

Interner Bericht  
DESY-H1/2  
Oktober 1969

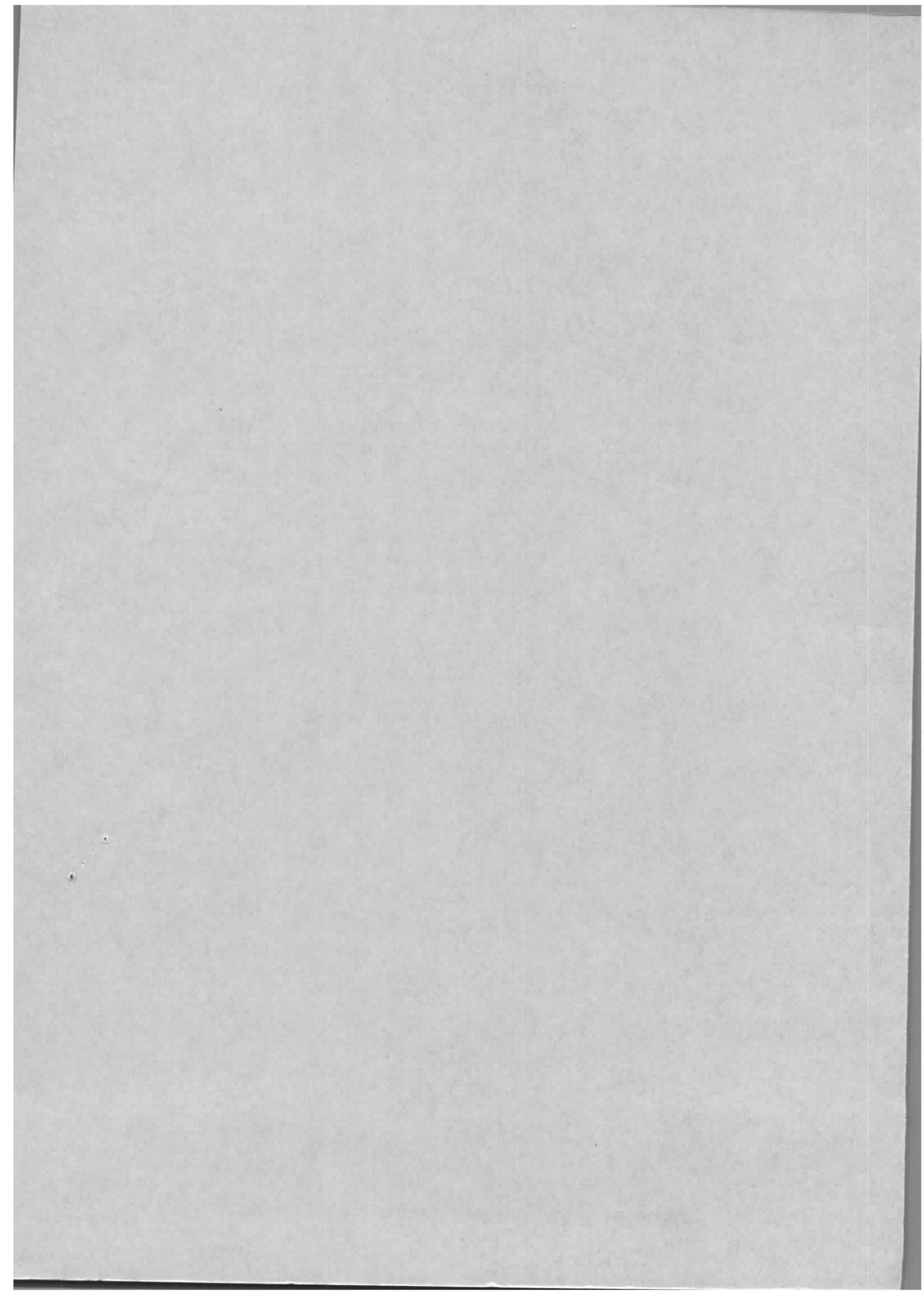
DESY-Bibliothek  
12. NOV. 1969

DIE VERTEILUNG DER SYNCHROTRONSTRAHLUNG

AUF EINEM ABSORBER

von

A. Piwinski



DESY - H1/2

Hamburg, den 2. Oktober 1969

DIE VERTEILUNG DER SYNCHROTRONSTRAHLUNG

AUF EINEM ABSORBER

von

A. Piwinski

## 1. Einleitung

Die Absorption der im Speicherring entstehenden Synchrotronstrahlung stellt ein technisch schwieriges Problem dar. Für beide Strahlen müssen insgesamt 1200 kW Strahlungsleistung auf einer wegen des engen Strahlungskegels sehr kleinen Fläche absorbiert werden. Falls es durch Vermeidung von Koppelungen zwischen den Betatronschwingungen gelingt, eine für die Luminosität günstige Strahlhöhe von etwa  $200 \mu$  einzustellen, wird die maximale Strahlungsdichte auf dem Absorber etwa  $20 \text{ kW/cm}^2$  erreichen. Da die thermischen und mechanischen Belastungen des Absorbermaterials bei diesen hohen Strahlungsdichten sehr groß sind, ist es wünschenswert, die genaue Verteilung der Strahlungsdichte auf dem Absorber zu kennen.

In der vorliegenden Arbeit soll zunächst der Öffnungswinkel der Synchrotronstrahlung berechnet werden, der sich aus der Verteilung der Strahlung um die Geschwindigkeitsrichtung der Elektronen oder Positronen und aus der Verteilung der Geschwindigkeitsrichtungen um die Bahnebene zusammensetzt. Aus dieser Winkelverteilung und aus der vertikalen Verteilung der Teilchen im Bunch folgt dann die Verteilung der Strahlungsdichte auf einem zur Bahnebene senkrechten Absorber.

Falls die Absorberoberfläche nicht senkrecht zur Bahnebene steht oder gekrümmt ist, läßt sich die Strahlungsdichte näherungsweise aus den hier angegebenen Werten und dem Winkel zwischen der Tangentialebene an den Absorber und der Bahnebene bestimmen.

## 2. Berechnung der Winkelverteilung

Die gesamte Winkelverteilung der Synchrotronstrahlung ergibt sich aus der Verteilung der Strahlung um die Geschwindigkeitsrichtung eines einzelnen Teilchens und aus der Verteilung der Geschwindigkeitsrichtungen. Ein Elektron, daß sich in

einem homogenen Magneten bewegt und gleichzeitig eine vertikale Betatronschwingungsamplitude besitzt, beschreibt eine spiralförmige Bahn. Die Frequenz- und Winkelverteilung auf einer spiralförmigen Bahn ist in (1) berechnet worden und kann nach einigen Umformungen durch folgenden Ausdruck beschrieben werden

$$P_{el}(\nu, \psi, \alpha) d\psi = \frac{3}{2} \frac{W_{el, \alpha} c^3 \nu^2 \cos \psi}{\gamma^4 (c - v \sin \psi \cdot \sin \alpha)^3} \left( J_{\nu}^2(a) + \frac{(c \sin \psi - v \sin \alpha)^2}{v^2 \cdot \cos^2 \psi \cdot \cos^2 \alpha} \cdot J_{\nu}^2(a) \right) d\psi$$

mit 
$$a = v \frac{v \cdot \cos \psi \cos \alpha}{c - v \cdot \sin \psi \cdot \sin \alpha}$$

Hierbei bedeuten:

$P_{el}(\nu, \psi, \alpha)$  = Strahlungsdichte eines Elektrons pro Winkel-  
einheit und pro Frequenzeinheit

$\nu$  = Harmonischenzahl der ausgestrahlten Frequenz

$\psi$  = Winkel der Strahlung gegen die Ebene des closed orbit

$\alpha$  = Winkel der Elektronengeschwindigkeit gegen die Ebene  
des closed orbit

$v$  = Elektronengeschwindigkeit

$$\gamma^2 = (1 - v^2/c^2)^{-1}$$

$J_{\nu}(a)$  = Besselfunktion  $\nu$ -ter Ordnung

$W_{el, \alpha}$  = von einem Elektron auf der Spiralbahn abgegebene  
Leistung

$$W_{el, \alpha} = \cos^2 \alpha W_{el, 0} = \cos^2 \alpha \frac{2}{3} r_e c \gamma^3 \frac{E}{R^2}$$

$E$  = Elektronenenergie,  $r_e$  = Elektronenradius

$R$  = Radius der Bahnprojektion in axialer Richtung

Die Summation über alle  $\nu$ , d. h. über alle emittierten Frequenzen, kann genauso durchgeführt werden wie im Falle einer ebenen Bewegung des Elektrons (2) und führt auf den Ausdruck

$$p_{e1}(\psi, \alpha) d\psi = \frac{3}{32} \frac{W_{e1,0} \gamma \cos \alpha \cos \psi}{(1 - \sin \psi \cdot \sin \alpha)^3} \left( \frac{12}{(1+b^2)^{5/2}} - \frac{5}{(1+b^2)^{7/2}} \right) d\psi$$

mit 
$$b = \gamma \cos \alpha \frac{\sin \psi - \sin \alpha}{1 - \sin \psi \sin \alpha}$$

In dieser Formel sind einige Glieder vernachlässigt worden, was bei hoher Elektronenenergie und kleinem Winkel  $\alpha$  zulässig ist. Die Bedingung hierfür lautet

$$\gamma \cdot \cos \alpha \gg 1$$

Die Formel zeigt, daß das Strahlungsmaximum genau wie bei der ebenen Kreisbewegung in die Richtung der Teilchengeschwindigkeit fällt und um diese scharf gebündelt ist.

Der Winkel  $\alpha$  hat, wie die spätere Rechnung zeigen wird, die Größenordnung  $\alpha \approx \sigma_z / \beta \lesssim 10^{-3}$ . Daraus ergibt sich, daß die Synchrotronstrahlung in guter Näherung, d. h. bei Vernachlässigung der Glieder  $\psi^2$ ,  $\alpha^2$  und  $\psi \cdot \alpha$  gegen 1, genauso symmetrisch um die Richtung der Elektronengeschwindigkeit verteilt ist wie bei der ebenen Bewegung und dadurch um den Winkel  $\alpha$  aus dem closed orbit herausgedreht ist. Die Verteilung besitzt dann mit dieser Vereinfachung die Form:

$$p_{e1}(\psi, \alpha) = p_{e1}(\psi - \alpha) = \frac{3}{32} W_{e1,0} \gamma \left( \frac{12}{(1 + \gamma^2 (\psi - \alpha)^2)^{5/2}} - \frac{5}{(1 + \gamma^2 (\psi - \alpha)^2)^{7/2}} \right)$$

Die Verteilung der Auslenkung  $z$  und der Steigung  $z' = \tan \alpha$  der Teilchen ist gegeben durch (Anhang I):

$$h(z, z') dz dz' = \frac{\beta N}{2\pi\sigma^2} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} (z^2 + (z'\beta - z\beta'/2)^2) \right\} dz dz'$$

N ist die Zahl der Teilchen im Bunch,  $\beta$  die Amplitudenfunktion für die z-Richtung und  $\sigma$  die Standardabweichung der Verteilung oder auch kurz die halbe Strahlhöhe.

Die Integration über z liefert die Verteilung für z':

$$h_1(z') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \frac{\beta}{\sqrt{1+\beta'^2/4}} \exp \left\{ -\frac{\beta^2 z'^2}{2\sigma^2(1+\beta'^2/4)} \right\}$$

Die Ableitung  $\beta'$  verschwindet auf dem größten Teil der Bahn durch einen Magneten und nimmt nur an den Magnetenden von Null verschiedene Werte an, die jedoch kleiner als  $10^{-2}$  sind, so daß  $\beta'^2/4$  gegen 1 vernachlässigt werden kann.

Da  $\beta/\sigma$  groß gegen 1 ist, liefern nur kleine Werte für z' einen wesentlichen Beitrag zur Verteilung, so daß die Näherung

$$z' = \tan\alpha \approx \alpha$$

benutzt werden kann. Die Verteilung der Teilchen in z'-Richtung hat dann die Form

$$h_1(\alpha) d\alpha = \frac{\beta}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left\{ -\frac{\beta^2 \alpha^2}{2\sigma^2} \right\} d\alpha$$

Die gesamte Strahlungsverteilung ist das Integral

$$\begin{aligned} p(\psi) &= \int_{-\infty}^{\infty} p_{e1}(\psi-\alpha) h_1(\alpha) d\alpha \\ &= \frac{3W\beta}{32\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left( -\frac{\beta^2(\psi-\alpha)^2}{2\sigma^2\gamma^2} \right) (12(1+\alpha^2)^{-5/2} - 5(1+\alpha^2)^{-7/2}) d\alpha \end{aligned}$$

Hierbei ist  $W = N W_{e1,0}$  die gesamte mittlere Strahlungsleistung eines Strahles.

Zunächst läßt sich der Integrand in eine Taylor-Reihe nach Potenzen von  $\psi$  entwickeln

$$p(\psi) = \frac{3W\beta}{32\sqrt{2\pi}\sigma} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\psi\gamma)^{2n}}{(2n)!} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{d^{2n}}{d\alpha^{2n}} \exp\left(-\frac{\beta^2\alpha^2}{2\sigma^2\gamma^2}\right) \right) \cdot \\ \cdot \left( 12(1+\alpha^2)^{-5/2} - 5(1+\alpha^2)^{-7/2} \right) d\alpha$$

Im Anhang II wird gezeigt, daß das Integral auf konfluente hypergeometrische Funktionen führt, die hier durch  $U(a,b,x)$  bezeichnet werden sollen.

$$p(\psi) = \frac{W\gamma\sqrt{A}}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})\Gamma(n+\frac{5}{2})}{(2n)!} \left( -\frac{2\beta^2\psi^2}{\sigma^2} \right)^n \cdot \\ \cdot \left( 6U(n+\frac{1}{2}, -1, A) - (n+\frac{5}{2}) \cdot U(n+\frac{1}{2}, -2, A) \right)$$

mit  $A = \frac{\beta^2}{2\sigma^2\gamma^2}$

Für die Berechnung der hypergeometrischen Funktion mit Hilfe einer Reihendarstellung ist es notwendig, daß der zweite Parameter positiv ganzzahlig ist. Das erreicht man mit der Umformung (3)

$$U(n+\frac{1}{2}, 1-k, A) = A^k U(n+k+\frac{1}{2}, 1+k, A)$$

Weiter ist es zweckmäßig, daß die hypergeometrische Funktion nur einmal in jedem Glied der Reihenentwicklung für  $\psi$  auftritt. Das läßt sich mit Hilfe des Additionstheorems (3)

$$AU(n+\frac{7}{2}, 4, A) = -(n+\frac{1}{2})U(n+\frac{7}{2}, 3, A) + U(n+\frac{5}{2}, 3, A)$$

und einer anschließenden Umordnung der Reihenglieder erreichen. Man erhält schließlich, wenn man noch das Additionstheorem  $(2n)! \cdot \sqrt{\pi} = 4^n n! \Gamma(n+\frac{1}{2})$  benutzt, für die Winkelverteilung der Synchrotronstrahlung den Ausdruck:

$$p(\psi) = \frac{W\gamma A^{5/2}}{4\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( -\frac{\beta^2 \gamma^2}{2\sigma^2} \right)^n \left( \frac{7}{2} - n - n(2n-1) \frac{\sigma^2}{\beta^2 \psi^2} \right) \Gamma\left(n + \frac{5}{2}\right) \cdot$$

$$\cdot U\left(n + \frac{5}{2}, 3, A\right)$$

Die konfluente hypergeometrische Funktion läßt sich mit Hilfe folgender Reihendarstellung berechnen (3).

$$\Gamma\left(n + \frac{5}{2}\right) U\left(n + \frac{5}{2}, 3, A\right) = \frac{1}{A^2} - \frac{(n+1)}{2} \frac{1}{A} - \frac{1}{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(n+k + \frac{5}{2}\right) A^k}{k!(k+2)!}$$

$$\left( \ln A + \psi\left(n+k + \frac{5}{2}\right) - \psi(k+3) - \psi(k+1) \right)$$

$\psi(x)$  ist die logarithmische Ableitung der Gammafunktion, die mit Hilfe der Funktionalgleichung

$$\psi(x) = \psi(x-1) + \frac{1}{x-1}$$

und der Anfangswerte

$$\psi(1) = -C = -0.57721567$$

$$\psi(2) = -C - \ln 4 = -1,9635100$$

berechnet werden kann.

Die angegebene Reihendarstellung für die Winkelverteilung wird unbrauchbar, wenn  $\frac{\beta}{\sigma} \gg \gamma$  gilt, d. h. wenn die Strahldivergenz klein ist gegen die natürliche Divergenz der Synchrotronstrahlung. Die Reihe konvergiert dann sehr langsam und die auftretenden Summanden werden zu groß. In diesem Fall ist es günstiger, eine asymptotische Näherung für die Integraldarstellung für  $p(\psi)$  zu wählen.

$$p(\psi) = \frac{3W\gamma\sqrt{A}}{32\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-A\alpha^2} \left\{ 12(1+(\alpha+\psi\gamma)^2)^{-5/2} - 5(1+(\alpha+\psi\gamma)^2)^{-7/2} \right\} d\alpha$$

$$\begin{aligned} &\approx \frac{3W\gamma\sqrt{A}}{32\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-A\alpha^2} \left\{ 12f^{-5} - 5f^{-7} + 5\alpha^2(36f^{-7} - 70f^{-5} + \frac{36}{2}f^{-11}) \right\} d\alpha \\ &= \frac{3W\gamma}{32} \left\{ 12f^{-5} - 5f^{-7} + \frac{5}{2A}(36f^{-7} - 70f^{-9} + \frac{63}{2}f^{-11}) \right\} \end{aligned}$$

mit  $f = \sqrt{1 + \gamma^2 \psi^2}$

Diagramm 1. zeigt die Winkelverteilung der Synchrotronstrahlung in einer normierten Darstellung. Man sieht, daß der Einfluß der Strahldivergenz dann wirksam wird, wenn  $\frac{\beta}{\sigma}$  in die Größenordnung von  $\gamma$  kommt.

Für die maximale Strahlungsdichte, d. h. für  $\psi = 0$ , kann das Integral gelöst werden, und man erhält

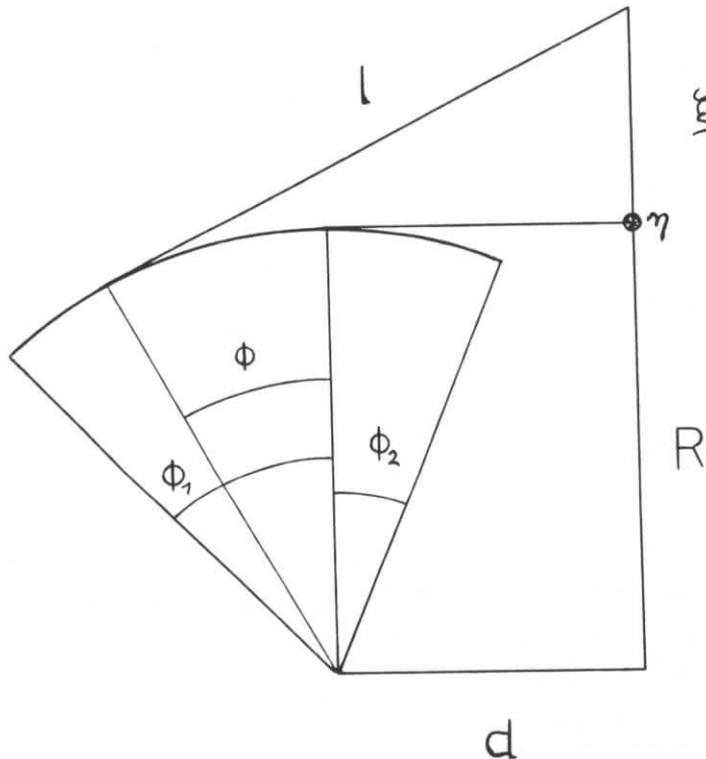
$$\begin{aligned} p(0) &= \frac{3W\gamma\beta}{32\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\beta^2\lambda^2}{2\sigma^2}\right) (12(1+\gamma^2\lambda^2)^{-5/2} - 5(1+\gamma^2\lambda^2)^{-7/2}) d\lambda \\ &= \frac{3W\gamma\beta}{32\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{16}{\gamma^5} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \exp\left(-\frac{\beta^2\lambda^2}{2\sigma^2}\right) \frac{d\lambda}{\sqrt{s+\lambda^2}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{8}{3\gamma^7} \frac{\partial^3}{\partial s^3} \exp\left(-\frac{\beta^2\lambda^2}{2\sigma^2}\right) \frac{d\lambda}{\sqrt{s+\lambda^2}} \right) \Big|_{s=1/\gamma^2} \\ &= \frac{3W\beta}{4\sqrt{2\pi}\sigma\gamma^5} \left( 2 \frac{\partial^2}{\partial s^2} \exp\left(\frac{s\beta^2}{4\sigma^2}\right) K_0\left(\frac{s\beta^2}{4\sigma^2}\right) + \frac{1}{3\gamma^2} \frac{\partial^3}{\partial s^3} \exp\left(\frac{s\beta^2}{4\sigma^2}\right) K_0\left(\frac{s\beta^2}{4\sigma^2}\right) \right) \Big|_{s=1/\gamma^2} \\ &= \frac{W\gamma}{16\sqrt{\pi}} A^{5/2} \left( (2A+11) K_0\left(\frac{A}{2}\right) + \left(\frac{8}{A}-2A-9\right) K_1\left(\frac{A}{2}\right) \right) e^{\frac{A}{2}} \end{aligned}$$

Im Diagramm 2 ist die maximale Strahlungsdichte in Abhängigkeit von der Energie für verschiedene Parameter  $\sigma/\beta$  aufgetragen worden.

### 3. Berechnung der Leistungsdichte auf dem Absorber

Es wird angenommen, daß die Absorberoberfläche eben ist und senkrecht auf der Bahnebene im Magneten steht. Falls der Absorber in Rippen aufgeteilt ist, erhält man die gesuchte Leistungsdichte auf folgendem Wege. Man legt durch den Punkt, in dem man die Leistungsdichte bestimmen möchte, die Ebene, die senkrecht auf der Bahnebene steht und den kleinsten Winkel  $\delta_{\min}$  mit der Tangentialebene an den Absorber bildet. In dieser Ebene berechnet man die Strahlungsdichte nach der unten angegebenen Methode und multipliziert den gefundenen Wert mit  $\cos \delta_{\min}$ .

Auf dem ebenen Absorber befindet sich ein rechtwinkliges Koordinatensystem  $(\xi, \eta)$ , so daß die Leistungsdichte als Funktion dieser Koordinaten zu bestimmen ist.



Die Ausdehnung des Strahles in radialer Richtung wird vernachlässigt, da sie klein ist gegen die Ausdehnung der Strahlung auf dem Absorber, die allein durch die Krümmung der Bahn hervorgerufen wird.  $\phi_1$  und  $\phi_2$  bezeichnen Anfang und Ende des Magneten.

Die vom Strahlelement  $Rd\phi dz$  unter dem Winkel  $\psi$  gegen die Bahnebene abgegebene Leistung ist

$$dP = \frac{d\phi}{2\pi} h_2(z) dz p(\psi) d\psi,$$

wobei  $h_2(z)$  die Verteilung des Strahls in z-Richtung ist und durch

$$\begin{aligned} h_2(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(z, z') dz' \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right) \end{aligned}$$

gegeben ist. Das zugehörige Flächenelement auf dem Absorber ist

$$dF = \frac{l^2}{\cos\phi \cos^2\psi} d\phi d\psi$$

Daraus ergibt sich die Strahlungsdichte zu

$$S(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h_2(z) p(\psi) \cos\phi \cos^2\psi \frac{1}{l^2} dz$$

Die Winkel  $\phi$  und  $\psi$  und der Abstand  $l$  sind durch folgende Beziehungen mit den Koordinaten  $\xi$  und  $\eta$  verknüpft

$$\begin{aligned} l^2 &= \xi^2 + 2\xi R + d^2 \\ \cos\phi &= \frac{R(R+\xi)+ld}{(R+\xi)^2+d^2} \end{aligned}$$

$$\psi \approx \tan \psi = \frac{\eta - z}{1}$$

$$\frac{1}{\cos^2 \psi} = 1 + \left(\frac{\eta - z}{1}\right)^2$$

$$\approx \exp \left(\frac{\eta - z}{1}\right)^2$$

Die letzten Näherungen folgen daraus, daß  $h_2(z)$  für  $z > \sigma$  schnell gegen Null geht und  $\sigma \ll 1$  gilt.

Setzt man die in Abschnitt 2 angegebene Beziehung für  $p(\psi)$  ein, so erhält man

$$S(\eta, \xi) = \frac{3W\beta \cos \phi}{128\pi^2 \sigma^2 l^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left( -\frac{z^2}{2\sigma^2} - \frac{\beta^2 (\gamma(\eta - z) - \alpha l)^2}{2\sigma^2 \gamma^2 l^2} \right. \\ \left. - \frac{(\eta - z)^2}{l^2} \right) (12(1 + \alpha^2)^{-5/2} - 5(1 + \alpha^2)^{-7/2}) dz d\alpha$$

Die Integration nach  $z$  läßt sich direkt ausführen und ergibt

$$S(\eta, \xi) = \frac{3W\beta \cos \phi}{64\pi \sqrt{2\pi} \sigma l \sqrt{1^2 + \beta^2 + 2\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left( -\frac{\eta^2}{1^2 + 2\sigma^2} \right. \\ \left. - B \left( \alpha + \frac{\eta l \gamma}{1^2 + 2\sigma^2} \right)^2 \right) (12(1 + \alpha^2)^{-5/2} - 5(1 + \alpha^2)^{-7/2}) d\alpha$$

$$= \frac{3W\beta \cos \phi}{64\pi \sqrt{2\pi} \sigma l \sqrt{1^2 + \beta^2 + 2\sigma^2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \left( \frac{\gamma l \eta}{1^2 + 2\sigma^2} \right)^{2n} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{d^{2n}}{d\alpha^{2n}} \exp \left( -\frac{\eta^2}{1^2 + 2\sigma^2} - B\alpha^2 \right) \right) (12(1 + \alpha^2)^{-5/2} - \\ - 5(1 + \alpha^2)^{-7/2}) d\alpha$$

mit der Abkürzung

$$B = \frac{\beta^2 (1^2 + 2\sigma^2)}{2\sigma^2 \gamma^2 (1^2 + \beta^2 + 2\sigma^2)}$$

Das Integral läßt sich wieder, wie in Anhang II gezeigt ist, durch eine konfluente hypergeometrische Funktion ausdrücken und ergibt zunächst

$$S(\xi, \eta) = \frac{W\gamma \cos \phi \sqrt{B}}{16\pi \sqrt{\pi} l \sqrt{1^2 + 2\sigma^2}} \exp\left(-\frac{\eta^2}{1^2 + 2\sigma^2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n + \frac{5}{2})}{n!} (-C)^n \cdot \\ \cdot (12U(n + \frac{1}{2}, -1, B) - (2n+5)U(n + \frac{1}{2}, -2, B))$$

mit 
$$C = \frac{\eta^2 l^2 \beta^2}{2\sigma^2 (1^2 + 2\sigma^2) (1^2 + \beta^2 + 2\sigma^2)}$$

Nach einigen Umformungen, wie sie in Abschnitt 2) angegeben sind, erhält man schließlich

$$S(\xi, \eta) = \frac{W\gamma \cos \phi B^{5/2}}{8\pi \sqrt{\pi} l \sqrt{1^2 + 2\sigma^2}} \exp\left(-\frac{\eta^2}{1^2 + 2\sigma^2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-C)^n}{n!} \cdot \\ \cdot \left(\frac{7}{2} - n + n\left(\frac{1}{2} - n\right)\frac{1}{C}\right) \Gamma\left(n + \frac{5}{2}\right) U\left(n + \frac{5}{2}, 3, B\right)$$

Diese Reihe konvergiert sehr langsam für große B, d. h. wenn

$$\frac{\sigma^2}{\beta^2} + \frac{\sigma^2}{l^2} \ll \frac{1}{\gamma^2}$$

gilt. In diesem Fall kann man eine asymptotische Näherung angeben, die folgende Gestalt besitzt:

$$S(\xi, \eta) \approx \frac{3W\gamma \cos \phi}{64\pi l \sqrt{1^2 + 2\sigma^2}} \exp\left(-\frac{\eta^2}{1^2 + 2\sigma^2}\right) \{12g^{-5} - 5g^{-7} + \\ + \frac{5}{2B} (36g^{-7} - 70g^{-9} + \frac{63}{2}g^{-11})\}$$

mit

$$g = \sqrt{1 + \frac{\eta^2 l^2 \gamma^2}{(1^2 + 2\sigma^2)}}$$

In den Diagrammen 3 bis 9 sind die Strahlungsdichten für drei verschiedene Absorber in horizontaler und vertikaler Richtung aufgetragen worden. Für die horizontale Richtung ist statt der oben definierten Variablen  $\xi$  die neue Variable  $\zeta$  gewählt worden, so daß der Koordinatenursprung immer im Diagramm liegt.

Für die Parameter sind bei den Rechnungen folgende für den DESY-Speicherring vorgesehene Werte benutzt worden:

$$\begin{aligned} E &= 3 \text{ GeV} \\ W &= 600 \text{ kW} \\ R &= 12,19 \text{ m} \\ \beta &= 12,4 \text{ m} \end{aligned}$$

Den Herren Drs. R.D. Kohaupt, H. Pingel und G. Ripken möchte ich an dieser Stelle für klärende Diskussionen danken.

Anhang I

Falls keine Kopplung zwischen den beiden Betatronschwingungen vorhanden ist, kann die vertikale Schwingung in folgender Form geschrieben werden (4).

$$z = \sqrt{\epsilon \beta(s)} \cos \left( \int \frac{ds}{\beta(s)} \right)$$

Mit Hilfe der Ableitung  $z'$  kann man nach der Integrationskonstanten  $\epsilon$  auflösen und bekommt

$$\epsilon = \frac{1}{\beta(s)} (z^2 + (z'\beta(s) - z\beta'(s)/2)^2)$$

Bei der Streuung am Restgas und beim Durchgang durch ein Cavity wird  $z'$  und damit  $\epsilon$  sprungartig geändert. Bei der Streuung am Restgas ist  $\Delta z' = \theta$  und beim Durchgang durch ein Cavity ist  $\Delta z' = -z' \Delta E_{\text{cav}}/E$ . Damit erhält man

$$\Delta \epsilon = (2z'\beta - z\beta')(\theta - z'\Delta E_{\text{cav}}/E) + \beta(\theta - z'\Delta E_{\text{cav}}/E)^2$$

Bei der Mittelung über den ganzen Umfang und über alle Streuwinkel verschwinden alle in  $z$ ,  $z'$  und  $\theta$  linearen Glieder und man bekommt

$$\frac{\langle \Delta \epsilon \rangle}{\Delta t} = -2a\epsilon + \langle \beta \rangle \overline{\theta^2} \overline{m}$$

$$\frac{\langle \Delta^2 \epsilon \rangle}{\Delta t} = 2\epsilon \langle \beta \rangle \overline{\theta^2} \overline{m}$$

Mit  $2a$  sind alle Faktoren bei  $\epsilon$  zusammengefaßt worden, so daß  $a$  die Dämpfungskonstante darstellt.  $\overline{m}$  ist die Zahl der Streuungen pro Zeit.

Die stationäre Fokker-Planck-Gleichung nimmt mit diesen Mittelwerten folgende Form an

$$(2a\varepsilon - \langle \beta \rangle \overline{\theta^2 \overline{m}}) h + \frac{\partial}{\partial \varepsilon} (\varepsilon \langle \beta \rangle \overline{\theta^2 \overline{m}} h) = 0$$

Die Lösung ergibt sich zu

$$h(\varepsilon) = h_0 \exp \left( - \frac{2a\varepsilon}{\langle \beta \rangle \overline{\theta^2 \overline{m}}} \right)$$

Ersetzt man  $\varepsilon$  durch  $z$  und  $z'$  und bestimmt  $h_0$  so, daß das Integral über  $z$  und  $z'$  gleich  $N$  ist, bekommt man schließlich

$$h(z, z') = \frac{\beta N}{2\pi\sigma^2} \exp \left( - \frac{1}{2\sigma^2} (z^2 + (z' - z\beta'/2)^2) \right)$$

mit

$$\sigma^2 = \frac{\langle \beta \rangle \overline{\beta \theta^2 \overline{m}}}{4a}$$

Anhang II

Folgende Beziehung läßt sich mit Hilfe der vollständigen Induktion beweisen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{d^{2n}}{d\lambda^{2n}} e^{-A\lambda^2} \right) (1+\lambda^2)^{-k/2} d\lambda = (-4A)^n \frac{\Gamma(n+k/2)}{\Gamma(k/2)} .$$

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) U\left(n+\frac{1}{2}, \frac{3-k}{2}, A\right)$$

$U(a, b, c)$  ist die konfluente hypergeometrische Funktion (3).  
Zunächst gilt für  $n = 1$  und für alle  $k$ :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{d^2}{d\lambda^2} e^{-A\lambda^2} \right) (1+\lambda^2)^{-k/2} d\lambda &= 4A \int_{-\infty}^{\infty} (2A\lambda^2-1) e^{-A\lambda^2} (1+\lambda^2)^{-k/2} d\lambda \\ &= 4A^2 \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) U\left(\frac{3}{2}, \frac{5-k}{2}, A\right) - 2A\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) U\left(\frac{1}{2}, \frac{3-k}{2}, A\right) \\ &= -4A \frac{\Gamma(1+k/2)}{\Gamma(k/2)} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) U\left(\frac{3}{2}, \frac{3-k}{2}, A\right) \end{aligned}$$

Die letzten beiden Beziehungen folgen aus (3). Weiter gilt

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{d^{2n+2}}{d\lambda^{2n+2}} e^{-A\lambda^2} \right) (1+\lambda^2)^{-k/2} d\lambda &= k \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{d^{2n}}{d\lambda^{2n}} e^{-A\lambda^2} \right) \cdot \\ &\quad \left( (k+1)(1+\lambda^2)^{-k/2-1} - (k+2)(1+\lambda^2)^{-k/2-2} \right) d\lambda \\ &= k (-4A)^n \frac{\Gamma(n+1+k/2)}{\Gamma(1+k/2)} \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) \left( (k+1) U\left(n+\frac{1}{2}, \frac{1-k}{2}, A\right) \right. \\ &\quad \left. - 2\left(n+1+\frac{k}{2}\right) U\left(n+\frac{1}{2}, \frac{-1-k}{2}, A\right) \right) \end{aligned}$$

$$= 2k (-4A)^n \frac{\Gamma(n+1+k/2)}{\Gamma(1+k/2)} \Gamma(n+\frac{1}{2}) A (U(n+\frac{1}{2}, \frac{1-k}{2}, A) - U(n+\frac{1}{2}, \frac{3-k}{2}, A))$$

$$= (-4A)^{n+1} \frac{\Gamma(n+1+k/2)}{\Gamma(k/2)} \Gamma(n+\frac{3}{2}) U(n+\frac{3}{2}, \frac{3-k}{2}, A)$$

Hierbei wurden weitere Additionstheoreme aus (3) benutzt. Die letzte Gleichung zeigt, daß die Behauptung für  $n+1$  richtig ist, falls sie für  $n$  richtig war. Da die Gültigkeit der Behauptung für  $n=1$  gezeigt worden ist, folgt hieraus die Gültigkeit für alle  $n$ .

Literatur

- (1) A.A. Sokolov et al.; Zeitschr. f. Ph., 211, 1-8 (1968)
- (2) A.A. Sokolov, J.N.Ternov; Sinchrotronee Islutschenie,  
Moskwa 1966
- (3) M. Abramowitz, I.A. Stegun; Handbook of Mathematical  
Functions, National Bureau of Standards, 1964
- (4) E.D. Courant, H.S. Snyder; Annals of Physics, 3, 1-48  
(1958)

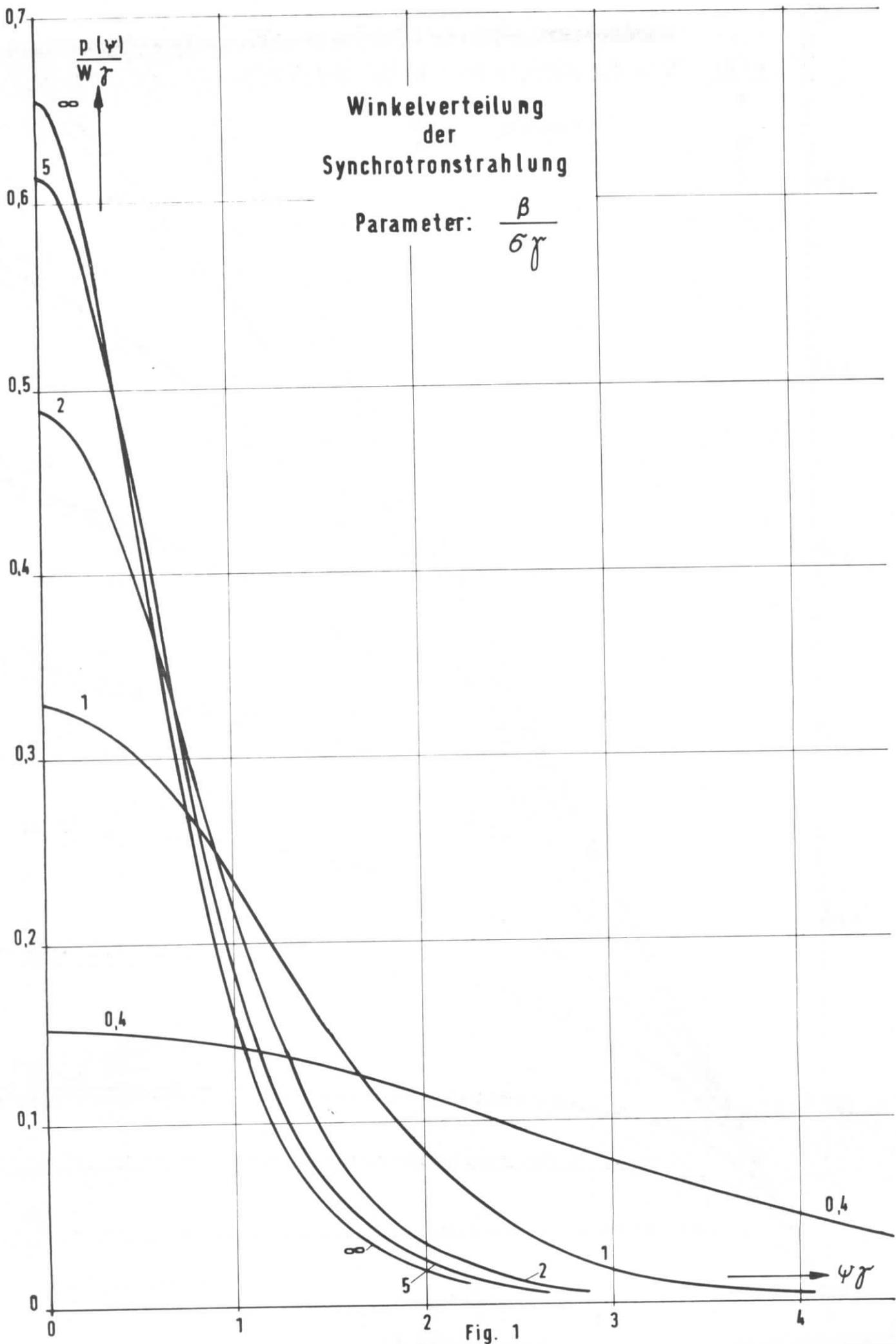


Fig. 1



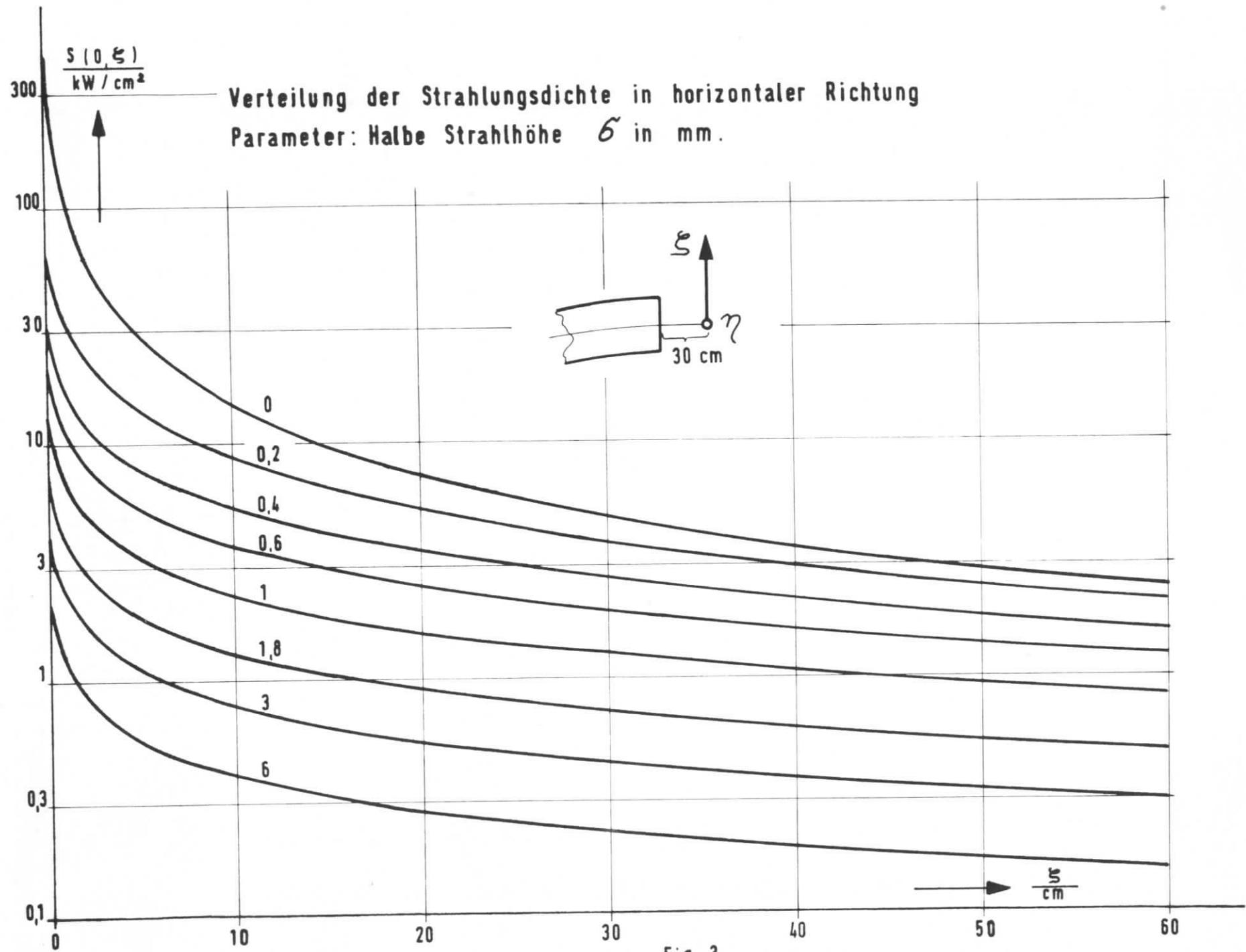


Fig. 3

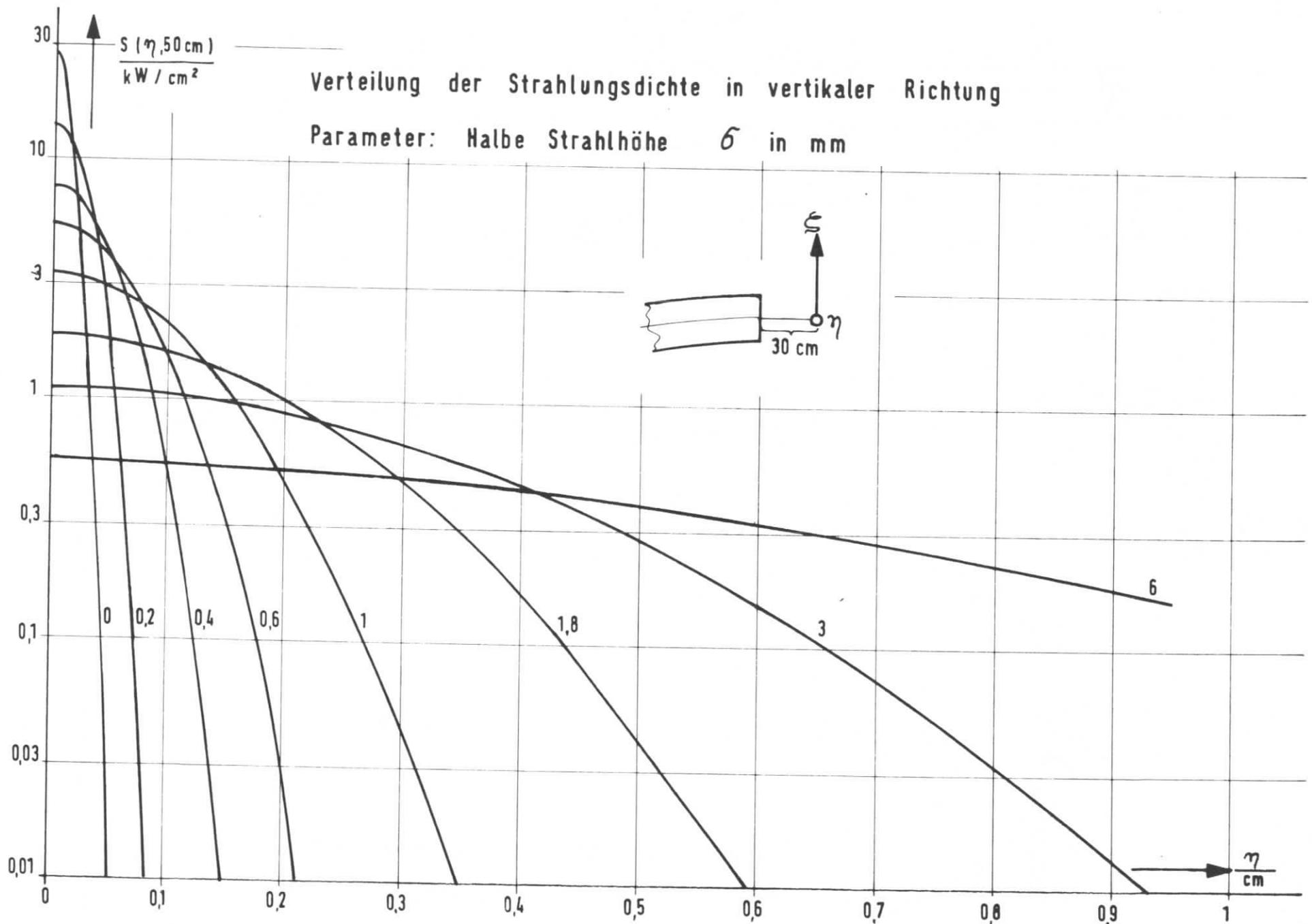


Fig. 4

# Verteilung der Strahlungsdichte in horizontaler Richtung

Parameter: Halbe Strahlhöhe  $\sigma$  in mm

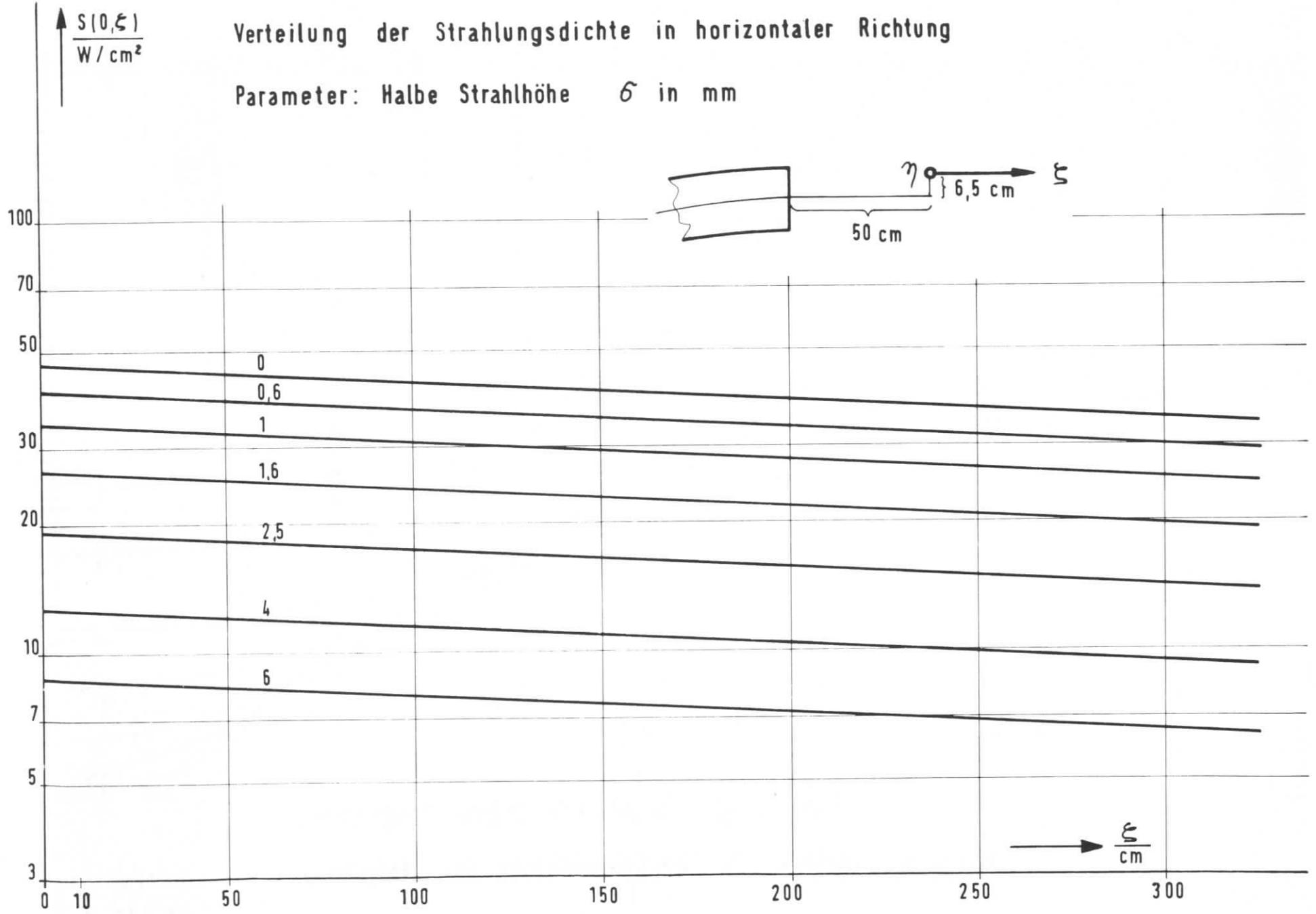


Fig. 5

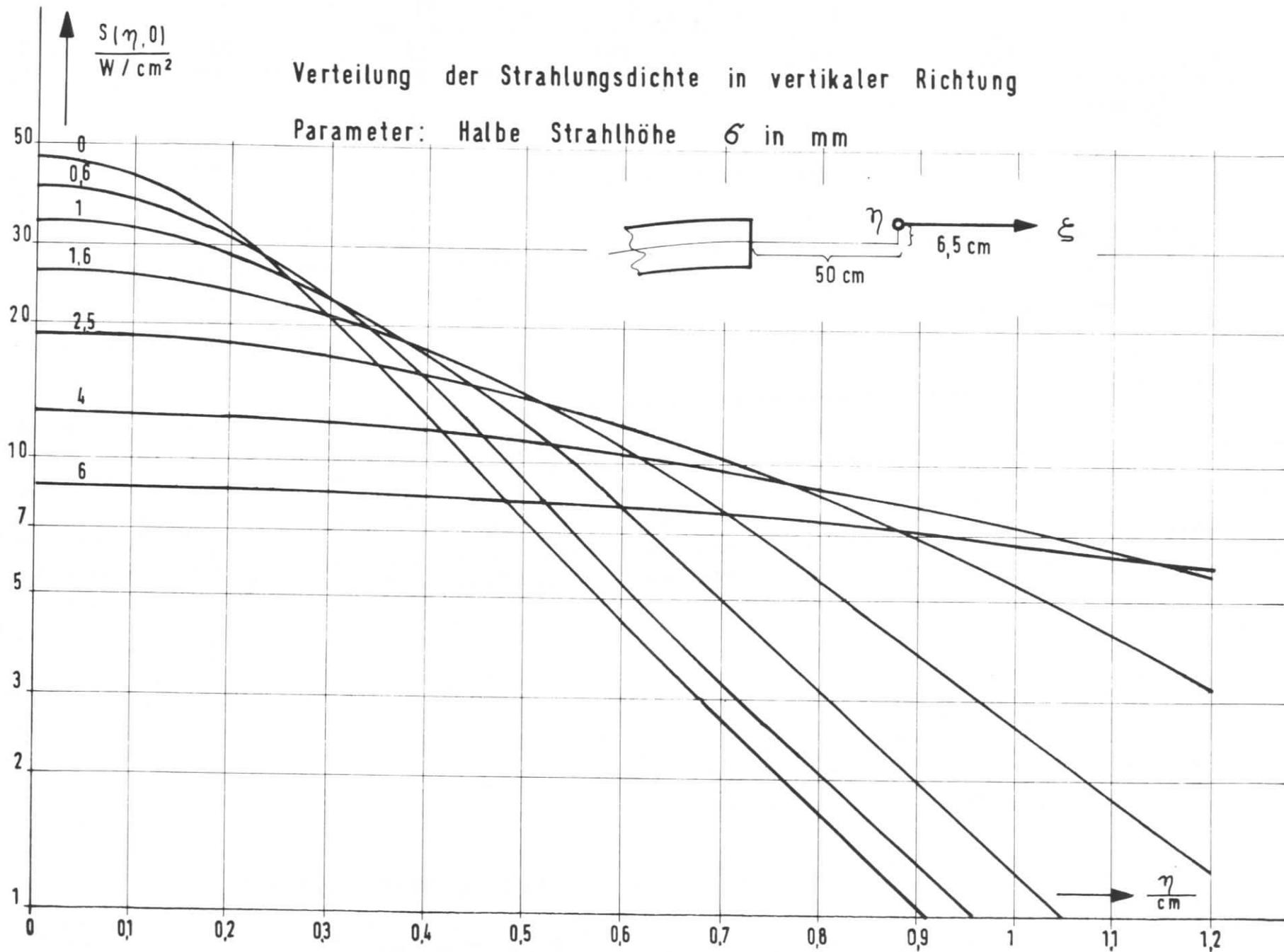


Fig. 6

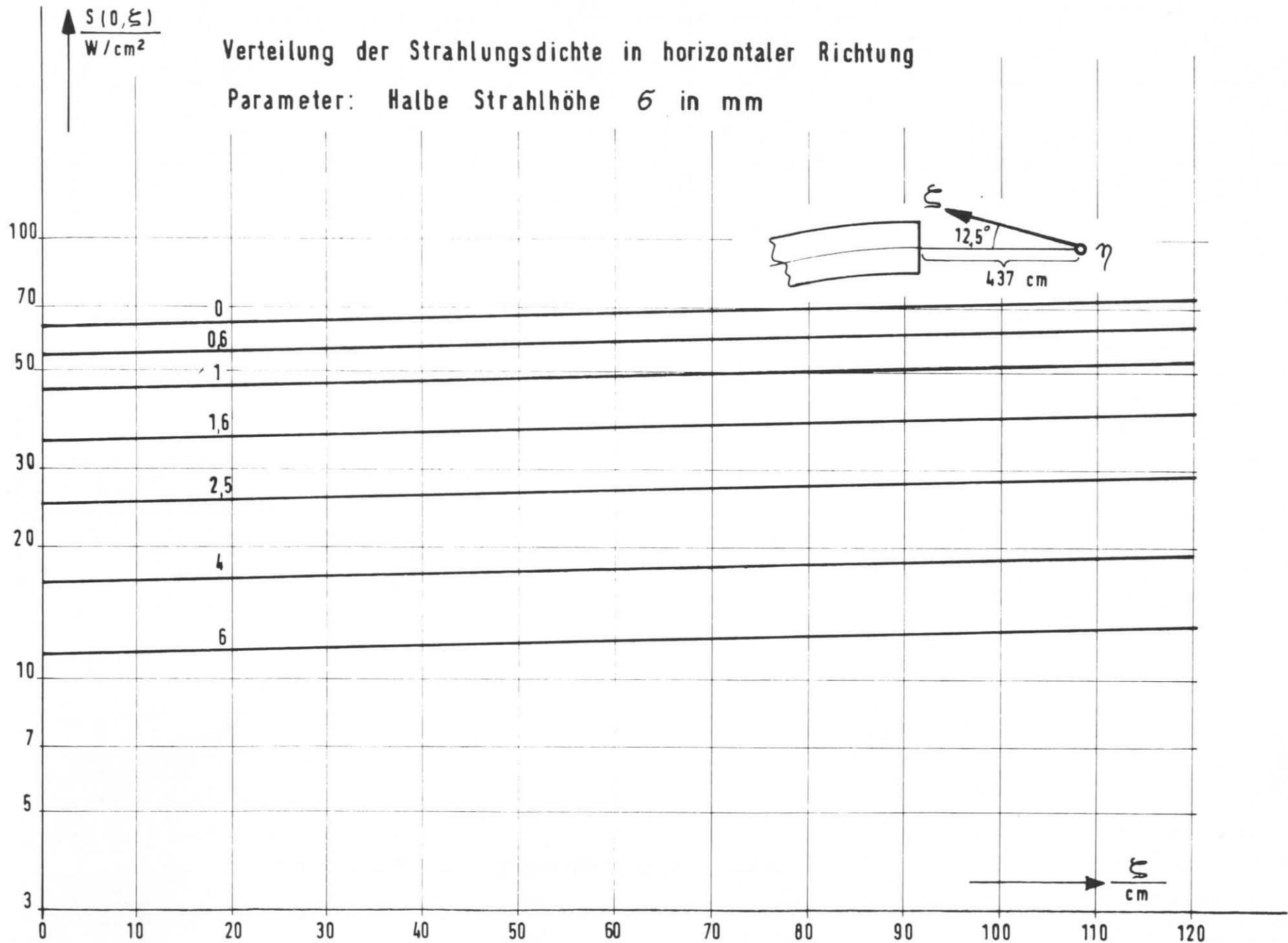


Fig. 7

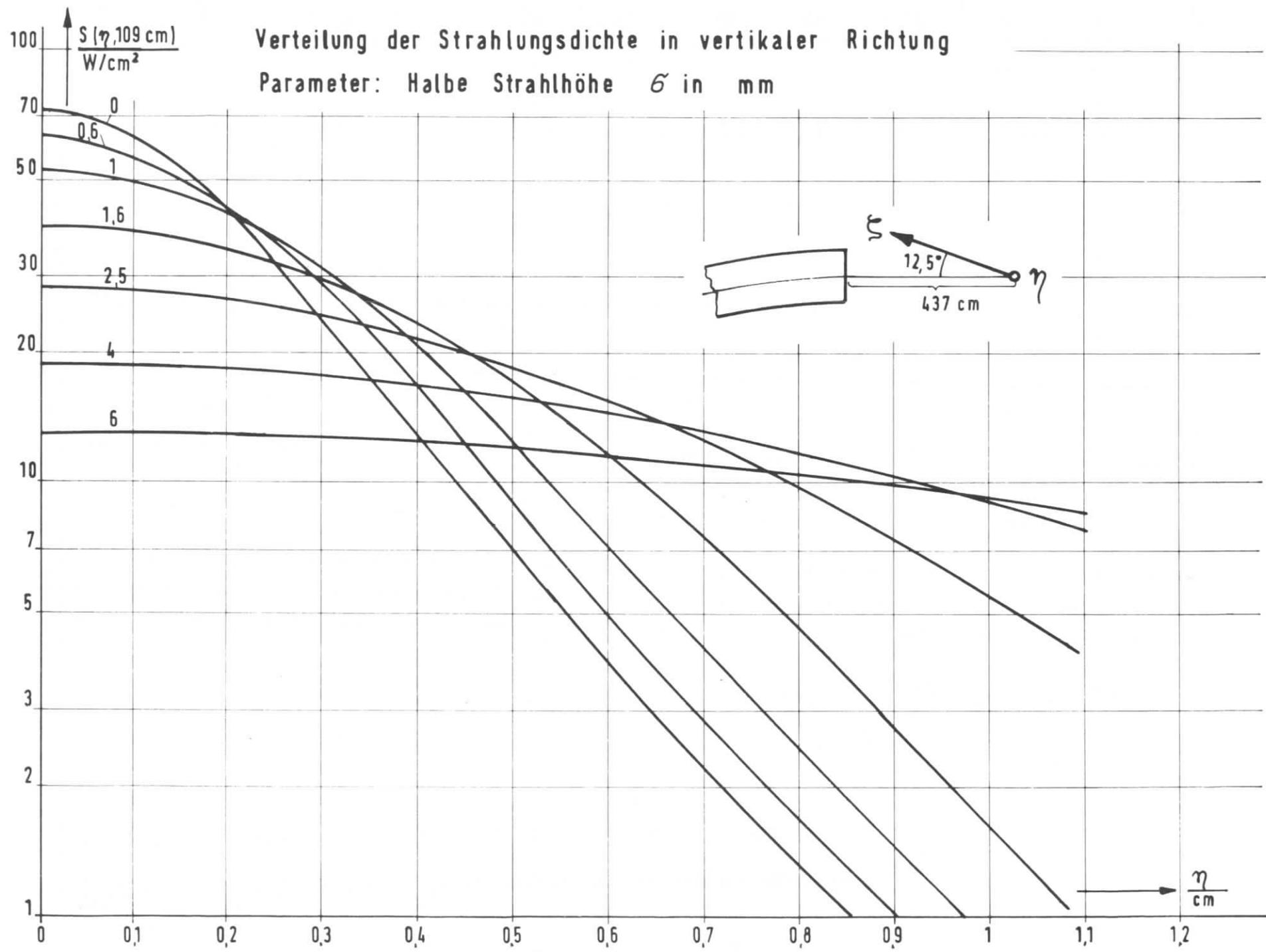


Fig. 8