verkleinerung der Synchrotronfrequenz und eine Verlängerung des Bunches. Es ist zweckmäßig, die Änderung der Steilheit der Beschleunigungsspannung durch diesen Effekt anzugeben. Man erhält dann für einen vertikalen Kreuzungswinkel

$$\left. \frac{\partial \Delta E}{\partial y} \right|_{\text{RL}} = \pm \frac{2r_e m_e c^2 N_B \phi^2}{\sqrt{\sigma_z^2 + \sigma_s^2} \tan^2 \phi (\sigma_x + \sqrt{\sigma_z^2 + \sigma_s^2} \tan^2 \phi)},$$

wobei $m_e c^2$ die Ruheenergie des Elektrons ist. Dieser Ausdruck ist zu vergleichen mit der Steilheit der Beschleunigungsspannung:

$$\left. \frac{\partial \Delta E}{\partial y} \right|_{\text{HF}} = \frac{1}{c} \omega_{\text{HF}} e U_T \cot \psi_s$$

Hierbei ist eU_T die zur Deckung der Strahlungsverluste für ein Teilchen benötigte Energie. Der Effekt ist gefährlich bei

ungleichen Ladungen der Strahlen, d.h. bei $e^+ e^-$ -Strahlen. In diesem Fall sollte der Störterm kleiner sein als der durch die Beschleunigungsspannung gegebene Term, da sonst infolge der großen Bunchverlängerung die durch die Quantenfluktuation bestimmte Lebensdauer zu klein wird.

Literaturverzeichnis

- 1) C.E.Nielsen, A.M.Sessler, K.R.Symon; "International Conference on High-Energy Accelerators and Instrumentation" , CERN 1959, 239
- 2) A.A.Kolomenskij, A.N.Lebedev, "International Conference on High-Energy Accelerators and Instrumentation" , CERN 1959, 115
- 3) DESY Speicherring Proposal (Sept.1967)
- 4) K.Steffen; Interner Bericht DESY-H/18 (1969)
- 5) L.D.Landau, J.Phys. USSR 10 , 25 (1946)
- 6) H.G.Hereward , CERN Report 65 / 20 (1965)
- 7) V.K.Neil, A.M.Sessler; Rev.Sci. Instr. 36 , 429 (1965)
- 8) L.J.Lasslett, V.K.Neil, A.M.Sessler; Rev.Sci. Instr. 36, 436 (1965)
- 9) E.Ferlengli, C.Pellegrini, B.Touschek; LNF-65/27 (1965)
- 10) Auslender et al. ; Atomnaja Energija 3, 210 (1966)
- 11) C.Pellegrini, Littauer , M.Sands ; Frascati 1968, unveröffentlicht ,
- 12) M.Sands; SLAC - TN - 69 - 8 (1969)
- 13) C.Pellegrini; LNF - 69/45 (1969)
- 14) F.Amman, D.Ritson ; Report LNF - 61/38 (1961)
- 15) A.Piwinski ; Nucl.Instr.Meth. 81, 199 (1970)
- 16) E.D.Courant, H.S.Snyder; Ann. phys.3 , 1 (1958)
- 17) J.E. Augustin; Orsay, Note Interne 35-69 (1969)

Luminositätsgrenzen

von

K. Steffen

	S.
1) Einleitung und Definition der Luminosität	145
2) Luminositätsformel	145
3) Vertikale und horizontale Q-Verschiebung (Raumladungseffekt)	148
4) Vertikale und horizontale Strahlabmessungen	150
5) HF-Leistung	151
6) Strombegrenzung	152
7) Luminositätsgrenzen	152
8) Genauere Berechnung der Luminositätsgrenze	155

1) Einleitung und Definition der Luminosität

Der wichtigste Parameter des Speicherringes ist seine Luminosität als Funktion der Energie. Die Luminosität ist die Ereignisrate N einer Teilchenreaktion, geteilt durch deren Wirkungsquerschnitt:

$$N = \sigma \cdot L \quad ; \quad (1)$$

sie ist damit ein Maß für die experimentelle Brauchbarkeit des Speicherrings.

Die Luminosität hängt in komplexer Weise ab von allen wesentlichen Speicherring-Parametern und von einer Anzahl physikalischer Effekte, die sie nach oben begrenzen. Diese Effekte sind gegeben durch Quantenfluktuationen und Instabilitäten und beeinflussen die Abmessungen und Lebensdauer der Strahlen.

Wir wollen uns hier darauf beschränken, die voraussichtlich wesentlichsten Luminositätsgrenzen zu diskutieren, um eine Vorstellung davon zu vermitteln, welches Verhalten der Luminosität als Funktion der Energie zu erwarten ist. Wir folgen dabei auszugsweise dem DESY-Bericht von R.D. Kohaupt, H. Neemann und A. Piwinski ¹⁾ und den darin zitierten Arbeiten.

2) Luminositätsformel

Wir nehmen an, daß jeder Bunch des ersten Ringes bei jedem Umlauf genau einen Bunch des zweiten Ringes durchdringt, den wir als Target auffassen. Dann erhalten wir für die Ereignisrate pro Sekunde

$$N = \sigma \cdot f_o N_1 \quad \times \quad \frac{\text{Zahl d. Bunche}}{\frac{N_2}{B} \cdot \frac{1}{F_{eff}}} \quad (2)$$

Zahl d. Teilchen/sec
im 1. Strahl

Flächendichte der Teilchen
im "Targetbunch" (2.Strahl)

Für den Fall, daß die Durchdringung der Bunche vollständig und frontal ist und daß

$$N_1 = N_2 = N$$

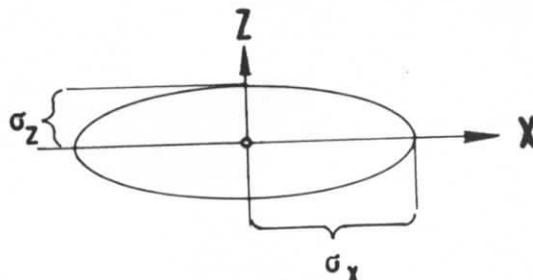


Abb. 1

erhalten wir mit $I = f_0 \cdot e \cdot N$ und $F_{\text{eff}} = 4\pi\sigma_x\sigma_z$

$$L = \frac{1}{4\pi f_0 e^2 B} \cdot \frac{I^2}{\sigma_x \sigma_z} \quad (3)$$

Im DESY-Speicherring durchkreuzen sich jedoch die Bunche vertikal unter einem kleinen Kreuzungswinkel 2ϕ :

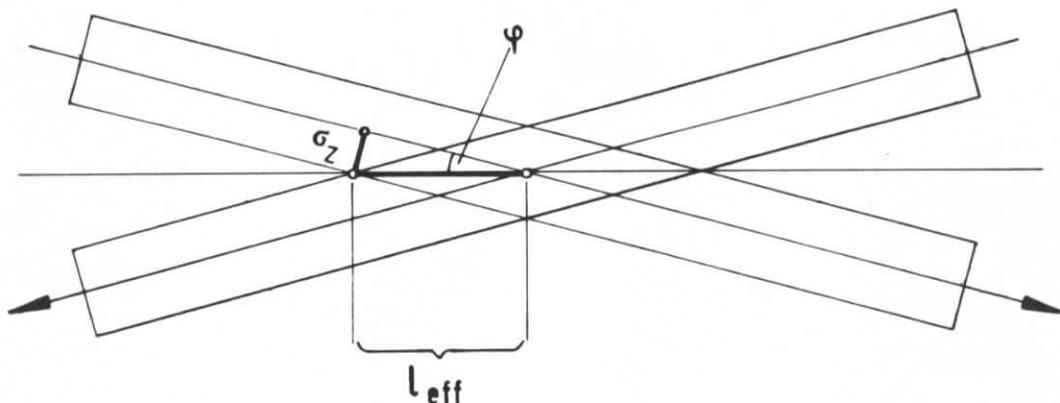


Abb. 2

Dann ist für die Länge der effektiven Wechselwirkungszone bei gaußförmiger Dichteverteilung nicht mehr $2\sigma_s$, sondern $2 l_{\text{eff}}$ einzusetzen, d. h. die Luminosität ist mit dem Verhältnis $\frac{l_{\text{eff}}}{\sigma_s}$ zu

multiplizieren. Mit $\frac{\sigma_z}{l_{\text{eff}}} = \phi$ (siehe Skizze) haben wir

$$\frac{l_{\text{eff}}}{\sigma_s} = \frac{\sigma_z}{\sigma_x \cdot \phi}$$

und damit

$$L = \frac{1}{4\pi f_o e^2 B} \frac{I^2}{\sigma_x \sigma_s \phi} \quad (4)$$

für die Luminosität und

$$F_{\text{eff}} = 4\pi \sigma_x \sigma_s \phi \quad (5)$$

für den effektiven Wechselwirkungsquerschnitt der Bunche.

Gleichungen (4) und (5) gelten nur näherungsweise. Führt man die Integration über Bunche mit gaußförmiger Dichteverteilung exakt aus, so ergibt sich ²⁾

$$L = \frac{1}{4\pi f_o e^2 B} \cdot \frac{I^2}{\sigma_x \sqrt{\sigma_z^2 \cos^2 \phi + \sigma_s^2 \sin^2 \phi}} \quad (6)$$

und demnach für die halbe Länge der effektiven Wechselwirkungszone

$$l_{\text{eff}} = \frac{\sigma_z \cdot \sigma_s}{\sqrt{\sigma_z^2 \cos^2 \phi + \sigma_s^2 \sin^2 \phi}} \quad (7)$$

Als einzige vereinfachende Annahme ist in diesen Formeln vorausgesetzt, daß die Amplitudenfunktion $\beta(s)$ sich über die Länge der effektiven Wechselwirkungszone nicht wesentlich ändert. Da

$$\beta(s) = \beta_o + \frac{s^2}{\beta_o} \quad \text{oder} \quad \frac{\beta(s) - \beta_o}{\beta_o} = \frac{s^2}{\beta_o^2}$$

bedeutet dies mit $s = l_{\text{eff}}$, daß

$$\beta_o \gg l_{\text{eff}}$$

sein muß.

Unsere vereinfachte Formel (4) für die Luminosität folgt aus der genauen Formel (6) für kleines ϕ , d. h. $\sin \phi \approx \phi$ und $\cos \phi \approx 1$, und $\sigma_z \ll \sigma_s \phi$. Bei einer Bunchlänge $2\sigma_s = 3$ cm und einem Kreuzungswinkel von 10 mrad bedeutet die letzte Ungleichung, daß die Strahlhöhe $2\sigma_z$ im Wechselwirkungspunkt klein gegen 300μ sein muß.

3) Vertikale und horizontale Q-Verschiebung (Raumladungseffekt)

Das elektromagnetische Feld des gegenläufigen Strahls in der Wechselwirkungszone führt zu einer - nichtlinearen - Beeinflussung der Teilchenbewegung. In der Nähe der Strahlmitte wächst dieses Feld jedoch linear mit dem Abstand von der Sollbahn. Der eine Strahl wirkt daher auf das einzelne Teilchen im anderen Strahl wie eine lineare Fokussierungslinse, die eine Verschiebung der vertikalen und horizontalen Betatronfrequenz verursacht. Die Änderungen ΔQ_z und ΔQ_x in der Zahl der Betatronschwingungen pro Umlauf sollen hier nicht noch einmal abgeleitet, sondern durch eine vereinfachte Betrachtung unter Verzicht auf die relativistische Transformation plausibel gemacht werden.

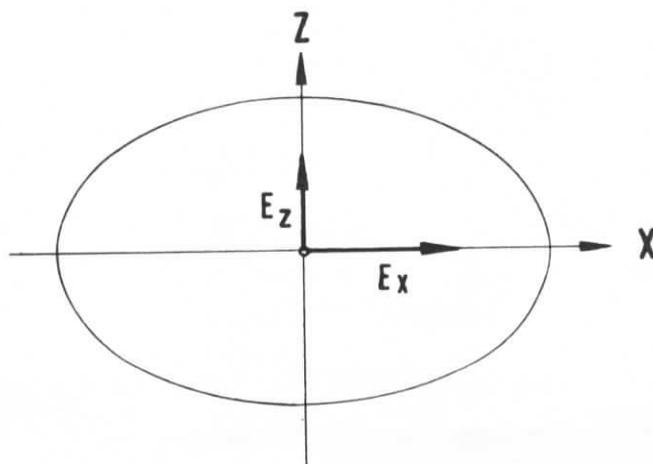


Abb. 3

Das elektromagnetische Feld entspricht in seiner Wirkung einem elektrischen Feld E_z, E_x im Laborsystem von folgender Form:

$$\frac{e}{vp} E_z = \frac{r_e}{\gamma} \frac{N_B}{4\pi\sigma_s\sigma_z(\sigma_x + \sigma_z)} \cdot z = \Delta k_z \cdot z$$

$$\frac{e}{vp} E_x = \frac{r_e}{\gamma} \frac{N_B}{4\pi\sigma_s\sigma_x(\sigma_x + \sigma_z)} \cdot x = \Delta k_x \cdot x$$

Die Ausdrücke in der Klammer stellen die vertikale bzw. horizontale Fokussierungsstärke Δk_z bzw. Δk_x dar; sie sind umgekehrt proportional der Energie und - grob gesprochen - proportional der Teilchendichte im Bunch. Die durch eine zusätzliche Linse der Stärke Δk und der Länge l verursachte Q-Verschiebung ist allgemein gegeben durch

$$\Delta Q = \Delta k \cdot l \cdot \beta$$

wobei β die Amplitudenfunktion an Stelle der Linse ist. Bei frontaler Durchdringung der Bunche erhalten wir also mit

$$l = 2\sigma_s \quad \text{und} \quad N_B = \frac{I}{f_o eB}$$

$$\Delta Q_{z,x} = \frac{\beta_{z,x} r_e}{2\pi\gamma f_o eB} \cdot \frac{I}{\sigma_{z,x}(\sigma_x + \sigma_z)} \quad (8)$$

Wenn die Bunche sich unter einem kleinen vertikalen Kreuzungswinkel 2ϕ ($\phi \ll 1$) durchdringen, zeigt die genaue Rechnung, daß in Gleichung (8) - wie auch oben in der Luminositätsformel - σ_z zu ersetzen ist durch $\sqrt{\sigma_z^2 + \sigma_s^2\phi^2}$. Vernachlässigen wir darüber hinaus wieder σ_z gegen $\sigma_s\phi$, so sind die Q-Verschiebungen

$$\Delta Q_z = \frac{\beta_z r_e}{2\pi\gamma f_0 eB} \frac{I}{\sigma_s \phi (\sigma_x + \sigma_s \phi)}$$
$$\Delta Q_x = \frac{\beta_x r_e}{2\pi\gamma f_0 eB} \frac{I}{\sigma_x (\sigma_x + \sigma_s \phi)}$$

(9)

Die Erfahrung an den bisher betriebenen Speicherringen zeigt, daß die Beziehung

$$\Delta Q_{x,z} \leq Q_{x,z,max} = 0.025$$

(10)

etwa eingehalten werden muß, damit der nichtlineare Anteil der Raumladungskraft den Strahl nicht instabil macht. Aus (10) resultiert eine Begrenzung der Luminosität.

4) Vertikale und horizontale Strahlabmessungen

Die Strahlabmessungen sind nach oben durch die Apertur des Speicherringes und nach unten durch die sog. "natürlichen Strahlabmessungen" begrenzt, und daraus folgen ebenfalls Grenzen für die Luminosität.

Die Aperturen der einzelnen Speicherringelemente sind so gewählt, daß sie der Wurzel aus der Amplitudenfunktion an der betreffenden Stelle proportional sind und damit angepaßt sind an eine maximale Akzeptanz

$$\epsilon_{z,ap} = 8 \cdot 10^{-6} \text{ rad} \cdot \text{m in vertikaler Richtung}$$

und

$$\epsilon_{x,ap} = 8 \cdot 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{m in horizontaler Richtung.}$$

Dies bedeutet bei einer Amplitudenfunktion $\beta_x = 0,1 \text{ m}$ im Wechselwirkungspunkt eine Gesamt-Aperturbreite für den Strahl von

$$2 \cdot \sqrt{\epsilon_{x,ap} \beta_x} = 2 \cdot \sqrt{8 \cdot 10^{-6}} = 5.7 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

Bei einer geforderten Lebensdauer von 10 Stunden müssen in dieser Aperturbreite mindestens etwa 12 halbe Standard-Strahlbreiten Platz finden, d. h.

$$\sigma_x \stackrel{<}{=} \sigma_{x,\max} = 0,47 \text{ mm} \quad (11)$$

Die kleinste, sog. "natürliche" Strahlbreite ist gegeben durch Quantenfluktuationen. Wir wollen den komplizierten Ausdruck für ihre Abhängigkeit von der optischen Struktur hier nicht wiedergeben, sondern nur anmerken, daß sie der Energie proportional ist. Für die DESY-Parameter erhält man

$$\sigma_x \stackrel{\geq}{=} \sigma_{x,\text{nat}} = 0.033 \text{ mm} \cdot \frac{E}{\text{GeV}} \quad \text{d. h. } 100\mu \text{ bei } 3 \text{ GeV} \quad (12)$$

Die natürliche Strahlhöhe kann - infolge Kopplung - zu etwa 5 % der natürlichen Strahlbreite angenommen werden, stellt aber für $\sigma_z \ll \sigma_s \phi$ keine Begrenzung der Luminosität dar.

5) Hf - Leistung

Die zum Speichern eines Strahls erforderliche Hochfrequenzleistung P wird benötigt zur Kompensation der

- a) Synchrotronstrahlungsverluste
- b) Cavity-Verluste
- c) reflektierten Leistung

In unserer vereinfachten Betrachtung vernachlässigen wir b) und c) und haben dann mit

$$U_T = \text{vom Sollteilchen gesehene Umfangsspannung}$$
$$P = U_T \cdot I = \frac{4\pi r_e \gamma^3 E}{3e\rho} \cdot I \leq P_{\max} \quad (13)$$

Für den DESY-Speicherring ist $P_{\max} = 600 \text{ kW}$.

6) Strombegrenzung

Um die Injektionszeit zu begrenzen, führen wir für den gespeicherten Strahl eine maximale Stromstärke I_{\max} ein:

$$I \leq I_{\max} \quad (14)$$

Beim DESY-Speicherring wählen wir 6A, was einer Injektionszeit für Positronen von etwa 15 min entspricht.

7) Luminositätsgrenzen

Nachdem wir die wesentlichsten Bedingungen besprochen haben, die eine prinzipielle Begrenzung der Luminosität zur Folge haben, stellen wir sie nachstehend noch einmal zusammen:

1. $\Delta Q_z \leq \Delta Q_{z,\max}$
2. $\Delta Q_x \leq \Delta Q_{x,\max}$
3. $\sigma_x \leq \sigma_{x,\max}$
4. $\sigma_x \geq \sigma_{x,\text{nat}}$
5. $I \leq I_{\max}$
6. $P \leq P_{\max}$

Unser Ziel ist es, bei festem Kreuzungswinkel $2\phi \ll 1$ aus den Bedingungen 1 bis 6 eine obere Grenze für die Luminosität L als Funktion der Energie herzuleiten. In unserer Betrachtung (mit $\sigma_z \ll \sigma_s \phi$) hängen weder die Luminosität (4) noch die Bedingungen 1 bis 6 von der vertikalen Strahlausdehnung σ_z ab; als Parameter verbleiben somit die horizontale Strahlausdehnung σ_x und die Stromstärke I . Wir können nun σ_x und I so wählen, daß jeweils zwei der Bedingungen 1 bis 6 als Gleichung

erfüllt sind und damit jeweils eine Luminositätsfunktion L_{ij} definieren, die dann eine eindeutige Funktion der Energie ist und eine obere Grenzkurve für die Luminosität L darstellt:

$$L(E) \leq L_{ij}(E) \quad \text{für alle Paare } i,j. \quad (15)$$

Die tatsächliche Luminositätskurve ist also die "Envelope", die unterhalb der Kurven $L_{ij}(E)$ gezeichnet werden kann. Da die Bedingungen (1,2), (3,4) und (5,6) nicht miteinander zu vereinigen sind, erhalten wir 12 mögliche Luminositätsfunktionen. Die numerische Auswertung zeigt jedoch, daß davon im DESY-Falle nur 4 zur Enveloppe beitragen und deshalb nachstehend diskutiert werden.

Wir beginnen mit den Begrenzungen 1 (vertikale Q-Verschiebung) und 3 (horizontale Aperturgrenze), substituieren den Strom aus Gleichung (9) und (10) in Gleichung (4) und erhalten

$$L_{13} = \frac{\pi f_0 (\Delta Q_{z,\max})^2 B \sigma_{x,\max} \sigma_s \phi \gamma^2 d^2(\phi)}{r_e^2 \cdot \beta_z^2} \quad (16)$$

mit dem Korrekturfaktor

$$d(\phi) = 1 + \frac{\sigma_s \phi}{\sigma_{x,\max}}$$

L_{13} ist proportional γ^2 und erscheint in der doppelt logarithmischen Darstellung der Figur 1 als Gerade, wobei angenommen ist, daß die Bunchlänge $2\sigma_s = 3$ cm und die maximale Strahlbreite $2\sigma_x = 0.95$ mm sich mit der Energie nicht ändert.

Als nächstes betrachten wir die Begrenzungen 1 (vertikale Q-Verschiebung) und 5 (Strahlstrom), eliminieren σ_x in Gleichung (4) mit Hilfe der Gleichungen (9) und (10) und erhalten

$$L_{15} = \frac{\Delta Q_{z,\max} I_{\max} \gamma d(\phi)}{2e r_e \beta_z} \quad (17)$$

Eliminiert man σ_x auch in dem Korrekturfaktor

$$d = 1 + \frac{\sigma_s \phi}{\sigma_x}$$

so ergibt sich für d eine etwas komplizierte, aber nicht sehr starke Abhängigkeit von der Energie, die wir für die numerische Auswertung dadurch beseitigen, daß wir dort konstant $E = 2 \text{ GeV}$ einsetzen. Dann resultiert die in Fig. 1 dargestellte Gerade L_{15} , die proportional mit der Energie ansteigt.

Sodann betrachten wir die Begrenzungen 1 (vertikale Q-Verschiebung) und 6 (Hf-Leistung). Eliminiert man in der Luminositätsformel (4) einen Faktor I durch die Gleichungen (9) und (10) $\left[Q_z = Q_{z,\max} \right]$ und den anderen Faktor I durch Gleichung (13) $\left[P = P_{\max} \right]$, so erhält man

$$L_{16} = \frac{3 \Delta Q_{z,\max} \rho P_{\max} d(\phi)}{8\pi r_e^2 \beta_z \gamma^2 E} \quad (18)$$

Die numerische Auswertung ergibt - für wiederum konstant gesetzten Korrekturfaktor d - die in Fig. 1 gezeigte Gerade proportional γ^{-3} .

Letztlich betrachten wir die Begrenzungen 4 (natürliche Strahlbreite) und 6 (Hf-Leistung) und eliminieren I^2 in Gleichung (4) mit Hilfe von Gleichung (13):

$$L_{46} = \frac{9 P_{\max}^2 \rho^2}{64\pi^3 r_e^2 f_0 B \sigma_{x,\text{nat}} \sigma_s \phi \gamma^6 E^2} \quad (19)$$

Da σ_x proportional zu E ist (Gleichung 12), ist L_{46} proportional zu γ^{-9} . Weil die Zahl der Bunche B im Nenner steht, kann man L_{46} um den Faktor n erhöhen, wenn man - bei gleichbleibender Stromstärke - nur jeden n-ten Bunch füllt. Die aus der numerischen Auswertung folgenden Geraden L_{46} für die Bunch-Besetzungszahlen $n = 1$ und $n = 12$ sind in Fig. 1 gezeigt.

8) Genauere Berechnung der Luminositätsgrenze

Eine genauere Berechnung der Luminositätsgrenze als Funktion der Energie wurde von H. Neemann mit den Parametern des DESY-Speicherringes auf der IBM 360/75 durchgeführt. Das Ergebnis sind die in Fig. 1 dargestellten zwei Kurven für die Bunch-Besetzungszahlen $n = 1$ bzw. $n = 12$, deren Verlauf von dem Ergebnis unserer vereinfachten Betrachtung recht gut wiedergegeben wird. Nur bei Energien oberhalb 3 GeV fällt die genauere Kurve wesentlich schneller ab als es sich aus der vereinfachten Betrachtung ergibt. Dies hat seinen Grund darin, daß bei den hohen Energien ein beträchtlicher Teil der Hf-Leistung in den Cavities verloren geht. - Die Abweichungen im mittleren und unteren Energiebereich gehen vor allem darauf zurück, daß in dem vereinfachten Modell eine konstante Bunchlänge angenommen wurde.

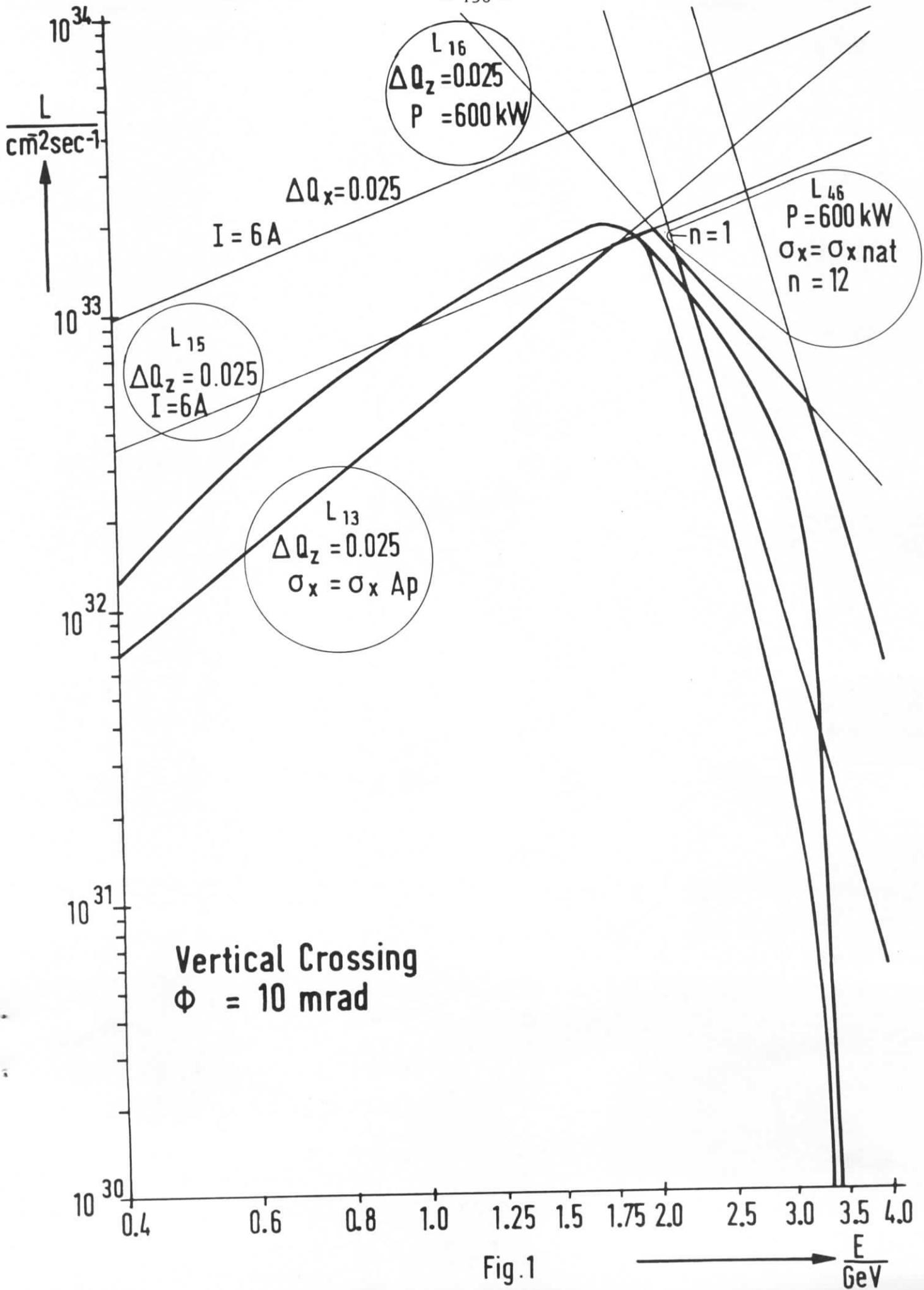


Fig.1

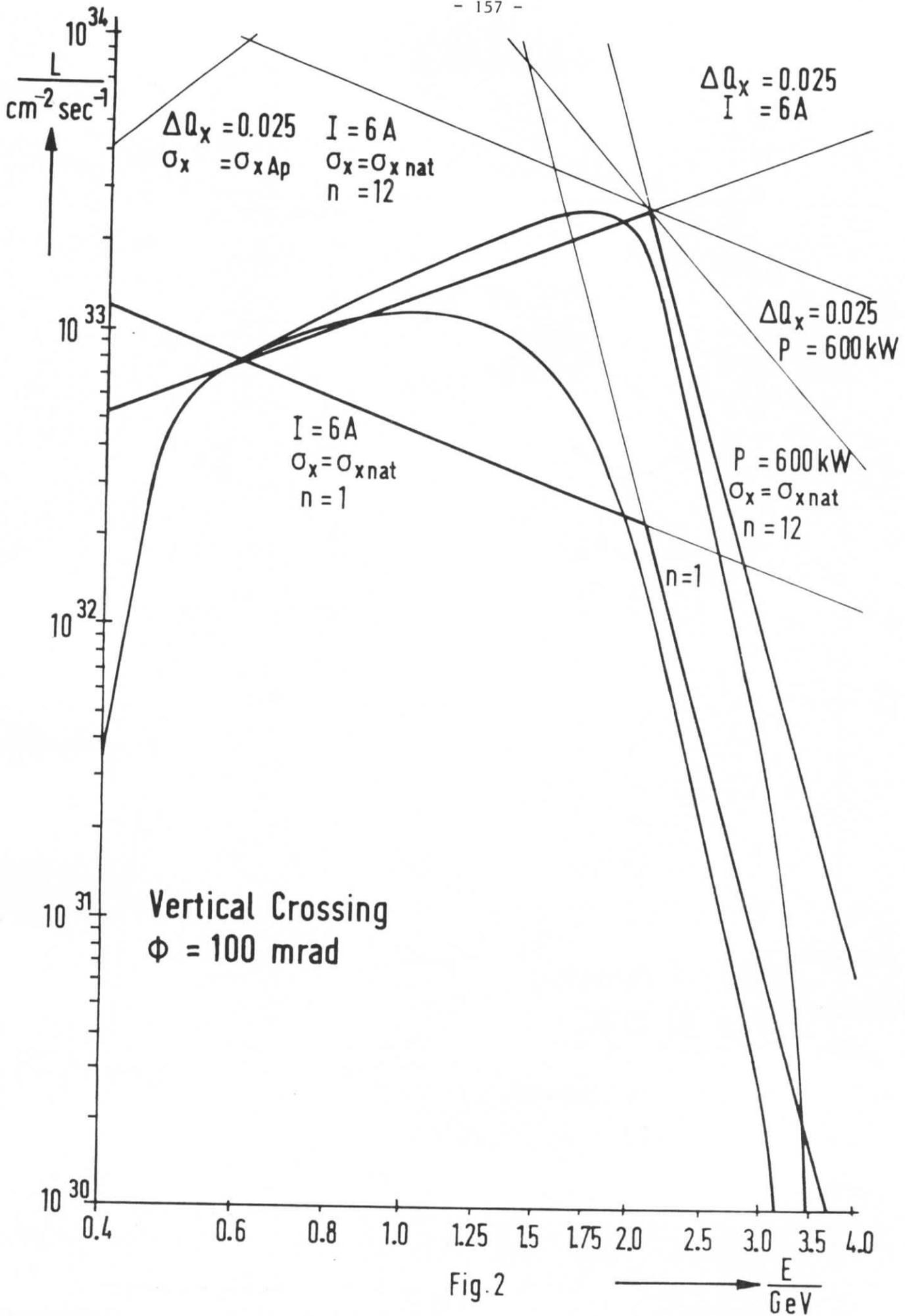


Fig. 2

L i t e r a t u r :

- 1) R.D. Kohaupt, H. Neemann und A. Piwinski,
DESY-Bericht 69/44 (1969)
sowie die dort zitierten Arbeiten

- 2) A. Piwinski, Interner Bericht DESY-H1/1 (1969)

Übersicht über die Elektronen-Speicherringe

von

H. Wiedemann

	S.
1) Die Versuchsspeicherringe	162
A.d.A	
Stanford	
V E P - 1	
2) Die Experimentierspeicherringe	164
V E P P - 2	
A C O	
A D O N E	
3) Die spitzfindigen Speicherringe	166
C E A - Bypass	
V E P P - 3	
D E S Y	
S P E A R	
C O P P E L I A	

Nachdem wir in einer Reihe von Berichten viel von Speicherringphysik gehört haben, wollen wir uns heute vergegenwärtigen, wann und wo all diese Physik in "hard-ware" umgesetzt wurde oder wird.

Hamburg ist ein guter Ausgangspunkt für einen Rundgang durch den Speicherringzoo. Vor 27 Jahren (1943) hatten Kollath, Touschek und Wideroe, die hier in Hamburg an der Entwicklung eines Betatrons beschäftigt waren, zum ersten Male die Idee von einer Teilchenspeicherung in einem Kreisbeschleuniger geäußert. Es hat dann noch 13 Jahre gedauert, bis Kerst 1955 und kurz darauf auch O'Neill detailliertere Vorschläge zum Bau eines Speicherringes gemacht haben.

Die Diskussion um das Speicherringprinzip führte 1958 zum ersten Proposal für einen Elektron-Elektron-Speicherring in Stanford. Etwa zur gleichen Zeit begannen Physiker in Moskau unter der Leitung von Budker die Möglichkeit eines Elektronenspeicherringes zu diskutieren. Diese Diskussion führte sehr schnell zum Bau von VEP - 1. 1960 wies Touschek zum ersten Male auf die besonderen Eigenschaften eines Elektron-Positron-Speicherringes für die Hochenergiephysik hin. Innerhalb eines Jahres wurde darauf in Frascati der erste Speicherring A.d.A. (Anello di Accumulatione) gebaut und im März 1961 in Betrieb genommen. Der Erfolg, einen Elektronenstrahl für längere Zeit zu speichern, führte bald zur Konzeption von Adone, dessen Maximalenergie zunächst 750 MeV sein sollte. Unterdessen lieferte der Elektron-Elektron Speicherring von Stanford 1965 als erster Speicherring wichtige Ergebnisse in der Hochenergiephysik, zu denen weitere Ergebnisse von den Elektron-Positron-Speicherringen VEPP-2 und ACO bald folgten.

Durch die experimentellen Erfolge der Speicherringe im Sub-GeV-Bereich sind inzwischen interessierte Physiker in

mehreren Instituten ermutigt worden, größere Speicherringe im GeV-Bereich vorzuschlagen und zu bauen. Der erste dieser Speicherringe, Adone, wurde im letzten Jahr mit der inzwischen erhöhten Energie von 1,5 GeV in Betrieb genommen, während am By-pass-projekt in Cambridge mit 3 GeV und bei VEPP-3 in Nowosibirsk mit 3,5 GeV die ersten Speicherversuche durchgeführt werden. Das letzte bewilligte und in Aufbau befindliche Elektron-Positron-Speicherring-Projekt führt uns auf unserem Rundgang durch den SR - ZOO zurück nach Hamburg zu unserem eigenen Vorhaben.

Damit haben wir, um in der Sprache der Beschleunigerentwickler zu bleiben, auch in der Speicherring-Entwicklung wenigstens einen momentanen "Closed orbit" von Hamburg nach Hamburg gefunden, wobei wir hier jedoch auf die sonst übliche Periodizitätsbedingung unbedingt verzichten wollen. Neben diesen bereits bestehenden und in Bau befindlichen Speicherringen gibt es aus den letzten Jahren noch eine Reihe von Speicherringproposals, von denen im Moment nur noch zwei ernsthaft diskutiert werden, nämlich das Projekt "Spear" von Stanford und das Projekt "Coppelia" von Orsay.

Nach dieser sehr oberflächlichen Übersicht möchte ich die einzelnen Projekte näher beleuchten und ihre Bedeutung für die Speicherringentwicklung aufzeigen.

Man kann die bestehenden und vorgeschlagenen Speicherringe grob in drei Gruppen einteilen:

1. Die Versuchsspeicherringe
2. die Experimentierspeicherringe
3. die spitzfindigen Speicherringe.

Bevor wir jedoch auf diese drei Gruppen näher eingehen, sollte die notwendige theoretische und experimentelle Vorarbeit für einen Speicherringbau erwähnt werden.

Erst durch das Verständnis und durch geeignete Kontrolltechniken für die Einteilchenbewegung war es möglich, an Speicherringe mit höheren Stromstärken zu denken. Diese Vorarbeiten sind gekennzeichnet durch:

- a: die Entwicklung einer Theorie für das Zusammenspiel von Hochfrequenz und Einteilchenverhalten,
- b: intensive experimentelle wie theoretische Studien zum Verständnis der Einteilchenbewegung im Magnet-system unter Einschluß von Nichtlinearitäten,
- c: das Verständnis des Zusammenspiels von Einteilchenbewegung und Synchrotron-Strahlung, welches den Bau von Beschleunigern ermöglichte, in denen alle Betatron- und Synchrotronschwingungsmoden gedämpft sind.

Mit diesen Vorarbeiten war es möglich, die erste Generation von Speicherringen zu bauen.

1. Die Versuchsspeicherringe

Im März 1961 wurde der erste Speicherring A.d.A. in Betrieb genommen. Die charakteristischen Daten sind:

Maximalenergie	250 MeV
Elektronenstrom	0,5 mA
Strahllebensdauer	20 sec
Umfang	4,08 m
Magnetstruktur	schwach fokussierend
Luminosität	$\ll 10^{24} \text{ cm}^{-2} \text{ sec}^{-1}$

Die Abb. 1 zeigt eine Zeichnung des Ringes mit den wesentlichen Bauteilen. Die Gesamtanordnung ist in der Abb. 2 ersichtlich.

Da zur Füllung des Speicherringes nur ein Gammastrahl vom 1 GeV-Synchrotron in Frascati zur Verfügung stand, wurden innerhalb der Vakuumkammer von AdA zwei Targets installiert, in denen die Elektronen und Positronen erzeugt wurden. Diese

Einschußart hatte jedoch einen solch schlechten Wirkungsgrad, daß nach besseren Einschußmöglichkeiten gesucht werden mußte. Dies war der Grund, warum A.d.A. bald an den Linearbeschleuniger von Orsay transportiert wurde, wo dann die eigentliche Pionierarbeit für die Speicherringe durchgeführt werden konnte. Bevor wir die Ergebnisse dieser Arbeiten besprechen, sollen noch die beiden anderen Speicherringe in diesem Versuchsstadium vorgestellt werden.

Fast gleichzeitig wurden in Stanford und in Moskau (VEP-1) ein Elektron-Elektron-Speicherring gebaut, die in den Jahren 1962 bzw. 1963 in Betrieb genommen wurden. Im Gegensatz zu A.d.A. handelt es sich hier um zwei sich tangierende Ringe. Einige charakteristische Daten sind:

	<u>Stanford</u>	<u>VEP-1</u>
Energie	500 MeV	140 MeV
Umfang	11,6 m	3 m
Elektronenströme	50 mA	20 mA
Strahllebensdauer	30 min	5 min
Magnetstruktur	schwach fokussierend	
Luminosität	$2 \cdot 10^{28}$	$10^{27} \text{ cm}^{-2} \text{ sec}^{-1}$

Die Abb. 3 zeigt schematisch die Speicherringe in Stanford und Abb. 4 die hier vertikal angeordneten Ringe von VEP-1.

Systematische Untersuchung des Strahlverhaltens in diesen Maschinen führte zur Entdeckung und zu einem weitgehenden Verständnis von Vielteilchenproblemen, die für die Planung aller weiteren Speicherringe von großer Bedeutung geblieben sind:

- a: der Touschek-Effekt
- b: die inkohärente Raumladungsgrenze
- c: Kohärente - Einstrahlinstabilitäten
- d: Kohärente Strahl-Strahl Instabilitäten.

Nach diesen Entdeckungen wurde AdA abgebaut, während die Speicherringe in Stanford und VEP-1 weiterentwickelt wurden, um erste Speicherringergebnisse für die Hochenergiephysik zu liefern.

2. Die Experimentierspeicherringe

Während die erste Generation von Speicherringen zunächst nur für die Beschleunigerentwickler gebaut wurden, um die Idee der Teilchenspeicherung zu testen und das Strahlverhalten zu studieren, sind die Speicherringe in der zweiten Generation bereits eindeutig im Hinblick auf Experimente in der Hochenergiephysik entworfen und gebaut worden.

Dies war möglich, da inzwischen Mittel und Wege bekannt waren, einzelne der gefundenen Instabilitäten zu umgehen. So wurden die Speicherringe ACO und ADONE speziell so ausgelegt, daß sie nicht mehr durch den Touschek-Effekt begrenzt sind. Ebenso sind Möglichkeiten gefunden worden, kohärente Effekte von vornherein zu vermeiden oder durch verschiedene Maßnahmen zu dämpfen, so daß zu diesem Zeitpunkt Maschinen entworfen werden konnten, die nicht mehr durch kohärente Effekte begrenzt sein sollten. Dies heißt jedoch keineswegs, daß die Inbetriebnahme der neuen Speicherringe problemlos abgelaufen ist. Neue Effekte traten auf und mußten behoben werden, während die bekannten Effekte durch vermehrten Einbau von Beobachtungseinrichtungen genauer studiert werden konnten.

Bevor ich nun auf die Ergebnisse der Speicherringe dieser Generation eingehe, möchte ich diese der Reihe nach vorstellen:

- a: Ende 1963 wurde in Nowosibirsk ein Elektron-Positron-Speicherring VEPP-2 in Betrieb genommen, dessen Gesamtanlage in der Abb. 5 zu sehen ist.

Einige charakteristische Daten sind:

Maximalenergie	700 MeV
Strom: Elektronen	70 mA
Positronen	10 mA
Lebensdauer	20 min
Umfang	12 m
Luminosität	$10^{27} \text{ cm}^{-2} \text{ sec}^{-1}$
Magnetstruktur	schwach fokussierend

VEPP-2 war der erste Speicherring mit genügenden Positronenströmen, so daß Hochenergieexperimente durchgeführt werden konnten. Die Abb. 6 zeigt eine Photographie der Anlage.

b: ACO - Orsay

Im Oktober 1965 wurde in Orsay der erste starkfokussierende Elektron-Positron-Speicherring in Betrieb genommen. In Abb. 7 sind eine Reihe von physikalischen Daten dieser Maschine zusammengestellt, während die Abb. 8 den Aufbau der Anlage zeigt. Mit einem Elektronenstrom von 16 mA und einem Positronenstrom von 19 mA wurde Luminosität von $10^{28} \text{ cm}^{-2} \text{ sec}^{-1}$ erreicht.

c: Adone - Frascati

Mit dem Elektron-Positron-Speicherring Adone in Frascati ist vor einem Jahr der erste Speicherring im GeV-Bereich in Betrieb genommen worden. Die Abb. 9 gibt die wesentlichen Kenndaten des Speicherringes und Abb. 10 seine Struktur. Kurze Zeit nach den ersten Zwei-Strahlspeicherungen wurde bei einem Elektronenstrom von 23 mA und einem Positronenstrom von 40 mA eine Luminosität von $10^{29} \text{ cm}^{-2} \text{ sec}^{-1}$ erreicht.

Mit Hilfe dieser drei Speicherringe wurden nun lange und sehr detaillierte Untersuchungen des Strahlverhaltens durchgeführt.

So ergab sich bei VEPP-2, daß durch den Einbau von elektrostatischen Elektroden zur Strahltrennung neue hochfrequente Wechselwirkungen zwischen dem gespeicherten Strahl und diesen Elektroden erzeugt werden können, welche teils schwingungsdämpfend, teils auch anregend sein können. Bei ACO und Adone sind diese Wechselwirkungen zwischen dem Strahl einerseits und Elektroden oder Diskontinuitäten im Vakuumrohr andererseits die sehr stark strahlbegrenzende Effekte. Während es möglich ist, den kohärenten Anteil dieser Instabilität durch den Einbau von Sextupolen und Oktupolen zu unterdrücken, scheint der inkohärente Anteil nur durch eine hochfrequenzmäßig neutrale Gestaltung der Vakuumkammer reduziert werden zu können.

Neu aufgetretene Phaseninstabilitäten wurden sowohl bei VEPP-2 wie bei Adone genau untersucht und es stehen inzwischen mehrere Möglichkeiten zur Verfügung, diese Instabilität zu beherrschen.

Lange Meßreihen wurden bei VEPP-2 und ACO durchgeführt, um den Einfluß von höheren Resonanzen und Koppelresonanzen auf das Strahlverhalten zu untersuchen.

Insgesamt kann gesagt werden, daß das bisherige Verständnis des Strahlverhaltens eine Reihe von Instituten ermutigt hat, neue und wesentlich kompliziertere Speicherringe zu entwerfen und zu bauen. Damit sind wir bei der bisher letzten Generation von Speicherringen angelangt.

3. Die spitzfindigen Speicherringe

Wir haben gehört, daß die zweite Generation von Speicherringen speziell so gebaut wurde, um schon gefundenen Instabilitäten auszuweichen. Dies war jedoch nicht beim inkohärenten Raumladungs-

effekt gelungen. Einen großen Fortschritt bedeutete daher ein Vorschlag der CEA-Gruppe (1965), diese Grenze durch eine sehr kleine Amplitudenfunktion am Wechselwirkungspunkt ganz wesentlich hinauszuschieben. Da diese sog. low- β -Zone eine besondere Magnetstruktur verlangt, hat man die strenge vielperiodische Synchrotron-Struktur der bisherigen Speicherringe verlassen und man erlaubt sich heute fast jede Form der Magnetstruktur, sofern sie nur eine geschlossene Teilchenbahn erzeugt.

a: Das CEA-Bypass-Projekt

Aus Geldmangel war es für die CEA-Gruppe in Cambridge nicht möglich, einen Speicherring zu bauen, so daß sie sich entschloß, das bestehende Synchrotron in einen Speicherring umzubauen. Die spezielle Magnetstruktur zur Erzeugung einer low- β -Zone im Wechselwirkungspunkt machte es notwendig, einen sog. Bypass an das Synchrotron anzubringen (s. Abb. 11).

Bei einer Energie von 3 GeV und umlaufenden Strömen von etwa 50 mA wird eine Luminosität von $10^{31} \text{ cm}^{-2} \text{ sec}^{-1}$ erwartet. Die Lebensdauer soll etwa eine halbe Stunde betragen. Die Benutzung eines Synchrotrons als Speicherring bringt neue Probleme mit sich wie z. B. die Dämpfung der horizontalen Betatronschwingung, die in einem Synchrotron dieser Art entdämpft ist; das für einen Speicherring zu schlechte Vakuum; die sehr geringe Einschußenergie und das Einschalten des Bypasses, um nur die wichtigsten zu nennen.

Während die ersten drei der genannten Probleme im vergangenen Jahr bereits zufriedenstellend gelöst werden konnten, macht das Einschalten des Bypasses im Moment noch große Schwierigkeiten. Die Strahllebensdauer bei eingeschaltetem Bypass konnte noch nicht über etwa 10 Sekunden verlängert werden.

b: VEPP-3 in Nowosibirsk

Der Speicherring VEPP-3 erscheint mir ein kühnes Projekt zu sein. Wie die Abb. 12 zeigt, besteht der Ring aus zwei Halbbögen, die durch gerade Stücke für die Experimentierzone und einen evtl. Einbau einer low- β -Zone um den Wechselwirkungspunkt verbunden sind. Auffallend ist besonders die sehr große Dichte der Magnete in den Bögen. Dies ergibt automatisch eine eingeschränkte Flexibilität in der Handhabung des Speicherringes. Für den Design späterer Speicherringe dürfte dieser Design jedoch von großer Bedeutung sein, da bei den gegenwärtigen Projekten aus Sicherheitsgründen große Flexibilität angestrebt werden muß, um auftretenden Schwierigkeiten entgegentreten zu können. Dies wiederum ist mit erhöhtem Aufwand an Raum und Geld verbunden. Die Parameter von VEPP-3 zeigt Abb. 13. Die folgenden Abbildungen zeigen die Fertigung der Magnetblöcke, in denen Ablenkmagnet und Quadrupole in einem Block mit einer Stromwindung zusammengefaßt wurden (Abb.14), die kompakte Bauweise in den Bögen (Abb. 15) und die Wechselwirkungszone (Abb. 16). Erste Speicherversuche wurden Ende 1969 durchgeführt, und man erwartet bei einem umlaufenden Strom von $2 \times 100 \text{ mA}$ eine Luminosität von $10^{30} \text{ cm}^{-2} \text{ sec}^{-1}$.

c: DESY-Speicherring

Unser eigenes Vorhaben ist der letzte im Bau befindliche Speicherring und der erste Elektron-Positron-Speicherring, der als Doppelring ausgebildet ist. Dies hat sich inzwischen auch bei den folgenden Speicherringen als nützlich erwiesen, um auftretende Instabilitäten besser und gezielter dämpfen zu können.

Da unser Speicherring schon mehrfach vorgestellt wurde, möchte ich nun zu den beiden Zukunftsprojekten kommen, für die bisher noch keine Mittel bereitgestellt worden sind.

d: SPEAR - Stanford

Nachdem der 500MeV Elektron-Elektron-Speicherring in Stanford erfolgreich betrieben werden konnte, sind von dieser Gruppe mehrere Vorschläge zum Bau eines 3-GeV Speicherringes gemacht worden. Widrige Umstände jedoch verhinderten eine Zuteilung der notwendigen Mittel. Der neueste Vorschlag beschreibt deshalb einen Speicherring, der trotz Berücksichtigung aller neueren Erkenntnisse (low- β , Doppelring) mit einem möglichst geringen Aufwand an Kosten und Zeit auskommt, wobei jedoch weitere Ausbaumöglichkeiten berücksichtigt wurden. In der Abb. 17 sind die wesentlichen Parameter zusammengestellt. Eine Besonderheit dieses Speicherringes ist der große horizontale Kreuzungswinkel von etwa 10° , wodurch die beiden Ringe eine Ei-förmige Gestalt annehmen (Abb. 18). Eine horizontale Kreuzung vermeidet eine vertikale Strahl- ablenkung und ist somit billiger, andererseits erfordert es einen vergrößerten Aufwand für die Steuerung, um zwei Strahlen mit sehr geringen Strahlhöhen horizontal zum Treffen zu bringen. In Zahlen ausgedrückt bedeutet dies eine vertikale Strahlstabilität im Ring von wesentlich unter $1/10$ mm.

Die Lage des Speicherrings-SPEAR bei SLAC zeigt Abb. 19 und das Gebäude Abb. 20. In der nächsten Abbildung 21 ist die Luminositätsabhängigkeit von SPEAR von Strom, Energie und Ausbaustufe dargestellt. Die erste Ausbaustufe beinhaltet eine Gesamthochfrequenzleistung von 150 kW, während später 550 kW installiert werden sollen.

Bei den recht hohen Strahlströmen, die hier und auch bei den anderen großen Speicherringen in Rechnung gesetzt werden, sind neue Schwierigkeiten zu erwarten. Bisher liegen Erfahrungen nur bis zu etwa 1 Ampere Strahlstrom vor. Ein anderes Problem im Zusammenhang mit den hohen Strahlströmen sind die noch geringen Positronenströme, die bisher realisiert

werden können. Dies wird insbesondere dann kritisch, wenn zur Luminositätserhöhung nicht jedes Hochfrequenzbucket mit Teilchen gefüllt werden soll, wodurch sich schnell Einschußzeiten in der Größenordnung von einer Stunde ergeben. Für den Erfolg der neuen großen Speicherringe ist deshalb die Entwicklung von verbesserten Positronenquellen unerlässlich.

e: COPPELIA - ORSAY

Der jüngste Vorschlag für einen Elektron-Positron-Speicherring kommt aus Orsay von der Gruppe, die bisher den Speicherring ACO entwickelt hat. Während bei CEA, DESY und SPEAR die inkohärente Raumladungsgrenze durch den Einbau einer low- β -Zone hinausgeschoben werden soll, hat sich die Gruppe in Orsay vorgenommen, diesen Effekt möglichst ganz zu erschlagen.

Das Prinzip ist einfach:

Es sollen je ein Elektronen- und ein Positronenstrahlpaar so zum Treffen gebracht werden, daß sich gleichzeitig elektrostatische und magnetische Kräfte aufheben (s. Abb.22). Mit diesem Prinzip vermeidet man die Notwendigkeit, eine low- β -Zone mit ihren noch unbekanntem strahlführungstechnischen Schwierigkeiten einzubauen. Auf der anderen Seite wird es nicht leicht sein, vier gleiche Strahlen zu realisieren.

Die Gesamtanlage ist in Abb. 23 gezeigt, während die Abb. 24 und Abb. 25 die wichtigsten Parameter des Speicherringes angeben.

Beide Ringe sind wie bei DESY vertikal übereinander angebracht, wobei bei COPPELIA jedoch die zusätzliche Schwierigkeit auftritt, wegen des besonderen Prinzips alle vier Strahlen mit dem Kreuzungswinkel Null zum Treffen zu bringen.

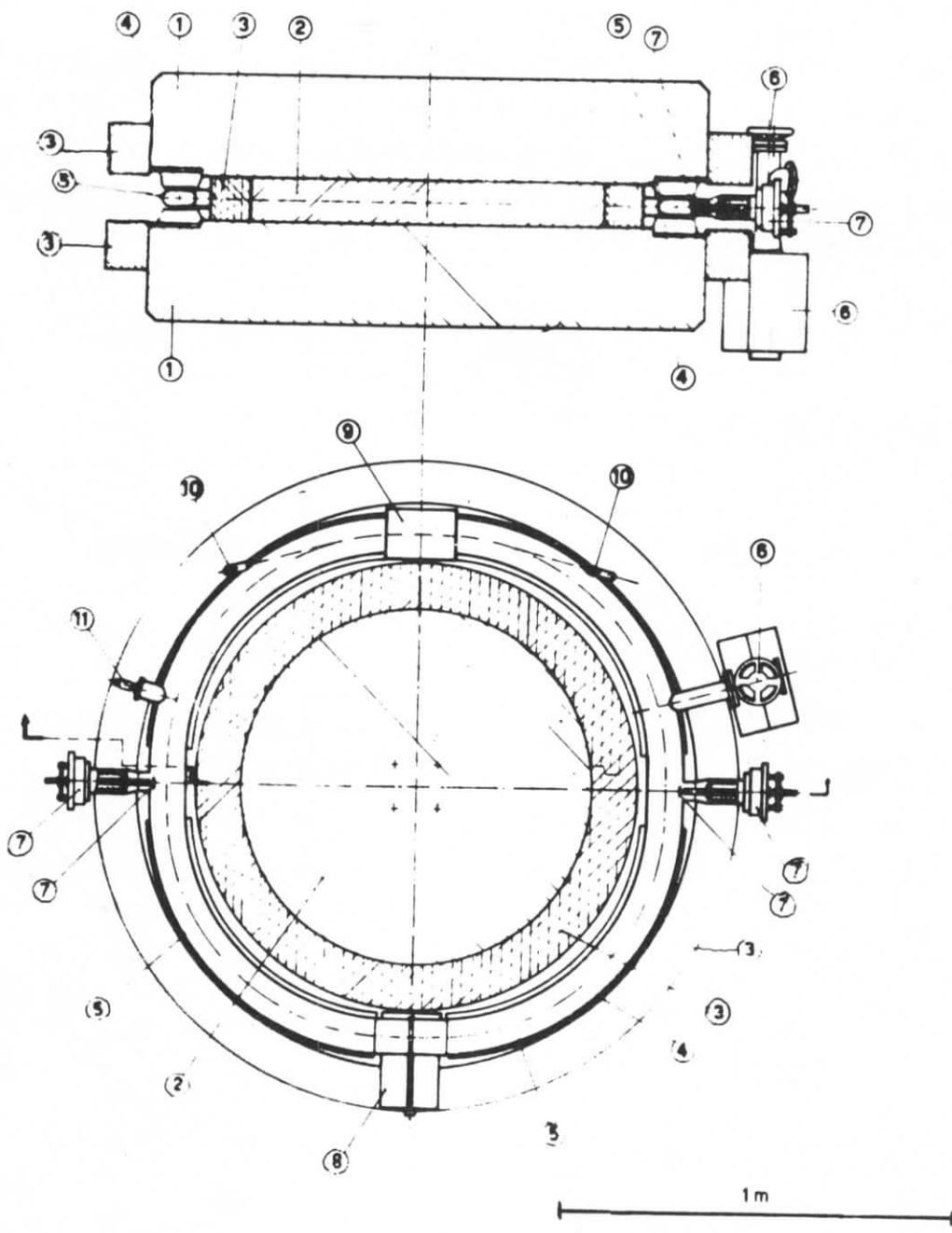
Die Abb. 26 zeigt die Luminositätsabhängigkeit von COPPELIA für verschiedene Ausbaustufen, Energien und Bunchbesetzungszahlen n . Die maximalen Ströme reichen auch hier bis knapp 10 Ampere.

Zum Abschluß der Betrachtung über die Speicherringentwicklung möchte ich die Abb. 27 zeigen, in der die ganze Elektronen-Speicherringfamilie zusammengestellt ist, mit den erreichten Luminositäten in Abhängigkeit vom Zeitpunkt der Messung bzw. der wahrscheinlichen Messung. Es zeigt sich ein steiler Fortschritt in der Entwicklung, bei der trotz aller Schwierigkeiten noch keine assymptotischen Merkmale zu erkennen sind.

Für ihre Hilfe bei den Schreib- und Zeichenarbeiten danken die Autoren Frau T. Fiedler, Herrn M. Kashan, Frl. I. Körner und Frl. R. Schöning.

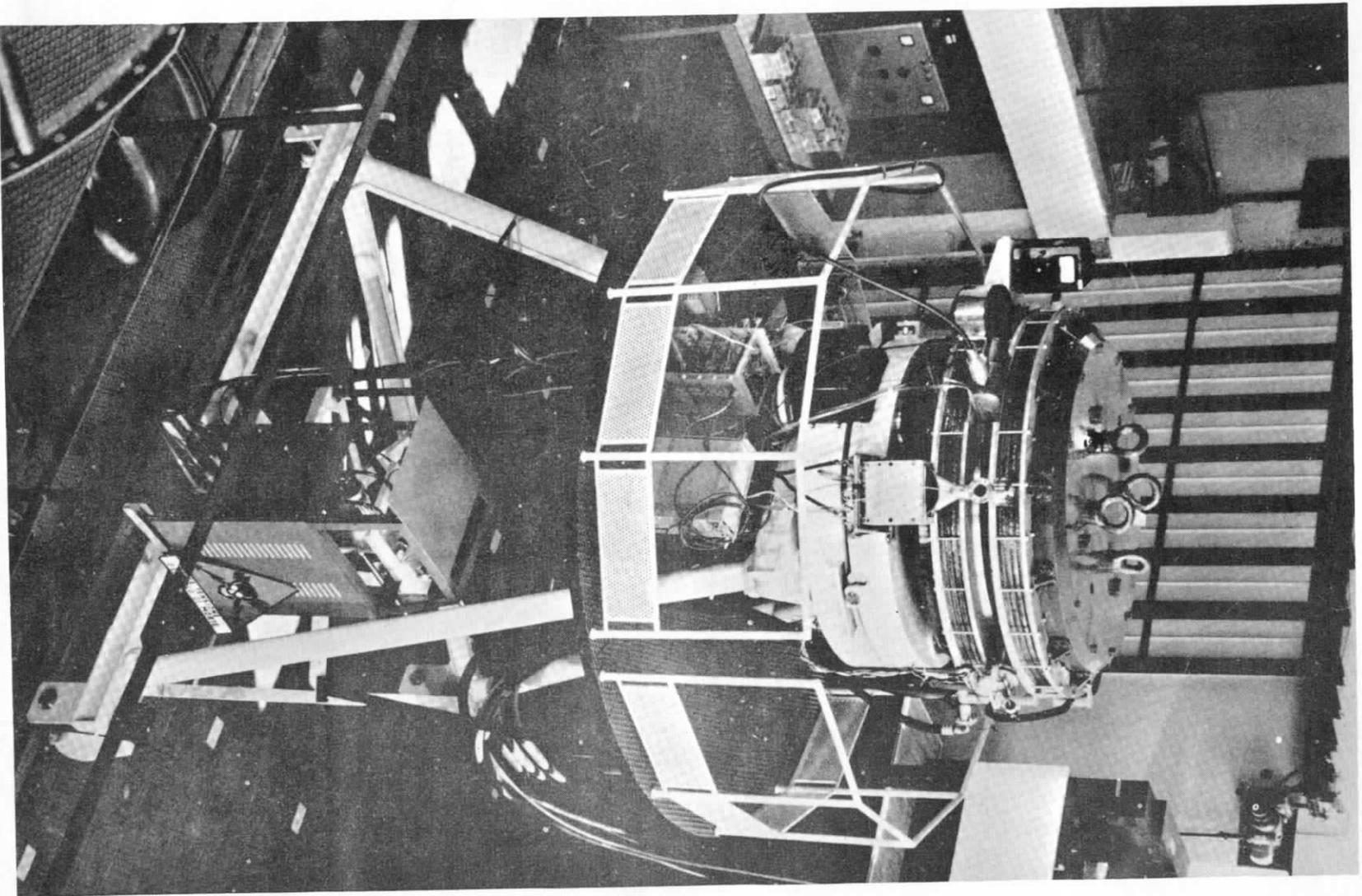
Literatur:

- A.d.A: Berichte der Beschleunigerkonferenz Brookhaven 1961
Stanford: " " "
- V E P - 1 : Berichte der Beschleunigerkonferenz, Dubna 1963
V E P P - 2 : " " " " 1963
A C O : Berichte der Beschleunigerkonferenz, " 1963
" " " Frascati 1965
- Adone : Berichte der Beschleunigerkonferenz Dubna 1963
" " " Frascati 1965
- CEA-Bypass: K.Robinson - G.A.Voss CEA-TM-149 (1965)
M.S.Livingston CEAL - 1028 (1966) (Cambridge)
- V E P P - 3: Berichte der Beschleunigerkonferenzen Dubna 1963
Cambridge 1967
Symposion für Elektron-Positron Speicherringe Saclay 1966
Deutsche Übersetzung : DESY-H 69/19
- DESY: Vorschlag zum Bau eines 3 GeV Elektron-Positron
Doppelspeicherringes für DESY, Hamburg 1967
- S P E A R : SPEAR-Design Report Stanford 1969
- COPPELIA : Projet d'Anneaux de Collisions Electron-Positron
d'Energie Mascinale 3 GeV Charge d'Espace Compensée
Orsay 1969



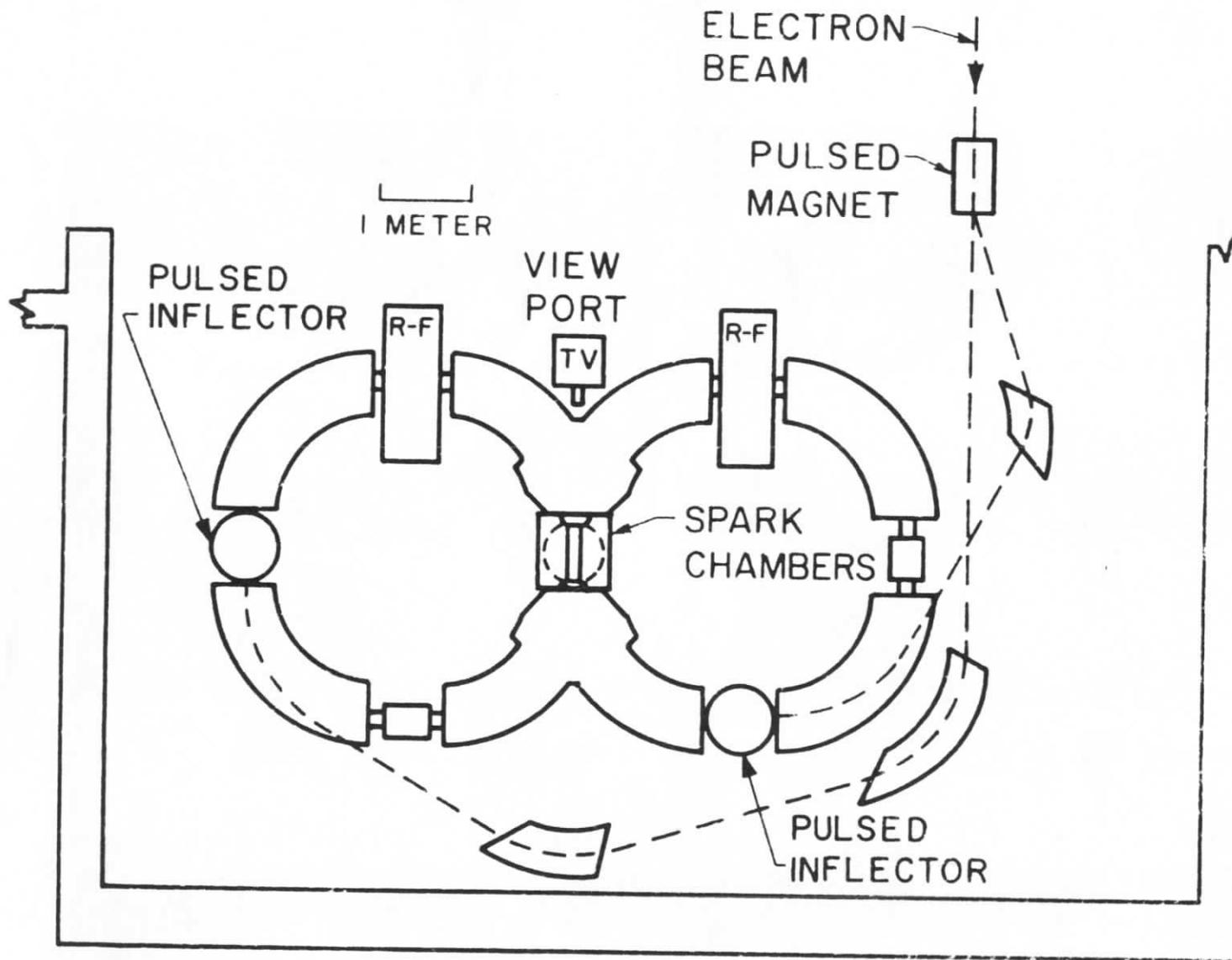
Details of the magnet: (1) magnet yoke; (2) core; (3) coils; (4) pole pieces; (5) doughnut; (6) titanium pump; (7) target port; (8) rf cavity; (9) experimental area; (10) synchrotron-light windows; (11) vacuum gauge.

A.d.A. - FRASCATI

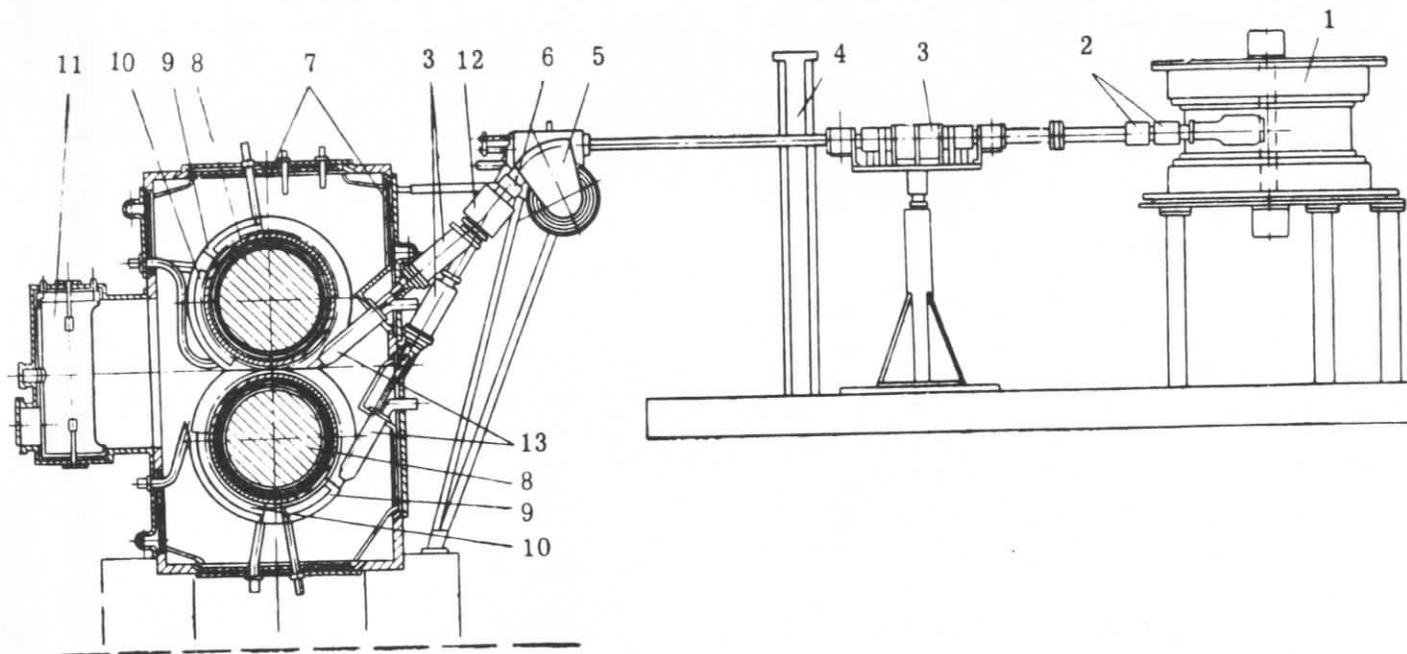


A. d. A.

Abb. 2

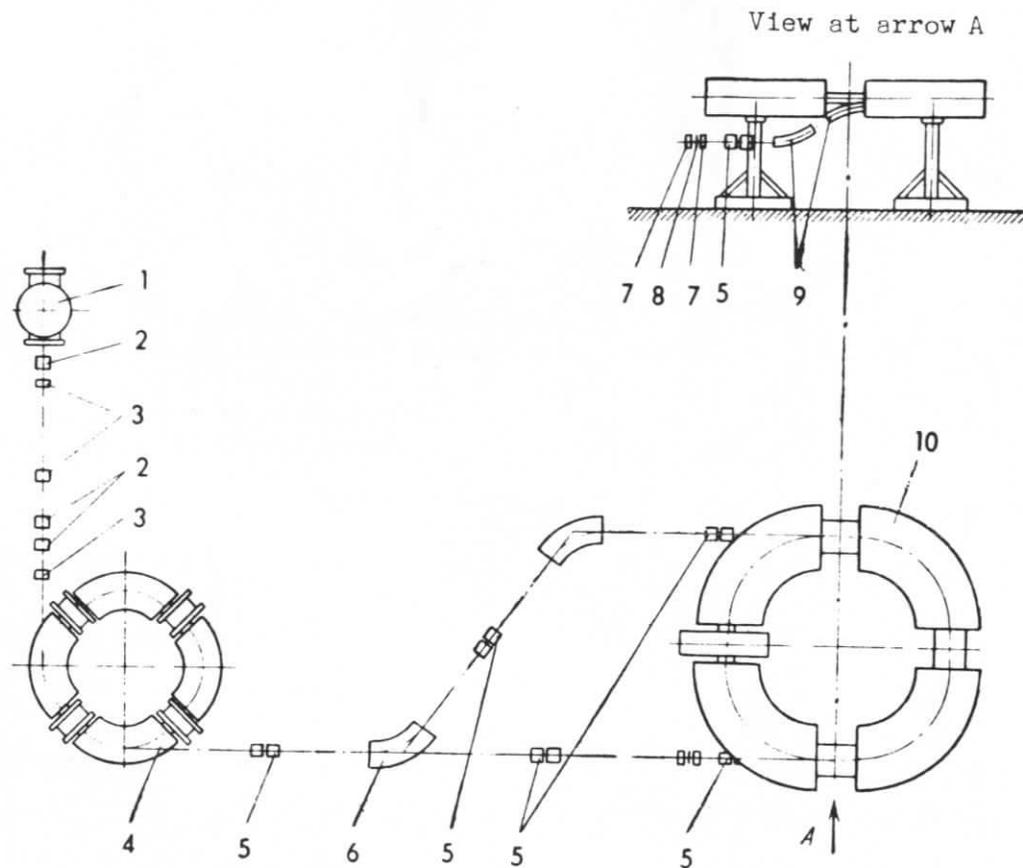


STANFORD 500 MEV ELEKTRON - SPEICHERRINGE



Schematic of arrangement of components in the VEP-1 machine.

- (1) Synchrotron B-2S; (2) correcting magnets; (3) quadrupole lenses;
 (4) radiation and magnetic screen; (5) bending magnet; (6) correcting coil;
 (7) interflange space; (8) storage racetrack magnets; (9) cavity;
 (10) inflector; (11) high-vacuum pump; (12) switching magnet;
 (13) compensating systems.



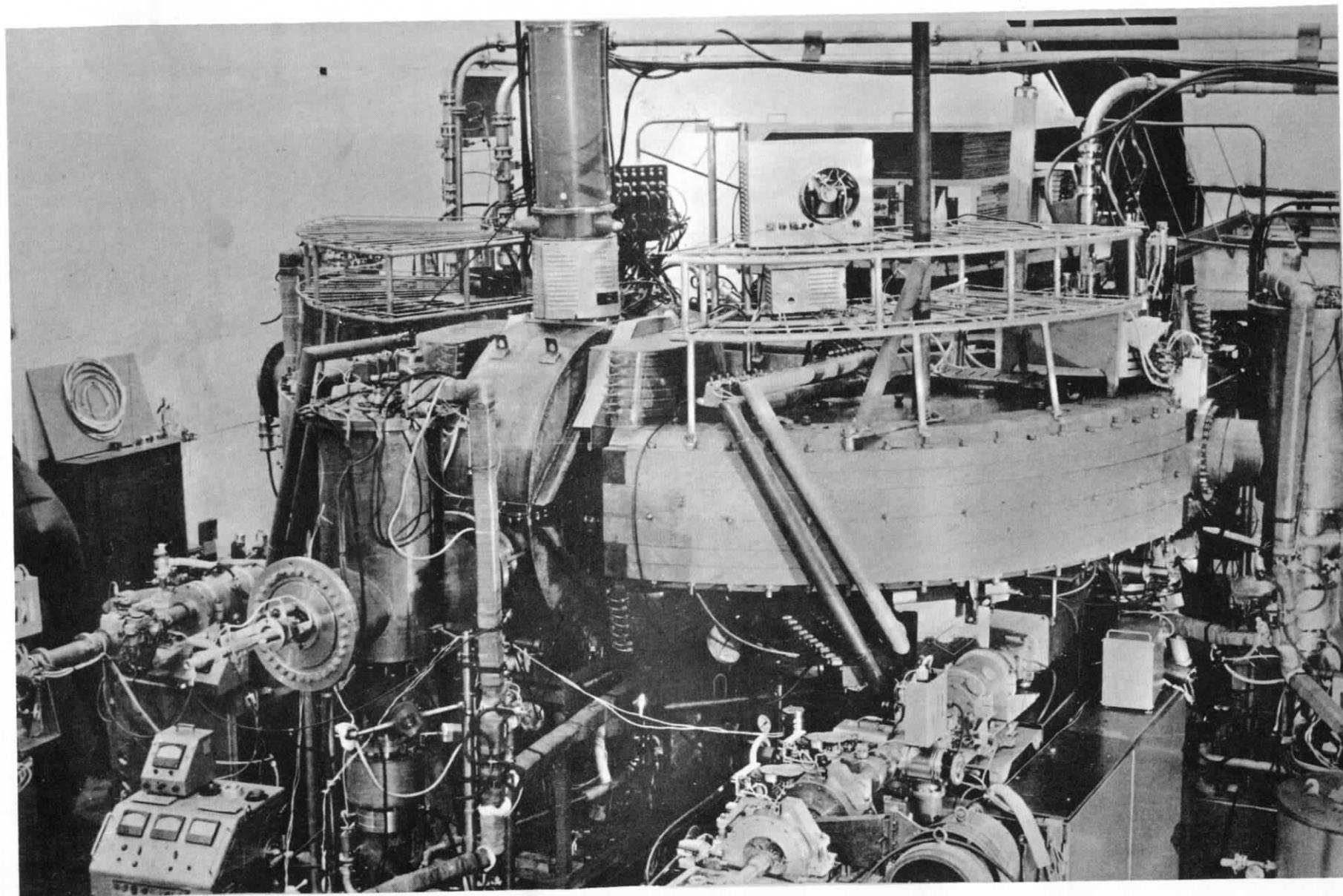
General schematic of the VEPP-2 machine.

- (1) Injection accelerator; (2) correcting lenses; (3) cylindrical lenses;
 (4) synchrotron B-3M; (5) quadrupole lenses; (6) bending magnet;
 (7) "parabolic" lenses; (8) converter; (9) system for parallel displacement of the beam; (10) storage ring.

VEPP - 2

NOWOSIBIRSK

Abb. 5



VEPP - 2

- Strong focusing, separated function machine
 - Number of periods : 4
 - Maximum energy : 500 MeV
 - Injection energy (at present) 150 to 200 MeV
 - Magnetic Radius : 1.11 m
 - Physical Radius : 3.50 m
-
- Length of straight sections : 1.88 m
 - Maximum gradient in the quadrupoles : 15 T/m
 - Frequency of revolution : 13.618 MHz (T=73 ns)
 - R.F. (Peak Voltage : 30 KV
(Harmonic number : 2
 - Damping constants at 150 MeV $\tau_x = \tau_z = 2\tau_s = 0.54$ s.
 - Period of synchrotron oscillations 145 μ s ($\hat{V}_{R.F.} = 3$ KV)
at 150 MeV :
 - Average pressure in the vacuum chamber
(not baked out yet, without beam) : $6 \cdot 10^{-9}$ Torr.
 - Length of orbit completely cleared
from ions : 80%

A C O - O R S A Y

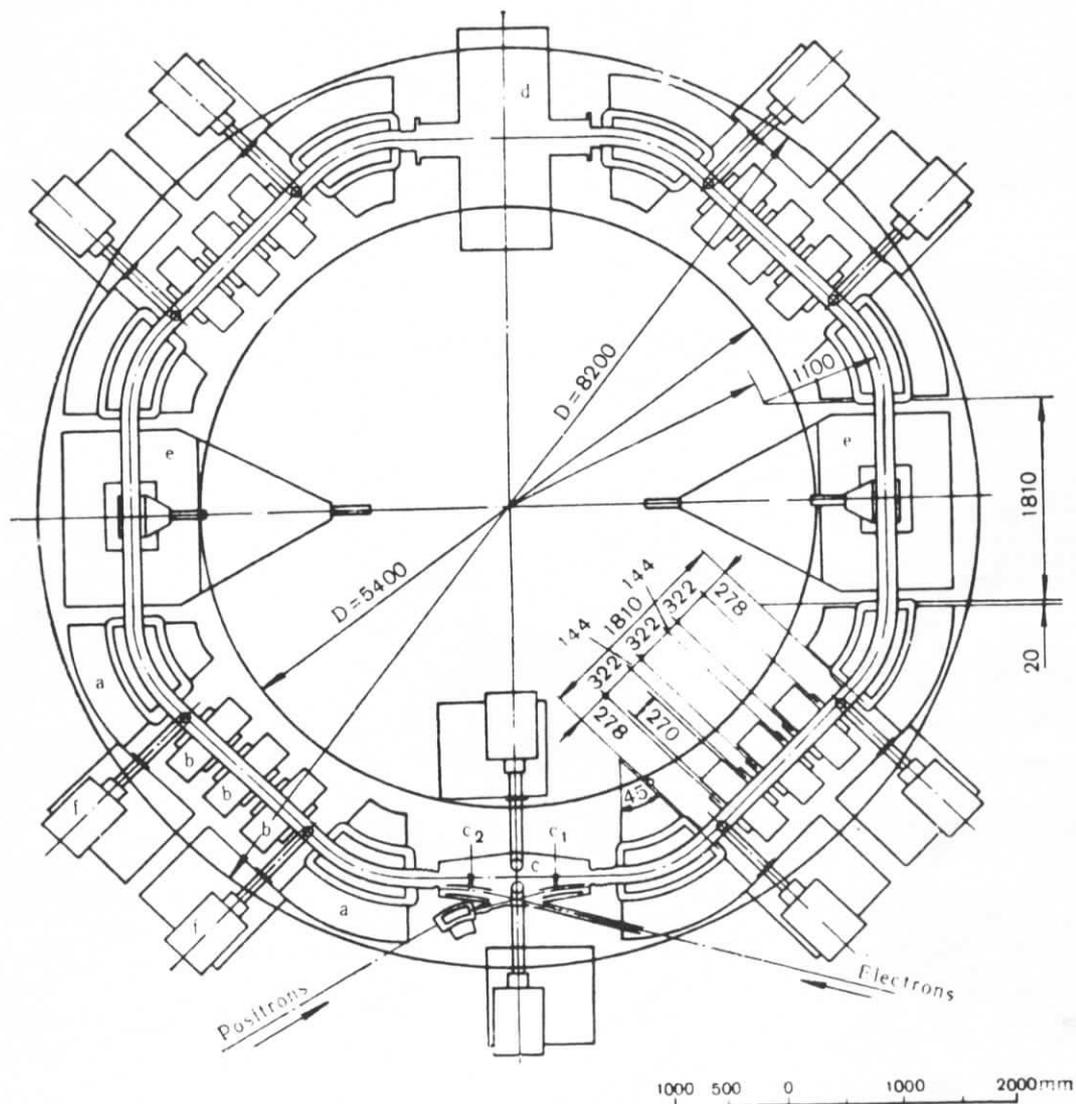


Fig. 1. Horizontal projection of the ring:
a — magnet sector; *b* — quadrupole; *c* — injector; *c*₁ — pulsed inflector (positrons); *c*₂ — pulsed inflector (electrons); *d* — RF cavity; *e* — experimental equipment; *f* — vacuum pumps.

A C O - O R S A Y

Abb. 8

1.5 GeV ELECTRON POSITRON STORAGE RING—ADONE

Design Goals

Particles stored	e^+, e^-
Maximum energy	1.5 GeV
Intensity, per beam	2×10^{11} part.
Storage time	1–1.5 h
Beam crossing regions free for experiments	3 or 4
Interaction rate, per beam crossing region, for an event of total cross sec- tion 10^{-32} cm ²	10 events/h

Magnet

Focusing, type	AG, separ. funct.
Focusing, order	$0/2Q_F Q_D B Q_D Q_F 0/2$
Field index, n, in bending magnets	0.5
Field, gradient in quadrupo- les, at the max energy	~420 Gs/cm
Field, at injection	2.4 kGs
Field, at max energy	10 kGs
Bending radius	5 m
Mean ring radius	16.2 m
Number of periods	12
Betatron wave numbers	3.0–3.4
Closed orbit amplitudes, max for $\Delta p/p = 1\%$	1.89 cm
Momentum compaction	0.96 cm
Damping time constants, at injection	6.2×10^{-2}
for betatron oscillations at max energy	800 ms
Weight: iron	11 ms
copper	322 t
Useful aperture: width	31 t
height	22 cm
	6 cm

Vacuum system

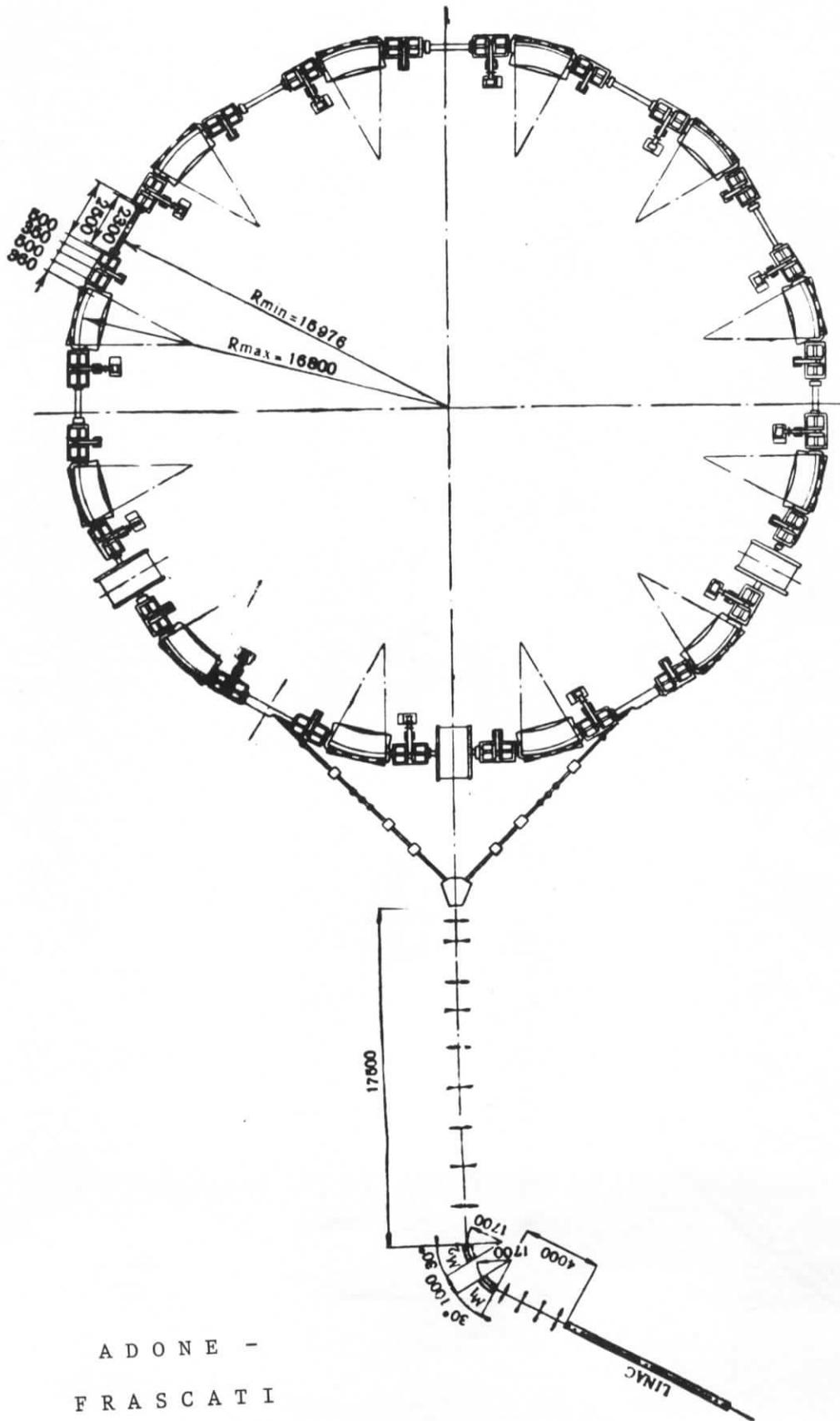
Design pressure	10^{-9} Torr
Pumps, type	getter
Pumps, number and size	24×400 l/s

RF system

Frequency	8.9 MHz
Harmonic number	3
Accelerating cavities	2 or 3
Max. voltage per turn	180 or 250 kV
Input power to RF cavities	100 or 150 kW

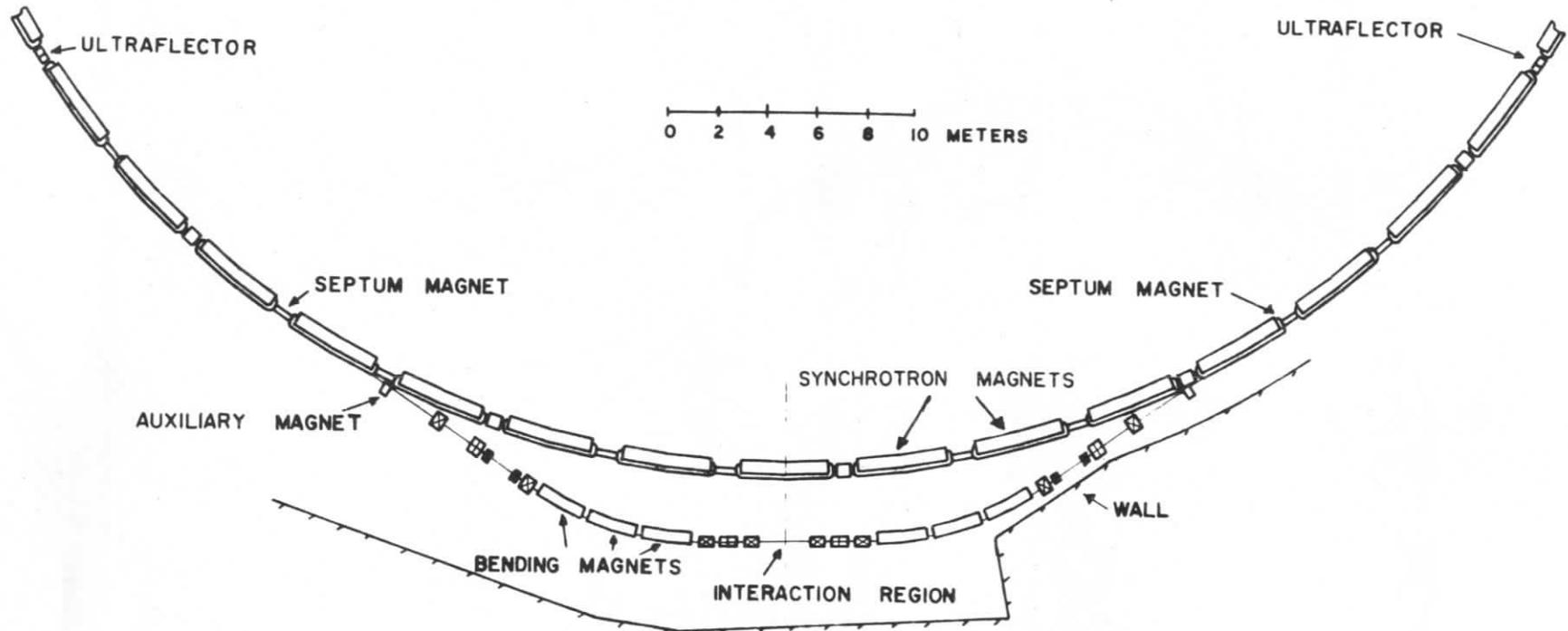
Injector system

Type	S-band linac
Injection energy, e^-	375 MeV
e^+	360 MeV
Injector current within e^- 1% energy bin	25 mA
Injection repetition rate, pulse per second	0.1 mA
Injector type	~0.6 C-loaded delay line



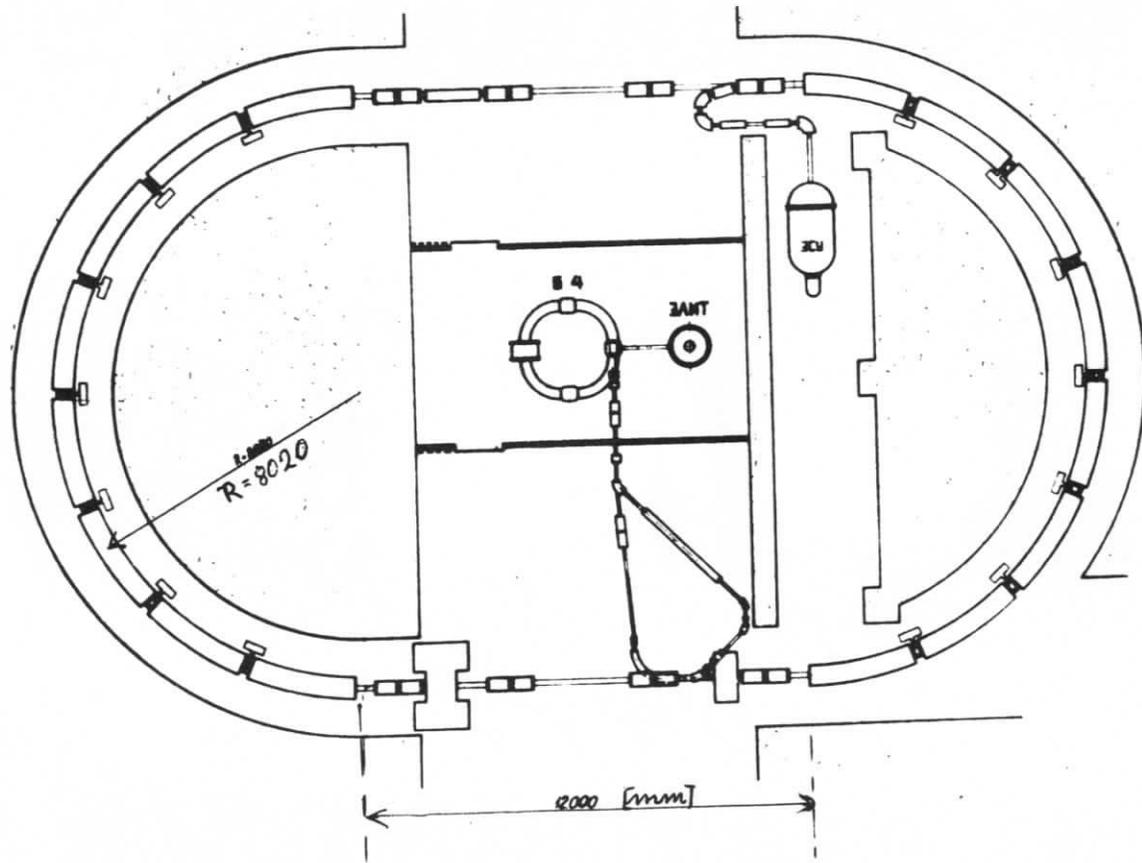
A D O N E -
 F R A S C A T I

BYPASS LAYOUT



- ⊠ HORIZONTAL FOCUSING QUADRUPOLE
- ▣ VERTICAL FOCUSING QUADRUPOLE
- SEXTUPOLE

C E A - C A M B R I D G E



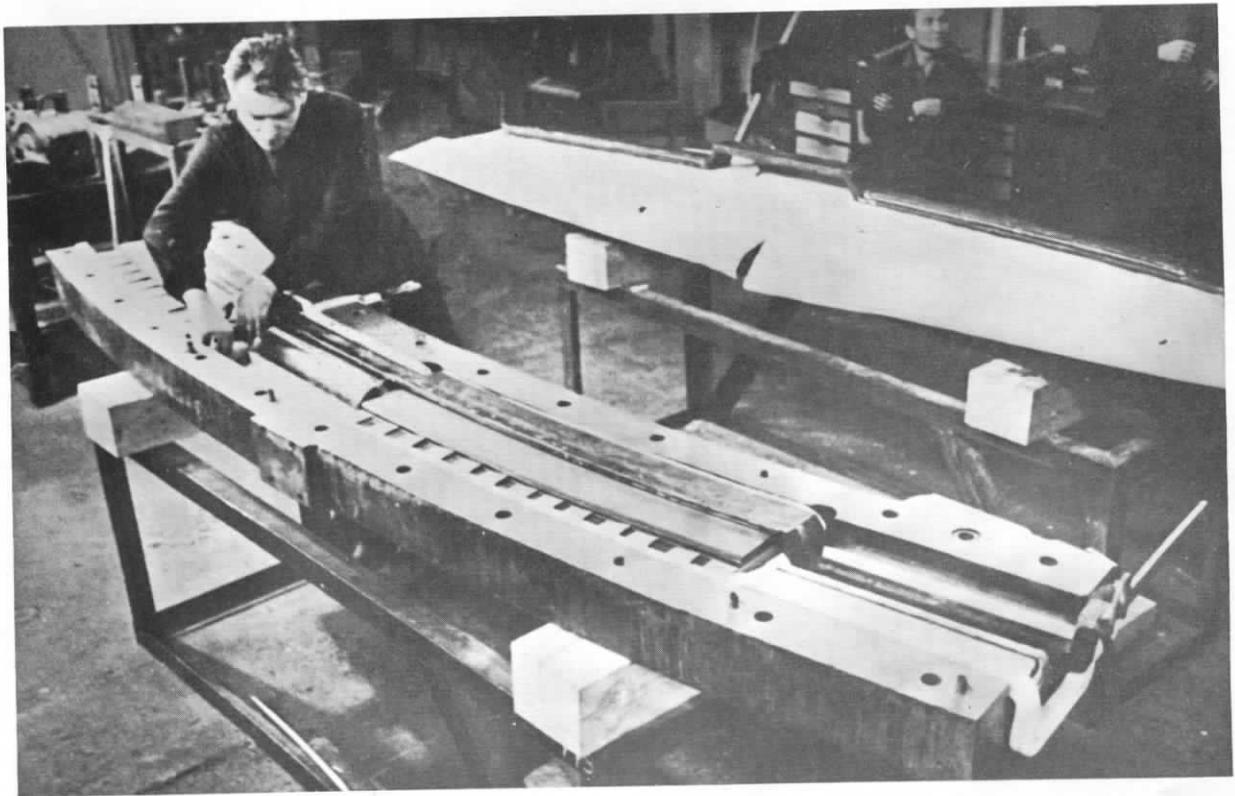
VEPP - 3

NOWOSIBIRSK

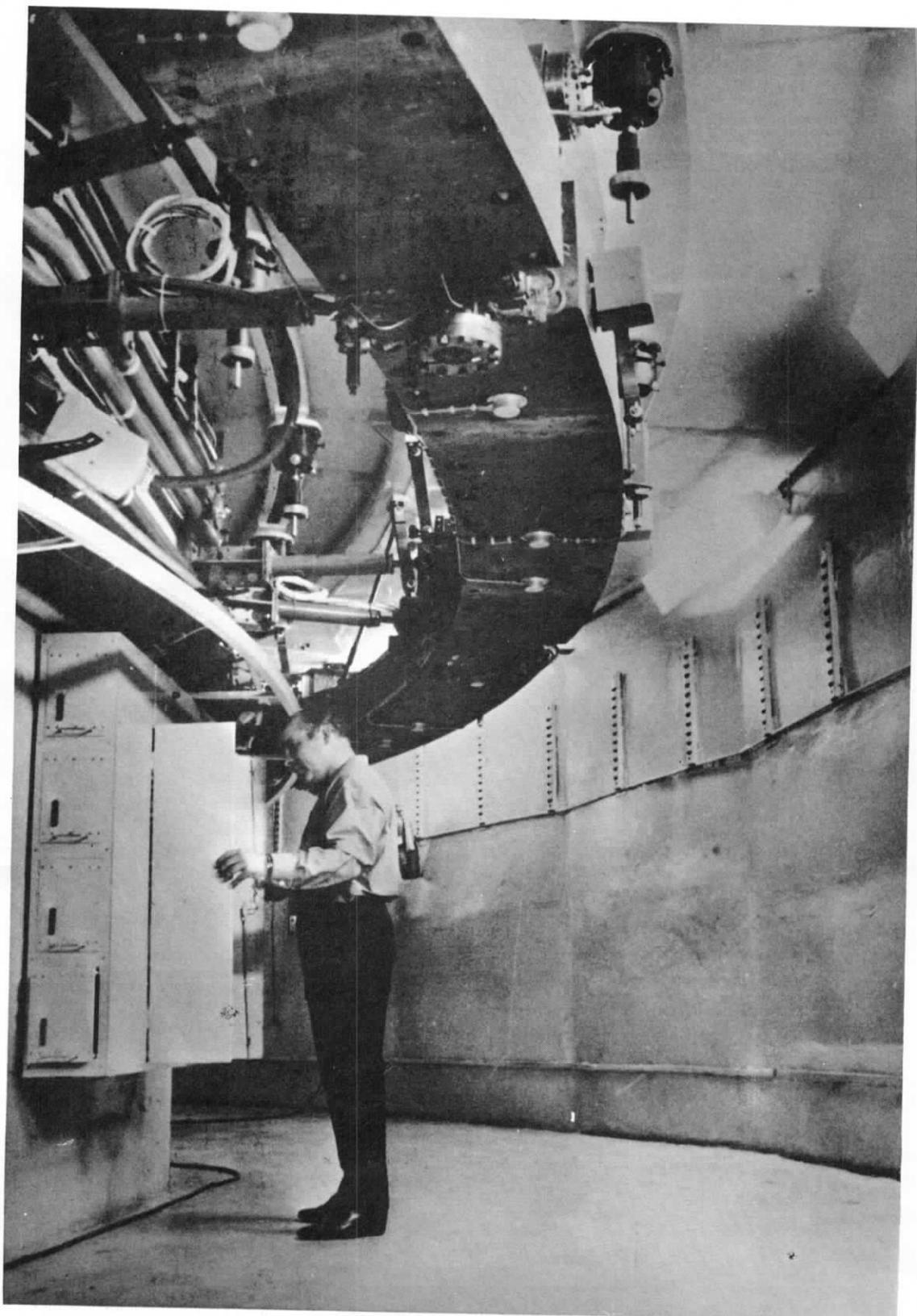
TABELLE DER WICHTIGSTEN PARAMETER FÜR DEN SPEICHERRING

V E P P - 3

Maximalenergie	3,5 GeV
Radius eines Halbringes	802 cm
Länge eines geraden Stückes	1200 cm
Zahl der Betronschwingungen pro Umlauf:	
radial	5,28
vertikal	5,11
Magnetanordnung (FMDMO) ⁸ (I) (FMDMO) ⁸ (I)	
Momentum Compaction Factor	0,065
Struktur einer Magnetperiode :	
Fokussierender Sektor:	
Länge	48 cm
Feld	6,9 kGauss
Abst.bis zur Asymptote	3,5 cm
Ablenksektor:	
Länge	105 cm
Feld	18,9 kGauss
Defokussierender Sektor:	
Länge	52 cm
Feld	11,8 kGauss
Abst.bis zur Asymptote	6,2 cm
Ablenksektor:	
Länge	95 cm
Feld	18,9 kGauss
Feldfreies Stück:	
Länge	15 cm
Außenmaß der Vakuumkammer	8x2,9 cm ²
Nutzbare Apertur	5,5x2,7 cm ²
HF-Leistung : 1. Ausbaustufe	150 kW
2. Ausbaustufe	1 MW
Harmonisenzahl	19
Zahl der Hohlraumresonatoren	1
Energieverlust pro Umlauf	2 MeV
Bunchlänge ungefähr	30 cm
Radiale Strahlausdehnung	0,8 cm
Leistung der Magnetstromversorgung	1,7 MW
Stromstärke der Magnetversorgung	25 kA
Eisengewicht	50 t
Kupfergewicht	4 t
Einschußenergie für Positronen	250 MeV
Einschußenergie für Elektronen	500 MeV

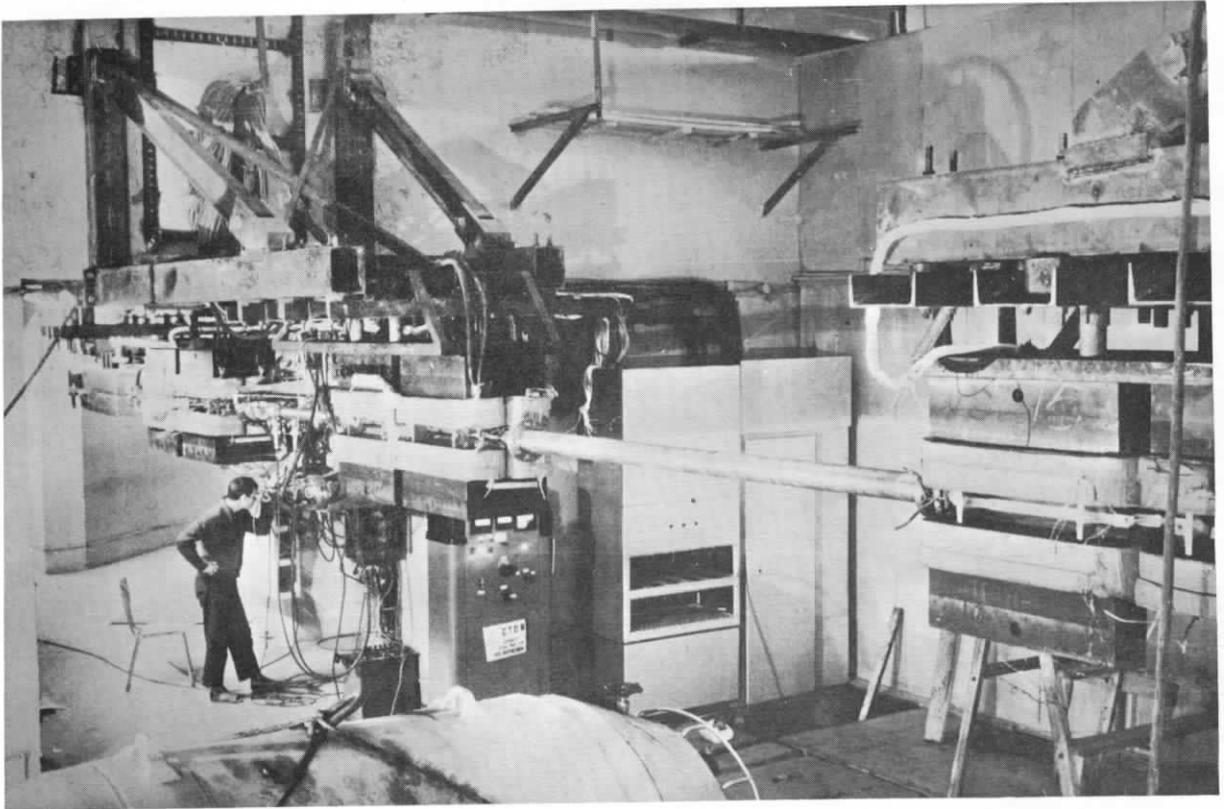


Fertigung des Prototypmagneten für V E P P - 3



VEPP - 3

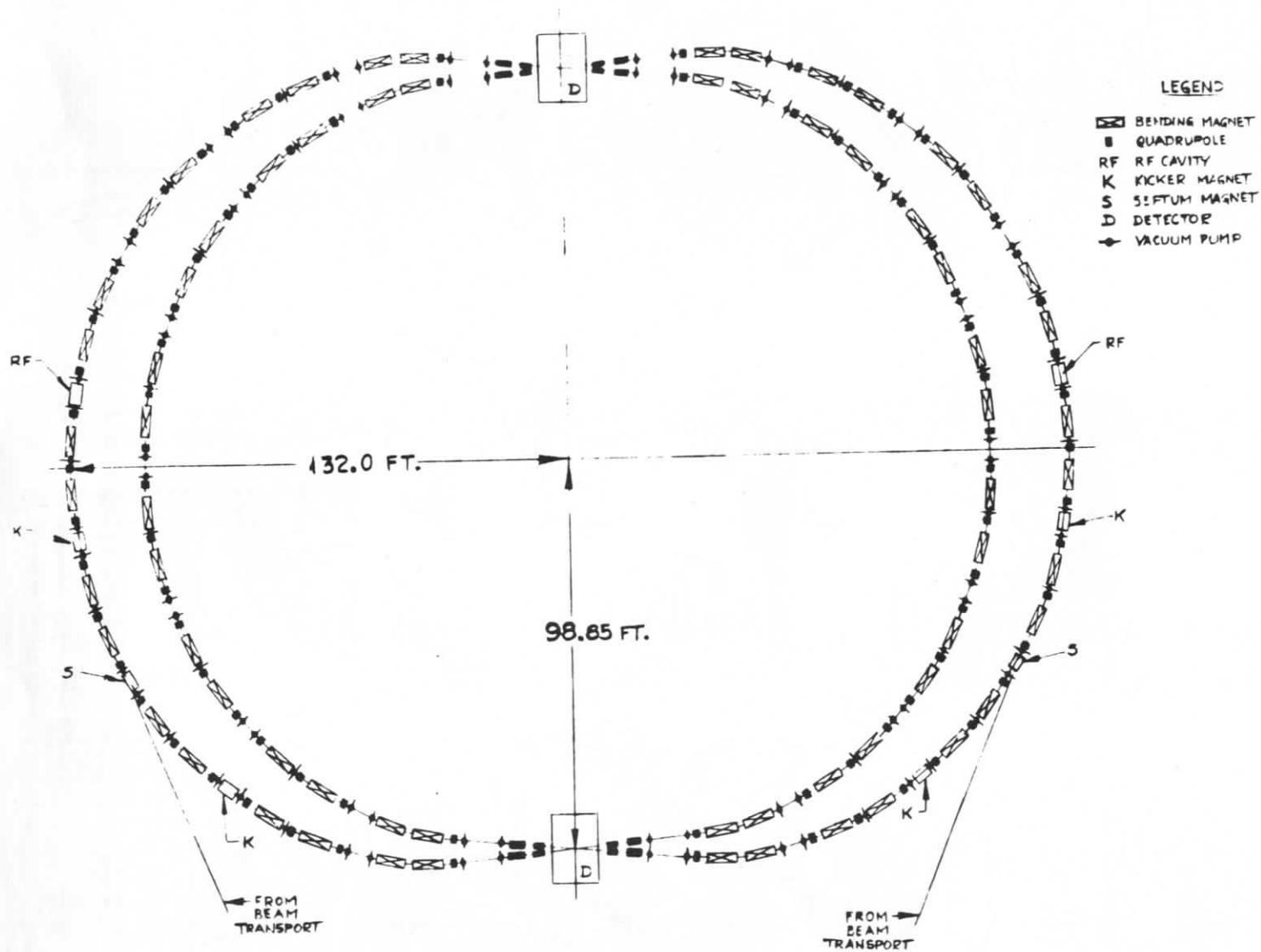
Abb. 15



V E P P - 3

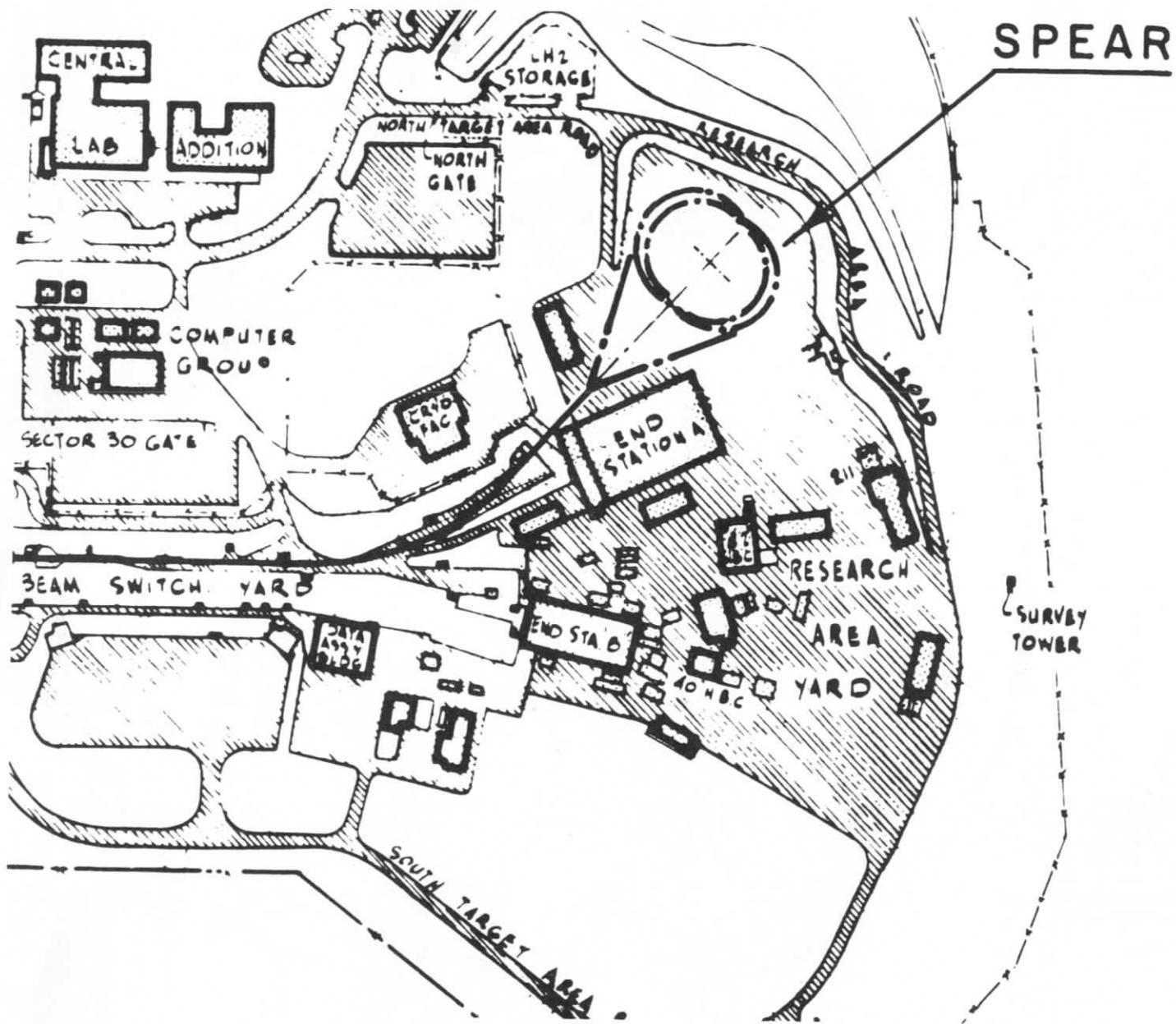
Wechselwirkungszone ohne experimentellen Aufbau

<u>Magnet</u>	
Circumference	219.59 m
Mean radius	34.95 m
Bending radius	12.72 m
Bending magnet field at 2 BeV	5246 gauss
Number of superperiods	1
Q_r	4.5 to 5.5
Q_v	4.5 to 5.5
Momentum compaction	0.0305
Magnet iron weight	600 tons
Magnet aluminum weight	12 tons
Magnet power at 2 BeV	1.25 megawatts
<u>Injection System</u>	
Injection energy	1.5 BeV (max)
Injection rate (positrons)	23 seconds per ampere
Injection repetition rate	20 sec ⁻¹
<u>Rf System</u>	
Orbit frequency	1.37 MHz
Radiofrequency	49.18 MHz
Harmonic order	36
Number of cavities	2 (1 each ring)
Shunt resistance of each cavity	1.0 megohms
Cavity Q	12,000
Maximum rf power into beam	120 kilowatts
Total rf power available	150 kilowatts
Rf accelerating voltage at 2 BeV	180 kilovolts
<u>Vacuum System</u>	
Material	Aluminum, type 6061 (mainly)
Pumping speed (air)	45,000 liters/sec
Bake-out temperature	200° C
<u>Beam Properties at 2 BeV</u>	
Circulating current	0.5 amperes (each beam)
Synchrotron-radiation loss	112 keV
Synchronous phase angle	142°
Quantum fluctuation lifetime	> 10 ⁵ sec
Vertical and horizontal damping time	62 millisecc
Synchronous damping time	31 millisecc
Bunch length ($2\sigma_p$)	34 cm



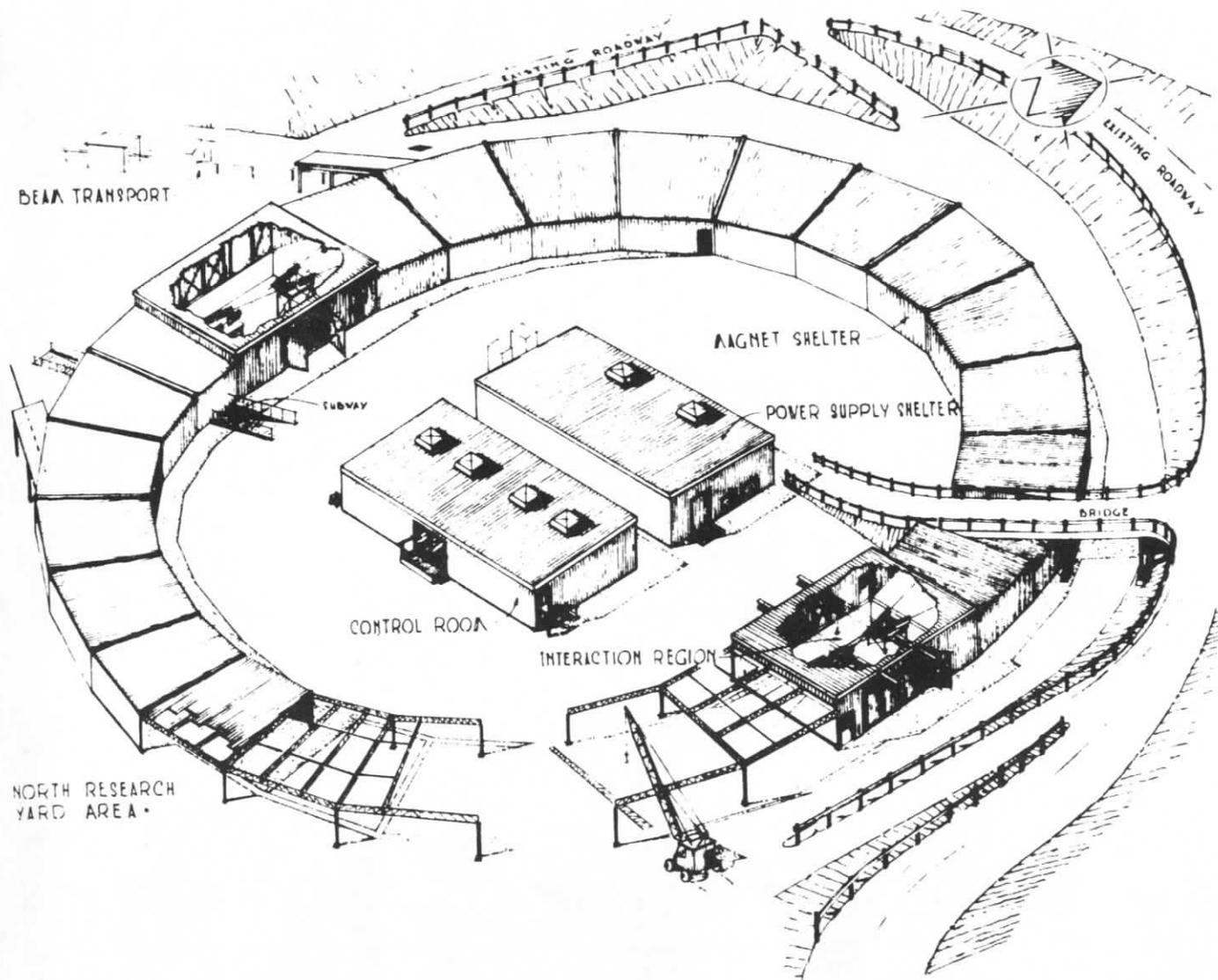
1383A3

General layout of SPEAR.



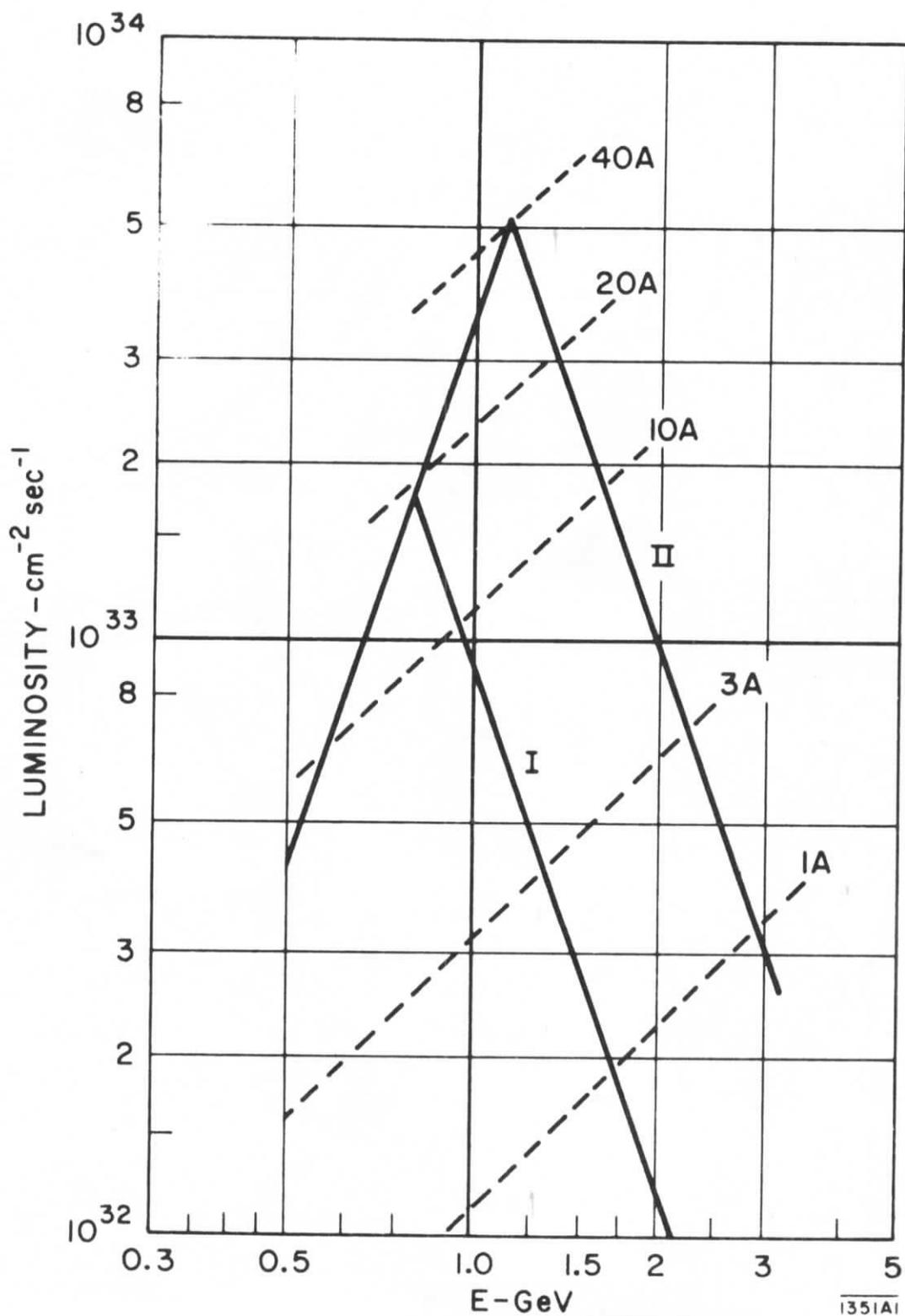
Location of SPEAR in the SLAC research yard.

1390A15



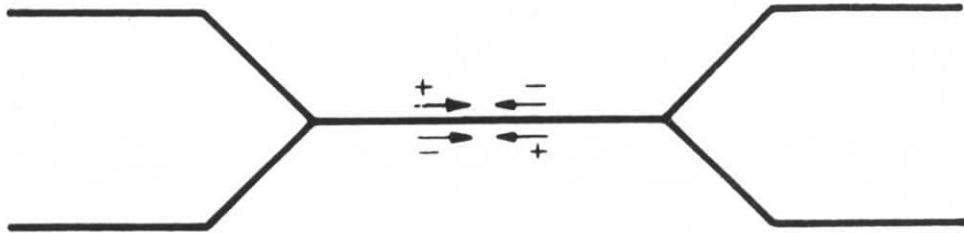
--Artists view of the SPEAR housings.

19001

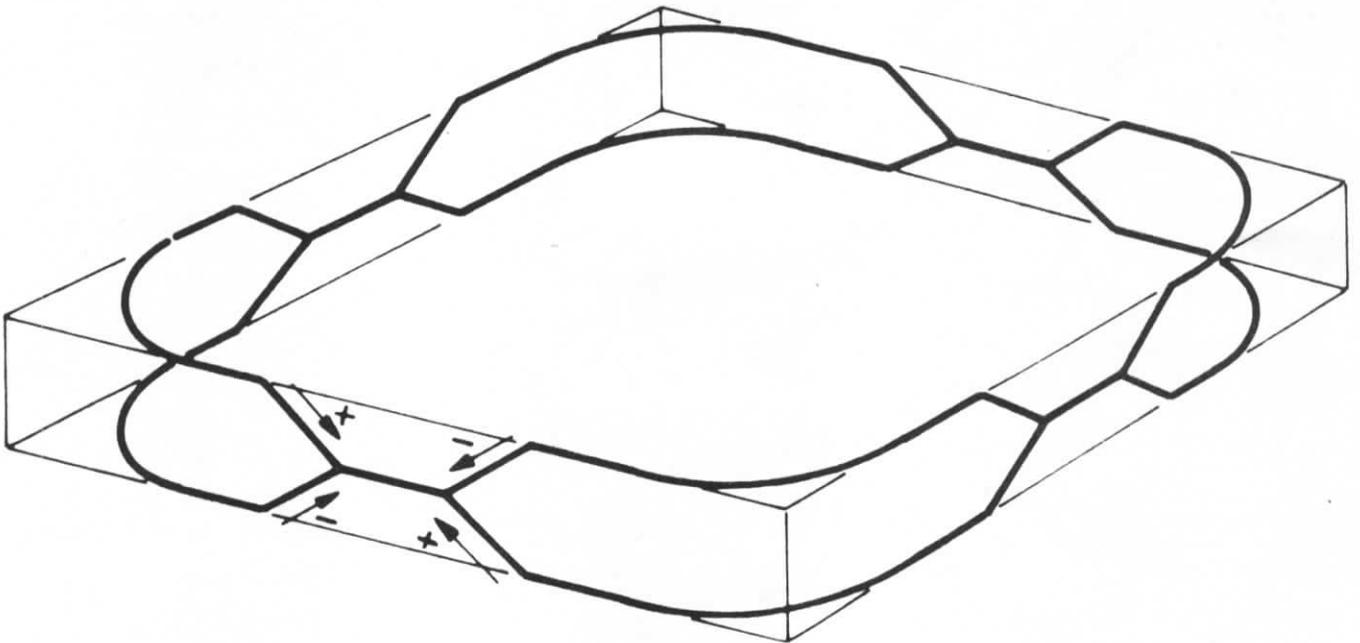


Luminosity as a function of energy.

SPEAR - STANFORD

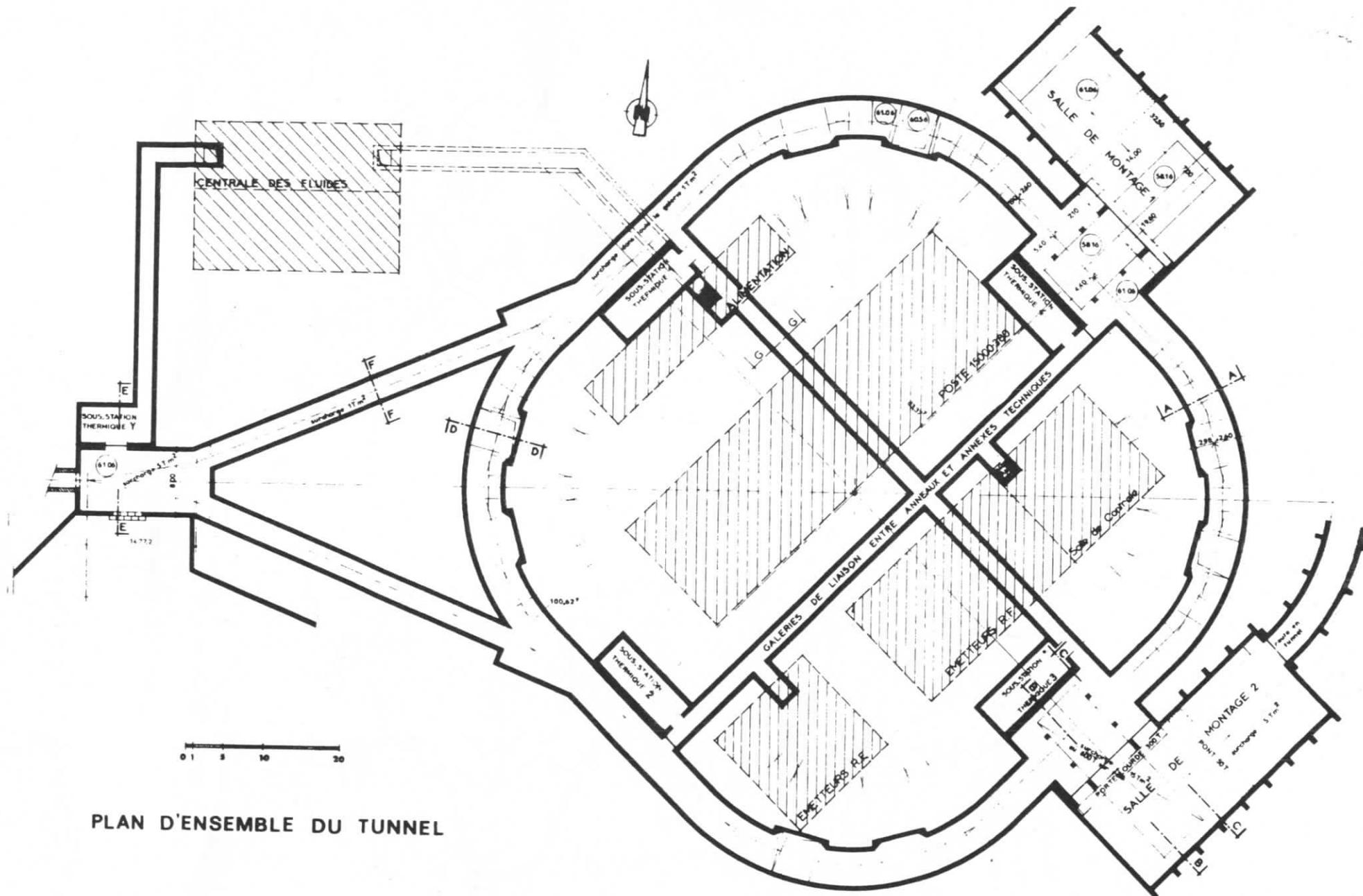


COLLISIONS A 4 FAISCEAUX AVEC
COMPENSATION DE CHARGE D'ESPACE



SCHEMA D'UN SYSTEME DE 2 ANNEAUX SUPERPOSES A
COMPENSATION DE CHARGE D'ESPACE

C O P P E L I A - O R S A Y



PLAN D'ENSEMBLE DU TUNNEL

COPPELIA - ORSAY

C O P P E L I A - O R S A Y

Nombre des anneaux :	2	
Distances des orbites des anneaux dans la partie normale :	1,1	m
Nombre de supermailles par anneau :	4	
Nombre de mailles normales par anneau :	12	
Longueur de l'orbite :	288	m
Fréquence de révolution :	1,04	MHz
Rayon physique :	49	m
Rayon magnétique des aimants (horizontaux et verticaux) :	10,3	m
Angle de déflexion verticale :	5	°
Longueur des sections d'insertion :	34	m
Longueur des sections expérimentales :	6	m
Fonctions β :	β_x	β_z
Valeurs au point d'interaction :	1,26 m	1,32 m
Harmonique des cavités :	20	
Puissance des émetteurs :	2 × 200	kW
Puissance transmise à chaque faisceau :	75	kW
Nombre de cavités par anneau :	1	

C O P P E L I A - O R S A Y

- Pour une puissance radiofréquence de 75 kW par faisceau

Energie :	1,5 GeV	2,5 GeV	3 GeV
Nombre de faisceaux :	4	4	4
Nombre de paquets remplis par faisceau :	4	1	1
Intensité par faisceau :	1,16 A	0,17	0,088
Nombre de particules par paquet :	$1,9 \cdot 10^{12}$	$1,1 \cdot 10^{11}$	$6,7 \cdot 10^{10}$
Luminosité :	$3,4 \cdot 10^{32} \text{cm}^{-2} \text{s}^{-1}$ *	$4,1 \cdot 10^{31}$ **	$6,8 \cdot 10^{30}$ **

Durées de vie :

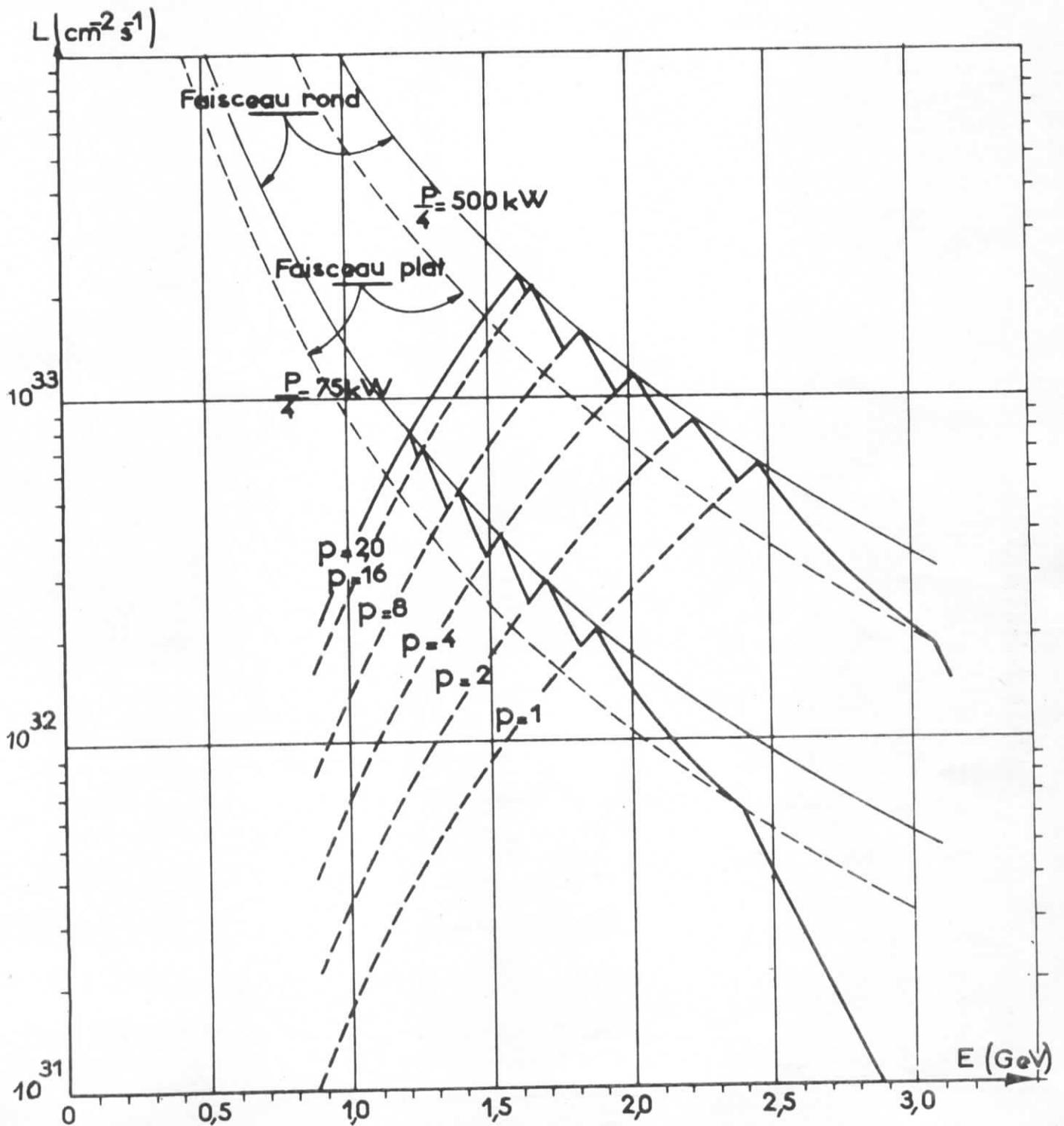
{	- gaz :	38 h	> 150 h
	- faisceau-faisceau :	29 h	27 h
	- Touschek :	58 h	> 100 h

- Pour une puissance radiofréquence de 500 kW par faisceau, les paramètres suivants sont modifiés :

Energie :	1,5 GeV	2,5 GeV	3 GeV
Nombre de paquets remplis par faisceau :	20	1	1
Intensité par faisceau :	5,8 A	1,21	0,58
Nombre de particules par paquet :	$1,9 \cdot 10^{12}$	$7,8 \cdot 10^{12}$	$3,8 \cdot 10^{12}$
Luminosité :	$1,75 \cdot 10^{33} \text{cm}^{-2} \text{s}^{-1}$ *	$5,6 \cdot 10^{32}$ **	$2,2 \cdot 10^{32}$ **

Durées de vie :

- gaz :	26 h	70 h	> 100 h
- faisceau-faisceau :	36 h	19 h	22 h
- Touschek :	> 100 h	> 100 h	> 100 h



COURBES DE LUMINOSITE

C O P P E L I A - O R S A Y

SPEICHERRINGENTWICKLUNG

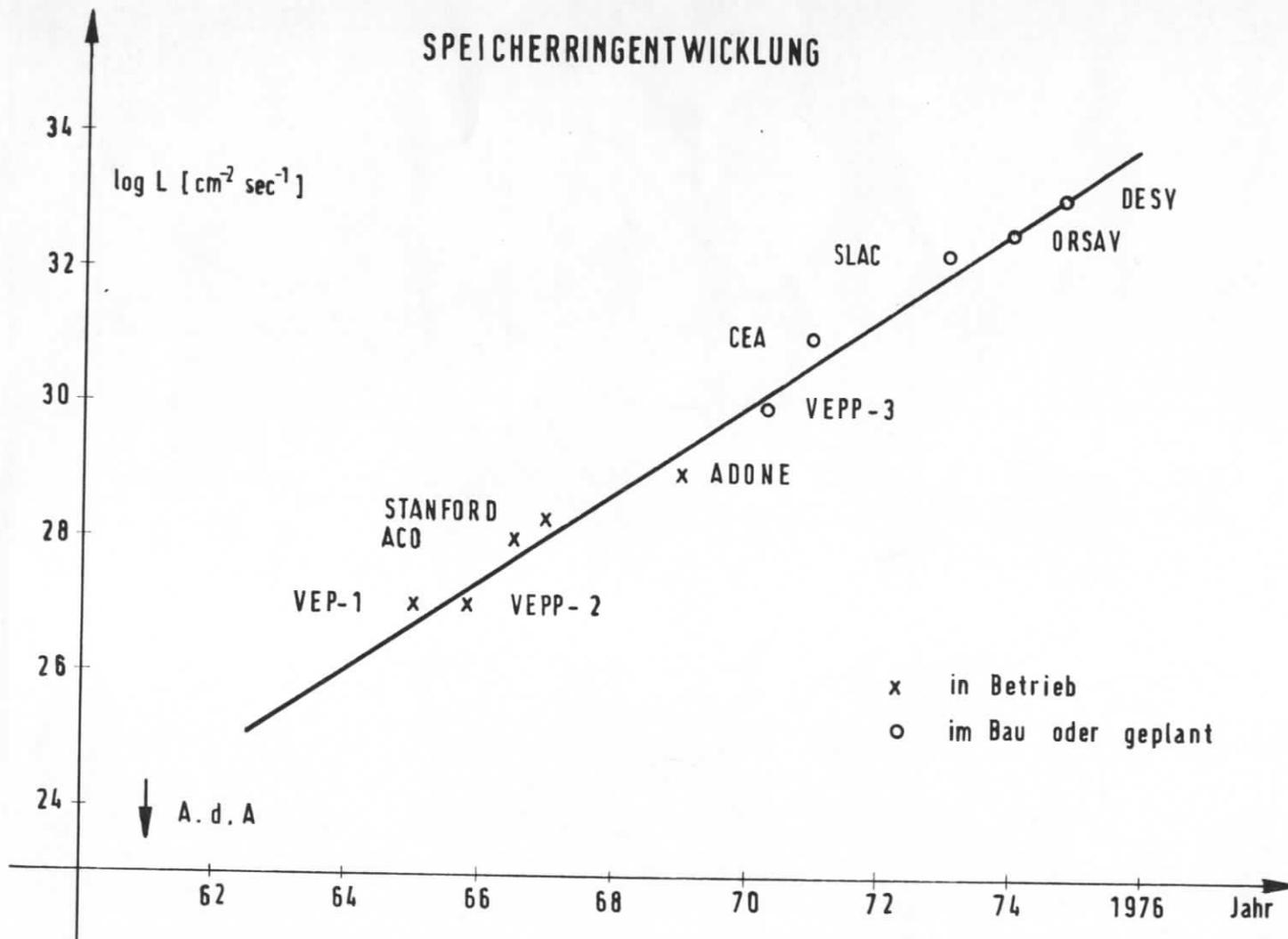


Abb. 27