

Interner Bericht
DESY H3-73/8
April 1973

DESY-Bibliothek
22. FEB. 1974

Schwächung eines Magnetfeldes
durch leitende Platten

von

Tjard Ebel

gleichlautend mit Technischer Notiz H3-17

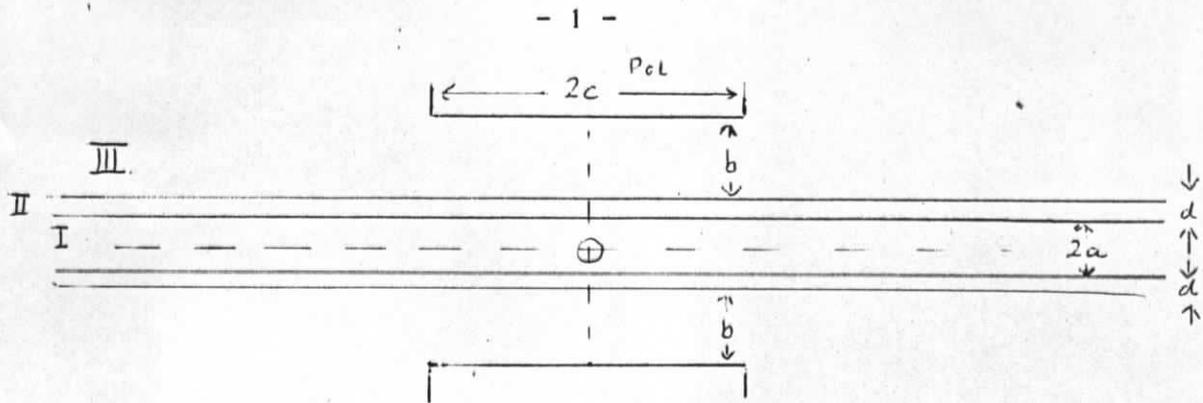
T. Ebel

10. April 1973

T e c h n i s c h e N o t i z

H 3 - 17

Schwächung eines Magnetfeldes
durch leitende Platten



Plattendicke : d
 Plattenabstand: 2a
 Polabstand von den Platten: b
 Platten unendlich ausgedehnt.

Zunächst wird angenommen, daß auch der Pol in y-Richtung unendlich ausgedehnt ist.

Ferner sei $a \ll c$, $b \ll c$, $d \ll c$.

Wegen der Isotropie gibt es keine y-Abhängigkeit und das Magnetfeld hat keine y-Komponente.

Es gilt $\text{rot } \vec{H} = \vec{j} = \kappa \vec{E} \quad \kappa = \text{spez. Leitfähigkeit} \quad (1)$

$$\text{rot } \vec{E} = -\dot{\vec{L}} = -\mu \dot{\vec{H}} = -\mu s \vec{H} \quad (2)$$

und $\text{div } \vec{H} = 0 \quad (3)$

$\mu = \mu_0 = \text{Permeabilität}$
 (Leiter unmagnetisch)

$s = \text{Laplace-Operator}$

daraus: $\text{rot rot } \vec{H} = -\Delta \vec{H} = -\mu \kappa s \vec{H} \quad (4)$

$$\Delta \vec{H} = \kappa \mu s \vec{H} \quad (5)$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 H_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} = \kappa \mu s H_x \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2} = \kappa \mu s H_z \quad (7)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0 \quad (8)$$

Die Lösung erfolgt durch Entwicklung nach Eigenfunktionen, die wiederum durch Produktansatz gefunden werden.

Wir setzen an für Luftraum I ($\kappa = 0$)

$$\varphi_z = A \cos \alpha x \cdot \cosh \alpha z \quad (9)$$

I.

$$\varphi_x = -A \sin \alpha x \cdot \sinh \alpha z \quad (10)$$

Dieser Ansatz erfüllt die Differentialgleichungen und die Symmetrieforderung

$$\varphi_x = 0 \quad \text{für } z = 0 \quad \text{und } x = 0.$$

Im Metall II. erfüllen wir die Differentialgleichungen mit dem Ansatz

$$\varphi_z = (B_1 e^{\beta z} + B_2 e^{-\beta z}) \cos \alpha x \quad (11)$$

II.

$$\varphi_x = (-B_1 e^{\beta z} + B_2 e^{-\beta z}) \frac{\beta}{\alpha} \sin \alpha x \quad (12)$$

$$\text{mit } \beta = \sqrt{\alpha^2 + \kappa \mu s} \quad (13)$$

Schließlich können wir im Luftraum III ansetzen:

$$\varphi_z = (C_1 e^{\alpha z} + C_2 e^{-\alpha z}) \cos \alpha z \quad (14)$$

III.

$$\varphi_x = (-C_1 e^{\alpha z} + C_2 e^{-\alpha z}) \sin \alpha z \quad (15)$$

An den Grenzflächen ist φ stetig. Es folgt für die Fläche I - II ($z = a$)

$$A \cdot \cosh \alpha a = B_1 e^{\beta a} + B_2 e^{-\beta a} \quad (16)$$

$$A \cdot \sinh \alpha a = \frac{\beta}{\alpha} (B_1 e^{\beta a} - B_2 e^{-\beta a}) \quad (17)$$

und daraus

$$B_1 e^{\beta a} = \frac{A}{2} \left(\cosh \alpha a + \frac{\alpha}{\beta} \sinh \alpha a \right) \quad (18)$$

$$B_2 e^{-\beta a} = \frac{A}{2} \left(\cosh \alpha a - \frac{\alpha}{\beta} \sinh \alpha a \right) \quad (19)$$

An der Grenzfläche II - III ($z = a + d$) gilt:

$$C_1 e^{\alpha(a+d)} + C_2 e^{-\alpha(a+d)} = B_1 e^{\beta(a+d)} + B_2 e^{-\beta(a+d)} \quad (20)$$

$$C_1 e^{\alpha(a+d)} - C_2 e^{-\alpha(a+d)} = \frac{\beta}{\alpha} (B_1 e^{\beta(a+d)} - B_2 e^{-\beta(a+d)}) \quad (21)$$

Daraus folgt

$$C_1 e^{\alpha(a+d)} = \frac{B_1}{2} \left(1 + \frac{\beta}{\alpha} \right) e^{\beta(a+d)} + \frac{B_2}{2} \left(1 - \frac{\beta}{\alpha} \right) e^{-\beta(a+d)}$$

$$C_2 e^{-\alpha(a+d)} = \frac{B_1}{2} \left(1 - \frac{\beta}{\alpha} \right) e^{\beta(a+d)} + \frac{B_2}{2} \left(1 + \frac{\beta}{\alpha} \right) e^{-\beta(a+d)}$$

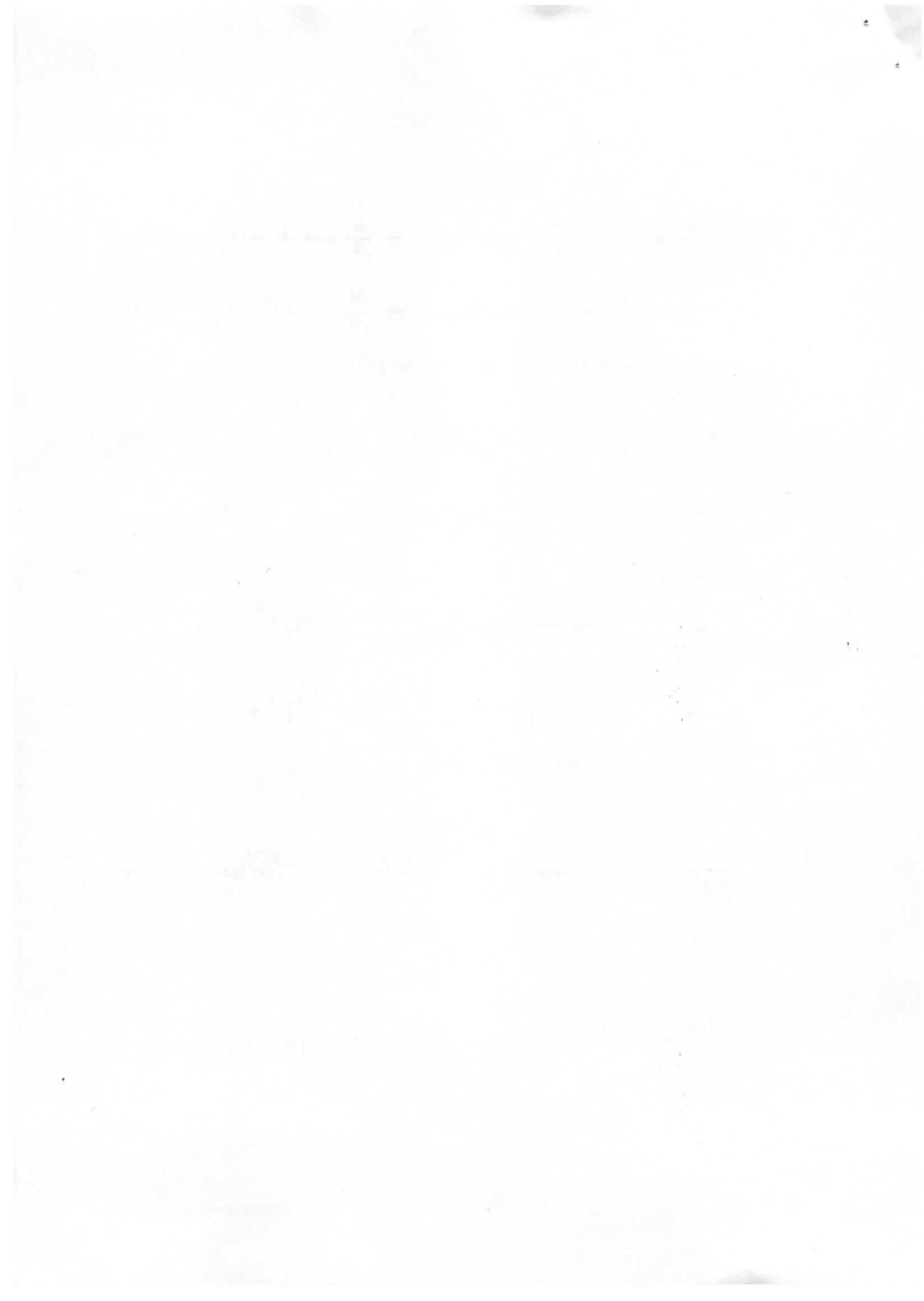
oder nach (18) und (19)

$$C_1 e^{\alpha(a+d)} =$$

$$\frac{A}{4} \left[\left(1 + \frac{\beta}{\alpha} \right) e^{\beta d} \left(\cosh \alpha a + \frac{\alpha}{\beta} \sinh \alpha a \right) + \left(1 - \frac{\beta}{\alpha} \right) e^{-\beta d} \left(\cosh \alpha a - \frac{\alpha}{\beta} \sinh \alpha a \right) \right]$$

$$C_2 e^{-\alpha(a+d)} =$$

$$\frac{A}{4} \left[\left(1 - \frac{\beta}{\alpha} \right) e^{\beta d} \left(\cosh \alpha a + \frac{\alpha}{\beta} \sinh \alpha a \right) + \left(1 + \frac{\beta}{\alpha} \right) e^{-\beta d} \left(\cosh \alpha a - \frac{\alpha}{\beta} \sinh \alpha a \right) \right]$$



oder

$$C_1 e^{\alpha(a+d)} = \frac{A}{2} \left(\cosh \alpha a \cdot \cosh \beta d + \frac{\beta}{\alpha} \cosh \alpha a \cdot \sinh \beta d + \frac{\alpha}{\beta} \sinh \alpha a \cdot \cosh \beta d + \sinh \alpha a \cdot \cosh \beta d \right) \quad (22)$$

$$C_2 e^{-\alpha(a+d)} = \frac{A}{2} \left(\cosh \alpha a \cdot \cosh \beta d - \frac{\beta}{\alpha} \cosh \alpha a \cdot \sinh \beta d + \frac{\alpha}{\beta} \sinh \alpha a \cdot \cosh \beta d - \sinh \alpha a \cdot \cosh \beta d \right) \quad (23)$$

Am Magnetpol ($z = a + d + b$) gilt

$$\begin{aligned} \varphi_z &= \left[C_1 e^{\alpha(a+d+b)} + C_2 e^{-\alpha(a+d+b)} \right] \cos \alpha x \\ &= A \left[\cosh \beta d \cdot \cosh \alpha(a+b) + \sinh \beta d \left(\frac{\beta}{\alpha} \cosh \alpha a \cdot \sinh \alpha b + \frac{\alpha}{\beta} \sinh \alpha a \cdot \cosh \alpha b \right) \right] \cos \alpha x \end{aligned}$$

Bei der Überlagerung der Eigenfunktionen wird

$$C \cdot \cos \alpha x \text{ ersetzt durch } \int_{-\infty}^{+\infty} C(\alpha) \cos \alpha x \, d\alpha$$

für $z = a + d + b$ muß dann sein

$$\int_{-\infty}^{+\infty} C(\alpha) \cos \alpha x \, d\alpha = \begin{cases} H_0 & \text{für } |x| \leq c \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

($H_0 = \text{Feldstärke am Pol}$) (nur $(\varphi_z)_{\text{pol}} = C(\alpha)$)

Nach Fourier gilt dann

$$C(\alpha) = \frac{H_0}{2\pi} \int_{-c}^{+c} \cos \alpha x \, dx = \frac{H_0}{2\pi\alpha} \sin \alpha x \Big|_{-c}^{+c} = H_0 \frac{\sin \alpha c}{\pi\alpha}$$

An der Stelle $z = 0$ ist das Feld geschwächt um den Faktor

$$\left[\cosh \beta d \cdot \cosh \alpha(a+b) + \sinh \beta d \left(\frac{\beta}{\alpha} \cosh \alpha a \cdot \sinh \alpha b + \frac{\alpha}{\beta} \sinh \alpha a \cdot \cosh \alpha b \right) \right]$$

Also gilt

$$A(\alpha) = \frac{C(\alpha)}{\cosh \beta d \cdot \cosh \alpha(a+b) + \sinh \beta d \left(\frac{\beta}{\alpha} \cosh \alpha a \cdot \sinh \alpha b + \frac{\alpha}{\beta} \sinh \alpha a \cdot \cosh \alpha b \right)}$$

Damit wird

$$\varphi_{z=0} = \frac{H_0}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \alpha c \cdot \cos \alpha x \cdot d\alpha}{\alpha \left[\cosh \beta d \cdot \cosh \alpha(a+b) + \sinh \beta d \left(\frac{\beta}{\alpha} \cosh \alpha a \cdot \sinh \alpha b + \frac{\alpha}{\beta} \sinh \alpha a \cdot \cosh \alpha b \right) \right]} \quad (24)$$

$$= \frac{H_0}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \alpha c \cdot \cos \alpha x \cdot d\alpha}{\alpha \cdot \cosh \beta d \cdot \cosh \alpha(a+b) + \sinh \beta d \left(\beta \cdot \cosh \alpha a \cdot \sinh \alpha b + \frac{\alpha^2}{\beta} \sinh \alpha a \cdot \cosh \alpha b \right)} \quad (25)$$

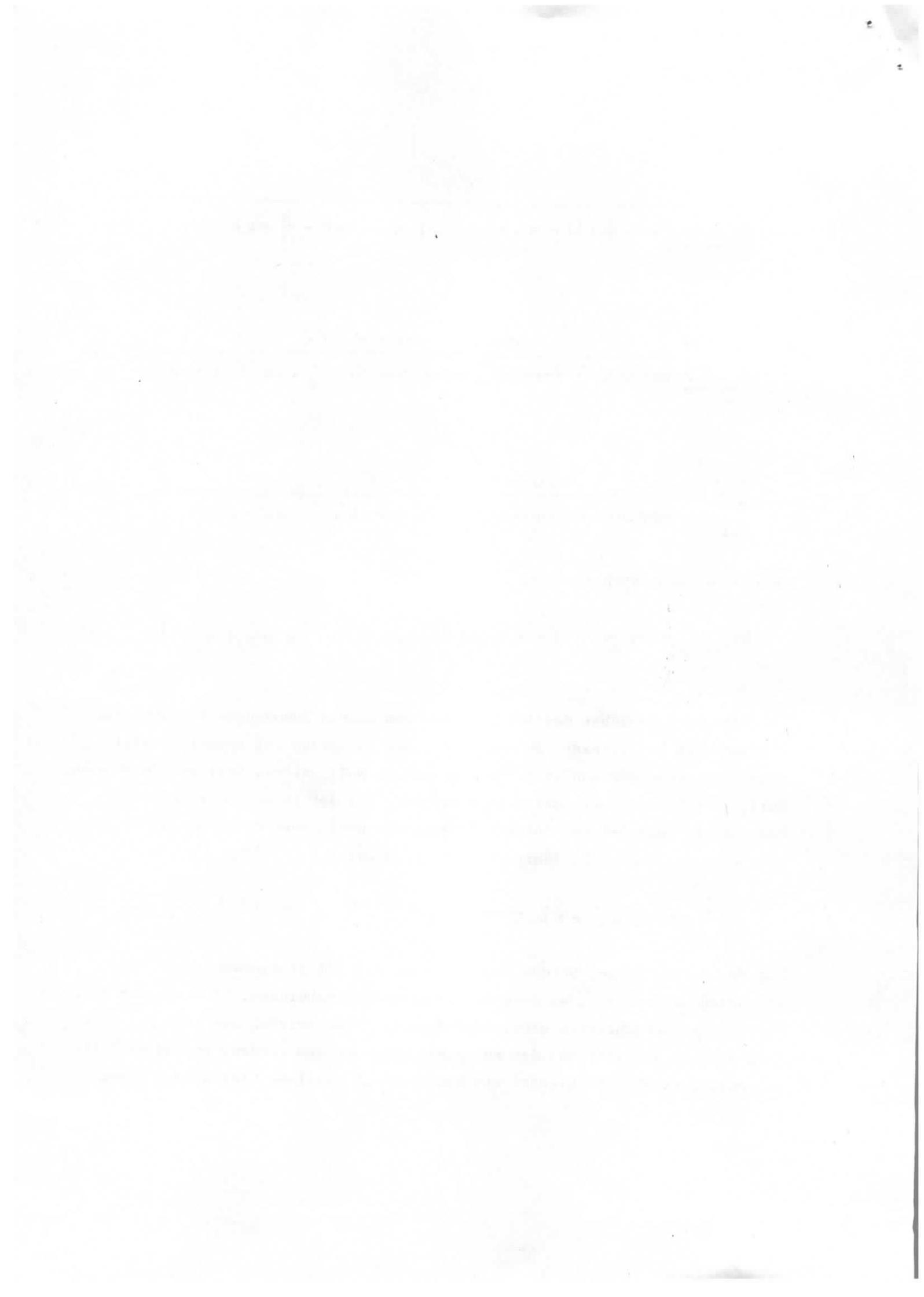
Der Zähler läßt sich zerlegen

$$\text{in } \sin \alpha c \cdot \cos \alpha x = \frac{1}{2} \left(\sin \alpha(c+x) + \sin \alpha(c-x) \right) \quad (26)$$

Wir berechnen zunächst das Integral mit dem ersten Summanden. Das Integral ist nach dem Residuensatz zu berechnen. Der Integrand hat unendlich viele Pole. Wir berechnen zunächst den Einfluß des Nullpunktes. Dort wird der Nenner Null; da aber auch der Zähler verschwindet, ist der Integrand regulär. Wir verschieben zunächst den Integrationsweg ein wenig nach oben, so daß er nicht mehr über den Nullpunkt führt. Nun zerlegen wir

$$\sin \alpha(c+x) = \frac{1}{2j} \left(e^{j\alpha(c+x)} - e^{-j\alpha(c-x)} \right)$$

Für den ersten dieser beiden Summanden muß der Integrationsweg nach oben geschoben werden (+j), wo dann der Integrand verschwindet. Da dabei der Nullpunkt nicht mehr überschritten wird, gibt dieser keinen Beitrag zum Integral mehr. Beim zweiten Integral muß der Nullpunkt übersprungen werden, so daß sich hier ein Anteil ergibt. Da hierbei ein Rechtsumlauf entsteht, ist dieser Anteil negativ zu nehmen.



Die Entwicklung des Nenners nach Potenzen von α ergibt

$$\alpha (\cosh \beta_0 d + \beta_0 b \sinh \beta_0 d) + \dots \quad \beta_0 = \sqrt{k \mu s}$$

Damit wird dieser Anteil am Integral $\mathcal{G}_{z=0}$

$$\frac{H_0}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2j} \cdot 2\pi j \cdot \frac{1}{\cosh \beta_0 d + \beta_0 b \sinh \beta_0 d} = \frac{H_0/2}{\cosh \beta_0 d + \beta_0 b \sinh \beta_0 d}$$

Der zweite Summand $\sin \alpha (c-x)$ gibt noch einmal den gleichen Beitrag, wenn $x < c$ ist. Für $x > c$ dreht sich das Vorzeichen um (und für $x < -c$ dreht sich das Vorzeichen des ersten Beitrages um). Wir haben damit als

Nullte Näherung:

$$\mathcal{G}_{z=0} = \begin{cases} \frac{H_0}{\cosh \beta_0 d + \beta_0 b \sinh \beta_0 d} & |x| < c \\ 0 & |x| > c \end{cases} \quad (27)$$

Für $|\beta_0 d| \ll 1$ und $|x| < c$ wird

$$\mathcal{G}_{z=0} \approx \frac{H_0}{1 + \beta_0^2 b d} \quad \beta_0 = \sqrt{k \mu s} \quad (28)$$

Ein Durchdringen des Magnetfeldes mit nur geringem Intensitätsverlust erfordert also

$$\left| \frac{1}{\beta} \right| \gg \sqrt{bd} \quad (29)$$

Es geht also nicht nur der Plattendurchmesser, sondern auch der Polabstand ein.

z. B. Für $b = 1 \text{ cm}$, $\beta = \frac{1+j}{10 \mu\text{m}}$ folgt aus (29)

$$d \ll \frac{1}{b|\beta|^2} = \frac{(10 \mu\text{m})^2}{1 \text{ cm} \cdot 2} = 5 \cdot 10^{-3} \mu\text{m}$$

Faint, illegible text at the top of the page, possibly a header or introductory paragraph.

Date	Description	Amount
1890
1891
1892
1893
1894
1895
1896
1897
1898
1899

Faint, illegible text at the bottom of the page, possibly a footer or concluding paragraph.

Zur weiteren Annäherung sind die weiteren Nullstellen des Nenners zu berücksichtigen. Dabei nähern wir $\beta \approx \beta_0 = \sqrt{k\mu s}$ an, eine Vereinfachung, die berechtigt ist, weil große α im Integral kaum noch einen Beitrag liefern. Ferner rechnen wir zur Vereinfachung mit reellem β_0 (der Übergang zu komplexem β_0 erfolgt durch analytische Fortsetzung).

Der Nenner in (25) kann im reellen keine Nullstellen mehr haben, weil alle Glieder das gleiche Vorzeichen (von α) haben. Man kann zeigen, daß zumindest für kleine α die Nullstellen nur auf der imaginären Achse liegen können. Mit wachsender Entfernung von der reellen Achse nimmt ihr Einfluß schnell ab, weil im Zähler die Exponentialfunktionen $e^{j\alpha(c+x)}$ etc. stehen, deren Exponent dann negative reelle Werte annimmt. (Das gilt nicht für $|x| \approx c$, weil dann $c-x$ oder $c+x$ nahezu Null wird. Das ergibt die zu erwartende Randverzerrung.)

Es zeigt sich, daß unter den genannten Voraussetzungen $a \ll c$, $b \ll c$ alle Zusatzglieder klein sind. Eine genaue Berechnung ist nicht allgemein möglich, weil das Nullsetzen des Nenners zu einer transzendenten Gleichung führt.

Einfluß endlicher Abmessung des Magnetpoles in y-Richtung

Bei endlicher Abmessung $|y| \leq f$ des Magnetpoles in y-Richtung ist auch über diese Richtung das Fourier-Integral zu bilden. Integral (25) wird dann ein Doppelintegral, der Nenner bleibt jedoch unverändert. Da nach Integralen in x-Richtung (nullte Näherung) der Nenner keine y-Abhängigkeit enthält, bleibt nur ein Integral

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \alpha' f \cdot \cos \alpha' y \cdot d\alpha'}{\alpha'} = \begin{cases} 1 & \text{für } |y| < f \\ 0 & \text{für } |y| > f \end{cases}$$

so daß (27) nun die Form annimmt

nullte Näherung		für $ x < c, y < f$ sonst	(30)
$\mathcal{G}_{z=0}$	=		

X