Interner Bericht
DESY H3-73/12
Dezember 1973

Gekoppelte Betatronschwingungen am Speicherring DORIS

von

T. Ebel

Einleitung

In dem folgenden Bericht wird gezeigt, daß im Speicherring infolge der Kopplung der einzelnen Bunche untereinander ungedämpfte Betatronschwingungen auftreten können.

Es wird angenommen, daß jeder einzelne Bunch, solange er von den anderen Bunchen nicht beeinflußt wird, eine gedämpfte Betatronschwingung ausführen kann. Um überschaubare Verhältnisse zu bekommen, wird ferner angenommen, daß jeder Bunch nur auf seinen unmittelbaren Nachfolger koppelt und daß alle Bunche im Ring (ohne Einschußlücke) besetzt sind (gleich starke Besetzung aller Bunche ist keine notwendige Voraussetzung, da unterschiedliche Bunchladungen durch entsprechende Bewertungen der Auslenkungen berücksichtigt werden können). Die Kopplung kann von der Auslenkung des einzelnen Bunches sowie von ihrer zeitlichen Änderung abhängen.Unter diesen Voraussetzungen läßt sich ein System von Differentialgleichungen aufstellen, das sich mittels des Matrizenkalküls exakt lösen läßt.

Es wird gezeigt, daß soviele unabhängige Eigenschwingungen (Modes) auftreten, wie Bunche im Speicherring umlaufen und daß unter gewissen Bedingungen einige dieser Eigenschwingungen einen zeitlich anklingenden Verlauf haben.

Die Lösung erlaubt Rückschlüsse auf den allgemeineren Fall beliebiger Kopplungen unter den einzelnen Bunchen. Das System der Differentialgleichungen ist dann nicht mehr exakt lösbar; unverändert bleibt jedoch die Zahl der möglichen Eigenschwingungen. Ferner ist zu erwarten, daß einige von ihnen zeitlich anklingen, wenn sich die Bedingung dafür auch nicht mehr ohne weiteres angeben läßt.

Gekoppelte Betatronschwingung von n Bunchen

Es wird angenommen, daß jeder Bunch nur seinen Nachfolger beeinflußt. Die Beeinflussung kann proportional der Auslenkung y und proportional der Geschwindigkeit $\dot{y}$ sein. Es ergeben sich dann die Differentialgleichungen

$$\ddot{y}_\nu + 2\delta\dot{y}_\nu + \omega_B^2 y_\nu = \gamma y_{\nu-1} + 2\beta\dot{y}_{\nu-1} \qquad \nu = 2,3 \ldots . n \tag{1}$$

bzw. $\ddot{y}_1 + 2\delta\dot{y}_1 + \omega_B^2 y_1 = \gamma y_n + 2\beta\dot{y}_n$

wo ω_B = Betatronfrequenz

δ = logarithmisches Dämpfungsdekrement

γ, β = Kopplungskonstanten

Setzen wir

$$y_{n+\nu} = \dot{y}_\nu \tag{2}$$

so wird aus Gl.(1) das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{y}_{n+\nu} &= -2\delta y_{n+\nu} + 2\beta y_{n+\nu-1} - \omega_B^2 y_\nu + \gamma y_{\nu-1} \quad (\nu=2 \ldots . n) \\ \dot{y}_{n+1} &= -2\delta y_{n+1} + 2\beta y_{2n} - \omega_B^2 y_1 + \gamma y_n \\ \dot{y}_\nu &= y_{n+\nu} \quad (\nu = 1 \ldots . n) \end{aligned} \tag{3}$$

Nach Einführen des Lösungsvektors

$$\mathfrak{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \\ y_{2n} \end{pmatrix} \tag{4}$$

läßt sich das Gleichungssystem (3) schreiben

$$\dot{\mathfrak{y}} = A \cdot \mathfrak{y} \tag{5}$$

wo die Matrix A die Form

$$A = \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} & & & & & 1 & & & & 0 \\ & & 0 & & & & \ddots & & & \\ & & & & & 0 & & & & 1 \\ \hline -\omega_0^2 & 0 & 0 & \cdots & 0\ \gamma & -2\delta & 0 & \cdots & 0 & 2\beta \\ \gamma, & -\omega_0^2 & 0 & \cdots & 0 & 2\beta, & -2\delta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & 0 & 0, & 2\beta & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \gamma, & -\omega_0^2 & 0 & \cdots & 0 & 2\beta & -2\delta \end{array}\right) \tag{6}$$

hat.

Die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems ist dann gegeben durch

$$\mathfrak{y} = e^{At} \cdot \mathfrak{c} \tag{7}$$

wo

$$\mathfrak{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{2n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{1o} \\ \vdots \\ y_{no} \\ \dot{y}_{1o} \\ \vdots \\ \dot{y}_{no} \end{pmatrix} \tag{8}$$

der Vektor der Anfangsbedingungen ist und

$$e^{At} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} A^{\nu} t^{\nu} \tag{9}$$

Zur Berechnung der Matrix e^{At} sind zunächst die Eigenwerte der Matrix A , das sind die Lösungen λ_ν der charakteristischen Gleichung

$$|A - \lambda E| = 0 \tag{10}$$

(wo mit E die Einheitsmatrix bezeichnet wird und mit $|\ \ |$ die Determinante)
zu bestimmen.

Die Determinante

$$|A - \lambda E| = \left|\begin{array}{cccc|cccc}
-\lambda & & & 0 & 1 & & & 0 \\
& \ddots & & & & \ddots & & \\
0 & & & -\lambda & 0 & & & 1 \\ \hline
-\omega_B^2 & & & \gamma & -2\delta-\lambda & & & 2\beta \\
\gamma & \ddots & & & 2\beta & \ddots & & \\
& \ddots & \ddots & & & \ddots & \ddots & \\
& & \gamma & -\omega_B^2 & & & 2\beta & -2\delta-\lambda
\end{array}\right| \tag{11}$$

läßt sich durch passende Addition der oberen Zeilen zu den unteren auf die Form bringen·

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc} -\lambda & & 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & & & \ddots & \\ 0 & & -\lambda & 0 & & 1 \\ \hline -\omega_B^2-\lambda(2\delta+\lambda) & & \gamma+2\beta\lambda & & & \\ \gamma+2\beta\lambda & \ddots & & & 0 & \\ & \ddots & \gamma+2\beta\lambda,\ -\omega_B^2-\lambda(2\delta+\lambda) & & & \end{array}\right|$$

$$= (-1)^n \begin{vmatrix} -\omega_B^2-\lambda(2\delta+\lambda) & & \gamma+2\beta\lambda \\ \gamma+2\beta\lambda & \ddots & \\ & \ddots & \gamma+2\beta\lambda,\ -\omega_B^2-\lambda(2\delta+\lambda) \end{vmatrix} \text{(n-reihig)}$$

Da diese Determinante null zu setzen ist, spielt der Faktor $(-1)^n$ keine Rolle. Durch Entwickeln nach der ersten Zeile entsteht die Gleichung

$$0 = \left(-\omega_B^2 - \lambda(2\delta\ \lambda)\right) \begin{vmatrix} -\omega_B^2-\lambda(2\delta+\lambda) & & 0 \\ \gamma+2\beta\lambda & \ddots & \\ 0 & \ddots & \gamma+2\beta\lambda,\ -\omega_B^2-\lambda(2\delta+\lambda) \end{vmatrix} + \quad (n-1)\text{-reihig}$$

$$+ (-1)^{n+1}(\gamma+2\beta\lambda) \begin{vmatrix} \gamma+2\beta\lambda,\ -\omega_B^2-\lambda(2\delta+\lambda) & & 0 \\ & \ddots & \ddots \\ 0 & & -\omega_B^2-\lambda(2\delta+\lambda) \\ & & \gamma+2\beta\lambda \end{vmatrix} \quad (n-1)\text{ - reihig}$$

Durch weiteres Entwickeln jeweils nach der ersten Zeile (bei der ersten Determinante) bzw. nach der ersten Spalte (bei der zweiten Determinante) erhält man

$$\left(-\omega_B^2 - \lambda(2\delta+\lambda)\right)^n - (-1)^n(\gamma+2\beta\lambda)^n = 0$$

oder

$$\left(\omega_B^2 + \lambda(2\delta+\lambda)\right)^n = (\gamma+2\beta\lambda)^n$$

Daraus folgt

$$\omega_B^2 + \lambda(2\delta+\lambda) = \varepsilon_\nu(\gamma+2\beta\lambda) \tag{12}$$

wo die

$$\varepsilon_\nu = e^{2\pi j\frac{\nu}{n}} \qquad \nu = 1 \,....n \tag{13}$$

die n-ten Einheitswurzeln bedeuten.

Es folgt dann
$$\lambda^2 + 2(\delta-\beta\varepsilon_\nu) + \omega_B^2 - \varepsilon_\nu\gamma = 0$$

oder
$$\lambda = -\delta + \beta\varepsilon_\nu \pm \sqrt{(-\delta+\beta\varepsilon_\nu)^2 - \omega_B^2 + \varepsilon_\nu\gamma}$$

Nehmen wir an, daß die Kopplung von Bunch zu Bunch nur gering ist, so muß ω_B^2 groß sein gegen β^2, δ^2 und γ . Damit wird

$$\lambda = -\delta + \beta\varepsilon_\nu \pm j\sqrt{\omega_B^2 - \varepsilon_\nu\gamma - (\delta - \beta\varepsilon_\nu)^2}$$

$$= -\delta + \beta\varepsilon_\nu \pm j\sqrt{\omega_d^2 - \varepsilon_\nu(\gamma-2\beta\delta) - \varepsilon_\nu^2\beta^2}$$

mit

$$\omega_d = \sqrt{\omega_B^2 - \delta^2} \tag{14}$$

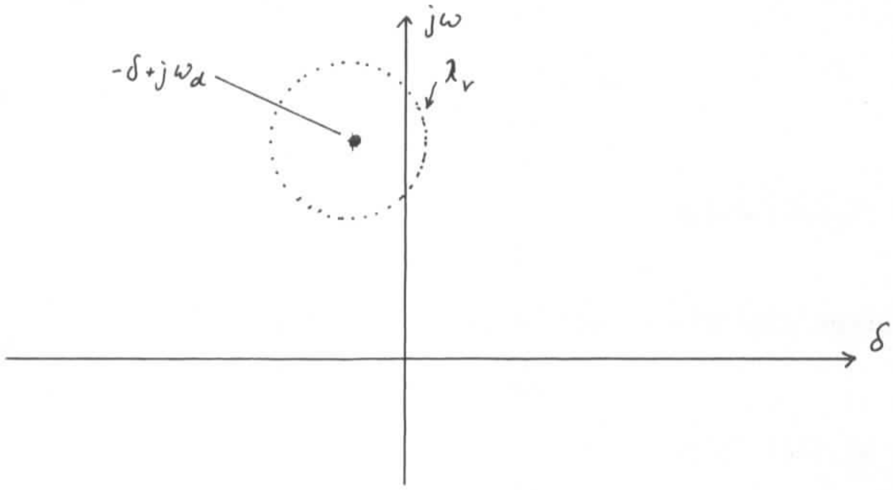
Damit haben wir als Eigenwerte der Matrix A:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_\nu &= -\delta + \beta\varepsilon_\nu + j\sqrt{\omega_d^2 - \varepsilon_\nu(\gamma-2\beta\delta) - \varepsilon_\nu^2\beta^2} \\ \lambda_{n+\nu} &= -\delta + \beta\varepsilon_\nu - j\sqrt{\omega_d^2 - \varepsilon_\nu(\gamma-2\beta\delta) - \varepsilon_\nu^2\beta^2} \end{aligned}\right\} \nu = 1 \ldots n \tag{15}$$

Bei Vernachlässigung der quadratischen Glieder β^2 und $\beta\delta$ und Entwicklung der Wurzeln bis zum ersten Glied wird

$$\begin{aligned} \lambda_\nu &\approx -\delta + j\omega_d + \varepsilon_\nu\left(\beta - j\frac{\gamma}{2\omega_d}\right) \\ \lambda_{n+\nu} &\approx -\delta - j\omega_d + \varepsilon_\nu\left(\beta + j\frac{\gamma}{2\omega_d}\right) \end{aligned} \qquad \nu = 1 \ldots n \qquad (16)$$

Die λ_ν sind die komplexen Eigenfrequenzen des Systems. Wird der Realteil eines der λ_ν größer als 0, so tritt bei dieser Frequenz Anfachung ein und das System ist instabil. Da β^2 und γ klein gegen ω_B^2 angenommen wurden, liegen die komplexen Eigenfrequenzen auf Kreisen um die Eigenfrequenzen $-\delta \pm j\omega_d$ des kopplungsfreien Systems:



Sobald der Radius $\sqrt{\beta^2 + \frac{\gamma^2}{4\omega_d^2}}$ größer als der Abstand δ des Mittelpunktes von der imaginären Achse wird, gibt es mindestens eine Eigenfrequenz, bei der Selbsterregung eintritt. Demnach gilt:

Der Strahl ist instabil, wenn

$$\beta^2 + \frac{\gamma^2}{4\omega_d^2} > \delta^2 \qquad (17)$$

ist.

Nun ist

$$\prod_{\nu=1}^{2n} (A - \lambda_\nu E) = 0 \qquad (18)$$

Diese Beziehung gilt - wie hier nicht bewiesen werden kann - stets, wenn alle Eigenwerte λ_ν verschieden sind.

Setzt man

$$S_\nu = \prod_{\substack{\mu=1 \\ \mu\neq\nu}}^{2n} \frac{(A-\lambda_\mu E)}{\lambda_\nu - \lambda_\mu} \tag{19}$$

so haben die Matrixen S_ν die folgenden Eigenschaften (die hier ohne Beweis wiedergegeben werden)

$$(A - \lambda_\nu E)\, S_\nu = 0 \tag{20}$$

$$S_\nu S_\mu = 0 \qquad \text{für} \quad \nu \neq \mu \tag{21}$$

$$S_\nu^k = S_\nu \qquad \text{für} \quad k = 1,2 \ldots. \tag{22}$$

$$\sum_{\nu=1}^{2n} S_\nu = E \tag{23}$$

Aus Gl.(20) folgt

$$AS_\nu = \lambda_\nu S_\nu \tag{24}$$

Außerdem sind die S_ν mit A vertauschbar:

$$AS_\nu = S_\nu A \tag{25}$$

Aus Gl.(24) folgt

$$A^k S_\nu = \lambda_\nu{}^k S_\nu \tag{26}$$

Damit wird nach Gl.(23)

$$A^k = A^k E = \sum_{\nu=1}^{2n} A^k S_\nu = \sum_{\nu=1}^{2n} \lambda_\nu^k S_\nu$$

und nach Gl.(9)

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k t^t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \sum_{\nu=1}^{2n} \lambda_\nu^k S_\nu = \sum_{\nu=1}^{2n} S_\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda_\nu t)^k}{k!}$$

oder

$$e^{At} = \sum_{\nu=1}^{2n} e^{\lambda_\nu t} \cdot S_\nu \tag{27}$$

Da die Matrizen S_ν zeitunabhängig sind, wird mit Gl.(27) die obige Behauptung bestätigt, daß die λ_ν die Eigenfrequenzen des Systems sind.

Die Matrizen S_ν lassen sich unter Ausnutzung der Gl.(20) und (22) berechnen. Da die Matrix $(A-\lambda_\nu E)$ den Rang 2n-1 hat, aber aus Gl.(18) und (19) folgt, daß $(A-\lambda_\nu E)S_\nu = 0$ ist, muß S_ν vom Rang 1 sein. Dann müssen aber alle Spaltenvektoren Vielfache eines einzigen sein:

$$S_\nu = \begin{pmatrix} a_1 S_1, & a_2 S_1 & \dots & a_{2n} S_1 \\ a_1 S_2, & a_2 S_2 & \dots & a_{2n} S_2 \\ & & & \\ a_1 S_2 & a_2 S_{2n} & \dots & a_{2n} S_{2n} \end{pmatrix} = (s_i a_k) \qquad (28)$$

Aus Gl.(22) folgt für $k = 2$

$$S_\nu^2 = (\sum_\mu s_i a_\mu s_\mu a_k) = (s_i a_k \sum a_\mu s_\mu) = (s_i a_k)$$

und damit

$$\sum_{\mu=1}^{2n} a_\mu s_\mu = 1 \qquad (29)$$

Nach Gl.(20) muß eine beliebige Zeile von $A - \lambda_\nu E$, mit dem Spaltenvektor $\begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_{2n} \end{pmatrix}$ multipliziert, null ergeben. Es folgt

$$\lambda_\nu s_\mu - s_{n+\mu} = 0 \qquad \text{und}$$

$$-\omega_B^2 s_\mu + \gamma s_{\mu-1} - (2\delta+\lambda_\nu) s_{n+\mu} + 2\beta s_{n+\mu} + 2\beta s_{n+\mu-1} = 0$$

Daraus folgt

$$\left(\omega_B^2 + \lambda_\nu (2\delta+\lambda_\nu)\right) s_\mu = (\gamma + 2\beta\lambda_\nu)\, s_{\mu-1}$$

oder nach Gl.(12)

$$s_\mu = \varepsilon_\nu^{-1}\, s_{\mu-1}$$

Da ein konstanter Faktor zu den a_i gerechnet werden kann, kann

$$\begin{aligned} s_\mu &= \varepsilon_\nu^{-\mu} \\ s_{n+\mu} &= \lambda_\nu \varepsilon_\nu^{-\mu} \end{aligned} \qquad \mu = 1 \dots n \qquad (30)$$

gesetzt werden.

Aus Gl.(25) und (20) folgt

$$S_\gamma(A - \lambda_\nu E) = 0$$

Demnach muß der Zeilenvektor $(a_1 \,\ldots\ldots\, a_{2n})$, mit einer beliebigen Spalte der Matrix $A - \lambda_\nu E$ multipliziert, null ergeben:

$$- \lambda_\nu a_\mu - \omega_B^2 a_{n+\mu} + \gamma a_{n+\mu+1} = 0$$

$$\mu = 1 \ldots . n$$

und $$a_\mu - (2\delta + \lambda_\nu) a_{n+\mu} + 2\beta a_{n+\mu+1} = 0$$

Daraus ergibt sich

$$a_{n+\mu} = - \frac{2\beta\lambda_\nu + \gamma}{2\beta\omega_B^2 - \gamma(2\delta+\lambda)} \cdot a_\mu$$

und $$\mu = 1 \ldots . n$$

$$a_{\mu+1} = \varepsilon_\nu a_\mu$$

Damit sind die a_μ bis auf einen gemeinsamen Faktor a festgelegt:

$$a_\mu = a \cdot \varepsilon_\nu^\mu$$

$$a_{n+\mu} = - \frac{2\beta\lambda_\nu + \gamma}{2\beta\omega_B^2 - \gamma(2\delta+\lambda\nu)} a \qquad \mu = 1 \ldots . n \tag{31}$$

Aus Gl.(29) folgt dann

$$1 = \sum_{\mu=1}^{2n} a_\mu s_\mu = \sum_{\mu=1}^{n} a\varepsilon_\nu^\mu \varepsilon_\nu^{-\mu} - a\lambda_\nu \frac{2\beta\lambda_\nu + \gamma}{2\beta\omega_B^2 - \gamma(2\delta+\lambda_\nu)} \sum_{\mu=1}^{n} \varepsilon_\nu^\mu \varepsilon_\nu^{-\mu}$$

$$= na(1 - \lambda_\nu \frac{2\beta\lambda_\nu + \gamma}{2\beta\omega_B^2 - \gamma(2\delta+\lambda\nu)}) = na \frac{2\beta\omega_B^2 - \gamma(2\delta+\lambda_\nu) - 2\beta\lambda_\nu^2 - \gamma\lambda_\nu}{2\beta\omega_B^2 - \gamma\,(2\delta + \lambda_\nu)}$$

$$= na \frac{2\beta(\omega_B^2 - \lambda_\nu^2) - 2\gamma(\delta+\lambda)}{2\beta\omega_B^2 - \gamma(2\delta+\lambda_\nu)}$$ und somit

$$a = \frac{1}{n} \cdot \frac{2\beta\omega_B^2 - \gamma\,(2\delta+\lambda_\nu)}{2\beta(\omega_B^2 - \lambda_\nu^2) - 2\gamma(\delta+\lambda_\nu)} \tag{32}$$

Damit ist die Matrix S_ν vollständig bestimmt. Wir können sie uns in der folgenden Weise aus vier n-reihigen Matrizen zusammengesetzt denken:

$$S_\nu = \frac{1}{2n\left(\beta(\omega_B^2 - \lambda_\nu^2) - \gamma(\delta+\lambda)\right)} \left(\begin{array}{c|c} \left(2\beta\omega_B^2 - \gamma(2\delta+\lambda_\nu)\right)\varepsilon_\nu^{k-i} & -(2\beta\lambda_\nu+\gamma)\varepsilon_\nu^{k-i} \\ \hline \lambda_\nu\left(2\beta\omega_B^2 - \gamma(2\delta+\lambda_\nu)\right)\varepsilon_\nu^{k-i} & -\lambda_\nu(2\beta\lambda_\nu+\gamma)\varepsilon_\nu^{k-i} \end{array}\right) \tag{33}$$

Dabei bedeuten i den Zeilen- und k den Spaltenindex der Teilmatrizen ($i, k = 1 \ldots n$).

Der Übergang von einer Zeile von S_ν zur nächsten entspricht dem Übergang von einem Bunch zum nächsten (Übergang von y_i zu y_{i+1}). Die neue Zeile unterscheidet sich von der vorhergehenden um den Faktor ε_ν^{-1}. Da die Matrix S_ν zur Eigenfrequenz λ_ν (dem ν-ten Schwingungsmode) gehört, heißt das:

Im ν-ten Schwingungsmode eilt jeder Bunch seinem Vorgänger um den Winkel

$$\arg \varepsilon_\nu = 2\pi \frac{\nu}{n} \qquad \text{nach [1]}.$$

Welche Eigenfrequenzen angeregt werden, hängt von den Konstanten γ und β ab. Ist $\gamma = 0$ und β positiv, wird vorzugsweise der 0-te (= n-te) Mode angeregt, der in seiner Frequenz mit der Eigenfrequenz f_β, die ohne Kopplung auftreten würde, übereinstimmt. In diesem Fall bewirkt also die Kopplung eine Entdämpfung des barizentrischen Modes (Phase null zwischen aufeinanderfolgenden Bunchen); daneben werden weitere Eigenfrequenzen angeregt bis zur Ordnung $\nu = \frac{n}{4}$ und ab $\nu = \frac{3}{4}n$. Dieser Fall wäre besonders günstig zu beeinflussen, weil an den Pick-up-Platten nur Frequenzen bis $n/4T_o$ (T_o = Umlaufzeit) aufträten.

---

[1] Dieses Ergebnis folgt bereits aus der Symmetrie der Anordnung. Es muß daher auch im allgemeinen Fall beliebiger (aber gleicher) Kopplungen zwischen den Bunchen gelten.