Der Hawking-Effekt

Diplomarbeit

vorgelegt von

Timor Saffary
II. Institut für Theoretische Physik
Universität Hamburg

09. Februar 2001

Gutachter der Diplomarbeit:

Prof. Dr. K. Fredenhagen
Prof. Dr. G.Mack

Der Hawking-Effekt

Abstract:

The subject of this diploma thesis is the Hawking-Effect. We study Fredenhagen and Haag's proof of the Hawking-Radiation [FH90] in the framework of a semiclassical theory, the quantum field theory in curved spacetime. In particular we give an exact derivation for the short distance behaviour of the two-point function on the Schwarzschild radius.

Zusammanfassung:

Gegenstand dieser Arbeit ist der Hawking-Effekt. Es wird im Rahmen der semiklassischen Theorie, der Quantenfeldtheorie in gekrümmter Raumzeit, die Herleitung der Hawking-Strahlung von Fredenhagen und Haag [FH90] näher untersucht. Wir geben insbesondere für das Kurzabstandsverhalten der Zweipunktfunktion auf dem Schwarzschild-Radius eine exakte Herleitung.

Inhaltsverzeichnis

Einführung **7**

1 Die mathematische Struktur der Raumzeit in der ART **11**
1.1 Grundbegriffe . . . 11
1.2 Kausale Struktur der Raumzeit . . . 12
1.3 Gravitationskollaps und Schwarze Löcher . . . 15
1.3.1 Die Einsteinschen Feldgleichungen . . . 15
1.3.2 Die Geometrie der Schwarzschild- und Kruskal-Raumzeit 16
1.3.3 Singularitäten . . . 20
1.3.4 Gravitationskollaps . . . 21
1.3.5 Schwarze Löcher und ihre Eigenschaften . . . 22
1.3.6 Die Hawking-Strahlung . . . 24

2 Mikrolokale Analysis **27**
2.1 Wellenfrontmengen . . . 28
2.2 Pseudodifferentialoperatoren, Mikroträger . . . 31
2.2.1 Pseudodifferentialoperatoren . . . 31
2.2.2 Mikroträger . . . 37
2.2.3 Die Mikrolokalitätseigenschaft . . . 39
2.3 Ausbreitung von Singularitäten . . . 40

3 Quantenfeldtheorie in gekrümmter Raumzeit **43**
3.1 Der algebraische Zugang zur Quantenfeldtheorie . . . 43
3.1.1 Das freie Klein-Gordon-Feld . . . 45
3.2 Physikalische Zustände . . . 48
3.2.1 Hadamard-Zustände . . . 49
3.2.2 Die mikrolokale Spektrumsbedingung . . . 53
3.3 Detektoren . . . 54

4 Herleitung der Hawking-Strahlung **57**
4.1 Hauptstrang des Beweises . . . 57
4.2 Beweis von Lemma 4.1 . . . 63
4.3 Beweis von Lemma 4.2 . . . 70

A KMS-Zustände und ihre Stabilität **73**
A.1 KMS-Zustände 74
A.2 Die Menge der KMS-Zustände 77
A.3 Stabilität von KMS-Zuständen 78

Notation **83**

Literaturverzeichnis **84**

Einführung

Die vier bekannten Wechselwirkungen sind die Gravitation, die elektrodynamische, die schwache und die starke Wechselwirkung. Man kann die Existenz anderer Kräfte nicht ausschließen. Sollten sie doch existieren, wozu es keinen experimentellen Hinweis gibt, müßten sie extrem schwach sein. Die letzten drei werden mit dem Standardmodell, einer Kombination der Weinberg-Salam-Theorie (elektroschwache Wechselwirkung) und der Quantenchromodynamik (starke Wechselwirkung), sehr erfolgreich beschrieben. Bis heute ist kein Experiment bekannt, das das Standardmodell falsifizieren könnte, im Gegenteil, viele experimentelle Befunde werden äußerst genau mit dieser Theorie beschrieben (z.B. in der Elektrodynamik das magnetische Moment des Elektrons). Die am längsten bekannte Gravitation widersetzt sich jedoch immer noch erfolgreich einer Vereinheitlichung aller vier Wechselwirkungen durch eine Theorie. Die Quantisierung der Gravitation ist trotz großer Anstrengungen der physikalischen Gemeinschaft nicht gelungen. Dies liegt zum einen daran, daß die Quantennatur der Gravitation bei ganz kleinen Abständen, erst ab der sogenannten Plancklänge

$$L_P = \left(\frac{G\hbar}{c^3}\right)^{\frac{1}{2}} \approx 10^{-35} m,$$

erwartet werden, während man gegenwärtig Abstände in der Größenordnung von bis zu $10^{-19} m$ auflösen kann. Zum anderen ist die Kopplungskonstante der Gravitation im Gegensatz zu denen der anderen Kräfte dimensionsbehaftet. Zuletzt gibt es eine konzeptionelle Unstimmigkeit bei der Beschreibung der Kräfte. Während in der allgemeinen Relativitätstheorie Massen die Raumzeit bestimmen, ist in der Quantenfeldtheorie die Raumzeit als Schauplatz für Teilchen vorgegeben.
Es gibt unterschiedliche Ansätze für die Vereinheitlichungstheorie (z.B. Stringtheorie, kanonische Quantisierung der klassischen Gravitation, etc.), die wir jedoch in dieser Arbeit nicht behandeln werden. Statt dessen werden wir uns mit einer semiklassischen Theorie beschäftigen, der Quantenfeldtheorie in gekrümmter Raumzeit (QFT in GRZ). Semiklassisch deshalb, da man in dieser Theorie Quantenfelder auf einem klassischen, im allgemeinen gekrümmten Gravitationsfeld betrachtet, das durch die allgemeine Relativitätstheorie beschrieben wird.

In dieser Theorie wird also die Quantennatur der Gravitation vernachlässigt. Man kann diese Theorie, deren Gültigkeitsbereich bis zur Plancklänge reichen sollte, als Approximation einer endgültigen Vereinheitlichungstheorie verstehen. Es wird erwartet, daß die QFT in GRZ in der Lage sein wird, die Physik des frühen Universums als auch die bei starken Gravitationsfeldern, z.B. schwarzen Löchern, deren Schwarzschildradius wesentlich größer als die Plancklänge ist, zu beschreiben.
Bei der Formulierung der QFT in GRZ kann man den im Minkowskiraum bewährten Weg leider nicht gehen, denn hier hat man ja bei der Definition des Vakuumzustandes die Poincaré-Invarianz ausgenutzt. Beim Übergang zu gekrümmten Raumzeiten geht diese Eigenschaft jedoch verloren, und man ist gezwungen, die Theorie lokal zu beschreiben. Es hat sich herausgestellt, daß man mit dem algebraischen Zugang dieses Problem umgehen kann. Bei der algebraischen Beschreibung der QFT, bis jetzt gelten mit einigen Ausnahmen alle Anstrengungen dem skalaren Feld als "Testmodell", geht man zunächst von einer Observablenalgebra aus, auf der dann die Zustände definiert werden. Die Menge der Zustände ist zunächst zu groß, und man selektiert aus dieser die physikalisch sinnvollen (mit Hilfe der Hadamard-Bedingung) heraus. Seit einigen Jahren erlebt die QFT in GRZ einen Aufschwung, denn es ist gelungen, die leistungsfähigen Werkzeuge der mikrolokalen Analysis bei der Aufstellung dieser Theorie sehr erfolgreich einzusetzen. Es konnten früher sehr schwer bearbeitbare Probleme, wie beispielsweise die Beziehung verschiedener Auswahlbedingungen an physikalische Zustände (Hadamard-Zustände, adiabatische Vakua) zueinander, oder die Konstruktion von wechselwirkenden skalaren Quantenfeldtheorien, nun einfacher gelöst werden.
Das prominenteste Beispiel, das im Rahmen der QFT in GRZ vorhergesagt wird und Gegenstand dieser Arbeit ist, ist die Hawking-Strahlung. Hawking entdeckte bei der Untersuchung der skalaren QFT in GRZ, daß ein schwarzes Loch der Masse M thermische Strahlung der Temperatur

$$T_H = \frac{c^3\hbar}{8\pi MG} = \frac{a}{2\pi}\frac{\hbar}{c}$$

abgibt und damit ständig an Masse verliert [Haw75]. Leider bekommt man bei der Untersuchung statischer schwarzer Löcher keine direkte Information über den Einfluß des Kollapses auf die thermische Strahlung. Fredenhagen und Haag haben in ihrem Beweis der Hawking-Strahlung diesen Mangel beseitigt, in dem sie gezeigt haben, daß der Grundzustand zu ganz frühen Zeiten (also vor dem Kollaps) zu ganz späten Zeiten (nach dem Kollaps) und aus großer Entfernung einem KMS-Zustand, d.h. einem thermischen Zustand, mit der Temperatur T_H entspricht [FH90]. Dabei haben sie angenommen, daß das Gravitationsfeld nur von der Masse des Sternes erzeugt wird, und daß die Zweipunktfunktion die Hadamard-Form besitzt. Bachelot konnte mit Hilfe von Funktionalanlytischen Methoden ebenfalls einen Beweis für den Hawking-Effekt geben [Bac99]. Hessling behandelt den Hawking-Effekt bzgl. der Kerr-metrik [Hes], und Salehi betrachtet ihn im Falle eines Oppenheimer-Snyder-Modells [Sal].

Der Hawking-Effekt steht in engem Zusammenhang mit dem Unruh-Effekt, daß nämlich ein gleichförmig beschleunigter Beobachter im Minkowskiraum sich wie in einem thermischen Bad der Temperatur $T = \frac{ak}{2\pi}$, a ist die Beschleunigung des Beobachters, fühlen würde [Unr76]. Der Hawking-Effekt in der Schwarzschildregion der Kruskal-Raumzeit ist das Analogon des Unruh-Effektes im Rindlerkeil der Minkowski-Raumzeit.
Eine experimentelle Bestätigung der Hawking-Strahlung gibt es bisher noch nicht. Es existieren lediglich Vorschläge für potentielle Nachweisverfahren dieses Effektes, beispielsweise mit Hilfe von Teilchenbeschleunigern [Ros94a], [Ros94b].

In dieser Arbeit geben wir keinen neuen Beweis der Hawking-Strahlung, sondern beschäftigen uns mit dem Beweis von Fredenhagen und Haag [FH90]. Ziel dieser Arbeit ist es, erstens diesen Beweis etwas ausführlicher zu formulieren, und zweitens bei der Analyse der Zweipunktfunktion $\Lambda_G^{(2)}$ ihr Kurzabstandsverhalten exakter zu studieren. Genauer wird in dieser Arbeit von der Hadamard-Form von $\Lambda_G^{(2)}(r_1, r_2, \Omega_{12})$ ausgegangen und Grenzwertbetrachtungen $r_i \to r_0$, wobei r_0 der Schwarzschild-Radius ist, erst zum Schluß gemacht. Es wird gezeigt, daß sich an dem Ergebnis von [FH90] nichts ändert.
Wir wollen jetzt die Struktur dieser Arbeit kurz besprechen.
Das erste Kapitel gilt der mathematischen Struktur der allgemeinen Relativitätstheorie, und zwar in dem Maße, als es für das Verständnis der QFT in GRZ und der Hawking-Strahlung notwendig ist.
Im zweiten Kapitel wird eine kompakte Einführung in die mikrolokale Analysis gegeben, die, wie oben schon erwähnt, für das Verständnis der neueren Konzepte der algebraischen QFT, speziell der mikrolokalen Formulierung der Hadamard-Bedingung an physikalische Zustände, unabdingbar ist. Wir behandeln beide Zugänge zu dem Begriff der Wellenfrontmenge gleichberechtigt, den über die Fourier-Transformation und den über die Pseudodifferentialoperatoren. Zum Schluß wird eines der wichtigsten Ergebnisse dieser Disziplin besprochen, nämlich das Theorem über die Ausbreitung von Singularitäten.
Das dritte Kapitel behandelt die QFT in GRZ, die Theorie, die dieser Arbeit zu Grunde liegt. Wir beschränken uns hier auf das skalare Feld. Es werden der algebraische Zugang und in diesem Rahmen physikalische Zustände, die mikrolokale Spektrumsbedingung und Detektoren besprochen.
Nun sind wir gut gewappnet für den Beweis der Hawking-Strahlung, der im vierten Kapitel gegeben wird. Damit man beim Beweis die Übersicht besser behält, werden die Beweise der beiden Lemmata, die Spaltung von f^T in zwei Wellenpakete

$$f^T(t, r^*) \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} f_-^T(t, r^*) + f_+^T(t, r^*)$$

und das Kurzabstandsverhalten der Zweipunktfunktion auf der r_0-Sphäre

$$\lim_{r_1, r_2 \to r_0} \widehat{D_1}\widehat{D_2}\Lambda_G^{(2)}(r_1, r_2, \Omega_{12})$$

erst am Ende des Kapitels diskutiert.
In dieser Arbeit behandeln wir thermische Zustände, die sogenannten KMS-Zustände. Zum einen wird bei der Definition eines Detektors wesentlich vom Unruh-Effekt Gebrauch gemacht, und zum anderen beschreibt die Hawking-Strahlung einen thermischen Zustand. Deshalb kann der interessierte Leser mehr über die KMS-Zustände und ihre Stabilitätseigenschaften im Anhang erfahren. Ziel dieser Exkursion ist es, dem Leser einen kleinen Überblick über dieses Thema zu geben, insbesondere die Begründung dafür, warum die KMS-Zustände als thermische Gleichgewichtszustände behandelt werden können.

Kapitel 1

Die mathematische Struktur der Raumzeit in der ART

1.1 Grundbegriffe

Das mathematische Modell für die gekrümmte Raumzeit ist das Paar $(\mathcal{M}, g)$, wobei $\mathcal{M}$ eine vierdimensionale, differenzierbare Mannigfaltigkeit und g eine Lorentz-Metrik, d.h. ein symmetrisches, differenzierbares, und nicht ausgeartetes Tensorfeld vom Typ (0,2) (also zweifach kovariant) und Signatur -2 ist. Die Lorentzmetrik erlaubt es, ein bezüglich Koordinatentransformationen invariantes Volumenelement zu definieren:

$$d\mu(x) := \sqrt{-g(x)}d^4x,\ g(x) := \det(g_{\mu\nu}(x)) \neq 0$$

Der Minkowski-Raum $(\mathbf{R}^4, \eta)$ ist eine Raumzeit ohne Krümmung mit der Metrik $\eta_{\mu\nu} := \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$.

Der Abstand zweier Punkte der Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ ist durch das Infimum der Kurvenlänge $l := \int dt \sqrt{g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})}$ definiert. Dieses Variationsproblem führt zu den Euler-Lagrange-Gleichungen, den sogenannten Geodätengleichungen:

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma^\mu{}_{\nu\rho}\dot{x}^\nu\dot{x}^\rho = 0 \qquad \text{mit}$$
$$\Gamma^\mu{}_{\nu\rho} = \frac{1}{2}g^{\mu\lambda}\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}g_{\rho\lambda} + \frac{\partial}{\partial x^\rho}g_{\nu\lambda} + \frac{\partial}{\partial x^\lambda}g_{\nu\rho}\right).$$

Die Christoffel-Symbole $\Gamma^\mu{}_{\nu\rho}$ definieren auf dem Tangentialbündel genau einen sogenannten Zusammenhang, hier den Levi-Civita-Zusammenhang. Der

Levi-Civita-Zusammenhang ermöglicht einen Isomorphismus zwischen zwei Tangentialräumen. Anders ausgedrükt man kann Vektoren aus verschiedenen Tangentialräumen durch Paralleltransport miteinander vergleichen. Über die Vertauschbarkeit der zweiten kovarianten Ableitung definiert man den Riemannschen Krümmungstensor $R^m{}_{ikl}$, der die Krümmung des Raumes beschreibt:

$$\left(A_{i;k}\right)_{;l} - \left(A_{i;l}\right)_{;k} = \left(\Gamma^m{}_{il,k} - \Gamma^m{}_{ik,l} + \Gamma^n{}_{il}\Gamma^m{}_{nk} - \Gamma^n{}_{ik}\Gamma^m{}_{nl}\right)A_m =: R^m{}_{ikl}A_m,$$
$$\text{wobei} \qquad A_{i;k} := \partial_k A_i - \Gamma^m_{ik}A_m$$

die kovariante Ableitung ist. Der Riemann'sche Tensor ist im flachen Raum (Minkowski-Raum) identisch Null und ist der einzige Tensor vierter Stufe, der aus dem metrischen Tensor und dessen ersten und zweiten Ableitungen konstruiert werden kann mit der Eigenschaft, daß er linear in den zweiten Ableitungen ist. Dies ist eine der Forderungen für die Herleitung der Einstein'schen Feldgleichungen. Durch Kontraktion des Riemann'schen Krümmungstensors galangt man zum sogenannten Ricci-Tensor $R_{il} := R^k{}_{ikl}$ und durch abermalige Verjüngung zu seiner Spur, dem sogenannten Krümmungsskalar $R := R^i{}_i$. Der Ricci-Tensor ist aus Symmetriegründen der einzige nicht triviale durch Verjüngung erzeugbare Tensor zweiter Stufe. Der Ricci-Tensor reiht sich ein unter den schon bekannten Tensoren zweiter Stufe (metrischer Tesor, Energie-Impuls-Tensor) und taucht in den Feldgleichungen wieder auf.
Man kann sich fragen, ob umgekehrt die Vorgabe eines beliebigen Krümmungstensors den metrischen Tensor eindeutig bestimmt. Man findet, daß dies im allgemeinen nicht möglich ist. Der metrische Tensor ist aus dem Krümmungstensor ableitbar, wenn die folgenden Bianchi-Identitäten gelten:

$$R_{\mu\nu[\rho\sigma;\delta]} := R_{\mu\nu\rho\sigma;\delta} + R_{\mu\nu\sigma\delta;\rho} + R_{\mu\nu\delta\rho;\sigma} = 0$$

Durch Kontraktion erhält man die folgenden Identitäten für den Ricci-Tensor:

$$\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right)_{;\nu} = 0.$$

1.2 Kausale Struktur der Raumzeit

Da der Tangentialraum $T_x\mathcal{M}$ an jedem Punkt $x \in \mathcal{M}$ isomorph zum Minkowskiraum ist, können wir mit Hilfe des metrischen Tensors g_x Vektoren $v \in T_x\mathcal{M}$ in zeitartige ($g_x(v,v) > 0$), lichtartige ($g_x(v,v) = 0$) und raumartige ($g_x(v,v) < 0$) Vektoren aufteilen. Sind die Tangenten an jedem Punkt einer Kurve zeit-, licht- bzw. raumartig, so bezeichnen wir sie als zeit-, licht- bzw. raumartig. Ist die Tangente an jedem Punkt entweder zeit- oder lichtartig, so spricht man von einer kausalen Kurve. Kausalen Kurven können wohldefinierte Längen, die Eigenzeit, zugeordnet werden. So sind z.B. zeitartige Geodäten

kausale Kurven mit maximaler Eigenzeit. Der offene Lichtkegel V_x besteht aus allen lichtartigen Vektoren in x und zerfällt in zwei Zusammenhangskomponenten mit positiver bzw. negativer Zeitkomponente. Falls eine globale, stetige Zuordnung von V_x^+ und V_x^- gemacht werden kann, so nennt man die Raumzeit $(\mathcal{M}, g)$ zeitorientierbar, und man unterscheidet zwischen dem Zukunftslichtkegel V_x^+ mit positiver Zeitkomponente und dem Vergangenheitslichtkegel V_x^- mit negativer Zeitkomponente. Existiert eine globale, stetige Zuordnung von rechts- und linkshändigen Dreibeinen, so spricht man von einer raumorientierbaren Raumzeit.
Die chronologische (kausale) Zukunft $I^+(x)$ $(J^+(x))$ von $x \in \mathcal{M}$ ist die Menge aller Punkte $y \in \mathcal{M}$, so daß stets eine zukunftsgerichtete zeitartige (kausale) Kurve $\lambda(t)$ mit $\lambda(0) = x$ und $\lambda(1) = y$ existiert, d.h. $J^+(x)$ enthällt all' diejenigen Punkte der Raumzeit, die ein bei x gesendetes Signal empfangen können. Die Definition der chronologischen bzw. kausalen Vergangenheit erfolgt entsprechend.
Das kausale Abhängigkeitsgebiet $D(\mathcal{O})$ einer offenen Menge $\mathcal{O} \subset \mathcal{M}$ ist definiert als die Menge aller Punkte $x \in \mathcal{M}$, so daß jede nicht erweiterbare kausale Kurve durch x die offene Menge $\mathcal{O}$ schneidet. Bei von x ausgehenden zukunfts- bzw. vergangenheitsgerichteten kausalen Kurven spricht man von $D^-(\mathcal{O})$ bzw. $D^+(\mathcal{O})$. Für eine Menge S ist immer $S \subset D^+(S) \subset J^+(S)$, und ist S achronal, also je zwei beliebige Punkte aus S können nicht durch eine zeitartige Kurve verbunden werden (d.h. es existieren keine $x, y \in S$ mit $x \in I^+(y)$), so gilt $D^+(S) \cap I^-(S) = \emptyset$.

Definition 1.1 *Eine Cauchy-Fläche ist eine abgeschlossene, achronale Menge $\Sigma \subset \mathcal{M}$ mit $D(\Sigma) = \mathcal{M}$. Raumzeiten $\mathcal{M}$ bestückt mit einer Cauchy-Fläche bezeichnet man als global hyperbolisch.*

D.h. die Cauchy-Fläche ist eine raumartige Hyperfläche, die von kausalen nicht erweiterbaren (zukunfts- und vergangenheitsgerichteten) Kurven genau einmal geschnitten wird. Im Minkowski-Raum sind alle Hyperflächen mit $t =$ const Cauchy-Flächen. Ein Gegenbeispiel für eine Cauchy-Fläche ist der Hyperboloid $x^2 = 1$, da er nicht von allen lichtartigen Kurven geschnitten wird. Man kann zeigen, daß $\mathcal{M}$ genau dann global hyperbolisch ist, wenn Σ ein vollständiger metrischer Raum ist. Der n-dimensionale Minkowskiraum $(\mathbf{R}^n, \eta)$ ist so ein global hyperbolischer Raum. Weitere physikallische Beispiele $(n = 4)$ mit Krümmung sind die Kruskal-Ausdehnung der Schwarzschild-Mannigfaltigkeit, die de Sitter- und die Robertson-Walker-Raumzeit.

Theorem 1.2 *Sei $(\mathcal{M}, g)$ eine global hyperbolische Raumzeit mit der Cauchy-Fläche Σ, dann ist $(\mathcal{M}, g)$ kausal, und es existiert eine globale stetige Zeitfunktion oder -koordinate t, so dass jede Fläche mit konstantem t eine Cauchy-Fläche ist. Somit kann $\mathcal{M}$ mit Cauchy-Flächen gebättert werden und besitzt die Topologie von $\mathbf{R} \times \Sigma$.(Beweis siehe Wald.)*

Wir beschäftigen uns in dieser Arbeit mit global hyperbolischen Raumzeiten. Bei Raumzeiten mit dieser Eigenschaft können Zukunft und Vergangeheit vollständig durch den Zustand zu einem beliebigen, aber festen Zeitpunkt rekonstruiert werden. Sie sind auch die einzigen, die die Kausalität nicht nur lokal, was ja bei jeder Raumzeit zutrifft, sondern auch global erfüllen. Beispiellsweise erfüllen Raumzeiten mit einer geschlossenen Zeitkurve die Kausalität nicht global und man könnte theoretisch die Vergangenheit beeinfussen. Für global hyperbolische Raumzeiten existiert eine nicht raumartige Geodäte maximaler Länge, die x und y mit $x \in J^+(y)$ verbindet. Diese Eigenschaft ist wichtig für die Untersuchung von Raumzeitsingularitäten. Ein Beispiel für eine nicht global hyperbolische Raumzeit ist der Anti-de Sitter-Raum.

Definition 1.3 $h_E := \mathcal{M} \cap \partial\left(J^-(\mathcal{I}^+)\right)$ *heißt Ereignishorizont, wobei das Gebiet* $\mathcal{I}^+$ *die lichtartige Zukunftsunendlichkeit ist (d.h. die Region für* $t + r \longrightarrow \infty$ *mit endlichem* $t - r$, r *ist die Radialkomponente).*

Eine Isometrie ist eine Abbildung $\kappa : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ mit der Eigenschaft, daß das Zurückziehen (Pullback) bzgl. κ die Metrik nicht verändert, d.h. $\kappa^* g = g$. Das erzeugende Vektorfeld der Isometrien $\kappa_\tau := \kappa(\tau)$ (genauer der einparametrigen Familie von Isometrien) der Raumzeit $(\mathcal{M}, g)$

$$\xi^a(x) = \frac{\partial}{\partial \tau}[\kappa_\tau(x)]^a|_{\tau=0}$$

heißt Killing-Vektorfeld. Umgekehrt erzeugt ein Vektorfeld eine Familie von Isometrien, wenn es die Killing-Gleichung

$$\nabla_a \xi_b - \nabla_b \xi_a = 0 \iff \text{Lie-Ableitung} : \mathcal{L}_\xi g = 0,$$

erfüllt. Das Produkt $\xi_a u^a$ eines Killing-Vektorfeldes ξ^a und einer Tangente u^a an einer Geodäten γ ist entlang γ immer konstant. Da zeitartige Geodäten die Bewegung eines frei fallenden Teilchens in der Raumzeit representieren und Nullgeodäten den Weg von Lichtstrahlen, führt jede einparametrige Familie von Isometrien zu einer Erhaltungsgrösse der Teilchen und Lichtstrahlen.

Definition 1.4 *Ein Killing-Horizont* $\mathcal{K}$ *ist eine lichtartige Hyperfläche der Raumzeit, auf der das Killing-Vektorfeld orthogonal steht.*

Eine Raumzeit mit einem zeitartigem Killing-Vektorfeld bezeichnen wir als stationär, d.h. sie besitzt eine einparametrige Familie von Isometrien mit zeitartigen Kurven als Orbits. Existiert zudem noch eine raumartige, zu den Orbits der Isometrien orthogonale Hyperfläche, so nennen wir die Raumzeit statisch ($\xi_{[a} \nabla_b \xi_{c]} = 0$, Theorem von Frobenius). Die Familie der Isometrien represantieren die ,,Zeittranslationssymmetrie". Die Metrik nimmt in statischen Raumzeiten die folgende Form an:

$$ds^2 = \xi_a \xi^a(\vec{x})dt^2 + h_{ab}(\vec{x})dx^a dx^b$$

Die Abwesenheit der Mischterme $dtdx^\mu$ folgt aus der Orthogonalität der Hyperfläche. Eine nur stationäre Metrik würde sie enthalten.

Definition 1.5 *Eine konvex normale Umgebung ist eine offene Menge $\mathcal{O} \subset \mathcal{M}$ all der Punkte $x, y \in \mathcal{O}$, die durch genau eine Geodäte $\gamma(\tau)$ in $\mathcal{O}$ mit $\tau \in [a, b]$ miteinander verbunden werden können. Eine kausal normale Umgebung einer Cauchy-Fläche ist eine offene Umgebung $\mathcal{N} \supset \Sigma$, so daß für beliebige $x, y \in \mathcal{N}$ mit $y \in J^+(x)$ eine konvex normale Umgebung existiert, die $J^-(y) \cap J^+(x)$ enthält. Weiterhin definiert man den quadratischen geometrischen Abstand von x und y durch*

$$\sigma(x, y) := \pm \left(\int_a^b \left| g_{\mu\nu} \frac{d\gamma^\mu(\tau)}{d\tau} \frac{d\gamma^\nu(\tau)}{d\tau} \right|^{1/2} d\tau \right)^2 . \tag{1.1}$$

Bei raumartigen Geodäten wählt man das positive Vorzeichen und bei zeitartigen das negative. Für jede Cauchy-Fläche kann stets eine kausal normale Umgebung gefunden werden.

1.3 Gravitationskollaps und Schwarze Löcher

1.3.1 Die Einsteinschen Feldgleichungen

Die Grundidee der Einstein'schen Gravitationstheorie ist die Geometrisierung der Schwerkraft. Es wird also nach dem allgemeinen Zusammenhang zwischen der Krümmung der Raumzeit und der Masseverteilung gesucht, der dann die Poisson-Gleichung der Newton'schen Gravitationstheorie

$$\Delta\Phi_G = 4\pi G\rho$$

ersetzen soll. Bei der heuristischen Herleitung dieses Gleichungssystems werden folgende (physikalisch plausible) Forderungen erhoben: Sie sollen

- tensiorelle Gleichungen sein und damit unabhängig vom gewählten Koordinatensystem ("Kovarianzprinzip"),
- lokal, d.h. partielle DGLn sein, die den metrischen Tensor und seine Ableitungen am selben Ort verknüpfen (Lokalitätsprinzip). Die Ordnung sollte wie bei allen anderen Feldgleichungen höchstens zwei und linear in der höchsten Ordnung sein,

- bei geeigneter Vernachlässigung (verschwindendes Gravitationsfeld) in die Poisson-Gleichung übergehen,
- den Energie-Impuls-Tensor $T_{\mu\nu}$ als Quelle des Gravitationsfeldes enthalten, da dieser die Materie und die Felder beschreibt,
- im (flachen) Minkowskiraum $T_{\mu\nu}$ zum Verschwinden bringen.

Die ersten vier Bedingungen führen zu der folgenden Gleichung:

$$R_{\mu\nu} + \lambda g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}.$$

Eine nicht verschwindende kosmologische Konstante Λ würde eine Krümmung in einem materiefreien Raum zur Folge haben. Dies wäre jedoch ein Widerspruch zur fünften Forderung. Neuere Untersuchungen weisen auf $\Lambda \neq 0$ hin. Wir können nun die sogenannten Einstein'schen Feldgleichungen

$$G_{\mu\nu} := R_{\mu\nu} + \lambda g_{\mu\nu} R = \kappa T_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^2} T_{\mu\nu} \tag{1.2}$$

aufschreiben, wobei $G_{\mu\nu}$ der Einstein-Tensor ist. Die Einstein'schen Feldgleichungen sind äquivalent zu einem gekoppelten System zehn (aufgrung der Symmetrie der $g_{\mu\nu}$) nichtlinearer, partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung für die metrischen Komponenten $g_{\mu\nu}$. Man kann versuchen, durch Vorgabe der Materiekonstellation die Raumstrutur exakt zu berechnen. Dies ist jedoch wenig sinnvoll, denn zwar formt die Materie die Raumzeit, doch hat das Feld wegen der Feldenergie aufgrund der Masse-Energie-Äquivalenz wiederum einen Einfluß auf die Materie. Die Abhängigkeit der zehn DGLn (1.2) spiegelt sich in den verjüngten Bianchi-Identitäten

$$G^{\mu\nu}{}_{;\nu} = \kappa T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$$

wider. Deshalb bilden Raumstruktur und Bewegung der Materie in diesem Raum ein miteinander eng gekoppeltes System , das nur simultan gelöst werden kann.

1.3.2 Die Geometrie der Schwarzschild- und Kruskal-Raumzeit

Motiviert durch die für uns wichtigsten Gravitationsfelder der Sonne und der Planeten in unserem System, d.h. langsam rotierenden Körpern mit nahezu kugelförmiger Masseverteilung, kann man sich als erste Anwendung der Einstein-Gleichungen die Aufgabe stellen, exakte kugelsymmetrische Lösungen zu finden. Von großer Nützlichkeit für die Bewältigung von Problemen dieser Art ist das

Theorem 1.6 (von Birkhoff) *Jede kugelsymmetrische Vakuumlösung der Einstein'sche Feldgleichungen ist statisch.*

Dieses Theorem ist das Analogon der Aussage in der Elektrodynamik, daß eine kugelsymmetrische Ladungs- bzw. Stromverteilung nicht strahlt. Mit Hilfe dieses Theorems kann man zeigen, daß die sogenannte Schwarzschild-Lösung mit dem Linienelement

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 \left(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2\right) \qquad (1.3)$$

$$r_0 := 2M := \frac{2Gm}{c^2}$$

die einzige rotationssymmetrische Lösung der Feldgleichungen ist. Die Größe $2M$ heißt Schwarzschild-Radius, Gravitationsradius oder Schwarzschild-Horizont und liegt bei unseren Himmelskörpern weit im Innern ($2M_\odot = 2,96km$, $2M_{Erde} = 8,8mm$). Man erkennt sofort zwei singuläre Stellen dieser Metrik, bei $r = 2M$ und $r = 0$. Durch eine Koordinatentransformation kann man zeigen, daß die Raumzeit bei $r = 2M$ trotz $g_{rr} \to \infty$ nicht wirklich singulär ist. Diese Pathologie ist vielmehr auf die falsche Wahl des Koordinatensystems zurückzuführen, ähnlich dem Fall bei Kugelkoordinaten bei $r = 0$ und $\vartheta = 0$. Man beachte, daß die beiden Koordinaten t und r beim Überschreiten des Schwarzschildradius ihre Rollen als zeitartige und raumartige Koordinaten vertauschen, denn für $r > 2M$ ist die t-Richtung, $\partial/\partial t$, zeitartig ($g_{tt} < 0$) und die r-Richtung, $\partial/\partial r$, raumartig, für $r < 2M$ aber genau umgekehrt. Der Punkt bei $r = 0$ stellt sich als eine echt Raumzeit-Singularität heraus.
Um jedoch die erste Pathologie bei $r = 2M$ zu beseitigen, versucht man geeignetere Koordinaten zu finden, die der Beschreibung der Raumzeit besser gerecht werden. Eine von diesen ist das Kruskal-Koordinatensystem. Man gelangt zu den Kruskal-Koordinaten T und R durch die folgenden Trasformationen:

$$T := 2r_0 e^{\frac{r^*}{2r_0}} \sinh \frac{t}{2r_0}$$

$$R := 2r_0 e^{\frac{r^*}{2r_0}} \cosh \frac{t}{2r_0}$$

Hier ist $r^* := r + r_0 \ln\left(\frac{r}{r_0} - 1\right)$ die sogenannte Schildkrötenkoordinate. Die Schwarzschild-Metrik schreibt sich in diesen neuen Koordinaten als

$$ds^2 = \frac{32M^3}{r} e^{-\frac{r}{r_0}} \left(dT^2 - dR^2\right) - r^2 \left(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2\right) \qquad (1.4)$$

mit $r = r(T, R)$ für $R^2 - T^2 > -4r_0^2$. Somit können wir mit der obigen Metrik die Schwarzschild-Raumzeit in die Kruskal-Raumzeit

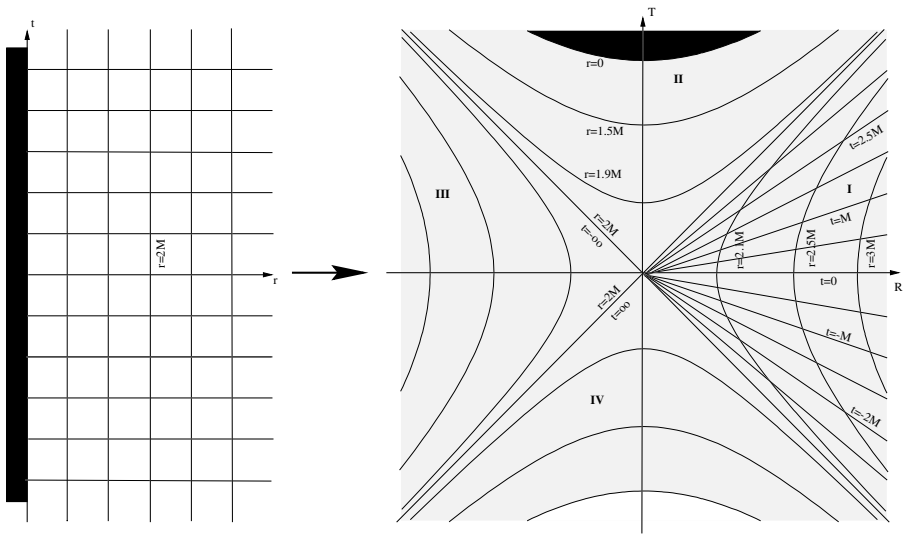

Abbildung 1.1: *Einbettung der Schwarzschild-Raumzeit in die Kruskal-Szekeres-Raumzeit*

‘

$$\mathcal{K} := \{(T,R) \in \mathbf{R}^2, R^2 - T^2 > -4r_0^2\} \times S^2$$

einbetten. Man kann zeigen, daß die Kruskal-Raumzeit die maximale analytische Erweiterung der Schwarzschild-Raumzeit ist. Die Beziehung zwischen den alten Kordinaten (t,r) und den neuen (T,R) wird gegeben durch

$$R^2 - T^2 = \left(\frac{r}{r_0} - 1\right) e^{\frac{r}{r_0}}$$

$$\frac{t}{r_0} = \ln\left(\frac{T+R}{R-T}\right) = 2\tanh^{-1}\left(\frac{T}{R}\right).$$

Der Zusammenhang zwischen der Schwarzschild-Raumzeit und der Kruskalraumzeit ist graphisch in den Abbildungen 1 und 2 dargestellt.

(1.21) zeigt, daß die Kurven $r = \text{const}$ bzw $T = \text{const}$ in der (T,R)-Ebene in Hyperbeln bzw. Geraden übergehen. Man erkennt gut, daß der Außenraum der Schwarzschild-Metrik ($r > 2M$ und $t < \infty$) nur dem rechten Keil, dem Gebiet 1 ($R > \mid T \mid$), enspricht. Beim Überschreiten der Grenze dieses Gebietes, d.h. $t = +\infty$ und $r = 2M$, gelangt man in das "Innere"der üblichen Schwarzschild-Metrik, in das Gebiet 2. Sobald ein Teilchen dieses Gebiet betreten hat, kann es nie mehr entkommen und wird in die Singularität $r = 0$ in einer endlichen

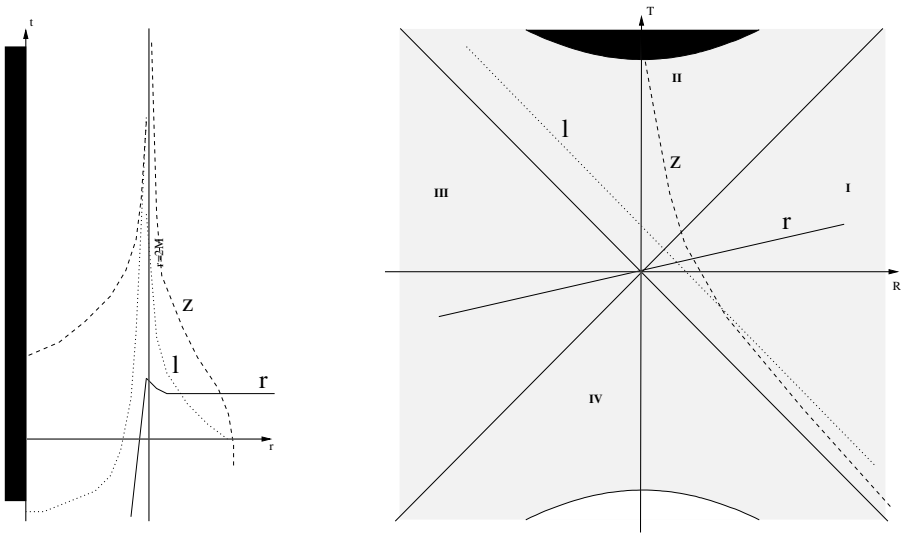

Abbildung 1.2: *Zeitartige (z), lichtartige (l) und raumartige (r) Geodäten in der Schwarzschild-Raumzeit und in der Kruskal-Szekeres-Raumzeit*

Zeitspanne eingesogen. Sogar in diesem Gebiet gesendete Lichtstrahlen können der Singularität nicht entkommen. Diese Situation erklärt sich auch dadurch, daß r mit dem Überschreiten des Schwarzschild-Radiusses die Rolle einer Zeitkoordinate spielt und der Ablauf der Zeit nicht gewendet werden kann. Dies ist der Grund dafür, warum man diese Region das "schwarze Loch" nennt. Das Gebiet 3 hat ganau die "zeitgedrehten" Eigenschaften wie das Gebiet 2 und wird deshalb als "weisses Loch" bezeichnet, d.h. die Singularität hier kann nur Teilchen erzeugen, die dann nach endlicher Zeit das Gebiet 3 verlassen haben werden. Schließlich hat das Gebiet 4 die gleichen Eigenschaften wie das Gebiet 1. Aus diesen Gründen können wir zwar aus unserem Gebiet 1 nur das Gebiet 2 beeinflussen, nicht jedoch 3 und 4. Andererseits ist es nur dem Gebiet 4 möglich, Einfluß auf uns zu nehmen, nicht aber 2 und 3. Physikalisch relevant scheint für uns nur das Gebiet 2 zu sein. Wir werden später sehen, daß ein vollständiger Gravitationskollaps eines sphärisch symmetrischen Körpers unweigerlich in ein schwarzes Loch in der Schwarzschild-Raumzeit führt.
Zum Vergleich der beiden Koordinatensystemen sind in der Abb. 2 zeitartige (z), lichtartige (l) und raumartige (r) Geodäten jeweils in den $(t,r)-$ bzw. $(T,R)-$Koordinatensystemen eingezeichnet. Die Killing-Horizonte werden in der Kruskal-Ebene gerade durch die Geraden $T = \pm X$ gegeben.

Für die Darstellung der analytischen Struktur der Kruskal-Raumzeit eignen sich $Penrose - Diagramme$ der r,t-Flächen gut.

In einem Penrose-Diagramm werden die Null-Geodäten in den r,t-Flächen durch diagonalen Linien mit $\pm 45°$ representiert. Jeder Punkt des Diagramms steht für eine 2-Sphäre der Fläche $4\pi r^2$. Mit Hilfe einer konformen Transfor-

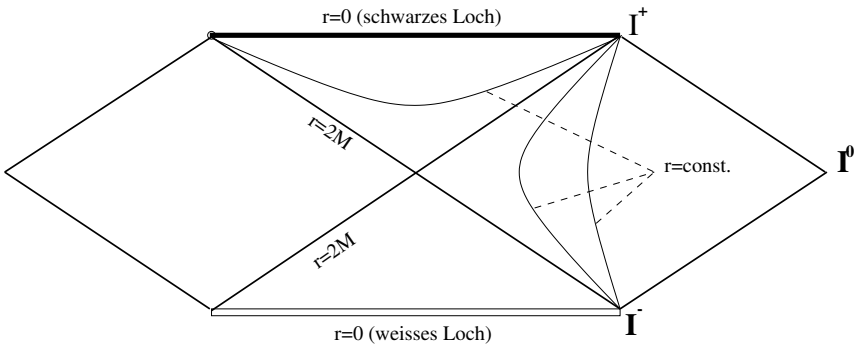

Abbildung 1.3: *Penrose-Diagramm*

mation sind die Unendlichkeiten in eine endliche Distanz gebracht. Die Unendlichkeiten werden durch diagonale Linien $\mathcal{I}^+$ und $\mathcal{I}^-$ und den Punkten I^+, der *zeitartigen Zukunftsunendlichkeit* (in diese Region erstrecken sich zeitartige Kurven), I^-, der *zeitartigen Vergangenheitsunendlichkeit* (aus dieser Region kommen die zeitartigen Kurven), und I^0, der *raumartigen Unendlichkeit* (In diese Region erstrecken sich die raumartigen Schnitte), dargestellt. Die beiden horizontalen Linien sind die Singularitäten, und die beiden diagonalen mit $r = 2m$ sind die Zukunfts- bzw. Vergangenheitshorizonte. Diese separieren die Lösungen, die nicht in $\mathcal{I}^+$ oder $\mathcal{I}^-$ entkommen können.

1.3.3 Singularitäten

Es ist äußerst schwierig, eine zufriedenstellende, allgemeine Definition einer Raumzeit-Singularität zu geben. Es gibt zu diesem Problem verschiedene Ansätze. Man könnte zunächst vom Begriff des singulären Randes ausgehen, d.h. man würde Raumzeitpunkte den singulären Stellen hinzufügen und so eine Manigfaltigkeit mit Rand definieren. Mit dieser Vorstellung könnte man von einer Singularität als einem Ort sprechen, obwohl hier die Metrik gar nicht definiert ist. Die Schwachstelle dieser Vorstellung ist die, daß man kein allgemeines Rezept für die Definition eines singulären Randes geben kann. Zu allen bisher gegebenen Kandidaten (z.B. g-und b-boundary) kann man Beispiele finden, die auf irgend eine Weise pathologische Eigenschaften haben. Mehr Details zu diesem Thema findet man in [HE73][Wala].
Als nächstes kann man versuchen über die Divergenz des Krümmungstensors die Singularität zu definieren, so haben wir im Falle der Schwarzschild-Singularität für die dem Krümmungstensor zugeordnete Invariante $R_{\mu\nu\rho\delta}R^{\mu\nu\rho\delta} \to \infty$ für $r \to 0$ (um eine Koordinatenabhängigkeit auszuschließen, werden die Skalare $\tilde{R} := R, R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ und $R_{\mu\nu\rho\delta}R^{\mu\nu\rho\delta}$ betrachtet,für deren kovarianten Ableitungen $\partial\tilde{R}$ entsprechend). Auch hier ergeben sich Probleme. Man könnte sich jedoch eine Krümmung vorstellen, die für $r \to \infty$ divergiert. Andererseits ergeben sich

für "ebene Gravitationswellen" endliche Werte für die Invarianten, obwohl der Krümmungstensor sehr wohl noch Singularitäten aufweisen kann.
Die am zufriedenstellendste von allen ist die folgende

Definition 1.7 *Eine nicht erweiterbare Raumzeit heißt singulär, falls sie unvollständige Geodäten endlicher Länge besitzt, d.h. sie sind in mindestens einer Richtung nicht fortsetzbar. Weiterhin unterscheidet man zwischen der skalaren Krümmungssingularität ($\tilde{R}, \partial\tilde{R} \to \infty$ entlang der Geodäte), der parallel propagierten Krümmungssingularität ($\tilde{R}, \partial\tilde{R} \to \infty$ in einer parallel propagierten Tetrade entlang der Geodäte) und der Nicht-Krümmungssingularität (keine Divergenzen, weder bei $\tilde{R}, \partial\tilde{R}$ noch bei deren Komponenten).*

Man findet in allen Raumzeiten, die raumartig oder zeitartig geodätisch unvollständige sind, physikalische Pathologien, denn in diesen ist es z.B. möglich, daß man die Existenz eines frei fallenden Teilchens in endlicher Zeit beendet, oder daß vor endlich langer Zeit seine Existenz begann. Genau dieser Sachverhalt wird in den Singularitätstheoremen behandelt. Von diesen gibt es verschiedene Versionen, die jeweils von verschiedenen Annahmen ausgehen und verschieden starke Folgerungen beweisen. Für unsere Belange eignet sich das folgende (Theorem 9.5.1 aus [Wala])

Theorem 1.8 *Sei $(\mathcal{M}, g_{\mu\nu})$ eine global hyperbolische Raumzeit mit $R_{\mu\nu}\xi^\mu\xi^\nu \geq 0$ für alle zeitartigen ξ^μ. Weiterhin existiere eine glatte (mindestens $\mathcal{C}^2$), raumartige Cauchy-Fläche Σ, für die die Spur K der äßeren Krümmung $K \leq C < 0$, $C = const$, überall genügt. Dann kann keine vergangenheitsgerichtete, zeitartige Kurve von Σ eine grössere Länge haben als $\frac{3}{|C|}$. Die Kurven sind unvollständig.*

1.3.4 Gravitationskollaps

Sterne mit Kugelsymmetrie und genügend großer Masse (etwa $2m_\odot$) erleiden, nachdem sie ihre ganze thermonukleare Energie verbraucht haben und sofern sie ihre Masse durch Massenausstoßung nicht verkleinern konnten, aufgrund der großen Gravitationskraft einen Gravitationskollaps mit einem schwarzen Loch als Endzustand. In der Nähe des Schwarzschild-Radius treten Strahlungseffekte auf, die wir hier vernachlässigen. Aufgrund der dann konstanten Masse des Sternes kann die Kruskal-Metrik für den Außenraum verwendet werden. Die Sternoberfläche wird dann durch eine Geodäte repräsentiert, die zur Zeit $t = 0$ ($T = 0$) ausgeht, dann frei fallend den Schwarzschild-Radius durchquert und schließlich zu $r = 0$ kollabiert. Ein Teilchen auf der Sternoberfläche erreicht nach endlicher Eigenzeit

$$\tau = \pi \left(\frac{R^3}{8M}\right)^{\frac{1}{2}}$$

die Singularität. (Hier erhält der Bereich $0 < r \leq 2M$ zum erstenmal eine physikalische Bedeutung.) Allerdings wird die Grenze $2M$, ausgedrückt mit der Schwarzschild-Zeitkoordinate t, erst bei $t = \infty$ erreicht. Dies bedeutet, daß für einen Beobachter im Außenraum der Kollaps unendlich lange dauert. Er wird die Singularität nie erleben. Der kollabierende Stern sendet theoretisch zu allen Zeiten Licht aus. Da die Leuchkraft

$$L \propto e^{-\frac{t}{3\sqrt{3}M}}$$

exponentiell abnimmt, und der Stern nach außen hin äußerst schnell mit der charakteristischen Zeit

$$t_{\text{char}} \approx 2.5 \cdot 10^{-5} \left(\frac{M}{M_\odot}\right) [s]$$

erlischt, ist es berechtigt, von einem schwarzen Loch zu sprechen. Auch ist die Strahlung zunehmend rotverschoben:

$$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \propto e^{\frac{t}{4M}}$$

Hat der Stern einmal den Schwarzschild-Horizont überquert, kann die endgültige Singularität durch nichts mehr aufgehalten werden.

1.3.5 Schwarze Löcher und ihre Eigenschaften

Wir wollen nun eine genaue Defintion des schwarzen Loches geben [Wala]. Hierbei versucht man die Idee einer Region ohne Fluchtmöglichkeit zu präzisieren.

Definition 1.9 *$(\mathcal{M}, g_{\mu\nu})$ heißt eine stark asymptotisch vorhersagbare Raumzeit, falls es in der unphysikalischen Raumzeit $(\tilde{\mathcal{M}}, \tilde{g}_{\mu\nu})$ eine offene Region $\tilde{\mathcal{V}} \subset \tilde{\mathcal{M}}$ mit $\overline{\mathcal{M} \cap J^-(\mathcal{I}^+)} \subset \tilde{V}$ gibt, so daß $(\tilde{\mathcal{V}}, \tilde{g}_{\mu\nu})$ eine global hyperbolische Raumzeit ist. Eine stark asymptotisch vorhersagbare Raumzeit $(\mathcal{M}, g_{\mu\nu})$ besitzt ein schwarzes Loch, falls $\mathcal{M}$ nicht in $J^-(\mathcal{I}^+)$ enthalten ist. Die Region des schwarzen Loches ist dann die Menge $\mathcal{B} := \mathcal{M} \backslash J^-(\mathcal{I}^+)$.*

Das Ereignishorizont eines schwarzen Loches $\mathcal{H} := h_E = \partial(J^-(\mathcal{I}^+))$ ist definitionsgemäß der Rand von $\mathcal{B}$ und damit auch der Rand der Vergangenheit von $\mathcal{I}^+$. Es überrascht einen sehr, daß ein schwarzes Loch nur durch die Masse, der Ladung und den Drehimpuls charakterisiert wird. Alle anderen Eigenschaften des Sternes gehen durch den Kollaps verloren. Diese Aussage ist bekannt als das

Theorem 1.10 (No Hair-) *Das externe gravitative und elektromagnetische Feld eines stationären schwarzen Loches wird durch seine Masse, Ladung und sein Drehmoment vollständig bestimmt.*

Ein schwarzes Loch hat demnach keine anderen Eigenschaften, kein anderes Haar. Man kann weiterhin zeigen, daß alle stationären schwarzen Löcher axial symmetrisch sind. Alle statischen, nicht rotierenden werden nur durch die Masse und die Ladung beschrieben.
Die enge Beziehung zwischen der Thermodynamik, Gravitation und Quantenphysik ist ebenfalls verblüffend [Wal99]. Es hat sich herausgestellt, daß bestimmte Gesetze schwarzer Löcher engste mathematische Ähnlichkeiten mit den gewöhnlichen, bestens bekannten Gesetzen der Thermodynamik haben. Für die Aufstellung dieser Sätze muß etwas Vorarbeit geleistet werden. Für ein stationäres, axialsymmetrisches schwarzes Loch mit der $t-\phi$-orthogonalen Eigenschaft existiert ein zum Ereignishorizont orthogonales Killing-Vektorfeld

$$\xi^\mu = t^\mu + \Omega\phi^\mu,$$

wobei t^μ das Killing-Vektorfeld des statischen schwarzen Loches ist.

Definition 1.11 *In der obigen Gleichung heißt Ω die Winkelgeschwindigkeit des Horizontes.*

Definition 1.12 *Sei $\mathcal{K}$ ein Killing-Horizont mit dem dazu orthogonalen Killing-Vektorfeld ξ^μ, dann heißt die Funktion κ, definiert durch*

$$\nabla^\mu\left(\xi^\nu\xi_\nu\right) = -2\kappa\xi^\mu,$$

die Oberflächengravitation von $\mathcal{K}$.

Die Existenz ist deshalb gewährleistet, da nach Definition $\xi^\nu\xi_\nu = 0$ auf $\mathcal{K}$, muß auch $\nabla^\mu\left(\xi^\nu\xi_\nu\right)$ senkrecht auf $\mathcal{K}$ stehen. Folglich müßen die Vektoren in jedem Punkt auf $\mathcal{K}$ eine proportionale Beziehung haben. Man kann zeigen, daß bei einem stationären, schwarzen Loch der Ereignishorizont ein Killing-Horizont sein muß. Weil die Kruskal-Raumzeit ein stationäres, rotationssymmetrisches schwarzes Loch beschreibt, sind die beiden zueinander orthogonalen Ereignishorizonte h_A und h_B Killing-Horizonte. Man nennt dieses Paar (h_A, h_B) einen verzweigten Killing-Horizont und den Durchschnitt der Horizonte die Bifurkationssphäre.
Wir stellen nun die Hauptsätze der Thermodynamik den Sätzen über die Dynamik schwarzer Löcher gegenüber:

Gesetz	Thermodynamik	schwarzes Loch
0.	$T = const$ für thermisches Gleichgewicht	$\kappa = const$ über allen $\mathcal{K}$
1.	$dU = TdS - PdV + \Omega dJ$	$dM = \frac{\kappa}{8\pi} dA + \Omega_{s.L.} dJ$
2.	$dS \geq 0$ für alle Prozesse	$dA \geq 0$ für alle Prozesse
3.	$T = 0$ kann durch phys. Prozess nicht erreicht werden	$\kappa = 0$ kann durch phys. Prozess nicht erreicht werden

Hier sind M die Masse, J das Drehmoment und A die Oberfläche des schwarzen Loches. Aufgrund der offenkundigen Analogien spricht man von der "Thermodynamik schwarzer Löcher". Der zweite Hauptsatz besagt, daß durch keinen Prozess, z.B. Kollision schwarzer Löcher, die Gesamtoberfläche verkleinert werden kann. Die Planck-Nernst-Formulierung des dritten Hauptsatzes, $S \longrightarrow 0$ für $T \longrightarrow 0$, findet bei schwarzen Löchern keine Entsprechung, da es extreme schwarze Löcher, d.h. mit $\kappa = 0$, bei endlichem $A \neq 0$ gibt.

1.3.6 Die Hawking-Strahlung

Weiter oben haben wir besprochen, daß aus dem Gebiet $r \leq r_s$ weder Teilchen noch Strahlung nach außen entkommen können. Teilchen können jedoch in dieses Gebiet eingesogen werden, wodurch das schwarze Loch an Masse gewinnt. Bei dieser Argumentation haben wir uns jedoch nur auf die klassische Physik beschränkt und quantenmechanische Effekte nicht berücksichtigt. Hawking konnte 1975 zeigen [Haw75], daß aufgrund von quantenfeldtheoretischen Effekten nicht rotierende, ungeladene schwarze Loecher doch nicht 'ganz schwarz und unsichtbar' sind wie bis dahin angenommen, sondern permanent Strahlung, die sogenannte $Hawking - Strahlung$, abgeben und damit auch Masse verlieren. Diese Arbeit von Hawking war deswegen erstaunlich, da er zeigen konnte, dass schwarze Löcher sich wie heiße Körper mit der Temperatur $T = \frac{\hbar\kappa}{2\pi k} = \frac{c^3\hbar}{8\pi MG}$, der sogenannten $Hawking - Temperatur$, verhalten. Wir wollen kurz und qualitativ besprechen, wie die Hawking-Strahlung zustande kommt.
Im Rahmen der Quantenfeldtheorie gibt es im Vakuum permanent Fluktuationen von Quantenfeldern, bei denen in extrem kurzen Zeitabständen 'virtuelle' Teilchen-Antiteilchen-Paare erzeugt werden, die sich sogleich wieder vernichten (Heisenberg'sche Unschärferelation). Geschieht so ein Vorgang nahe genug am Ereignishorizont, so besteht die Möglichkeit für das Teilchen mit negativer Energie noch vor der Vernichtung durch den Ereignishorizont durchzutunneln. Beim Übergang von $r > r_0$ nach $r < r_0$ tauschen nun aber die Raum- und Zeitkoordianaten ihre Rollen, den für die t-Richtung, $\frac{\partial}{\partial t}$, gilt

$$g_{tt} = -\left(1 - \frac{r_0}{r}\right) \begin{cases} < 0, \text{ d.h. zeitartig} & \text{für } r > r_0 \\ > 0, \text{ d.h. raumartig} & \text{für } r < r_0, \end{cases}$$

und für die r-Richtung, $\frac{\partial}{\partial r}$,

$$g_{rr} = \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^{-1} \begin{cases} > 0, \text{ d.h. raumartig} & \text{für } r > r_0 \\ < 0, \text{ d.h. zeitartig} & \text{für } r < r_0. \end{cases}$$

So ist es jezt möglich, daß das außerhalb des schwarzen Loches klassisch verbotene Teilchen mit negativer Energie innerhalb weiter existieren kann. Genauer, beim Übergang wird aus der, für längere Zeiten verbotenen, negativen Zeitkomponente $-\frac{E}{c}$ eine negative räumliche, und damit erlaubte, Komponente, während aus der positiven Raumkomponente $\vec{p}$ eine positive, und damit ebenfalls erlaubte, Zeitkomponente entsteht. Das andere von Anfang an erlaubte Teilchen enkommt einer Annihilation und macht einen Teil der Strahlung aus. Da dieses Teilchen positive Energie besitzt, während das schwarze Loch das Teilchen mit negativer Energie eingefangen hat, verliert das schwarze Loch bei diesem Prozeß an Masse. Die Wahrscheinlichkeit des Tunnelvorganges wird bestimmt durch die Oberflächengravitation κ, denn diese Größe legt fest, wie schnell der Killing-Vektor raumartig wird.
Für ein schwarzes Loch der Masse unserer Sonne $m_\odot = 10^{33} g$ liegt die Hawking-Temperatur deutlich unter der kosmischen Hintergrundstrahlung, was eine experimentelle Überprüfung erschwert. Auch wuerde ein solches schwarzes Loch mehr Masse absorbieren als abstrahlen. Bei kleineren primordialen schwarzen Löchern, die durch Dichtefluktuationen im frühen Universum enstanden sein könnten, wäre die experimentelle Bestätigung wahrscheinlicher. Diese kleineren Löcher wuerden insgesamt mehr Masse abstrahlen. Die Endphase würde explosionsartig ablaufen, denn für $M \to 0$ geht wegen $T \sim \frac{1}{M} \quad T \to \infty$.

Kapitel 2

Mikrolokale Analysis

Eine der grundlegendsten Eigenschaften physikalischer Gleichungen ist ihre Lokalität, d.h. die Verknüpfung von physikalischen Größen zur selben Zeit und am selben Ort oder zumindest in einer infinitesimalen Umgebung des Raumzeitpunktes. Der Zustand in $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ zu einem bestimmten Zeitpunkt legt über die physikalischen Gesetze den Zustand in einer Region $\tilde{\Omega} \subset \Omega$ für spätere Zeiten fest. Effekte außerhalb von Ω können jedoch innerhalb dieses infinitesimalem Zeitintervalls Vorgänge in $\tilde{\Omega}$ nicht beinflussen. Man kann dieses Prinzip auf den Phasenraum übertragen, das Prinzip der Mikrolokalität, also die Änderung der Impulse geschieht mit endlicher Schnelligkeit. Die mikrolokale Analysis beschäftigt sich mit dieser Thematik, sie ist die lokale Analysis im Kotangentialbündel. Die mikrolokale Analysis ist aus zwei Gründen sehr hilfreich in der mathematischen Physik. Zum einen wird der Begriff des singulären Punktes einer Distribution präzisiert. Zum anderen gibt sie eine einfache Beschreibung für die Ausbreitung dieser Singularitäten. In diesem Kapitel halten wir uns an [Hee94],[Kg81] und [Tre80]. Die für diese Arbeit notwendigen Kenntnisse über Distributionstheorie kann man z.B. in [Wal94] erhalten. Ansonsten gibt es die Klassiker [Hör90], [Hör71] und [Dui72]. Eine übersichtliche Einführung findet man in [Jun95] oder aber auch in [Kra99].
Wir wollen diese beiden Punkte etwas genauer formulieren. In der Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen (PDG) ist es möglich, schon aus der Form der Gleichung

$$Pu = f$$
$$P = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha, \qquad a_\alpha \in C^\infty(\Omega), \quad D^\alpha := (-i)^{|\alpha|} \partial^\alpha$$
$$u, f \in \mathcal{D}'(\Omega), \quad \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

auf die Regularität der schwachen (distributionellen) Lösung u, d.h. aus der alleinigen Kenntnis des Differentialoperators P und der Inhomogenität f, recht weitgehend auf Singularitäten von u zu schließen. Hierfür verallgemeinert man

den Begriff des singulären Trägers singsupp(u), also der Menge aller Punkte aus Ω, die keine Umgebung besitzen, in der u als $\mathcal{C}^\infty$-Funktion darstellbar ist, zu der sogenannten Wellenfrontmenge $WF(u)$ von u. Sie ist eine Teilmenge des Kotangentialraumes $\Omega \times \mathbb{R}^n$ von Ω und gibt außer der Singularität selbst noch die Richtung dieses singulären "Verhaltens" von u an.
Man kann über zwei verschiedene Wege zum Begriff der Wellenfrontmenge gelangen, die lokale Fourier-Transformation und die Pseudodifferentialoperatoren (PsDO). Es ist weiterhin möglich, den Singularitätsbegriff für PsDOn entsprechend zu definieren, genannt der Mikroträger μsupp(P). Die enge Beziehung der beiden Größen drückt sich aus in

$$WF(Pu) \subseteq WF(u) \cap \mu\text{supp}(P),$$

der verschärften Form der "Mikrolokalitätseigenschaft"

$$WF(Pu) \subseteq WF(u).$$

In der Theorie der PsDOn spielen elliptische eine besondere Rolle. Man kann beweisen, daß die Anwendung dieser PsDOn auf Distributionen deren Wellenfrontmenge nicht ändert

$$(x_0, \xi_0) \in WF(u) \Longleftrightarrow (x_0, \xi_0) \in WF(Pu), \quad (x_0, \xi_0) \in \Omega \times \mathbb{R}^n$$

Da P genau dann elliptisch ist, wenn (x_0, ξ_0) keine Nullstelle des führenden Symbols p_0 von P ist, und durch jede Nullstelle eine Kurve, die sogenannte Null-Bicharakteristik

$$\gamma : \mathbb{R} \supseteq I \longrightarrow \Omega \times \mathbb{R}^n \quad \text{mit} \quad p_0(\gamma(s)) = 0 \quad \forall s \in I$$

läuft, kann man zeigen, daß unter gewissen Voraussetzungen an p_0 die Singularitäten von u sich längs γ ausbreiten:

$$\exists s \in I : \gamma(s) \in WF(u) \Longrightarrow \forall s \in I : \gamma(s) \in WF(u).$$

2.1 Wellenfrontmengen

In der Distributionstheorie ist uns der Begriff de singulären Trägers singsupp(u) einer Distribution $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ wohlbekannt. Diese Menge enthält all die Punkte aus der offenen Teilmenge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, die keine offene Umgebung besitzen, in der u als $\mathcal{C}^\infty$ darstellbar ist. Die Wellenfrontmenge präzisiert nun diesen Begriff. Als Teilmenge des Kotangentialraumes $\Omega \times \mathbb{R}^n$ gibt sie zusätzlich zu jeder Singularität noch die Richtung, in die sich die Distribution u singulär verhält, an. Wir wollen im folgenden die Wellenfrontmenge einführen und deren Eigenschaften besprechen.

Zunächst einmal wissen wir, daß eine Distribution u in einer Umgebung von x genau dann $\mathcal{C}^\infty$, falls eine Funktion $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ mit $\phi = 1$ in einer x-Umgebung existiert, so daß $\widehat{\phi u}$ schnell abfällt, d.h.

$$\forall N \in \mathbb{N}: \quad \exists C_N \geq 0: \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n: \quad |\widehat{\phi u}(\xi)| \leq C_N (1+|\xi|^2)^{-N}.$$

Man kann sich nun fragen, ob eine Abschwächung der obigen Forderung an die Distribution einen präziseren Glattheitsbegriff mit sich bringt. Wir wollen deshalb den schnellen Abfall nicht für den ganzen Raum, sondern nur für unbeschränkte Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ verlangen.

Definition 2.1 *Eine Teilmenge $\Gamma' \subseteq \mathbb{R}^n$ bzw. $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n-1}_\xi$ heißt kegelförmig bzw. kegelförmig (oder Kegel) in ξ, falls gilt:*

$$\begin{aligned} \xi \in \Gamma' &\Longrightarrow \lambda\xi \in \Gamma', \quad \forall \lambda > 0, \forall \xi \in \Gamma' \quad bzw. \\ (x,\xi) \in \Gamma &\Longrightarrow (x, \lambda\xi) \in \Gamma, \quad \forall \lambda > 0, \forall (x,\xi) \in \Gamma \end{aligned} \tag{2.1}$$

Die Menge aller kegelförmigen Umgebungen von $\xi \in \Gamma'$ bzw. $(x,\xi) \in \Gamma$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{K}(\xi)$ bzw. $\mathfrak{K}(x,\xi)$. Für $v \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ definieren wir die Menge $\Sigma(v) \subseteq \mathbb{R}^n_*$ folgendermaßen: $\xi \in \mathbb{R}^n_*$ liegt genau dann nicht in $\Sigma(v)$, falls ein Kegel Γ' existiert, so daß $\widehat{v}$ $(\in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n))$ in Γ' schnell abfällt.

Σ ist abgeschlossen und ebenfalls kegelförmig in $\mathbb{R}^n_*$. Weiterhin gilt für $v \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ und $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$: $\Sigma(\phi v) \subseteq \Sigma(v)$. Wir sind jetzt in der Lage, eine Definition für die Wellenfrontmenge zu geben. Die oben besprochene zusätzliche Information über die Richtigung der singulären Eigenschaft der Distribution erhalten wir durch die Einbeziehung von Σ.

Definition 2.2 *Für die Distribution $u \in \mathcal{D}'$ heißt die Teilmenge von $\Omega \times \mathbb{R}^n_*$*

$$WF(u) := \bigcup_{x \in \Omega} \left(\{x\} \times \bigcap_{\substack{\phi \in \mathcal{D}(\Omega) \\ \phi = 1 \text{ in } x\text{-Umgebung}}} \Sigma(\phi u) \right) \tag{2.2}$$

die Wellenfrontmenge.

Eine andere Formulierung ist die folgende:

$$(x,\xi) \notin WF(u) \Longleftrightarrow \begin{cases} \exists \phi \in \mathcal{D}, \phi = 1 \text{ in x-Umgebung}, \Gamma' \in \mathfrak{K}(\xi): \\ \forall N \in \mathbb{N}: \exists C_N: \forall \xi \in \Gamma': |\widehat{\phi u}(\xi)| \leq C_N (1+|\xi|^2)^{-N} \end{cases} \tag{2.3}$$

An all denjenigen Punkten x, die nicht in der Wellenfrontmenge enthalten sind, ist somit die Distribution u glatt. Analog zu Umgebungen eines Punktes in Ω spricht man von *mikrolokalen* Untersuchungen bei infinitesimalen Umgebungen eines Punktes in $\Omega \times \mathbb{R}^n_*$.

Satz 2.3 *Für die Wellenfrontmenge $WF(u)$, $u, v \in \mathcal{D}'(\Omega)$, gelten die folgenden Aussagen:*

(i) Für jedes u ist $WF(u)$ abgeschlossen in $\Omega \times \mathbb{R}^n_*$ und kegelförmig in ξ.

(ii) Für die komplexkonjugierte $\overline{u}$ gilt:

$$WF(\overline{u}) = -WF(u), \quad d.h. \quad \big((x,\xi) \in WF(\overline{u}) \Leftrightarrow (x,-\xi) \in WF(u)\big).$$

(iii) Zu jeder abgeschlossenen, kegelförmigen Menge $A \subseteq \Omega \times \mathbb{R}^n_*$ gibt es eine Distribution u mit $WF(u) = A$.

(iv) Für die Summe von u und v gilt: $WF(u+v) \subseteq WF(u) \cup WF(v)$.

(v) Für das Tensorprodukt läßt gilt die folgende Beziehung:

$$WF(u \otimes v) \subseteq WF(u) \times WF(v) \cup ((supp(u) \times \{0\}) \times WF(v)) \cup (WF(u) \times (supp(v) \times \{0\})).$$

(vi) Gegeben sei ein Diffeomorphismus $\chi : \Omega \mapsto \Omega'$, $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{R}^n$. Dann gilt für $WF(u)$ der mittels χ zurückgezogenen Distribution $u \in \mathcal{D}'(\Omega')$:

$$WF(\chi^* u) = \chi^* WF(u) := \{\big(x, {}^t[D\chi(x)]\xi\big) : \big(\chi(x), \xi\big) \in WF(u)\},$$
$$wobei\ \chi^* u(\phi) := u\big(det(D_\chi)^{-1} \phi \circ \chi^{-1}\big),\ \phi \in \mathcal{D}(\Omega').$$

(vii) Es gilt die folgende Beziehung zum herkömmlichen Singularitätenbegriff: $\pi_x(WF(u)) = singsupp(u)$.

Der letzte Punkt zeigt deutlich, daß die Wellenfrontmenge eine Verfeinerung des singulären Trägers darstellt. Die Wellenfrontmenge verhält sich unter Koordinatentransformationen vernünftig, denn nach (vi) transformieren sich ihre Elemente wie Kotangentialvektoren.
Ein prominentes Beispiel soll nun uns helfen, die Größe Wellenfrontmenge besser zu verstehen.

Beispiel 2.4 *Der singuläre Träger $singsupp(\delta_a)$ der Diracschen δ-Distribution $< \delta_a, \phi >:= \phi(a)$, $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, besteht aus dem Punkt $\{a\}$. Wir erwarten also $\emptyset \neq WF(\delta_a) \subseteq \{a\} \times \mathbb{R}^n_*$. Aus*

$$|\widehat{\phi\delta_a}(\xi)| = | < \delta_a, \phi e^{-i\xi} > | = |\phi(a)| = 1$$

schließt man, daß $\widehat{\phi\delta_a}$ konstant und ungleich Null ist und damit in keinem Kegel schnell abfallen kann, also $WF(\delta_a) = \{a\} \times \mathbb{R}^n_*$.

Das Konzept der Wellenfrontmenge ermöglicht uns, die Existenz von Produkten von Distributionen zu überrüfen . Im allgemeinen kann man Distributionen im Gegensatz zu differenzierbaren Funktionen nicht miteinander punktweise multiplizieren. Wir wissen aber schon, daß das Produkt von Distributionen mit disjunktem singulären Träger stets existiert

Satz 2.5 *Gilt für $u, v \in \mathcal{D}'(\Omega)$ und für alle $x \in \Omega$*

$$(x,0) \notin WF(u) \oplus WF(v) := \{(x, \xi+\eta) : (x,\xi) \in WF(u),\, (x,\eta) \in WF(v)\},$$

dann existiert für alle $x \in \Omega$ das Produkt

$$\widehat{\phi^2 uv}(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int \widehat{\phi u}(\eta)\widehat{\phi v}(\xi-\eta)d^n\eta \quad \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \phi = 1 \, in \, U_x,$$

und es besteht die folgende Beziehung:

$$WF(u \cdot v) \subseteq \big(WF(u) \oplus WF(v)\big) \cap WF(u) \cup WF(v).$$

2.2 Pseudodifferentialoperatoren, Mikroträger

Man kann einen anderen Weg als das lokale Verhalten der Fouriertransformation wählen, um zum Begriff der Wellenfrontmenge zu gelangen. Dieser Weg führt über die PsDOen, genauer man bezieht sich auf die Symboleigenschaften derjenigen PsDOen, die die Distribution u glätten. Zunächst wollen wir die PsDOen einführen und einige wirklich grundlegenden Eigenschaften behandeln und möchten diese Aussage ins Mikrolokale übersetzen.

2.2.1 Pseudodifferentialoperatoren

Betrachten wir zunaächst den Differentialoperator mit veränderlichen Koordinaten

$$p(x,D) := \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D_x^\alpha,$$

dann gilt:

$$\begin{aligned} p(x,D)u(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} p(x,D) \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{u}(\xi) e^{ix\xi} d^n\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} p(x,\xi)\widehat{u}(\xi) e^{ix\xi} d^n\xi, \end{aligned}$$

mit der Fouriertransformierten $\widehat{u}$ und $p(x,\xi) := \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x)\xi_\alpha$. Man kann nun den DO mit veränderlichen Koeffizienten verallgemeinern, indem man das Polynom $p(x,\xi)$ durch sogenannte Symbole ersetzt.

Definition 2.6 *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $m \in \mathbb{R}$ und $0 < \delta \leq \rho \leq 1, \delta < 1$. Dann heißt $p \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_\xi)$ ein Symbol der Ordnung m und vom Typ ρ, δ, falls p die folgende Bedingung erfüllt:*

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n : \exists C_{\alpha,\beta} \geq 0 : \Big(|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta p(x,\xi)| \leq C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|^2)^{m+\delta|\beta-\rho|\alpha|}, \quad \forall (x,\xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \Big). \tag{2.4}$$

Den Vektorraum aller Symbole bezeichnen wir mit $S^m_{\rho,\delta} = S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{R}^n)$. Überdies seien

$$S^{-\infty} := \bigcap \{S^m_{\rho,\delta} \,|\, m \in \mathbb{R}\} = \bigcap \{S^m_{\rho,\delta} \,|\, m \in \mathbb{R}\},\ S^\infty_{\rho,\delta} := \bigcup \{S^m_{\rho,\delta} \,|\, m \in \mathbb{R}\}.$$

Der Raum der Symbole wird mit den Halbnormen

$$|p|^{(l)}_{S^m_{\rho,\delta}} := sup\{|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta|(1+|\xi|^2)^{m+\delta|\beta-\rho|\alpha|} : \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n,\ |\alpha+\beta| \leq l,\ (x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}\}$$

zum Fréchet-Raum. Wir werden uns im weiteren Verlauf der Arbeit nur mit Symbolen der Klasse $S^m = S^m_{1,0}$ beschäftigen.

Definition 2.7 *Sei $m' \in \mathbb{R}$ und $0 < \delta' \leq \rho' \leq 1, \delta' < 1$, die übrigen Symbole wie oben definiert. Dann bezeichnet man mit $S^{m,m'}_{\rho,\delta} = S^{m,m'}_{\rho,\delta}(\mathbb{R}^n)$ den Vektorraum aller $p \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n}_{x,x'} \times \mathbb{R}^{2n}_{\xi,\xi'})$, für die gilt:*

$$\forall \alpha, \alpha', \beta, \beta' \in \mathbb{N}_0^n : \exists C_{\alpha,\alpha',\beta'\beta'} \geq 0 : \forall (x,x',\xi,\xi') \in \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n} :$$

$$\Big(|\partial_\xi^\alpha \partial_{\xi'}^{\alpha'} \partial_x^\beta \partial_{x'}^{\beta'} p(x,x',\xi,\xi')| \leq C_{\alpha,\alpha',\beta,\beta'}(1+|\xi|^2)^{m+\delta|\beta|-\rho|\alpha|} (1+|\xi|^2+|\xi'|^2)^{\delta|\beta'|}(1+|\xi'|^2)^{m'-\rho|\alpha'|} \Big). \tag{2.5}$$

Die Elemente von $S^{m,m'}_{\rho,\delta}$ heißen Doppelsymbole.

Auch den Raum $S^{m,m'}_{\delta,\rho}$ kann man mit der Halbnorm

$$|p|^{(l)}_{S^{m,m'}_{\rho,\delta}} := sup\{|\partial_\xi^\alpha \partial_{\xi'}^{\alpha'} \partial_x^\beta \partial_{x'}^{\beta'} p(x,x',\xi,\xi')|(1+|\xi|^2)^{-(m+\delta|\beta-\rho|\alpha|)} (1+|\xi|^2+|\xi'|^2)^{-\delta|\beta'|}(1+|\xi'|^2)^{-(m'-\rho|\alpha'|)} : \alpha, \alpha', \beta, \beta' \in \mathbb{N}_0^n,\ |\alpha+\alpha'+\beta+\beta'| \leq l;\ (x,x',\xi,\xi') \in \mathbb{R}^{4n}\}$$

zum Fréchet-Raum gemacht werden. Wir setzen wieder $S^{m,m'} = S^{m,m'}_{1,0}$. Wir wollen jetzt endlich die Definition von PsDOen geben.

Definition 2.8 *Zu jedem $p \in S^m_{\delta,\rho}$ kann durch*

$$\begin{aligned} p(X, D_x) : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) &\to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \\ u &\mapsto p(X, D_x)u \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} p(X, D_x)u(x) &= \int p(x, D_x)\widehat{u}(\xi)e^{ix\xi}d\xi \\ &= \int\int p(x, D_x)u(x')i(x - x')\xi)dx'd\xi, \qquad u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),\ x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned} \tag{2.6}$$

der Pseudodifferentialoperator (PsDO) $P = p(X, D_x)$ des Symbols p definiert werden. Den Raum der PsDOen bezeichnen wir mit $\mathbb{S}^m_{\delta,\rho}(\mathbb{R}^n)$. Wir setzen

$$\mathbb{S}^m := \mathbb{S}^m_{1,0},\ \mathbb{S}^\infty := \bigcup\{\mathbb{S}^m : m \in \mathbb{R}\},\ \mathbb{S}^{-\infty} := \bigcap\{\mathbb{S}^m : m \in \mathbb{R}\}$$

Die PsDOen aus $\mathbb{S}^{-\infty}$ heißen regularisierend.
Für den PsDO $P \in \mathbb{S}^m_{\delta,\rho}$ definieren wir den zu P formaladjungierten P^* bzw. transponierten ${}^tP$ PsDO durch

$$< Pu, v >=: \overline{< u, P^*\overline{v} >} \quad bzw. \quad < Pu, v >=:< u, {}^tPv > \quad \forall u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

P^* und ${}^tP$ liegen wieder in $P \in \mathbb{S}^m_{\delta,\rho}$.

Die Abbildung

$$S^m_{\delta,\rho}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{S}^m_{\delta,\rho}(\mathbb{R}^n) \qquad p \mapsto p(X, D_x)$$

ist bijektiv und ihre Umkehrabbildung wird mit σ bezeichnet. Jeder PsDO P ist als Abbildung $P : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ linear und stetig, d.h. zu jedem $l \in \mathbb{N}_0$ existiert ein $C_l \geq 0$ und $l' \in \mathbb{N}_0$ mit

$$|Pu|^l_{\mathcal{S}} \leq C_l |p|^{(l')}_{S^m_{\delta,\rho}} |u|^{(l')}_{\mathcal{S}} \quad \forall u \in \mathcal{S},\ P = p(X, D_x) \in S^m_{\delta,\rho}.$$

Für die Konstruktion von PsDOen ist der folgende Begriff sehr hilfreich:

Definition 2.9 *Sei $(m_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$, $m_i \in \mathbb{R}$, eine monoton fallende Folge mit $lim_{i\to\infty} m_i = -\infty$, $p \in S^m_{\delta,\rho}$, und $p_i \in S^{m_i}_{\delta,\rho}$ $\forall i \in \mathbb{N}_0$. p läßt sich aus $(p_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ asymptotisch entwickeln, mit der Schreibweise $p \sim \sum_{1=0}^\infty p_i$, falls gilt:*

$$p - \sum_{i=0}^{N-1} p_i \in S^{m_N}_{\delta,\rho} \quad \forall N \in \mathbb{N}_0.$$

Lemma 2.10 *Seien $(m_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$, $(p_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ wie in der Definition gegeben, dann existiert ein $p \in S^{m_0}_{\delta,\rho}$ mit*

$$p \sim \sum_{i=0}^{\infty} p_i.$$

p ist modulo $S^{-\infty}$ eindeutig festgelegt.

Einige Eigenschaften von Produkten von PsDOen fassen wir zusammen in dem folgenden

Satz 2.11 *Seien $p \in S^m_{\delta,\rho}$, $q \in S^{m'}_{\delta,\rho}$, sowie $P := p(X, D_x)$, $Q := q(X, D_x)$. Dann gilt:*

(i) Die Hintereinanderausführung PQ liegt in $S^{m,m'}_{\delta,\rho}$.

(ii) PQ wird durch das Doppelsymbol

$$p(x,\xi)\dot{q}(x',\xi') =: r(x,x',\xi,\xi') \in S^{m,m'}_{\delta,\rho}$$

erzeugt, d.h. $PQ = r(X, X', D_x, D_{x'})$. Es gilt

$$|r|^{(l)}_{S^{m,m'}_{\delta,\rho}} \leq \max_{i+i'=l} |p|^{(i)}_{S^{m}_{\delta,\rho}} |p|^{(i')}_{S^{m'}_{\delta,\rho}} \quad \forall l \in \mathbb{N}_0.$$

(iii) Sei $r \in S^{m,m'}_{\delta,\rho}$ mit $r(X, D_x) = PQ$. Dann gilt für r

$$r \sim \sum_{\alpha \geq 0} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha_\xi p \cdot (-i)^{|\alpha|} \partial^\alpha_x q.$$

(iv) Aus $p \sim \sum p_i$ und $\sim \sum q_i$ folgt

$$r \sim \sum_{\substack{\alpha \geq 0 \\ i,j \in \mathbb{N}_0}} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha_\xi p_i \cdot (-i)^{|\alpha|} \partial^\alpha_x q_j,$$

d.h. man erhält die asymptotische Entwicklung des Produktes von PsDOen aus denen der beiden Faktoren.

Eine wichtige Klasse von PsDOen bilden die sogenannten ellyptischen.

Definition 2.12 *Ein PsDO $P \in \mathcal{S}^m_{\delta,\rho}$ heißt elliptisch, falls es ein $C_0 > 0$ und ein $R > 0$ gibt, so daß sein Symbol p*

$$|p(x,\xi)| \geq C_0(1+|\xi|)^m, \quad \forall (x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n},\ |\xi| \geq R$$

erfüllt. $Q' \in \mathcal{S}^m_{\delta,\rho}$ heißt Linksparamatrix bzw. Rechtsparamatrix von $Q \in \mathcal{S}^m_{\delta,\rho}$, falls

$$Id - Q'Q \in \mathcal{S}^{-\infty} \quad bzw. \quad Id - QQ' \in \mathcal{S}^{-\infty}.$$

Q' mit beiden Eigenschaften wird Paramatrix von Q genannt.

Sind die Bedingungen aus der Definition für die asymptotische Entwicklung gegeben, so kann ma zeigen, daß für die Elliptizität von p die Forderung $\inf\{|p_0(x,\xi)| :\ (x,\xi) \in \mathbb{R}^n \times S^n\} > 0$ hinreichend ist. Jeder elliptische PsDO $P \in \mathcal{S}^m_{\rho,\delta}$ besitzt eine Paramatrix $Q \in \mathcal{S}^{-m}_{\rho,\delta}$.

Definition 2.13 *Für jedes $s \in \mathbb{R}$ ist der Sobolevraum*

$$H_s(\mathbb{R}^n) := \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : < D_x >^s\ u \in L_2(\Omega)\},$$

$< D_x >^s \in \mathcal{S}^s$ ist ein PsDO mit dem Symbol $(1 = |\xi|^2)$, mit dem Skalarprodukt

$$(u,v) :=\in (1+|\xi|^2)^{2s}\widehat{u}(\xi)\overline{\widehat{u}(\xi)}d\xi, \quad u,v \in H_s$$

ein Hilbertraum.

Wegen $s \leq s' \Rightarrow H_{s'}(\mathbb{R}^n) \subseteq H_s(\mathbb{R}^n)$ setzt man

$$H_\infty(\mathbb{R}^n) := \cap\{H_s(\mathbb{R}^n) :\ s \in \mathbb{R}\} \quad \text{und} \quad H_{-\infty}(\mathbb{R}^n) := \cup\{H_s(\mathbb{R}^n) :\ s \in \mathbb{R}\}.$$

Nach dem Einbettungslemma von Sobolev gilt

$$H_s(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n) \quad \text{und} \quad \exists C_{n,s} \geq 0 :\ \big(|u(x)| \leq C_{n,s} \parallel u \parallel_{H_s} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,\ u \in H_s(\mathbb{R}^n)\big),$$

und insbesondere ist $H_\infty(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Satz 2.14 *Sei $P \in \mathcal{S}^m_{\rho,\delta}$*

(i) Dann ist P auf $H_\infty(\mathbb{R}^n)$ definiert.

(ii) P hat die Abbildungsvorschrift

$$P : H_s(\mathbb{R}^n) \to H_{s-m}(\mathbb{R}^n)$$

und ist als Funktional stetig. Desweiteren gilt:

$$\begin{aligned} P(H_{-\infty}(\mathbb{R}^n)) &\subseteq H_{-\infty}(\mathbb{R}^n) \quad \textit{und} \\ p \in \mathbb{S}^{-\infty} \Rightarrow P(H_{-\infty}) &\subseteq H_\infty \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \end{aligned} \tag{2.7}$$

Definition 2.15 *Der distributionellen Kern $K_P \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_{x'})$ von $P \in \mathbb{S}^m_{\rho,\delta}$ wird durch*

$$< K_P, u \times v > := < Pu, v > \quad \forall u, v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

definiert.
Eine abgeschlossene Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ heißt vom eigentlichen Typ (v.e.T.), falls gilt:

$$(K \times \mathbb{R}^n) \cap M \sqsubseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \quad \wedge \quad (\mathbb{R}^n \times K) \cap M \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \quad \forall K \sqsubset \mathbb{R}^n,$$

wobei "$\sqsubset$: kompakte Teilmenge von" bedeutet. $P \in \mathbb{S}^m_{\rho,\delta}$ heißt v.e.T., falls $supp(K_P)$ v.e.T. ist.

Nach dem Kerntheorem von Schwartz existiert K_P und ist eindeutig. Der PsDO P ist genau dann v.e.T., falls das folgende Kriterium erfüllt ist:

$$\forall K \sqsubseteq \mathbb{R}^n : \exists K' \sqsubseteq \mathbb{R}^n : \forall u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) : \ \big(\mathrm{supp}(u) \subseteq K \Rightarrow \mathrm{supp}(Pu), \mathrm{supp}({}^tPu) \subseteq K'\big)$$

Man findet für $P \in \mathbb{S}^m_{\rho,\delta}$ immer eine Zerlegung $P = P_0 + P'$, wobei $P_0 \in \mathbb{S}^m_{\rho,\delta}$ und $P' \in \mathbb{S}^\infty$ sind. Ein PsDO P v.e.T. läßt sich auf genau eine Weise zu einem stetigen Operator

$$P : \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$$

fortsetzen. Weiterhin sind die drei Restriktionen

$$P : \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n), \ P : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n), \ P : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

in ihren Definitionsbereichen stetig.
Wir hatten angekündigt, daß man mit Hilfe von PsDOen die Wellenfrontmenge einer Distribution ebenfalls charakterisieren kann.

Satz 2.16 *Sei $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, dann gilt für die Wellenfrotmenge*

$$WF(u) = \bigcap_{\substack{P \in S^0 \\ Pu \in \mathcal{C}^\infty}} char(P), \tag{2.8}$$

$$wobei\ char(P) \equiv char(p) := \{(x,\xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n_* :\ p(x,\xi) = 0\}$$

die charakteristische Menge ist.

Zuletzt erwähnen wir die *Pseudolokalitätseigenschaft* in dem folgenden

Satz 2.17 *Gegen sei $P \in S^m_{\rho,\delta}$ mit seinem distributionellem Kern $K_P \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Dann gilt:*

$$singsupp(K_P) \subseteq \Delta := \{(x,x) :\ x \in \mathbb{R}^n\}.$$

Hieraus folgt

$$singsupp(Pu) \subseteq singsupp(u) \tag{2.9}$$

für alle $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ oder $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, falls P v.e.T. ist.

2.2.2 Mikroträger

Nun sind wir in der Lage, den zweiten Zugang zu beschreiten. Als Resultat werden wir neue, zu den schon bekannten äquivalente Definitionen formulieren. Wir werden auf diesem Weg die Symboleigenschaften derjenigen PsDOen ausnutzen, die u glätten. Wir wissen, daß jeder PsDO aus $S^{-\infty}$ $H_{-\infty}$ in $H_\infty \subseteq \mathcal{C}^\infty$ abbildet, d.h. ein Symbol, das in all ihren Ableitungen hinreichend schnell abfällt, erzeugt einen PsDO, der zumindest alle finiten Distributionen (wegen $\mathcal{E}' \subset H_{-\infty}$) zu $\mathcal{C}^\infty$-Funktionen umwandelt. Aufgrund von Ähnlichkeiten zwischen dem Definitionsbereich eines Symbols und der Menge, in der die Wellenfrontmenge liegt, drängt sich einem die folgende Frage auf: Wenn unser Symbol in einer Keilförmigen Menge $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_*$ in allen Ableitungen schnell verschwindet, gilt dann nicht $WF(p(X,D_x)) \cap \Gamma = \varnothing$? Diese Gedanken sollten uns zum weiteren Studium genug motivieren. Wir fangen mit der Definition des zentralen Begriffes.

Definition 2.18 *Der Mikroträger eines PsDOs P bzw.dessen Symbols p $\mu supp(P) \equiv \mu supp(p) \subseteq \mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_*$ ist definiert durch:*

$$(x_0,\xi_0) \notin \mu supp(p) :\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} \exists \Gamma \in \mathfrak{K}(x_0,\xi_0) :\ \forall \alpha,\beta \in \mathbb{N}^n_0,\ N \in \mathbb{N} :\ \exists C_{N,\alpha,\beta} \geq 0 : \\ \forall (x,\xi) \in \Gamma :\ |\partial^\alpha_\xi \partial^\beta_x p(x,\xi) \leq C_{N,\alpha,\beta}(1+|\xi|^2)^{-N}. \end{array} \right. \tag{2.10}$$

Die wichtigsten Eigenschaften fassen wir zusammen in dem folgendem

Satz 2.19 *Gegeben seien die PsDOen $P = p(X, D_x)$, $Q = q(X, D_x)$ mit $p, q \in S^\infty$. Dann gilt:*

(i) $\mu supp(P)$ *ist abgeschlossen in* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n_*$ *und kegelförmig in* ξ.

(ii) $\mu supp(P+Q) \subseteq \mu supp(P) \cup \mu supp(Q)$.

(iii) $\mu supp(PQ) \subseteq \mu supp(P) \cap \mu supp(Q)$.

(iv) $\mu supp(P) \subseteq \Gamma \cap \mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_*$ *für abgeschlossene, kegelförmige* $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_\xi$ *mit* $supp(p) \subseteq \Gamma$.

(v) $\mu supp(P) = \mu supp(Q)$ *für* $P - Q \in \mathcal{S}^{-\infty}$.

(vi) p *fällt in allen Ableitungen in einer kegelförmigen Umgebung von* Γ *für kegelkompakte* $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_*$ *mit* $\mu supp(P) \cap \Gamma = \varnothing$ *ab.*

Wir beschränken uns auf Distributionen über den $\mathbb{R}^n$. Man kann die folgenden Ergebnisse auch auf offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ verallgemeinern, z.B. die Definition der PsDOen von Hörmander gebraucht.
Man kann sich die Frage stellen, ob man bei der Definition der PsDOen nur $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ zulassen darf, oder ob eine Verallgemeinerung auf finite Distributionen $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ doch noch möglich ist.

Satz 2.20 *Seien* $p \in S^\infty$ *und* $P := p(X, D_x)$.

(i) Existiert für $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ *und die offene Menge* $U \subseteq \mathbb{R}^n$) *eine integrierbare Funktion* $f : \mathbb{R}^n_\xi \to \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$, *so daß*

$$|p(x,\xi)\widehat{u}(\xi)| \leq f(\xi) \quad \forall (x,\xi) \in U \times \mathbb{R}^n,$$

dann ist $Pu \in \mathcal{C}(U)$, *und es gilt:*

$$Pu(x) = \int p(x,\xi)\widehat{u}(\xi)e^{ix\xi}d\xi \quad \forall x \in U.$$

Fällt $(x,\xi) \mapsto p(x,\xi)\widehat{u}(\xi)$ *in allen* x*-Ableitungen schnell in* $U \times \mathbb{R}^n_\xi$ *ab, so ist sogar* $Pu \in \mathcal{C}^\infty(U)$.

(ii) Bei $\mu supp(P) = \varnothing$ *gilt die obige Integraldarstellung für alle* $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ *und alle* $x \in \mathbb{R}^n$, *und* P *bildet* $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ *in* $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ *ab. Ist* P *v.e.T., dann wird auch* $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ *in* $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ *abgebildet.*

Für unser Ziel, neue äquivalente Definitionen für die Wellenfrontmenge zu formulieren, müssen wir noch die Begriffe Elliptizität und Paramatrix ins Mikrolokale übesetzen.

Definition 2.21 *$p \in S^m$ heißt elliptisch in $(x_0,\xi_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n_*$, falls es ein $\Gamma \in \mathfrak{K}(x_0,\xi_0)$ und $C, R > 0$ existieren, so daß*

$$|p(x_0,\xi_0)| \geq C(1+|\xi|^2)^m \quad \forall (x_0,\xi_0) \in \Gamma,\ |\xi| \geq R.$$

Man kann zeigen, daß für in $(x_0,\xi_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n_*$ elliptische PsDOen mit $p \in S^m \quad (x_0,\xi_0) \in \mu\mathrm{supp}(p)$ gilt. Daß elliptische PsDOen auch im mikrolokalen Fall eine "mitkrolokale Paramatrix" haben, besagt der folgende

Satz und Definition 2.22 *Zu jedem in $(x_0,\xi_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n_*$ elliptischen PsDO $P \in \mathcal{S}^m$ existieren PsDOen $Q, Q' \in \mathcal{S}^{-m}$ v.e.T. und ein $\Gamma \in \mathfrak{K}_0(x_0,\xi_0)$ mit*

$$\mu supp(Id - PQ) \cap \Gamma = \mu supp(Id - Q'P) \cap \Gamma = \varnothing.$$

Q bzw. Q' heißt (mikrolokale) Rexhts- bzw. Linksparamatrix von P in (x_0,ξ_0). Ferner gilt $\mu supp(Q - Q') \cap \Gamma = \varnothing$, und Q bzw. Q' ist Links- bzw. Rechtsparamatrix in (x_0,ξ_0). Sie heißen daher Paramatrizen von P in (x_0,ξ_0).

All diese Vorbereitungen dienten dazu, um die drei unten angeführten, zur ursprünglichen Definition der Wellenfrontmenge äquivalenten Aussagen formullieren zu können.

Satz 2.23 *Für $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ und $(x_0,\xi_0) \in \mathbb{R}^n \times S_n$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) $(x_0,\xi_0) \notin WF(u)$.

(ii) $\exists \Gamma_0 \in \mathfrak{K}_0(x_0,\xi_0),\ P \in \mathcal{S}^0$ *v.e.T.* : $\mu supp(Id - P) \cap \Gamma_0 = \varnothing \ \wedge\ Pu \in \mathcal{C}^\infty$.

(iii) $\exists \Gamma_0 \in \mathfrak{K}_0(x_0,\xi_0) : \forall P' \in \mathcal{S}^\infty$ *v.e.T.* : $(\mu supp(P') \subseteq \Gamma \Rightarrow P'u \in \mathcal{C}^\infty)$.

(iv) $\exists P'' \in \mathcal{S}^\infty$ *v.e.T.* : P'' *ist elliptisch in* $(x_0,\xi_0) \ \wedge\ P''u \in \mathcal{C}^\infty$.

2.2.3 Die Mikrolokalitätseigenschaft

Mit Hilfe des letzten Satzes, genauer der Äquivalenzbeziehung zwischen (i) und (iii) aus dem Satz (2.23), kann man die im Vorwort angekündigte, verschärfte Form der Mikrolokalitätseigenschaft beweisen.

Satz 2.24 *Für $P \in \mathcal{S}^\infty$ und alle $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ gilt*

$$WF(Pu) \subseteq WF(u) \cap \mu supp(P).$$

Die Teilinklusion heißt (Pseudo-)Mikrolokalitätseigenschaft.
Weiterhin gilt für alle $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$WF(\psi u) \subseteq WF(u).$$

Für elliptische PsDOen wird aus der Inklusion eine Gleichheit.

Satz 2.25 *Ist $P \in \mathcal{S}^\infty$ in $(x_0, \xi_0) \in (\mathbb{R}^n) \times (\mathbb{R}^n_*)$ elliptisch, dann gilt sogar:*

$$(x_0, \xi_0) \in WF(Pu) \Leftrightarrow (x_0, \xi_0) \in WF(u),$$

für $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ falls P v.e.T., und für $u \in H_{-\infty}$ sonst.

2.3 Ausbreitung von Singularitäten

Der Ausbreitungssatz wird besagen, daß Singularitäten entlang ganz bestimmter Kurven, den sogenannten Null-Bicharakteristiken, wandern. Dieser Begriff kommt aus der Theorie der partiellen Differentialgleichungen, denn bei der Lösung von PDGen erster Ordnung

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(z_1, ..., z_n)\frac{\partial u}{\partial z_i} + a(z_1, ..., z_n)u = c(z_1, ..., z_n)$$

sind die charakteristischen Gleichungen ein wichtiges Werkzeug. Bei der folgenden Definition beschränken wir uns auf den Fall $a = 0$.

Satz und Definition 2.26 *Für den linearen DO erster Ordnung $H := \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial z_i}$, $a_i \in \mathcal{C}^\infty(U)$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, definieren wir das System der chakteristischen Gleichungen von H durch:*

$$\frac{d\gamma_i}{ds}(s) = a_i\big(\gamma_1(s), ..., \gamma_n(s)\big), \quad i = 1, ..., n.$$

Mit der Anfangsbedingung $\gamma(s_0) = z_0$, $s_0 \in \mathbb{R}$, $z_0 \in U$, existiert ein Intervall $s_0 \in I \subseteq \mathbb{R}$, und auf I genau ein γ, die dem Anfangsproblem genügt. $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(I, U)$ wird charakteristische Kurve von H durch den Punkt z_0 genannt.

Diese Größe ist insofern hilfreich, als die Vorgabe eines Wertes für eine Lösung u in einem Spurpunkt von γ alle Werte von u auf der gesammten Spur von γ determiniert.
Wir werden im folgenden einen ganz speziellen Differentialoperator, den sogenannten Hamilton-Opreator brauchen.

Definition 2.27 *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}_y$ offen und $p_0 \in \mathcal{C}^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^{n+1}_y)$. Dann heißt der lineare PDO erster Ordnung in $2n+2$ Variablen $(y_1, ..., y_{n+1}, \eta_1, ..., \eta_{n+1})$*

$$H_{p_0} := \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial p_0}{\partial \eta_i}\partial_{y_i} - \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial p_0}{\partial y_i}\partial_{\eta_i},$$

mit den charakteristischen Gleichungen

$$\frac{d\gamma_{y_i}}{ds}(s) = \frac{\partial p_0}{\partial \eta_i}\big(\gamma(s)\big), \quad \frac{d\gamma_{\eta_i}}{ds}(s) = \frac{\partial p_0}{\partial y_i}\big(\gamma(s)\big)$$

Hamilton-Operator von p_0. Die charakteristischen Kurven γ von H_{p_0} heißen Bicharakteristiken von p_0.

Da auf den Bicharakteristiken p_0 wegen $H_{p_0}u = 0$ konstant ist, heißt jede Bicharakteristik von p_0, deren Spur eine Nullstelle von p_0 enthällt, $Null-Bicharakteristik$ von p_0.
Wir wollen nun den Ausbreitungssatz für Singularitäten geben.

Satz 2.28 *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ offen, $m \in \mathbb{N}$ und p das Symbol des linearen DOs*

$$\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha, \quad a_\alpha \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)\ \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^{n+1},$$

dessen Symbol p_0, $p_0(y,\eta) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha \eta^\alpha$, nur reellwertige Koeffizienten haben darf. Seien weiterhin $u, f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ mit

$$Pu = f \quad auf\ \Omega,$$

und $\gamma : I \to \Omega \times \mathbb{R}^{n+1}$ eine Null-Bicharakteristik von p_0 auf dem kompakten Intevall I (für $m = 1$ muß $\gamma(I) \subseteq \Omega \times \mathbb{R}^{n+1}$ gefordert werden), auf deren Spur gelte

$$WF(f) \cap \gamma(I) = \varnothing \quad sowie \quad grad_\eta p_0\big(\gamma(s)\big) \neq 0 \quad \forall s \in I.$$

Dann gilt:

$$\exists s_0 \in I : \gamma(s_0) \in WF(u) \Longrightarrow \gamma(I) \subseteq WF(u). \tag{2.11}$$

Kapitel 3

Quantenfeldtheorie in gekrümmter Raumzeit

Bei einer Quantentheorie endlicher Dimension wird die "kinematische Struktur" vollständig von den kanonischen Kommutatorrelationen für die Orts- und Impulsoperatoren beschrieben. Nach dem Stone-von Neumann-Theorem legen diese Kommutatorrelationen die Wahl des Hilbertraumes und der selbstadjungierten Operatoren in diesem Raum bis auf unitäre Äquivalenz fest. Im Falle unendlicher Dimension gilt dieses Theorem nicht mehr, und man erhält bei der Konstruktion einer Quantenfeldtheorie unendlichviele, unitär unäquivalente und irreduzible Darstellungen aus den Kommutatorrelationen. Im flachen Minkowski-Raum kann man mit Hilfe der Poincaré -Symmetrie eine bestimmte Darstellung auszeichnen, genauer definiert man über die Tranlationsinvarianz und die Spektrumsbedingung den Vakuumzustand. Diese Wahl ist mathematisch gleichbedeutend mit der Definition des Teilchenbegriffs. Leider geht beim Übergang zu beliebigen, gekrümmten Raumzeiten diese Poincaré -Symmetrie verloren, und man stößt damit beim Teilchenbegriff auf Schwierigkeiten. Mit dem algebraischen Zugang kann man diese Probleme umgehen. Mit diesem Ansatz ist man in der Lage alle Zustände in den vielen unitär unäquivalenten Hilberträumen gleichwertig zu behandeln ohne sich auf eine bestimmte Darstellung der Kommutatorrelationen festlegen oder eine genaue Teilcheninterpretation geben zu müssen. Für die Auswahl der physikalisch sinnvollen Zustände wird dann ein zur Spektrumsbedingung analoges Kriterium gegeben, die sogenannte Hadamard-Bedingung. Mehr Details findet man in [Haa], [Freb], [Ful89], [Walb] und [BD].

3.1 Der algebraische Zugang zur Quantenfeldtheorie

Bei der üblichen Formulierung einer Quantentheorie geht man von Zuständen als Vektoren eines Hilbert-Raumes aus und definiert dann die Observablen als

die auf die Zustände wirkenden Operatoren. Beim algebraischen Zugang geht man umgekehrt vor, d.h. man betrachtet die Observablen als Elemente einer abstrakten Algebra und führt daraufhin die Zustände als Objekte, die jeder Observablen eine reelle Zahl zuordnen, ein.
Zunächst konstruiert man ein Netz von C^*-Algebren $\mathcal{A}(\mathcal{O})$, d.h. jeder offenen Teilmenge $\mathcal{O} \subset \mathcal{M}$ wird eine C^*-Algebra der in $\mathcal{O}$ meßbaren physikalischen Größen zugewiesen:

$$\mathcal{O} \mapsto \mathcal{A}(\mathcal{O}) \tag{3.1}$$

Ist diese Abbildung einmal bekannt, dann können im Prinzip alle physikalischen Größen berechnet werden. Die obige Zuordnung enthält somit die gesamte physikalische Information. Die C^*-Algebra $\mathcal{A} := \bigcup_{\mathcal{O}} \mathcal{A}(\mathcal{O})$ heißt dann die Algebra der Observablen. Zwei Netze lokaler Observablen $\mathcal{A}(\mathcal{O})$ und $\tilde{\mathcal{A}}(\mathcal{O})$ heißen zueinander isomorph, falls eine Isomorphie $i : \mathcal{A} \to \tilde{\mathcal{A}}$ mit $i[\mathcal{A}(\mathcal{O})] = \tilde{\mathcal{A}}(\mathcal{O})$ existiert. Weiterhin wird gefordert, daß das Netz die folgenden Bedingungen erfüllt:

- Isotonie: $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2 \Longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{O}_1) \subset \mathcal{A}(\mathcal{O}_2)$.
- Lokalität: Für raumartig getrennte $\mathcal{O}_1$ und $\mathcal{O}_2$ gilt $[\mathcal{A}(\mathcal{O}_1), \mathcal{A}(\mathcal{O}_2)] = \{0\}$.
- Primitivität: $\mathcal{A}$ besitzt eine treue irreduzible Darstellung.
- Kausalität: $\mathcal{O}_1 \subset D(\mathcal{O}_2) \Longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{O}_1) \subset \mathcal{A}(\mathcal{O}_2)$.
- Kovarianz: Für jede Isometrie $\kappa : (\mathcal{M}, g) \longrightarrow (\tilde{\mathcal{M}}, \tilde{g})$ existiert eine Isomorphie $\alpha_\kappa : \mathcal{A} \longrightarrow \tilde{\mathcal{A}}$ mit $\alpha_\kappa[\mathcal{A}(\mathcal{O})] = \tilde{\mathcal{A}}(\kappa(\mathcal{O}))$, $\alpha_{id} = id$ und $\alpha_{\kappa_1} \circ \alpha_{\kappa_2} = \alpha_{\kappa_1 \circ \kappa_2}$.

Im Falle des Minkowski-Raumes sind die Isometrien die Poincaré-Transformationen und man erhält die bekannte Forderung der Poincaré-Invarianz. Die ersten drei Bedingungen sind identisch den Haag-Kastler-Axiomen, die die Quantenfeldtheorie im Minkowski-Raum algebraisch formuliert haben.
Der Zustand auf dieser Observablenalgebra $\mathcal{A}$ wird durch das lineare Funktional $\omega : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $\omega(\mathbb{1}) = 1$ (Normiertheit) und $\omega(A^*A) \geq 0 \ \ \forall A \in \mathcal{A}$ (Positivität) repräsentiert. Der Zustand ω nimmt also die Rolle des Erwartungswertfunktionals ein. Spätestens hier sieht man, daß die *-Algebra-Struktur nicht genügt und für Messungen die C^*-Algebra-Struktur notwendig ist.
Der Zusammenhang zwischen der algebraischen und der "üblichen" Formulierung der Quantenfeldtheorie kann mit dem GNS-Theorem (Gelfand,Naimark,Segal) gegeben werden, die besagt, daß jede C^*-Algebra durch eine C^*-Unteralgebra beschränkter, linearer Operatoren auf einem Hilbert-Raum, $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, repräsentiert werden kann. Der Beweis dieses Theorems ist konstruktiv und führt zur sogenannten GNS-Konstruktion.

Theorem 3.1 (GNS-Konstruktion) *Sei $\mathcal{A}$ eine C^*-Algebra und $\omega : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{C}$ ein Zustand auf ihr. Dann existiert ein sogenanntes GNS-Tripel $(\mathcal{H}, \pi, \psi)$, bestehend aus einem Hilbert-Raum $\mathcal{H} := \bigoplus_{\omega \in \mathcal{E}_\mathcal{A}} \mathcal{H}_\omega$, einer Darstellung $\pi := \bigoplus_{\omega \in \mathcal{E}_\mathcal{A}} \pi_\omega$, $\pi_\omega : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$, und einem Vektor $|\psi> \in \mathcal{H}$, so daß gilt:*

- $\omega(A) =< \psi, \pi(A)\psi > \ \forall A \in \mathcal{A}$ *und*
- $|\psi >$ *ist zyklisch, d.h.* $\pi(\mathcal{A})|\psi >= \{\pi(A)|\psi > \mid A \in \mathcal{A}\}$ *liegt dicht in* $\mathcal{H}$.

Durch diese Forderungen ist das GNS-Tripel bis auf unitäre Äquivalenz vollständig charakterisiert. Umgekehrt erhält man bei gegebener Dichtematrix $\rho : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ und gegebener Darstellung $\pi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$ den algebraischen Zustand durch

$$\omega(A) = \mathrm{tr}\,(\rho\pi(A)) \tag{3.2}$$

Die Menge aller Vektoren $|\psi >$ und Dichtematrizen ρ in der GNS-Darstellung eines algebraischen Zustandes ω heißt das Folium vom ω. Sind bei einer gegebenen treuen Darstellung zwei Zustände ω_1 und ω_2 und eine endliche Anzahl von Observablen in der Algebra gegeben, dann gibt es immer einen Zustand ω in dem Folium von ω_1, der ω_2 bezüglich der Erwartungswerte beliebig genau approximiert, $|\omega(A_i) - \omega_2(A_i)| < \varepsilon_i$ mit $\varepsilon_i > 0$.

3.1.1 Das freie Klein-Gordon-Feld

Wir gehen zunächst von der auf gekrümmte Raumzeiten verallgemeinerten Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L}(x) := \frac{1}{2}\left(g^{\mu\nu}\nabla_\mu\varphi(x)\nabla_\nu\varphi(x) - m^2\varphi(x)^2 - \xi R(x)\varphi(x)^2\right)$$

aus, wobei $\varphi(x)$ das skalare Feld, m die Masse des Feldquantes,$R(x)$ der Ricci-Krümmungsskalar und ξ eine reelle Zahl sind. Der Term $\xi R(x)\varphi(x)^2$ repräsentiert die einzig mögliche lokale, skalare Kopplung zwischen dem skalaren und dem Gravitationsfeld [BD]. Die Variation des Wirkungsintegrals

$$S = \int \mathcal{L}(x) d^n x$$

ergibt die Euler-Lagrange-Gleichungen für das skalare Feld :

$$\begin{aligned}\left(\Box_g + m^2 + \xi R(x)\right)\varphi &= \left(g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu + m^2 + \xi R(x)\right)\varphi \\ &= \left(|g|^{-\frac{1}{2}}\partial_\mu g^{\mu\nu}|g|^{\frac{1}{2}}\partial_\nu + m^2 + \xi R(x)\right)\varphi = 0\end{aligned} \tag{3.3}$$

Hierbei ist $\Box_g$ der zur Metrik g gehörende Laplace-Beltrami-Operator und $|g| := |\det g_{\mu\nu}|$. Wir betrachten jedoch in dieser Arbeit das einfachste Beispiel einer Quantenfeldtheorie auf einer global hyperbolischer Raumzeit, nämlich ein skalares Feld, das die kovariante Klein-Gordon-Gleichung

$$\left(\Box_g + m^2\right)\varphi = 0 \tag{3.4}$$

erfüllt. Diese Differentialgleichung enthällt keine selbstwirkenden Terme und man spricht deshalb vom freien Feld. Sie ist jedoch über den metrischen Tensor mit dem Gravitationsfeld gekoppelt. Da die obige Gleichung eine hyperbolische Differentialgleichung ist, ist das Cauchy-Problem nach dem Theorem von Lerray eindeutig lösbar [Dim80].

Theorem 3.2 (Cauchy-Problem) *Sei Σ eine Cauchy-Fläche und $u_0, u_1 \in \mathcal{C}_0^\infty(\Sigma)$, dann gibt es eine eindeutig bestimmte Funktion $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ mit*

$$\left(\Box_g + m^2\right) u = 0, \quad \rho_0(u) = u_0, \quad \rho_1(u) = u_1$$
$$und \qquad supp(u) \subset \bigcup_i \bigcup_{\pm} J^{\pm}\left(supp(u_i)\right),$$

wobei $\rho_0(u) : \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}) \to \mathcal{C}^\infty(\Sigma)$ der Restriktionoperator und $\rho_1(u) : \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}) \to \mathcal{C}^\infty(\Sigma)$ die Normalenableitung auf Σ sind.

Es existieren folglich für jede Testfunktion $f \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$ avancierte und retardierte Fundamentallösungen

$$E_{av/ret} : \mathcal{D}(\mathcal{M}) \longrightarrow \mathcal{E}(\mathcal{M})$$
$$E_{av/ret} : (f, g) \mapsto E_{av/ret}(f, g) := \int f(x)(E_{av/ret}g)(x)g^{\frac{1}{2}}d^4x \tag{3.5}$$

mit den Eigenschaften

$$\left(\Box_g + m^2\right) E_{av/ret} = E_{av/ret}\left(\Box_g + m^2\right) = id$$
$$\mathrm{supp}(E_{av}f) \subset J^+(\mathrm{supp}(f)) \quad \text{und} \quad \mathrm{supp}(E_{ret}f) \subset J^-(\mathrm{supp}(f))$$

Die Differenz $E := E_{ret} - E_{av}$ ist eine antisymmetrische Distribution und heißt die Fundamentallösung oder der Propagator der Klein-Gordon-Gleichung und genügt den folgenden Bedingungen:

$$\left(\Box_g + m^2\right) Ef = Ef\left(\Box_g + m^2\right) = 0$$

$$\mathrm{supp}(Ef) \subset J^+(\mathrm{supp}(f)) \cup J^-(\mathrm{supp}(f)), f \in \mathcal{D}(\mathcal{M}).$$

Mit Hilfe der Feldgleichung und den Vertauschungsrelationen auf einer beliebigen Cauchyfläche Σ

$$[\phi(x), \phi(y)] = 0$$
$$[\phi(x), \partial_\Sigma \phi(y)] = i\delta_\Sigma(x, y)$$
$$[\phi(x), \phi(y)] = 0$$

erhält man die Vertauschungsrelationen auf ganz $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$:

$$[\phi(x), \phi(y)] = iE(x, y)$$

Um das Quantenfeld als Operator definieren zu können, muß man mit dem verschmierten Feld

$$\phi(f) = \int \phi(x) f(x) g^{\frac{1}{2}} d^4x, mit f \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$$

weiterarbeiten. Das Feld wird also als eine operatorwertige Distribution angesehen, d.h. als eine lineare Abbildung $\phi : \mathcal{D}(\mathcal{M}) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Wir betrachten jetzt eine unitale *-Algebra $\mathcal{A}$, die von von den Elementen $\phi(f)$, $f \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$ erzeugt wird, und die die folgenden Eigenschaften besitzt:

(i) Die Abbildung $\phi : \mathcal{D}(\mathcal{M}) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ist linear,

(ii) $\phi(f)^* = \phi(\bar{f})$,

(iii) $\phi\left(\left(\Box_g + m^2\right) f\right) = 0$,

(iv) $[\phi(f), \phi(g)] = iE(f, g) \quad \forall f, g, \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$.

Diese Algebra erhält man, indem man die *Borchersalgebra* über $\mathcal{D}(\mathcal{M})$, das ist die Tensoralgebra mit der speziellen *-Operation $f^* := \bar{f}$, durch das Ideal, das von den Feldgleichungen und den Vertauschungsrelationen erzeugt wird, dividiert. (Die lokalen Algebren $\mathcal{A}(\mathcal{O})$ werden dann von den Elementen $\phi(f)$, $f \in \mathcal{D}(\mathcal{O})$ erzeugt). Diese Algebra besitzt jedoch keine C^*-Norm, denn die Vertauschungsrelationen lassen eine Darstellung durch beschränkte Operatoren nicht zu. Erst mit der *Weylalgebra*, der Algebra der exponierten Feldoperatoren $e^{i\phi(f)}$ erhält man die C^*-Struktur.
Ein Zustand auf dieser *-Algebra $\mathcal{A}$ wird eindeutig festgelegt durch seine $n-Punkt-Funktionen$ $\omega_n, \quad n \in \mathbb{N}$:

$$\omega_n(f_1, ..., f_n) := \omega(\phi(f_1) \cdots .\phi(f_n)), \quad f_i \in \mathcal{D}(\mathcal{M}), \tag{3.6}$$

wobei ω_n bzgl. jeder Komponente eine Distribution ist. Das Kerntheorem von Schwartz erlaubt uns, die n-Punkt-Funktionen als wohldefinierte Distributionen auf ganz $\mathcal{M}^n$ anzusehen. Aufgrund der Relationen der Algebra gelten die folgenden Eigeschaften für die n-Punkt-Funktionen:

(i) Sie sind bzgl. jeder Komponente eine Lösung der Klein-Gordon-Gleichung.

(ii) Wegen der Vertauschungsrelationen gilt:

$$\omega_n(x_1,...,x_k,x_{k+1},...,x_n) - \omega_n(x_1,...,x_{k+1},x_k,...,x_n) = iE(x_k,x_{k+1})\omega_{n-2}(x_1,...,x_{k-1},x_{k+2},...,x_n)$$

(iii) Normiertheit: $\omega_0 = 1$ wegen $\omega(\mathbb{1}) = 1$.

(iv) Positivität:

$$\sum_{i,j} \omega_{i+j}(f_i^* \otimes f_j) \geq 0, \quad \text{mit } f_k \in \mathcal{D}(\mathcal{M}^k),\ k = 1,...,n$$
$$\text{und} \qquad f_k^*(x_1,...,x_n) = \overline{f_k(x_n,...,x_1)}.$$

Wir behandeln in dieser Arbeit nur *quasifreie Zustände*. Diese Zustände sind dadurch charakterisiert, daß ihre n-Punkt-Funktionen mit ungeradem n identisch Null sind, und die übrigen allein durch ihre 2-Punkt-Funktion $\Lambda \equiv \omega_2$ eindeutig festgelegt sind:

$$\omega_{2n}(f_1,...,f_{2n}) = \sum_\sigma \prod_{i=1}^{n} \Lambda(f_{\sigma(i)}, f_{\sigma(i+n)}), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{3.7}$$

wobei die Summe über alle Permutationen σ von $\{1,...,2n\}$ mit $\sigma(1) < \sigma(2) < ... < \sigma(n)$ und $\sigma(i) < \sigma(i+n)$ läuft.
Wir fassen abschliessend die Eigenschaften der 2-Punkt-Funktion nochmal zusammen:

(i) $\Lambda((\Box_g + m^2)f, g) = \Lambda(f, (\Box_g + m^2)g) = 0, \quad \forall f, g \in (\mathcal{M})$,

(ii) $\Lambda(f,g) = \overline{\Lambda(g,f)}$,

(iii) $Im\Lambda(f,g) = \frac{1}{2}E(f,g)$,

(iv) $\Lambda(\bar{f}, f) \geq 0$.

3.2 Physikalische Zustände

Die Menge der oben konstruierten Zuststände ist sehr groß und enthält Zustände, die physikalisch keinen Sinn machen. Auch reicht die Einschränkung auf quasifreie Zustände nicht aus, denn es existieren einige Elemente dieser Menge mit einem unendlich großen Erwartungswert für den Energie-Impuls-Tensor. Es gibt zwei verschiedene Ansätze, wie man die physikalisch relevanten Zustände heraussieben kann. Einer dieser beiden Ansätze geht auf Parker zurück und führt

zu den *adiabatischen Vakua*, die die Teilchenproduktion in einem expandierenden Universum minimieren. Brehme und de Witt haben solche Zustände betrachtet, für die der Erwartungswert des Energie-Impus-Tensors eine wohldefinierte Form besitzt, die $Hadamard - Zustände$. Diese Forderung an die Zustände ist insofern sinnvoll, als das Quantenfeld mit der Raumstruktur über die Einstein'schen Feldgleichungen gekoppelt (1.13) ist. Lange Zeit war die Beziehung dieser beiden Arten von Zuständen nicht klar, bis Junker zeigen konnte, daß die adiabatischen Vakua spezielle Hadamard-Zustände sind [Jun95]. Er konnte in [Jun99] einen in seiner Dissertation auftretenden Fehler beseitigen, genauer er konnte zeigen, daß nur die adiabatischen Vakua unendlicher Ordnung Hadamard-Zustände sind, und die adiabatischen Vakua n-ter Ordnung quasiäquivalent zu denen unendlicher Ordnung. Wir wollen nun uns etwas genauer mit diesen Hadamard-Zuständen beschäftigen.

3.2.1 Hadamard-Zustände

Damit die semiklassischen Einstein-Gleichungen

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi < \hat{T}_{\mu\nu}(x) >_\omega$$

physikalisch Sinn machen, muß der Erwartungswert des operatorwertigen Energie-Impuls-Tensors renormalisierbar sein. Im Falle des Klein-Gordon-Feldes Φ lautet der Energie-Impuls-Tensors

$$T_{\mu\nu}[\Phi] = (\nabla_\mu \Phi)(\nabla_\nu \Phi) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}(\nabla_\kappa \Phi \nabla^\kappa \Phi - \mu^2 \Phi^2).$$

Brehme und de Witt berechnen mit Hilfe einer rekursiven Methode Hadamard Lösungen der Klein-Gordon-Gleichung, die im Falle des Minkowski-Raumes die Vakuumzweipunktfunktion ist. Man hofft nun, dass man dieses Verfahren auf gekrümmte Raumzeiten verallgemeinern kann. Fuer die obigen Forderungen an $< T_{\mu\nu} >$ ist es erforderlich, dass die Zweipunktfunktion die hadamard ist. Zunächst einmal die ursprüngliche Formulierung:

Definition 3.3 *(Alte lokale Hadamard-Form) Eine Zweipunktfunktion $\Lambda(f,g)$, $f, g \in \mathcal{C}$ mit Träger in $\mathcal{O}$, heißt Hadamard, falls ihr Integralkern die folgende Form hat: und*

$$\begin{aligned} \Lambda(x,y) &= \Lambda_{sing}(x,y) + \Lambda_{glatt}(x,y) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \left(\frac{u(x,y)}{\sigma(x,y)} + v(x,y) ln|\sigma(x,y)| + w(x,y) \right), \end{aligned} \tag{3.8}$$

mit $u, v, w \in \mathcal{C}^\infty$ *und* $\lim_{x \to y} u(x,y) = 1, v = \Sigma_{n=0}^\infty v_n \sigma^n, w = \Sigma_{n=0}^\infty w_n \sigma^n.$

Die Zweipunktfunktioin Λ als Lösung der Klein-Gordon-Gleichung legt die Funktion $u = \triangle^{\frac{1}{2}}$ eindeutig fest, wobei

$$\triangle(x,y) = -\frac{1}{\sqrt{g(x)g(y)}} \det\left(-\nabla^x_\mu \nabla^y_\nu \sigma(x,y)\right)$$

die van $Vleck - Morette - Determinante$ ist. Man kann zeigen, daß sie, dort wo σ identisch Null ist, nicht verschwindet. Mit Hilfe der Hadamard-Rekursionsformeln kann man die Koeffizienten v_n, w_n berechnen, wobei im gegensatz zu v_n, aufgrund der freien Wahl von w_0, w_n nicht eindeutig festgelegt ist. Diese Willkür steht füe die Möglichkeit der Addition von glatten Lösungen der Feldgleichung zu Λ_{sing}.
Diese ursprüngliche Formulierung der Hadamard-Form ist leider nicht mathematisch präzise genug, denn

- die Potenzreihe von v kann bei analytischen Raumzeiten nur einen kleinen Konvergenzradius haben, und bei $\mathcal{C}^\infty$ Raumzeiten überhaupt nicht konvergieren,
- der quadratische geodätische Abstand σ ist nur für die Punkte x in einer kleinen normalen Umgebung von y definiert und glatt und
- (1.16) definiert Λ nicht als eine Distribution, denn die Funktion $\frac{1}{\sigma}$ ist nicht integrabel.

Kay und Wald haben die Hadamard-Eigenschaft präzisiert und diese Schwächen vermieden. Sie sind von einer offenen Umgebung $\mathcal{O} \subset \mathcal{M} \times \mathcal{M}$ aller kausal verbundenen Punkte (x,y) ausgegangen, so daß $J^+(x) \cap J^-(y)$ und $J^+(y) \cap J^-(x)$ in einer konvex normalen Umgebung enthalten sind. Für jede ganze Zahl $n \geq 1$ und $0 < \epsilon \in \mathbb{R}$ definieren wir die Funktion

$$G^{T,n}_\epsilon := \frac{1}{(2\pi)^2}\left(\frac{\triangle^{\frac{1}{2}}(x,y)}{\sigma(x,y) + 2i\epsilon t + \epsilon^2} + v^{(n)}(x,y)\ln|\sigma(x,y) + 2i\epsilon t + \epsilon^2|\right)$$
$$\text{mit} \quad t := T(x) - T(y), v^{(n)}(x,y) := \Sigma^n_{m=0} v_{(m)}(x,y)\sigma^m(x,y). \tag{3.9}$$

T ist eine glatte,globale Zeitfunktion, die mit der Zeit steigt, und ln ist in dieser Gleichung der Hauptzweig des Logarithmus. Sei nun $\mathcal{O}'$ eine Umgebung der Menge der kausal verbundenen Punkte in $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$, $\mathcal{N}$ eine kausal normale Umgebung der Cauchy-Fläche Σ, so daß ihr Abschluss in $\mathcal{O}$ enthalten ist. Wir wählen weiterhin die $\mathcal{N}$-Regularisierungsfunktion $\chi(x,y) \in \mathcal{C}^\infty$ mit $\chi(x,y) = 0$ für $(x,y) \notin \mathcal{O}$ und $\chi(x,y) = 1$ falls $(x,y) \in \mathcal{O}'$.

Definition 3.4 *(Globale Hadamard-Form) Der quasifreie Zustand ω des freien Klein-Gordon-Feldes heißt ein globaler Hadamard-Zustand, falls es für jede*

natürliche Zahl n eine Funktion $H^{(n)} \in \mathcal{C}^p(\mathcal{N} \times \mathcal{N})$ existiert, so daß für seine Zweipunktfunktion Λ die Gleichung

$$\Lambda(f,g) = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\mathcal{N}\times\mathcal{N}} \left(\chi(x,y) G_\epsilon^{T,n} + H^{(n)}(x,y) \right) f(x) g(y) \sqrt{-g(x)} \sqrt{-g(y)} d^4x d^4y \tag{3.10}$$

für alle $f, g \in \mathcal{D}(\mathcal{N})$ erfüllt.

In dieser Definition gibt der erste Term $\chi G_\epsilon^{T,n}$ für $\epsilon \to 0$ die Singularitätsstruktur von Λ nur in $\mathcal{N}$ wieder, während der zweite Term H^n zur Zweipunktfunktion nur glatte Anteile beisteuert. D.h. die globale Hadamard-Bedingung besagt, daß man bei zueinander raumartigen Punkten $(x,y) \in \mathcal{N}\times\mathcal{N}$ keine Singularitäten finden wird. Weiterhin unterscheiden sich zwei Hadamard-Zustände nur um eine glatte Lösung der Klein-Gordon-Gleichung.

Man kann zeigen, daß diese Definition unabhängig ist von der Wahl der Funktionen T und χ, der Menge $\mathcal{N}$ und insbesondere von der Cauchy-Fläche Σ. Erfüllt also ein quasifreier Zustand die (globale) Hadamard-Bedingung in einer beliebigen Cauchy-Fläche, dann tut er dies in jeder anderen auch.

Die obige Definition besitzt zwei Schwachpunkte. Zum einen ist diese Definition auf freie Felder zugeschnitten. Zum anderen ist diese Charakterisierung der physikalischen Zustände eine globale. Seit dem letzten Jahrhundert geht man davon aus, daß fundamentale physikalische Theorien lokalen Charackter habe, d.h. daß physikalische Gleichungen physikalische Größen in ifinitesimaler Umgebung miteinander in Beziehung setzen. Diese Überlegung gab Kay Anlass zu der folgenden lokalen Definition der Hadamard-Bedingung.

Definition 3.5 *(lokale Hadamard-Form) Der quasifreie Zustand ω heißt ein lokaler Hadamard-Zustand, falls es für jeden $x \in \mathcal{M}$ eine offene Umgebung $\mathcal{U}_x$ existiert und seine Zweipunktdistribution die Gleichung*

$$\Lambda(x,y) = \lim_{\epsilon \to 0} \chi(x,y) G_\epsilon^{T,n}(x,y) + H^{(n)}(x,y) \tag{3.11}$$

für alle $(x,y) \in \mathcal{U}_x \times \mathcal{U}_x$ erfüllt.

Zunächst einmal ist diese Definition der ursprünglichen Formulierung von Brehme und de Witt ähnlicher, vermeidet aber ihre mathematischen Schwächen. Man möchte nun jedoch die lokale mit der globalen Version in Beziehung setzen. Die globale Definition besagt ja, daß Singularitäten nicht bei zueinander raumartig liegenden Punkten $(x_1, x_2) \in \mathcal{N}\times\mathcal{N}$ auftauchen. Kay vermutete, daß sobald die lokale Hadamard-Bedingung erfüllt ist, die Zweipunktfunktion nicht bei raumartig getrennten Punkten singulär sein kann. Kay's Vermutung konnte von Radzikowski bewiesen werden. Er hat sich Methoden der mikrolokalen Analysis bedient und eine neue, zu der (globalen) Hadamard-Bedingung äquivalente

Formulierung gegeben.Radzikowski konnte für die gekrümmte Raumzeit zeigen, daß die lokale Information der Hadamard-Bedingung in der Wellenfrontmenge der Zweipunktfunktion enthalten ist [Rad]. Köhler konnte eine Ungenauigkeit in seinem Beweis beheben [Köh95].

Theorem 3.6 *Ein quasifreier Zustand des Klein-Gordon-Feldes auf einer globalhyperbolischen Raumzeit $\mathcal{M}$ ist genau dann ein (globaler) Hadamard-Zustand, wenn für die Zweipunktdistribution Λ gilt:*

$$WF(\Lambda) = \{(x_1,\xi_1;x_2,-\xi_2) \in T^*(\mathcal{M}\times\mathcal{M})\backslash\{0\} : \ (x_1,\xi_1) \sim (x_2,\xi_2),\, \xi_1^0 \geq 0\} \tag{3.12}$$

Hier bedeutet die Äquivalenzrelation $'' \sim ''$, daß es eine x_1 und x_2 verbindende lichtartige Geodäte γ gibt, wobei ξ_1^μ im Punkt x_1 kotangential an γ ist, und ξ_2^μ der entlang γ paralleltransportierte Vektor von ξ_1 bei x_2 ist, dort ebenfalls kotangential. Auf der Diagonalen $x_1 = x_2$ bedeutet $(x_1,\xi_1) \sim (x_2,\xi_2)$, daß ξ_1 lichtartig ist ($\xi_1^2 = 0$) und $\xi_1 = \xi_2$. Man kann aus der Tatsache, daß Λ in beiden Argumenten eine Lösung der Klein-Gordo-Gleichung ist, $WF(\Lambda) \subset \mathcal{N}\times\mathcal{N}$ folgern, d.h. Singularitäten können nur dann auftauchen, wenn x_1 und x_2 lichtartig zueinander liegen, und Singularitäten haben nur positive Frequenzen. Diese Aussage erinnert uns stark an die Spektrumsbedingung der Quantenfeldtheorie im Minkowski-Raum.
Wir fassen zwei weitere wichtige Ergebnisse aus Radzikowskis Doktorarbeit in dem folgenden

Theorem 3.7 *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(i) Die Zweipunktfunktion erfüllt die globale Hadamard-Bedingung.

(ii)
- *Λ erfüllt die lokale Hadamard-Bedingung.*
- *Λ genügt der Klein-Gordon-Gleichung.*
- $\Lambda(f,g) - \Lambda(fg,f) = iE(f,g)$.
- *$WF(\Lambda)$ ist minimal:*$\Longleftrightarrow$ *(Λ' erfüllt die obigen drei Punkte und $WF(\Lambda') \subset WF(\Lambda)$)* $\Longrightarrow WF(\Lambda') = WF(\Lambda)$).

(iii)
- *Λ erfüllt auf einer globalhyperbolischen Raumzeit die lokale Hadamard-Bedingung.*
- $\Lambda(f,g) - \Lambda(fg,f) = iE(f,g)$.
- $\Lambda(\overline{f},f) \geq 0 \quad \forall f \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$.

Die Äquivalenzbeziehung $(i) \Leftrightarrow (iii)$ wird auch als $lokal - zu - global - Singularitätstheorem$ bezeichnet, denn es besagt, daß man von lokalen Eigenschaften auf globale schließen kann. Damit konnte die Vermutung von Kay bestätigt werden.

3.2.2 Die mikrolokale Spektrumsbedingung

Radzikowski hat seine "wave front set spectrum condition" (WFSSC) fuer höhere m-Punktfunktionen bewiesen. Es hat sich jedoch herausgestellt, daß man bei der Verallgemeinerung auf allgemeine Raumzeiten auf Probleme stößt. Beispielsweise erfüllt die m-Punktfunktion für $m > 2$ eines quasifreien Hadamard-Zustandes eines skalaren Feldes auf einer globalhyperbolischen Raumzeit nicht seine Wellenfrontmengenbedingung. Sogar im Falle der m-Punktdistribution kann mit Hilfe von Produkten verschiedener Felder Gegenbeispiele finden. Köhler hat die WFSSC modifiziert und die sogenannte *mikrolokale Spektrumsbedingung* (μSC) eingeführt [Köh95], [BFK96].

Definition 3.8 *Ein Zustand ω mit der Zweipunktfunktion ω_m erfüllt genau dann die mikrolokale Spektrumsbedingung (μSC), wenn gilt:*

$$WF(\omega_m) \subseteq \Gamma_m, \tag{3.13}$$

wobei

$$\begin{aligned}\Gamma_m := \Big\{ &(x_1, k_1; \cdots; x_m, k_m) \in T^*M^m \backslash \{0\} \,|\, \exists G \in \mathcal{G}_m \\ &\text{und eine Immersion } (x, \gamma, k) \text{ von } G \text{ mit} \\ &x_i = x(i)\ \forall i = 1, ..., m \quad \wedge \quad k_i = \sum_{e; s(e)=i} k_e(x_i) \Big\}.\end{aligned}$$

$\mathcal{G}_m$ ist die Menge aller endlichen Graphen mit Vertizes $\{1, ..., m\}$, so daß für jedes $G \in \mathcal{G}_m$ alle Kanten in beiden zulässigen Richtungen auftauchen.

Wir fassen die wichtigsten Aussagen über die μSC aus [BFK96] im folgenden zusammen:

(i) Γ_m ist unter Addition abgeschlossen, d.h. $\Gamma_m \oplus \Gamma_m \subseteq \Gamma_m$.

(ii) Quasifreie Zustände des Klein-Gordon-Feldes auf einer globalhyperbolischen Mannigfaltigkeit erfüllen die μSC.

(iii) Das punktweise gebildete Produkt von n-Punktdistributionen zweier Zustände erfüllt die μSC, sofern die einzelnen Zustände dies tun.

(iv) Erfüllt ein Zustand die μSC, so überträgt er diese Eigenschaft auf alle in seinem Folium enthaltenen Zustände.

(v) Ein Zustand in einem quantenfeldtheoretischen Modell im Minkowskiraum, dessen n-Punktdistributionen die Wightmann-Axiome erfüllen, genügen der μSC.

Mit dem Konzept der μSC ist es kürzlich gelungen [BF00], zeitgeordnete operatorwertige Produkte von Wick-Polynomen eines freien Feldes zu konstruieren, und eine lokale Definition von wechselwirkenden Feldern auf einer glatten globalhyperbolischen Raumzeiten zu geben.

3.3 Detektoren

Zu Beginn dieses Kapitels haben wir behauptet, daß das abstrakte Netz der Observablenalgebren $\mathcal{A}(\mathcal{O})$ die ganze Theorie charakterisiert, d.h. alle physikalischen Informationen sind im Prinzip aus diesen Größen ableitbar. Um diese physikalischen Eigenschaften eines Systems zu ermitteln, müssen wir zunächst den Begriff Detektor präzisieren, genauer wir müssen wissen, durch welche Elemente der Observablenalgebra ein Detektor repräsentiert wird.
Zunächst einmal ist ein Detektor ganz allgemein eine makroskopisch gut lokalisierte, positive Observable, die im Vakuumzustand kein Signal abgibt [Haa]. Leider sind diese beiden Bedingungen nicht miteinander verträglich, denn eine streng endliche Region besitzt keine positiven Operatoren mit verschwindendem Vakuumerwartungswert (Reeh-Schlieder-Theorem). Wir können aber einen Detektor durch eine positives, fast lokales Element $C \in \mathcal{A}$

$$C \in \mathcal{A}^+(\mathcal{O}),\ \|C\| = 1\, \omega_0(C) = 0$$

darstellen, der beliebig gut durch ein $C_r \in \mathcal{A}^+(\mathcal{K}_r)$, wobei $\mathcal{K}_r$ das betreffende Gebiet ist, approximiert wird:

$$\|C - C_r\| < \epsilon.$$

Das Problem ist nun, daß die obigen beiden Bedingungen zu schwach sind und sie von unendlich vielen Elementen der Observablenalgebra erfüllt werden. Für die weitere Spezifizierung bietet sich der $Unruh - Effekt$ an, nämlich daß das Vakuum sich lokal wie ein KMS-Zustand mit der Temperatur $\frac{a}{2\pi}$ verhällt, wobei a die Beschleunigung des Detektors ist. Interessierte Leser können im Anhang einen kleinen Überblick über KMS-Zustände erfahren. Es wird insbesondere ausführlich geschildert, warum KMS-Zustände als thermische Gleichgewichtszustände interpretiert werden können. Für den weiteren Verlauf dieser Arbeit genügt jedoch die folgende

Definition 3.9 *Ein Zustand $\omega : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ mit*

$$\omega\big(A\alpha_{i\beta}(B)\big) = \omega(BA) \tag{3.14}$$

für alle $A, B \in \mathcal{A}$, $\alpha_{i\beta}(B)$ ist die Zeittranslatierte von B, heißt ein KMS-Zustand zu der Temperatur $T = \frac{1}{\beta}$.

Mit Hilfe der KMS-Bedingung kann dann der Erwartungswert eines Produktes durch den Kommutator beschrieben werden [HNS84]:

$$\omega_\beta(AB) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\beta\tilde{\omega}}}{e^{\beta\tilde{\omega}-1}} \omega[\alpha_\tau(A), B]_\beta e^{i\tilde{\omega}\tau} d\tilde{\omega} d\tau.$$

Wenn man $A = B^*$, $C := B^*B$ setzt und zusätzlich

$$\alpha_\tau(B) = e^{-i\tilde{\omega}\tau}B \quad \text{und} \quad [B, B^*] = 1$$

fordert, kann man die gewünschte Form für den Unruh-Effekt

$$\omega(C)_\beta = \frac{e^{\beta\tilde{\omega}}}{e^{\beta\tilde{\omega}-1}}$$

erreichen.
Somit kann ein idealisierter Detektor, der nur Strahlung der Frequanz $\tilde{\omega}$ mißt, durch

$$C := B^*B \tag{3.15}$$

simuliert werden.

Kapitel 4

Herleitung der Hawking-Strahlung

Hawkings Argumentation, daß ein System, das sich vor dem Kollaps in ein Grundzustand befindet, durch den Kollaps in einen KMS-Zustand mit der Temperatur $(4\pi r_0)^{-1}$ übergeht, konnte zuerst von Fredenhagen und Haag mathematisch präzisiert werden [FH90]. Sie berechnen für ein lineares Quantenfeld in einer klassischen Raumzeit eines sphärisch symmetrisch kollabierenden Sternes die Beziehung der Hawking-Strahlung für große Zeiten mit dem Skalenlimes auf dem Horizont, d.h. auf der zweidimensionalen Sphäre, wo der Sternradius den Schwarzschild-Radius erreicht. Bei dieser Herleitung wird die Rückwirkung der Strahlung auf die Metrik vernachlässigt.
Wir wollen nun den Beweis etwas detaillierter behandeln. Im Gegensatz zum Beweis [FH90] werden wir Vereinfachungen durch die Substitution $r_{1,2} \to r_0$ nicht vornehmen und diesen Grenzwert erst am Ende betrachten. Ein daraus resultierender Unterschied ist die Definition der beiden Differentialoperatoren $\widehat{D_i}$, $i = 1, 2$ in (4.12), vergleiche hierzu (4.7) in [FH90].

4.1 Hauptstrang des Beweises

Wir verwenden bei der Herleitung die räumlichen Polarkoordinaten r, θ, ϕ und die zeitliche Koordinate τ, so daß der Sternradius $r_s(\tau)$ den Schwarzschildradius $r_0 = 2M$ bei $\tau = 0$ kreuzt, d.h $r_s(0) = r_0$ (Abb. 4.1).
Aufgrund der vorausgesetzten Kugelsymmetrie können wir außerhalb des Sternes $(r > r_s(\tau), \tau > 0)$ von der stationären Schwarzschild-Metrik ausgehen (siehe Birkhoff-Theorem (1.6)). Hier bietet sich die Einführung der sogenannten Schildkrötenkoordinate r^*an:

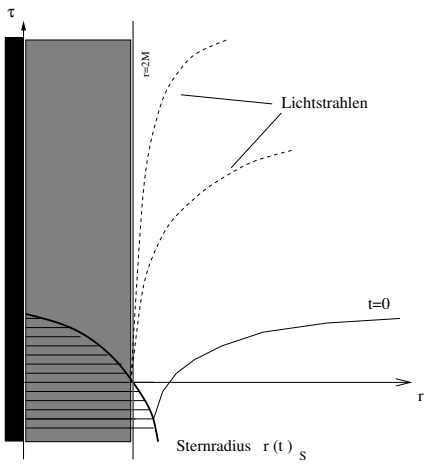

Abbildung 4.1: *Gravitationskollaps in (τ,r)-Koordinaten*

$$\begin{aligned} r^* &:= r + r_0 \ln\left(\frac{r}{r_0} - 1\right) \\ v &:= t + r \\ u &:= t - r \\ \tau &:= v - r = t + r^* - r, \end{aligned} \tag{4.1}$$

wobei t die Schwarzschildzeit ist. Die Schwarzschildmetrik ist dann:

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\left(1 - \frac{r_0}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right) \\ &= \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)\left(dt^2 - dr^{*2}\right) - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right) \\ &= (\frac{r_0}{r} - 1)d\tau^2 + \frac{2r_0}{r} d\tau dr + \frac{r + r_0}{r} dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right) \end{aligned} \tag{4.2}$$

Für die weiteren Schritte ist die genaue Kenntnis der Metrik im Innern des Sternes nicht wesentlich, da die Strahlung für große Zeiten von ihr nicht beeinflußt wird.

Sein nun $\Phi(x)$ ein skalares und neutrales Quantenfeld auf gekrümmter Raumzeit (3.3), d.h. es erfüllt die kovariante Wellengleichung:

$$\begin{aligned} \Box_g \Phi &= 0 \\ \Box_g &= |g|^{-\frac{1}{2}} \partial_\mu g^{\mu\nu} |g|^{\frac{1}{2}} \partial_\nu ; |g| = -\det g_{\mu\nu} \end{aligned} \tag{4.3}$$

Der Wellenoperator wird für die Schwarzschildmetrik zu

$$\begin{aligned}\Box_g &= \left(1-\frac{r_0}{r}\right)^{-1}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - r^{-1}\frac{\partial^2}{\partial r^{*2}}r\right) + \left(\frac{-\triangle_{S^2}}{r^2}+\frac{r_0}{r^3}\right)\\ &= \left(1-\frac{r_0}{r}\right)^{-1}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + A, \qquad \text{wobei}\end{aligned}$$

$$A := -r^{-1}\frac{\partial^2}{\partial r^{*2}}r + \left(1-\frac{r_0}{r}\right)\left(\frac{-\triangle_{S^2}}{r^2}+\frac{r_0}{r^3}\right) = -r^{-1}\frac{\partial^2}{\partial r^{*2}}r + V_l(r) \tag{4.4}$$

$$\triangle_{S^2} := \frac{1}{\sin\theta}\partial_\theta \sin\theta\partial_\theta + \frac{1}{\sin^2\theta}\partial_\phi^2.$$

Ein Zustand ist i. a. durch die Erwartungswerte bestimmt:

$$W^{(n)}(\phi(h_1),\cdots,\phi(h_n)) =< \phi(h_1)\cdots\phi(h_n) >, \tag{4.5}$$

wobei h eine glatte Funktion mit Träger in O ist. Da wir in dieser Arbeit nur quasifreie Zustände betrachten (3.7), die zu ganz frühen Zeiten Grundzustände waren, können wir uns auf $W_G^{(2)}$ beschränken.
Ein Detektor kann nun durch die Observable $\phi(h)^*\phi(h)$ simuliert werden (3.15), wobei

$$\phi(h) = \int \phi(x)h(x)d\mu(x), \qquad d\mu(x) = |g|^{\frac{1}{2}}d^4x, \tag{4.6}$$

und der Träger von h, der in der Nachbarschaft eines vom Horizont sehr weit enfernten Raumzeitpunktes liegen soll, das Lokalisationsgebiet des Detektors beschreibt. Wegen der skalaren Feldgleichung ist nach dem Theorem von Leray (Thm. 3.2) $\phi(h)$ mit Hilfe von ϕ und seinen Ableitungen auf einer raumartigen Cauchy-Fläche Σ darstellbar:

$$\phi(h) = \int dt_0 \int_{\Sigma(t=t_0)} \phi(x)\overset{\leftrightarrow}{\partial}{}^{\mu} f(x)d\Sigma^\mu \tag{4.7}$$

Da die Darstellung unabhängig von Σ ist, können wir schreiben:

$$\begin{gathered}\phi(h) = \int_\Sigma \phi(x)\overset{\leftrightarrow}{\partial}{}^{\mu} f(x)d\Sigma^\mu, \text{mit}\\ \Box_g f(x) = 0 \qquad \text{und} \qquad A\overset{\leftrightarrow}{\partial}{}^{\mu}B := A\partial^\mu B - B\partial^\mu A\end{gathered} \tag{4.8}$$

Wir konstruieren nun eine Folge $\phi_T(h)$ bzgl. der Schwarzschildzeit t. Dies erreichen wir, indem wir in (4.7) die Funktionenfolge

$$f^T(t,\underline{x}) := \int f^{T,t_0}(t,\underline{x})dt_0, \qquad \text{mit}$$
$$\Box_g f^{T,t_0}(t,\underline{x}) = 0, \quad f^{T,t_0}(T+t_0,\underline{x}) = 0, \quad \partial_t f^{T,t_0}(T+t_0,\underline{x}) = h(t_0,\underline{x}) \quad (4.9)$$

einsetzen. Weil der Träger von f^T für $\tau \geq 0$ ganz in der Schwarzschildraumzeit außerhalb des schwarzen Loches liegt, werden wir die Schwarzschildmetrik verwenden. Für die Berechnung der Antwortfunktion des Detektors $< \phi(h)^*\phi(h) >$ für späte Zeiten T erhalten wir mit (4.5), (4.8) und (4.9)

$$\begin{aligned} < \phi_T(h)^*\phi_T(h) > &= \int_\Sigma W_G^{(2)}(x_1,x_2) \overset{\leftrightarrow}{\partial}^{\mu_1} \overset{\leftrightarrow}{\partial}^{\mu_2} f^T(x_1) f^T(x_2) d\Sigma^{\mu_1} d\Sigma^{\mu_2} \\ &= \int\limits_{\tau_1=\tau_2=0} W_G^{(2)}(x_1,x_2) \overset{\leftrightarrow}{D}_1 \overset{\leftrightarrow}{D}_2 f^T(x_1) f^T(x_2) dr_1 dr_2 r_1^2 d\Omega_1 r_2^2 d\Omega_2, \\ &\text{mit} \qquad D_i := \left(1+\frac{r_0}{r_i}\right)\frac{\partial}{\partial\tau_i} - \frac{r_0}{r_i}\frac{\partial}{\partial r_i}, \end{aligned} \quad (4.10)$$

wobei wir hier die Cauchy-Fläche an der Stelle $\tau = 0$ gewählt haben.
Zu berechnen ist nun der Grenzwert der Zählrate $\lim_{T\to\infty} < \phi(h)^*\phi(h) >$. Für den weiteren Verlauf brauchen wir das folgende Lemma über das asymptotische Verhalten von f^T, dessen Beweis wir allerdings am Ende dieses Kapitels geben werden. Eine ausführliche Diskussion findet man auch in [DK87] und [DK86].

Lemma 4.1 *Die Funktion f^T zerfällt für $T \to \infty$ auf der Cauchy-Fläche bei $\tau = 0$ in zwei Wellenpakete*

$$f^T(t,r^*) \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} f_-^T(t,r^*) + f_+^T(t,r^*), \qquad \textit{mit}$$
$$f_-^T(t,r^*) = \phi(r^*-t+T) := (2\pi)^{-1}\int \frac{D_l(\omega)}{2i\omega}\tilde{h}(\omega,-\omega)e^{i\omega(r^*-t+T)}d\omega \quad (4.11)$$
$$f_+^T(t,r^*) = \phi(r^*+t-T) = (2\pi)^{-1}\int \frac{D_l(\omega)}{2i\omega}\tilde{h}(-\omega,-\omega)e^{-i\omega(r^*+t-T)}d\omega.$$

wobei f_-^T sich am Horizont konzentriert, während f_+^T ins unendliche verschwindet. $\tilde{h}$ ist die Laplace-Transformierte von h und $D_l(\omega)$ die Transmissionsamplitude durch die Potentialbarriere $V_l(r)$.

Wir haben für große Zeiten in (4.10) f^T durch die Summe $f_-^T + f_+^T$ zu ersetzen. Da jedoch f_-^T und f_+^T für späte Zeiten disjunkte Träger haben, tragen die gemischten Terme nicht zur Zählrate bei. Die Anteile nur mit f_+^T spielen am Horizont und damit für den weiteren Verlauf der Untersuchung keine Rolle. Somit können wir f^T in (4.10) durch f_-^T ersetzen.

Weil f_-^T nur von der Differenz $r^* - t$ abhängt, kann man $\frac{\partial}{\partial \tau}$ durch $-\frac{\partial}{\partial r}$ substituieren und das Integral in (4.10) vereinfachen, indem man durch partielle Integration die Differentiation auf $W_G^{(2)}$ abwälzt:

$$
\begin{aligned}
< \phi_T(h)^* \phi_T(h) > = & \int\limits_{\tau_1=\tau_2=0} W_G^{(2)}(x_1,x_2) \overset{\leftrightarrow}{D}_1 \overset{\leftrightarrow}{D}_2 f_-^T(x_1) f_-^T(x_2) dr_1 dr_2 r_1^2 d\Omega_1 r_2^2 d\Omega_2 \\
= & \int\limits_{\tau_1=\tau_2=0} \Big(D_1 D_2 W_G^{(2)}(x_1,x_2) f_-^T(x_1) f_-^T(x_2) \\
& \qquad - D_1 W_G^{(2)}(x_1,x_2) D_2 f_-^T(x_1) f_-^T(x_2) \\
& \qquad - D_2 W_G^{(2)}(x_1,x_2) D_1 f_-^T(x_1) f_-^T(x_2) \\
& \qquad + W_G^{(2)}(x_1,x_2) D_1 f_-^T(x_1) D_2 f_-^T(x_2) \Big) \\
& \qquad\qquad dr_1 dr_2 r_1^2 d\Omega_1 r_2^2 d\Omega_2 \\
= & \int\limits_{\tau_1=\tau_2=0} \Big(D_1 D_2 - \partial_{r_2} D_1 - \partial_{r_1} D_2 + \partial_{r_1} \partial_{r_2} \Big) W_G^{(2)}(x_1,x_2) \\
& \qquad f_-^T(x_1) f_-^T(x_2) dr_1 dr_2 r_1^2 d\Omega_1 r_2^2 d\Omega_2 \\
= & \int\limits_{\tau_1=\tau_2=0} \Big(1 + \frac{r_0}{r_1} \Big) \Big(\partial_{\tau_1} - \partial_{r_1} \Big) \Big(1 + \frac{r_0}{r_2} \Big) \Big(\partial_{\tau_2} - \partial_{r_2} \Big) \\
& \qquad W_G^{(2)}(x_1,x_2) f_-^T(x_1) f_-^T(x_2) dr_1 dr_2 r_1^2 d\Omega_1 r_2^2 d\Omega_2 \\
=: & \int\limits_{\tau_1=\tau_2=0} \widehat{D_1} \widehat{D_2} W_G^{(2)}(x_1,x_2) f_-^T(x_1) f_-^T(x_2) dr_1 dr_2 r_1^2 d\Omega_1 r_2^2 d\Omega_2 .
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$

In den Variablen τ und r lautet f_-^T

$$
\begin{aligned}
f_-^T(t,r^*) = \phi(r^* - t + T) = \phi\left(r + 2r_0 ln\left(\frac{r}{r_0} - 1 \right) - \tau + T \right) = \\
= \psi\left(e^{ln\left(\frac{r-r_0}{r_0}\right) + \frac{T-\tau}{2r_0}} \right) = \psi\left(\frac{\xi}{\lambda} e^{-\frac{\tau}{2r_0}} \right) = \\
= f_-^T(\tau, r),
\end{aligned}
\tag{4.13}
$$

wobei wir folgende Größen eingeführt haben:

$$
\xi := \frac{r - r_0}{r_0}, \quad \lambda := e^{-\frac{T}{2r_0}}, \quad \psi\left(e^{\frac{y}{2r_0}} \right) := \phi(y). \tag{4.14}
$$

Damit können wir schreiben:

$$\lim_{T\to\infty} <\phi(h)^*\phi(h)> = \lim_{\lambda\to 0} \text{const} \sum_{\substack{l,m \\ l',m'}} \int \widehat{D_1}\widehat{D_2} W_G^{(2)}(r_0(1+\xi_1), r_0(1+\xi_2), \Omega_{12})\Big|_{\tau_1=\tau_2=0}$$
$$\psi_{lm}\left(\frac{\xi_1}{\lambda}\right)\psi_{l'm'}\left(\frac{\xi_2}{\lambda}\right)\overline{Y_{l,m}(\theta_1,\phi_1)}$$
$$Y_{l',m'}(\theta_2,\phi_2) d\Omega_1 d\Omega_2 d\xi_1 d\xi_2, \tag{4.15}$$

wobei $\Omega_{12} := (\theta_1, \phi_1, \theta_2, \phi_2)$ ist.

Lemma 4.2 *Der Beitrag der Zweipunktfunktion $W_G^{(2)}$ zur Zählrate ist zu ganz späten Zeiten*

$$\lim_{T\to\infty} \int \widehat{D_1}\widehat{D_2} W_G^{(2)}(\xi_1,\xi_2)\overline{Y_{l,m}(\theta_1,\phi_1)} Y_{l',m'}(\theta_2,\phi_2) d\Omega_1 d\Omega_2 = const(\xi_1 - \xi_2 + i\epsilon)^{-2}. \tag{4.16}$$

Wir können den Ausdruck für unsere Zählrate weiter vereinfachen:

$$\lim_{T\to\infty} <\phi(h)^*\phi(h)> = \text{const} \sum_{l,m} \int (\xi_1 - \xi_2 + i\epsilon)^{-2} \overline{\psi_{lm}(\xi_1)} \psi_{lm}(\xi_2) d\xi_1 d\xi_2. \tag{4.17}$$

Wir bringen nun die rechte Seite dieser Gleichung in die übersichtlichere ursprüngliche Form:

$$\begin{aligned}
\lim_{T\to\infty} <\phi(h)^*\phi(h)> &= \text{const} \sum_{l,m} \int \frac{e^{\frac{y_1}{2r_0}}}{2r_0} \frac{e^{\frac{y_2}{2r_0}}}{2r_0} \left(e^{\frac{y_1}{2r_0}} - e^{\frac{y_2}{2r_0}} + i\epsilon\right)^{-2} \overline{\phi_{lm}(y_1)} \phi_{lm}(y_2) dy_1 dy_2 \\
&= \text{const} \sum_{l,m} \int \left(e^{\frac{y_1-y_2}{4r_0}} - e^{-\frac{y_1-y_2}{4r_0}} + i\epsilon\right)^{-2} \overline{\phi_{lm}(y_1)} \phi_{lm}(y_2) dy_1 dy_2 \\
&= \text{const} \sum_{l,m} \int \sinh^{-2}\left(\frac{y_1-y_2}{4r_0} + i\epsilon\right) \overline{\phi_{lm}(y_1)} \phi_{lm}(y_2) dy_1 dy_2.
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Durch anschließende Itegration beenden wir den Beweis der Hawking-Strahlung:

$$\lim_{T\to\infty} < \phi(h)^*\phi(h) >= \text{const} \sum_{l,m} \int_{-\infty}^{+\infty} |D_l(\omega)|^2 \frac{|\tilde{h}_{lm}(\omega,-\omega)|^2}{\omega(1-e^{-4\pi r_0\omega})}. \tag{4.19}$$

□

Das Ergebnis besagt also, daß der Grenzwert der Zählrate eine auslaufende Strahlung mit der Temperatur $\beta = \frac{1}{4\pi r_0}$ (modifiziert mit der Transmissionsamplitude $D_l(\omega)$ durch die Potentialbarriere) beschreibt.

4.2 Beweis von Lemma 4.1

Mit Hilfe der Separation des Winkelanteils

$$f^T(t,r^*,\theta,\phi) = r^{-1} \sum_{l,m} f^T_{l,m}(t,r^*) Y_{l,m}(\theta,\phi) \tag{4.20}$$

wird aus (1.3):

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial r^{*2}} + V_l\right) f^T_{l,m}(t,r^*) = 0, \text{ mit} \\ V_l(r) = \left(1-\frac{r_0}{r}\right)\left(\frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{r_0}{r^3}\right) \end{aligned} \tag{4.21}$$

Ebenso verfahren wir mit h, jedoch da wir im folgenden nur bestimmte l,m behandeln, unterdrücken wir aus schreibtechnischen Gründen diese beiden Indizes. f^T ist bestimmt durch (4.9), wobei wir $\underline{x} = r^*$ und für das Verhalten von f^T für $\tau = 0$ interessiert sind. Mit einer Laplace-Transformation können wir die partielle Differentialgleichung in die gewöhnliche übeführen:

$$\left(\frac{d^2}{dr^{*2}} - z^2 - V_l\right) \tilde{f}(z,r^*) = \int e^{zt_0} h(t_0,r^*) dt_0 =: F(z,r^*) \tag{4.22}$$

mit den Randbedingungen

$$\tilde{f}(z,r^*) \underset{r^*\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{4.23}$$

und der Rücktransformation

$$\begin{aligned} f^T(t,,r^*) = (2\pi i)^{-1} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \tilde{f}(z,r^*) e^{-z(t-T)} dz, \quad a>0 \\ t < T + t_1 \quad \text{mit} \quad t_1 := \inf\{t_0 |\ (t_0,r^*) \in \text{supp}(h)\}. \end{aligned} \tag{4.24}$$

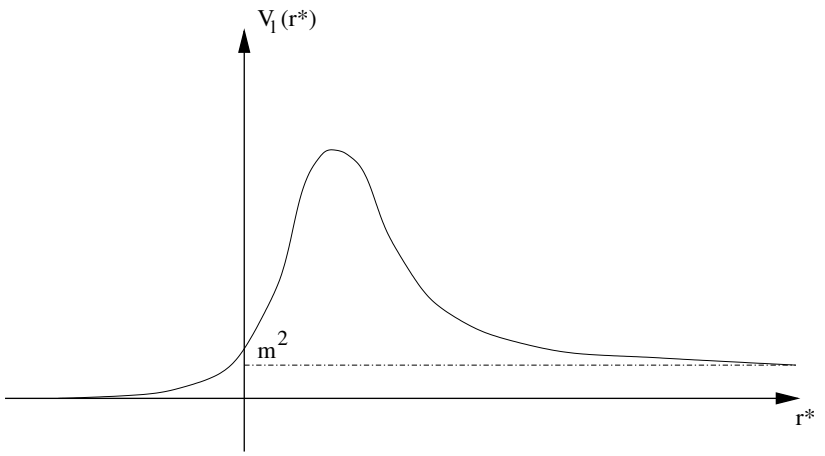

Abbildung 4.2: *Das Potential* $V_l(r^*)$

Die Lösungen $G_\pm$ des homogenen Anteils von (4.22) erfüllen mit den Randbedingungen

$$G_\pm \underset{r^* \to \pm\infty}{\longrightarrow} e^{\mp z r^*} \tag{4.25}$$

die entsprechenden Integralgleichungen

$$G_-(z, r^*) = e^{z r^*} + \int_{-\infty}^{r^*} \frac{\sinh z(r^* - y)}{z} V(y) G(y), \quad \text{und} \tag{4.26}$$

$$G_+(z, r^*) = e^{-z r^*} - \int_{r^*}^{\infty} \frac{\sinh z(r^* - y)}{z} V(y) G(y). \tag{4.27}$$

Die Lösungen lauten dann [Alf65]:

$$G_-(z, r^*) = e^{z r^*} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \int_{-\infty}^{r^*} dy_1 \int_{-\infty}^{y_1} dy_2 \cdots \int_{-\infty}^{y_{n-1}} dy_n \frac{\sinh z(r^* - y_1)}{z} \cdots \frac{\sinh z(y_{n-1} - y_n)}{z} e^{y_n z} V(y_1) \cdots V(y_n). \tag{4.28}$$

$$G_+(z,r^*) = e^{-zr^*} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \int_{r^*}^{\infty} dy_1 \int_{y_1}^{\infty} dy_2 \cdots \int_{y_{n-1}}^{\infty} dy_n \frac{\sinh z(r^*-y_1)}{z} \cdots \frac{\sinh z(y_{n-1}-y_n)}{z} e^{-y_n z} V(y_1)\cdots V(y_n). \tag{4.29}$$

Da das Potential für kleine r^* exponentiell und für große r^* nur wie r^{*-2} abfällt, hat G_- bessere Eigenschaften als G_+. G_- ist eine glatte Funktion bzgl. r^* und analytisch in z für $\mathrm{Re}\, z > \frac{r_0}{2}$. Die Reihe (4.29) konvergiert jedoch nur für z mit $\mathrm{Re}\, z > 0$. Für G_+ kann man mit Hilfe der in [Alf65] behandelten Konzepte zeigen, daß $z^l G_+$ auf der imaginären Achse außer bei $z = 0$ analytisch ist. Siehe für mehr Details [Lim62], [PR62] und [Wat52].
Somit erhalten wir eine Lösung von(4.22):

$$\tilde{f}(z,r^*) = \frac{z^l}{\delta(z)}\left(G_+(z,r^*)\int_{-\infty}^{r^*} G_-(z,r^{*'})F(z,r^{*'})dr^{*'} + G_-(z,r^*)\int_{r^*}^{\infty} G_+(z,r^{*'})F(z,r^{*'})dr^{*'}\right) \tag{4.30}$$

mit der Wronski-Determinante

$$\delta = \delta(z) := z^l\left(G_+\frac{\partial G_-}{\partial r^*} - \frac{\partial G_+}{\partial r^*}G_-\right), \qquad \delta \neq \delta(x). \tag{4.31}$$

Wir wollen nun über mögliche Nullstellen von $\delta(z)$ diskutieren:

(i) $\underline{\mathrm{Re} z > 0}$: Aus $\tilde{\delta}(z) := G_+(z,r^*)G_-'(z,r^*) - G_+'(z,r^*)G_-(z,r^*) = 0$ folgt $G_+(z,r^*) = \lambda G_-(z,r^*), \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad \lambda \neq 0$, d.h. wegen (4.22) ist $G_+(z,\cdot)$ eine Eigenfunktion des Hamiltonoperators $H = -\frac{d^2}{dr^{*2}} + V$ in $L^2(\mathbb{R})$ zum Eigenwert $-z^2$. Jedoch kann H wegen $V \geq 0$ nur positive Eigenwerte besitzen. Also ist $\mathrm{Re} z = 0$ und damit $\tilde{\delta}(z) \neq 0$.

(ii) $\underline{z = i\omega,\ \omega \in \mathbb{R},\ \omega \neq 0}$: $\tilde{\delta}(i\omega) = 0$ führt zu $G_+(i\omega,r^*) = \lambda G_-(i\omega,r^*)$. Da V reell ist, sind $\overline{G_\pm(i\omega,r^*)}$ ebenfalls eine Lösung. Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} -2i\omega &= \tilde{\delta}\left(\overline{G_+(i\omega,\cdot)}, G_+(i\omega,\cdot)\right) \\ &= |\lambda|^2 \tilde{\delta}\left(\overline{G_-(i\omega,\cdot)}, G_-(i\omega,\cdot)\right) \\ &= |\lambda|^2 (2i\omega) \end{aligned} \tag{4.32}$$

Für $\omega \neq 0$ muß also $\tilde{\delta}(z) \neq 0$ gelten.

(iii) $\underline{z=0}$: Auch hier führt die Annahme $\tilde{\delta}(0)=0$ zum Widerspruch. Sei $\mathrm{supp}V \subset [-R,R]$ mit $R>0$. Dann folgt aus $G_+(0,r^*)=\lambda G_-(0,r^*)$ und $G_\pm^{'}(0,\pm R)=0$:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-R}^{R} \overline{G_+(0,r^*)} \left(-\frac{d^2}{dr^{*2}}+V(r^*)\right) G_+(0,r^*)dr^* \\ &= -G_+(0,r^*)G_+^{'}(0,r^*)|_{-R}^{R} + \int_{-R}^{R} |G_+^{'}(0,r^*)||G_+^{'}(0,r^*)|dr^* \\ &\quad + \int_{-R}^{R} |\overline{G_+(0,r^*)}|V(r^*)|G_+(0,r^*)|dr^* \\ &= \int_{-R}^{R} \left(|G_+^{'}(0,r^*)|^2 + V(r^*)|G_+(0,r^*)|^2\right) dr^*. \end{aligned} \tag{4.33}$$

Dies steht im Widerspruch zu der Annahme wegen $V(r^*)>0$.

(iv) $\underline{z=-a+ib, a>0}$: Sei $\mathrm{supp}V \subset [-R,R]$ mit $R>0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} |G_-(z,r^*)-e^{zr^*}| &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{r^*} dy_1 \int_{-\infty}^{y_1} dy_2 \cdots \int_{-\infty}^{y_{n-1}} dy_n \left|\frac{\sinh z(r^*-y_1)}{z}\right| \cdots \\ &\qquad \left|\frac{\sinh z(y_{n-1}-y_n)}{z}\right| |e^{y_n z}||V(y_1)\cdots V(y_n)| \\ &\le e^{a(r^*+2R)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \Big(\frac{\int V(y)dy}{\sqrt{a^2+b^2}}\Big)^n \\ &= e^{a(r^*+2R)} \left(e^{\frac{\int V(y)dy}{\sqrt{a^2+b^2}}}-1\right) \end{aligned} \tag{4.34}$$

$$\begin{aligned} |\frac{d}{dr^*}G_-(z,r^*)-ze^{zr^*}| &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{r^*} dy_1 \int_{-\infty}^{y_1} dy_2 \cdots \int_{-\infty}^{y_{n-1}} dy_n |\cos z(r^*-y_1)| \\ &\qquad \left|\frac{\sinh z(y_1-y_2)}{z}\right| \cdots \left|\frac{\sinh z(y_{n-1}-y_n)}{z}\right| \\ &\qquad |e^{y_n z}||V(y_1)\cdots V(y_n)| \\ &\le \sqrt{a^2+b^2}e^{a(r^*+2R)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \Big(\frac{\int V(y)dy}{\sqrt{a^2+b^2}}\Big)^n \\ &= \sqrt{a^2+b^2}e^{a(r^*+2R)} \left(e^{\frac{\int V(y)dy}{\sqrt{a^2+b^2}}}-1\right) \end{aligned} \tag{4.35}$$

Mit Hilfe der beiden Abschätzungen können wir weiter folgern

$$\begin{aligned}
|\tilde{\delta}(G_+,G_-)-2z| &\le |G_+'G_- - G_+'e^{zr^*}| + |-G_+G_-' + G_+ze^{zr^*}| \\
&\quad + |-G_+ze^{zr^*} + G_+'e^{zr^*}| \\
&\le |G_+'||G_- - e^{zr^*}| + |G_+||G_-' - ze^{zr^*}| \\
&\le 2\sqrt{a^2+b^2}e^{-zr^*+a(r^*+2R)}\Big(e^{\frac{\int V(y)dy}{\sqrt{a^2+b^2}}}-1\Big) \\
&\le 2\sqrt{a^2+b^2}e^{4aR}\Big(e^{\frac{\int V(y)dy}{\sqrt{a^2+b^2}}}-1\Big).
\end{aligned} \tag{4.36}$$

Nehmen wir nun an, daß $\tilde{\delta}(G_+,G_-)$ verschwindet, dann würde folgen:

$$\begin{aligned}
|2z| &\le 2\sqrt{a^2+b^2}e^{4aR}\Big(e^{\frac{\int V(y)dy}{\sqrt{a^2+b^2}}}-1\Big) \\
e^{-4aR}+1 &\le e^{\frac{\int V(y)dy}{\sqrt{a^2+b^2}}} \\
|b| &\le \frac{\int V(y)dy}{\ln(e^{-4aR}+1)} \le 4aR\int V(y)dy.
\end{aligned} \tag{4.37}$$

Es können also nur endlich viele Nullstellen von $\tilde{\delta}(G_+,G_-)$ in jedem beliebigen Streifen $-a < \mathrm{Re}z < 0,\ a > 0$, existieren.

Das Integral in (4.24) muß i.a. nicht konvergieren. Man findet jedoch die Darstellung

$$\begin{gathered}
\tilde{f}(z,r^*) = \frac{e^{zt}}{z} + g(z,r^*), \quad \text{mit} \\
\int_{-a-i\omega}^{-a+i\omega} |g(-a+i\omega,r^*)|d\omega < c(x), \quad c(x)\in\mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \quad \text{und} \\
\int_{-a-i\omega}^{-a+i\omega} \frac{e^{zt}}{z}dz = 0, \quad a,t>0.
\end{gathered} \tag{4.38}$$

Da der erste Summand zu (4.24) nichts beiträgt, können wir $\tilde{f}$ durch g ersetzen. Nun gilt mit $\mathrm{supp}V \cup \mathrm{supp}F \subset [r_1,r_2],\quad r_1 < r_2,\quad x\in[r_1,r_2]$:

$$|f(t,r^*)| = |2\pi i)^{-1}\int ge^{(-a+i\omega)t}g(-a-i\omega,r^*)d\omega| \le e^{-at}c(x). \tag{4.39}$$

Weiterhin können wir zeigen, daß f^T für $T-t\to\infty$ als Summe von zwei Partialwellen dargestellt werden kann. Betrachten wir hierzu das Intervall $[r_1,r_2] \supset \mathrm{supp}V \cup \mathrm{supp}F$. Für $r^* < r_1$ gilt

$$\tilde{f}(z,r^*) = \frac{e^{zr^*}}{\delta(z)} \int_{-\infty}^{+\infty} G_+(z,y)F(z,y)dy, \tag{4.40}$$

$$\tag{4.41}$$

(Wir haben für G_- dessen führenden Term eingesetzt.) und damit

$$\begin{aligned} f(t,r^*) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(-a+i\omega)t} \tilde{f}(z,r^*)d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(-a+i\omega)t} \frac{e^{(-a+i\omega)r^*}}{\delta(-a+i\omega)} \int_{-\infty}^{+\infty} G_+(-a+i\omega,y)F(-a+i\omega,y)dyd\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-a(r^*+t)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega(r^*+t)}}{\delta(-a+i\omega)} \int_{-\infty}^{+\infty} G_+(-a+i\omega,y)F(-a+i\omega,y)dyd\omega. \end{aligned} \tag{4.42}$$

Da der Integrand absolut integrabel ist, gilt:

$$f(t,r^*) =: f_l(r^*+t) \begin{cases} = 0 & r^* < r_1 \\ |f_l(r^*+t)| \leq e^{-a(r^*+t)} & \text{sonst.} \end{cases} \tag{4.43}$$

Auf die gleiche Weise erhält man für den Fall $r^* > r_1$:

$$\tilde{f}(z,r^*) = \frac{e^{-zr^*}}{\delta(z)} \int_{-\infty}^{+\infty} G_-(z,y)F(z,y)dy \tag{4.44}$$

$$f(t,r^*) = \frac{1}{2\pi} e^{a(r^*-t)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega(r^*-t)}}{\delta(-a+i\omega)} \int_{-\infty}^{+\infty} G_-(-a+i\omega,y)F(-a+i\omega,y)dyd\omega \tag{4.45}$$

$$f(t,r^*) =: f_r(r^*-t) \begin{cases} = 0 & r^* < r_2 \\ |f_l(r^*-t)| \leq e^{a(r^*-t)} & \text{sonst.} \end{cases} \tag{4.46}$$

Man kann für die zeitlichen Ableitungen entsprechende Abschätzungen finden, weil sie ebenfalls Lösungen der Klein-Gordon-Gleichungen sind mit den Cauchy-Daten im selben Gebiet. Außerhalb des Intervalls $[r_1, r_2]$ sind die räumlichen Ableitungen dem Betrage nach gleich den zeitlichen. Wegen

$$\frac{\partial^2}{\partial {r^*}^2} f(t,r^*) = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - V \right) f(t,r^*) \tag{4.47}$$

verschwindet wegen (4.44) $\frac{\partial^2}{\partial {r^*}^2} f(t,r^*)$ innerhalb unseres Intervalls wie e^{-at}. Nach einer Itegration hat man für $r^* \in [r_1, r_2]$ die Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial r^*} f(t,r^*) = \frac{\partial}{\partial r^*} f(t,r_1) + \int_{r_1}^{r^*} \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(t,y)dy, \tag{4.48}$$

wobei die beiden Summanden auf der rechten Seite der Gleichung auch wie e^{-at} verschwinden. Durch Iteration erhält man schließlich die folgende Ungleichung:

Für alle $k,l \in \mathbb{N}$ existiert eine Konstante c_{kl} mit

$$\sup_x \left| \frac{\partial^{k+l}}{\partial t^k \partial r^{*l}} \{ f(t,r^*) - f_l(t+r^*) - f_r(t-r^*) \} \right| \leq c_{kl} e^{-at} \tag{4.49}$$

Aus (4.44), (4.47) und (4.50) bekommen wir also die folgende Aufteilung:

$$\tilde{f}(z,r^*) = \begin{cases} \tilde{f}_- := \frac{z^l}{\delta(z)} G_-(z,r^*) \int_{-\infty}^{+\infty} G_+(z,r^*) F(z,r^*) dr^* & \text{für} \quad x < r_1 \\ \tilde{f}_+ := \frac{z^l}{\delta(z)} G_+(z,r^*) \int_{-\infty}^{+\infty} G_-(z,r^*) F(z,r^*) dr^* & \text{für} \quad x > r_1. \end{cases} \tag{4.50}$$

Die Rücktransformation (4.24) ergibt schließlich

$$\begin{aligned} f_\pm^T(t,r^*) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(i\omega)^l}{\delta(i\omega)} G_\pm(i\omega,r^*) c_\mp(i\omega) e^{-i\omega(t-T)} d\omega \qquad \text{mit} \\ c_\mp(i\omega) := \int_{-\infty}^{+\infty} G_\mp(i\omega,r^*) F(i\omega,r^*) dr^*. \end{aligned} \tag{4.51}$$

Der führende Term von G_- bzw. G_+ ist eine Hankelfunktion, die eine auslaufende bzw. einlaufende Welle mit dem Drehimpuls l beschreibt. Ersetzen wir $G_\pm$ durch ihre führenden Terme so folgt

$$\begin{aligned} c_\pm(i\omega) &= \int e^{\mp i\omega r^*} F(i\omega,r^*) dr^* = \int e^{\mp i\omega r^*} dr^* \int e^{i\omega t_0} h(t_0,r^*) dt_0 = \\ &= \int e^{-i \begin{pmatrix} \pm\omega \\ -\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r^* \\ t_0 \end{pmatrix}} h(t_0,r^*) dt_0 dr^* = \tilde{h}(\pm\omega, -\omega), \end{aligned} \tag{4.52}$$

$$\frac{(i\omega)^l}{\delta(i\omega)} = \frac{D_l(\omega)}{2i\omega},$$

und somit:

$$f_-^T(t,r^*) = (2\pi)^{-1}\int \frac{D_l(\omega)}{2i\omega}\tilde{h}(\omega,-\omega)e^{i\omega(r^*-t+T)}d\omega. \tag{4.53}$$

$$f_+^T(t,r^*) = (2\pi)^{-1}\int \frac{D_l(\omega)}{2i\omega}\tilde{h}(-\omega,-\omega)e^{-i\omega(r^*+t-T)}d\omega. \tag{4.54}$$

D_l stellt die Transmissionsamplitude durch die Potentialbariere $V_l(r)$ dar.

□

4.3 Beweis von Lemma 4.2

Weil die Zweipunktfunktion $W_G^{(2)}$ zu frühen Zeiten die des Grundzustandes ist, muß sie von der Hadamardform sein, und zwar für alle Zeiten, d.h. sie kann, da sie eine Lösung der Klein-Gordon-Gleichung ist, beschrieben werden durch

$$\begin{aligned} W_G^{(2)}(x_1,x_2) &= \frac{1}{(2\pi)^2}\left(\frac{\triangle(x_1,x_2)}{\sigma(x_1,x_2)} + v(x_1,x_2)\ln|\sigma(x_1,x_2)| + w(x_1,x_2)\right) \\ \text{mit} \qquad \triangle(x,y) &= -\frac{1}{\sqrt{g(x)g(y)}}\det\big(-\nabla_\mu^x\nabla_\nu^y\sigma(x,y)\big), \end{aligned} \tag{4.55}$$

wobei $v, w \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ sind. Für kurze Abstände können wir den geodätischen Abstand linearisieren.

$$\begin{aligned} \sigma(x_1,x_2) &= \Big[\int \Big(g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}\Big)^{\frac{1}{2}}d\lambda\Big]^2 \\ &= \Big[\int \Big((\frac{r_0}{r}-1)\frac{d\tau^2}{d\lambda^2} + \frac{2r_0}{r}\frac{d\tau}{d\lambda}\frac{dr}{d\lambda} + \frac{r+r_0}{r}\frac{dr^2}{d\lambda^2} + r^2\frac{d\Omega^2}{d\lambda^2}\Big)^{\frac{1}{2}}d\lambda\Big]^2 \\ &\overset{x_1\approx x_2}{\approx} \Big[\int \Big((\frac{r_0}{r_1}-1)\frac{(\tau_1-\tau_2)^2}{(\lambda_1-\lambda_2)^2} + \frac{2r_0}{r_1}\frac{(\tau_1-\tau_2)(r_1-r_2)}{(\lambda_1-\lambda_2)^2} \\ &\qquad + \frac{r_1+r_0}{r_1}\frac{(r_1-r_2)^2}{(\lambda_1-\lambda_2)^2} + r_1^2\frac{\Omega_{12}^2}{(\lambda_1-\lambda_2)^2}\Big)^{\frac{1}{2}}(\lambda_1-\lambda_2)\Big]^2 \\ &= \Big(\frac{r_0}{r_1}-1\Big)(\tau_1-\tau_2-i\epsilon)^2 + \frac{2r_0}{r_1}(\tau_1-\tau_2-i\epsilon)(r_1-r_2+i\epsilon) \\ &\quad + \frac{r_1+r_0}{r_1}(r_1-r_2+i\epsilon)^2 + r_1^2\Omega_{12}^2 =: \sigma_\epsilon(x_1,x_2) \end{aligned} \tag{4.56}$$

Wir haben aus Analytizitätsgründen der Zweipunktfunktion bzgl. τ und r im letzten Ausdruck τ_1 bzw. τ_2 durch $\tau_1 - i\epsilon$ bzw. $\tau_2 + i\epsilon$, und r_1 bzw. r_2 durch

$r_1 + i\epsilon$ bzw. $r_2 - i\epsilon$, $\epsilon > 0$, ersetzt und werden den Grenzwert $\epsilon \to 0$ betrachten (siehe [Haa] S. 59).
Der Beitrag der Zweipunktfunktion $W_G^{(2)}$ ist dann

$$\begin{aligned}\widehat{D_1}\widehat{D_2}W_G^{(2)}(x_1,x_2) = \frac{1}{(2\pi)^2}\Big(&\frac{2\triangle^{\frac{1}{2}}\widehat{D_1}\sigma_\epsilon\widehat{D_2}\sigma_\epsilon}{\sigma_\epsilon^3} + \Big\{\frac{\widehat{D_1}\widehat{D_2}\triangle^{\frac{1}{2}}}{\sigma_\epsilon} - \frac{\widehat{D_2}\triangle^{\frac{1}{2}}\widehat{D_1}\sigma_\epsilon}{\sigma_\epsilon^2}\\ &- \frac{\widehat{D_1}\triangle^{\frac{1}{2}}\widehat{D_2}\sigma_\epsilon}{\sigma_\epsilon^2} - \frac{\triangle^{\frac{1}{2}}\widehat{D_1}\widehat{D_2}\sigma_\epsilon}{\sigma_\epsilon^2}\Big\}\Big)(x_1,x_2)\\ + \frac{1}{(2\pi)^2}\Big[&(\widehat{D_1}\widehat{D_2}v)\ln(\sigma_\epsilon) + \widehat{D_2}v\frac{\widehat{D_1}\sigma_\epsilon}{\sigma_\epsilon} + \widehat{D_1}v\frac{\widehat{D_2}\sigma_\epsilon}{\sigma_\epsilon}\\ &+ v\frac{(\widehat{D_1}\widehat{D_2}\sigma_\epsilon)\sigma_\epsilon - \widehat{D_1}\sigma_\epsilon\widehat{D_2}\sigma_\epsilon}{\sigma_\epsilon^2} + \widehat{D_1}\widehat{D_2}w\Big](x_1,x_2)\end{aligned} \tag{4.57}$$

Wir interessieren uns für das Verhalten des Skalenlimes auf der r_0-Sphäre $\lim_{\lambda\to 0}\lambda^2\widehat{D_1}\widehat{D_2}W_G^{(2)}(\lambda\xi_1,\lambda\xi_2,\Omega_{12})$, $\xi_i := r_i - r_0$. Eine direkte Rechnung zeigt, daß der zweite Summand (eckige Klammer) in (4.58) keinen Anteil dazu beisteuert, d.h

$$\lim_{\lambda\to 0}\int_0^\infty \lambda^2\Big[\quad\bullet\quad\bullet\quad\bullet\quad\Big](\lambda\xi_1,\lambda\xi_2,\Omega_{12})\Omega_{12}d\Omega_{12} = 0. \tag{4.58}$$

Den Anteil des ersten Summanden (runde Klammer) in (4.58) schauen wir uns etwas genauer an. Zunächst einmal können wir die vier Terme in der geschweiften Klammer ebenfalls vernachlässigen, denn wir erhalten für die dort vorkommenden Terme:

$$\begin{aligned}\widehat{D_1}\widehat{D_2}\sigma_\epsilon(x_1,x_2) &= \Big(1+\frac{r_0}{r_1}\Big)\Big(1+\frac{r_0}{r_2}\Big)\big(\partial_{\tau_1}\partial_{\tau_2} - \partial_{\tau_1}\partial_{r_2} - \partial_{\tau_2}\partial_{r_1} + \partial_{r_1}\partial_{r_2}\big)\sigma_\epsilon(x_1,x_2)\\ &= \Big(\frac{r_0^2}{r_1^2}-1\Big)\Big(1+\frac{r_0}{r_2}\Big),\\ \triangle^{\frac{1}{2}}(x_1,x_2) &= \Big(\frac{8(r_1^2+r_0r_2)}{r_1^2+r_0r_1}\Big)^{\frac{1}{2}},\end{aligned} \tag{4.59}$$

und somit

$$\lim_{\lambda\to 0}\int_0^\infty \lambda^2\Big\{\quad\bullet\quad\bullet\quad\bullet\quad\Big\}(\lambda\xi_1,\lambda\xi_2,\Omega_{12})\Omega_{12}d\Omega_{12} = 0. \tag{4.60}$$

Betrachten wir nun den allerersten Term. Mit $\xi := \xi_1 - \xi_2 + i\epsilon$ erhalten wir

$$\lim_{\lambda\to 0}\lambda^2\frac{2\triangle^{\frac{1}{2}}\widehat{D_1}\sigma_\epsilon\widehat{D_2}\sigma_\epsilon}{\sigma_\epsilon^3}(\lambda\xi_1,\lambda\xi_2,\Omega_{12})=\lim_{\lambda\to 0}\lambda^2\triangle^{\frac{1}{2}}\frac{32\lambda^2\xi^2-32r_0^2\lambda\xi\Omega_{12}^2}{\left(2\lambda^2\xi^2+r_0^2\Omega_{12}^2\right)^3}. \quad (4.61)$$

Die Integration über die Winkelanteile ergibt:

$$\lim_{\lambda\to 0}\int\widehat{D_1}\widehat{D_2}W_G^{(2)}(\lambda\xi_1,\lambda\xi_2,\Omega_{12})\overline{Y_{l,m}}Y_{l',m'}d\Omega_{12}=\lim_{\lambda\to 0}\int_0^\infty\lambda^2\triangle^{\frac{1}{2}}\frac{32\lambda^2\xi^2-32r_0^2\lambda\xi\Omega_{12}^2}{\left(2\lambda^2\xi^2+r_0^2\Omega_{12}^2\right)^3}\Omega_{12}d\Omega_{12} \quad (4.62)$$

Zum Integral trägt der zweite Summand in (4.63) im Limes $\lambda\to 0$ nichts bei, denn nach einer partiellen Integration erhalten wir:

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda\to 0}\int_0^\infty\frac{-32\triangle^{\frac{1}{2}}r_0^2\lambda^3\xi\Omega_{12}^2f(\Omega_{12})}{\left(2\lambda^2\xi^2+r_0^2\Omega_{12}^2\right)^3}\Omega_{12}d\Omega_{12}&=\lim_{\lambda\to 0}\Big[\frac{4\triangle^{\frac{1}{2}}\lambda f(0)}{r_0^3\xi}\\&\quad-16\triangle^{\frac{1}{2}}\lambda^2\int_0^\infty\frac{(r_0v+1)f'(\lambda\xi v^{\frac{1}{2}})}{v^{\frac{1}{2}}(2r_0+r_0^2v)^2}dv\Big]\\&=0.\end{aligned} \quad (4.63)$$

Wir haben hier den Term mit der Testfunktion $f\in\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ verschmiert und mit $v:=\frac{\Omega_{12}^2}{\lambda^2\xi^2}$ substituiert. Mit dem ersten Summanden erhalten wir:

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda\to 0}\lambda^2\widehat{D_1}\widehat{D_2}W_G^{(2)}(\lambda\xi_1,\lambda\xi_2,\Omega_{12})&=\lim_{\lambda\to 0}\int_0^\infty\frac{32\triangle^{\frac{1}{2}}\lambda^4\xi^2f(\Omega_{12})}{\left(2\lambda^2\xi^2+r_0^2\Omega_{12}^2\right)^3}\Omega_{12}d\Omega_{12}\\&=\lim_{\lambda\to 0}\Big[\frac{2\triangle^{\frac{1}{2}}f(0)}{r_0^3\xi^2}+\frac{2\triangle^{\frac{1}{2}}\lambda}{r_0^2\xi}\int_0^\infty\frac{f'(\lambda\xi v^{\frac{1}{2}})}{v^{\frac{1}{2}}(2r_0+r_0^2v)^2}dv\Big]\\&=\mathrm{const}(\xi_1-\xi_2+i\epsilon)^{-2}.\end{aligned} \quad (4.64)$$

□

Anhang A

KMS-Zustände und ihre Stabilität

Die drei gängigsten Formalismen für die Beschreibung von Gleichgewichtszuständen sind das mikrokanonische Ensemble (Energie und Teilchenanzahl sind konstant), das kanonische Ensemble (Zustände mit variabler Energie bei festgehaltener Teichenanzahl) und das großkanonische Ensemble (variable Energie und Teilchenanzahl). Alle drei Zugänge können auch algebraisch formuliert werde, jedoch die großkanonische bietet sich ganz besonders an. Wir halten uns in diesem Kapitel an [OB81], [HHW67] und [KR83].
Ein Gleichgewichtszustand im Gibbsschen großkanonischen Ensemble wird beschrieben durch

$$\omega_{\beta,\mu}(A) = \frac{Tr_{\mathcal{H}}\left(e^{-\beta(H-\mu N)}A\right)}{Tr_{\mathcal{H}}\left(e^{-\beta(H-\mu N)}\right)},$$

wobei H die Hamiltofunktion, N die Teilchenzahl und $\beta, \mu \in \mathbb{R}$ sind. Es wird jedoch hier angenommen, daß $e^{-\beta(H-\mu N)}$ ein Spurenklassenoperator ist. Beim Übergang zu unendlich ausgedehnten Systemen geht diese Eigenschaft allerdings verloren. Diese Bedingung spielt bei der Einführung der Evolution

$$\mathcal{L}(\mathcal{H}) \ni A \mapsto \tau_t(A) := e^{it(H-\mu N)} A e^{-it(H-\mu N)} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$$

keine Rolle, die immer existiert, solange H selbstadjungiert ist. Mit Hilfe der Evolution kann man dann die (τ, β)-KMS-Bedingung

$$\omega_{\beta,\mu}\big(A\tau_t(B)\big)|_{t=i\beta} = \omega_{\beta,\mu}(BA)$$

definieren. Die (τ, β)-KMS-Zustände können dann mit Gleichgewichtszuständen identifiziert werden.

A.1 KMS-Zustände

Definition A.1 *Ein C^*-dynamisches System ist ein Tripel $(\mathcal{A}, \mathbf{G}, \alpha)$, bestehen aus einer C^*-Algebra $\mathcal{A}$, einer lokal kompakten Gruppe $\mathbf{G}$ und einer stark stetigen Darstellung α von $\mathbf{G}$ in die Gruppe der Automorphismen von $\mathcal{A}$, d.h. für alle $g \in \mathbf{G}$ ist α_g ein Automorphismus von $\mathcal{A}$ mit*

$$\alpha_e = 1 \quad und \quad \alpha_{g_1}\alpha_{g_2} = \alpha_{g_1 g_2}.$$

Wir werden ab jetzt nur das C^*-dynamisches System $(\mathcal{A}, \mathbb{R}, \tau)$ betrachten und es mit $(\mathcal{A}, \tau)$ abkürzen. Mit $\mathcal{A}_\tau$ bezeichenen wir die Menge der analytischen Elemente für τ.

Definition A.2 *Sei $(\mathcal{A}, \tau)$ ein C^*-dynamisches System. Ein Zustand $\omega : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ heißt ein τ-KMS-Zustand bzgl. $\beta \in \mathbb{R}$, oder (τ, β)-KMS-Zustand, falls er die KMS-Bedingung*

$$\omega\left(A\tau_{i\beta}(B)\right) = \omega(BA) \tag{A.1}$$

für alle A, B in einer normdichten, τ-invarianten *-Unteralgebra von $\mathcal{A}_\tau$ erfüllt.

Theorem A.3 *Seien $(\mathcal{A}, \tau)$ ein C^*-dynamisches System und ω ein Zustand auf $\mathcal{A}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) ω ist ein (τ, β)-KMS-Zustand.

(ii) $\omega\left(\tau_{-i\beta/2}(A)\tau_{-i\beta/2}(B)\right) = \omega(AB)$.

(iii) Für alle $A, B \in \mathcal{A}$ existiert eine auf

$$D_\beta := \begin{cases} \{z \in \mathbb{C} : \ 0 < Im\, z < \beta\} & , \beta \geq 0 \\ \{z \in \mathbb{C} : \ \beta < Im\, z < 0\} & , \beta \leq 0 \end{cases}$$

analytische und auf $\overline{D_\beta}$ $(= \mathbb{R}$ für $\beta = 0)$ stetige Funktion F_{AB} mit

$$F_{AB}(t) = \omega\big(A\tau_t(B)\big) \ \wedge \ F_{AB}(t + i\beta) = \omega\big(\tau_t(B)A\big) \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

(iv) $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\omega\big(A\tau_t(B)\big)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t+i\beta)\omega\big(\tau_t(B)A\big)dt \quad \forall A, B \in \mathcal{A}, \ \forall \hat{f} \in \mathcal{D}$.

(v) Die Maße

$$\mu_A(\hat{F}) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\omega\big(A^*\tau_t(A)\big)dt \text{ und } \nu_A(\hat{F}) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\omega\big(\tau_t(A)A^*\big)dt$$

auf $\mathcal{D}$ sind für alle $A \in \mathcal{A}$ äquivalent mit der Radon-Nikodym-Ableitung

$$\frac{d\mu_A}{d\nu_A}(p) = e^{-\beta p} \Longleftrightarrow d\mu_A(p) \geq e^{-\beta p} d\mu_{A^*}(p).$$

(vi) [Roepstorff-Araki-Sewell] Sei $\delta := \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big(\tau_t(A) - A\big)$ ein infinitesimaler Erzeuger von τ. Dann gilt für alle $A \in \mathbf{D}(\delta) := \{A \in \mathcal{A} : \exists\delta(A)\}$

$$-i\beta\omega\big(A^*\delta(A)\big) \geq \omega(A^*A)\log\left(\frac{\omega(A^*A)}{\omega(AA^*)}\right)$$
$$:= \begin{cases} \omega(A^*A)\log\left(\frac{\omega(A^*A)}{\omega(AA^*)}\right) & ,\omega(A^*A), \omega(AA^*) > 0 \\ 0 & ,\omega(A^*A) = 0, \omega(AA^*) \geq 0 \\ +\infty & ,\omega(A^*A) > 0, \omega(AA^*) = 0. \end{cases}$$

(vii) [Roepstorff-Fannes-Verbeure] Sei ω τ-invariant. Dann gilt für alle $A \in \mathcal{A}_\tau$

$$\frac{1}{\beta}\int_0^\beta \omega\big(A^*\tau_{i\lambda}(A)\big) \leq \frac{\omega(A^*A) - \omega(AA^*)}{\log\big(\omega(A^*A)/\omega(AA^*)\big)}$$
$$:= \begin{cases} \frac{\omega(A^*A)-\omega(AA^*)}{\log\left(\omega(A^*A)/\omega(AA^*)\right)} & ,\omega(A^*A) \neq \omega(A^*A), \\ & \omega(A^*A), \omega(AA^*) > 0 \\ \omega(A^*A) & ,\omega(A^*A) = \omega(A^*A) > 0 \\ 0 & ,\omega(A^*A)\omega(A^*A) = 0. \end{cases}$$

Im zweiten Teil dieser Arbeit werden wir sehen, daß die Variable β als das Inverse der Temperatur eines physikalischen Zustandes gedeutet werden kann.

Definition A.4 *Sei $(\mathcal{A}, \tau)$ C^*-dynamisches System, ω ein Zustand auf $\mathcal{A}$ und δ der Generator von τ. Dann heißt ω ein τ-Grundzustand bzw. ceiling-Zustand, wenn*

$$-i\omega\big(A^*\delta(A)\big) \geq 0 \quad bzw. \quad -i\omega\big(A^*\delta(A)\big) \geq 0 \tag{A.2}$$

für alle $A \in \mathbf{D}(\delta)$ gilt.

Im ersten Fall spricht man auch vom $(\tau, +\infty)$-KMS-Zustand und im zweiten vom $(\tau, -\infty)$-KMS-Zustand. Ist $\beta = 0$, d.h. $T = \infty$, dann liegt ein *chaotischer* Zustand vor. Wir können mit Hilfe der verschiedenen Definitionen des (τ, β)-KMS-Zustandes diese speziellen Zustände unterschiedlich charakterisieren.

Zunächst einmal versuchen wir, die KMS-Bedingung zu verallgemeinern. Wenn man sich bei der Definition nicht auf ein bestimmtes β festlegt, sondern alle möglichen $\beta \in \mathbb{R}_+$zulässt, dann kommt man zum Begriff der Passivität.

Definition A.5 *Sei $(\mathcal{A}, \tau)$ C^*-dynamisches System, ω ein Zustand auf der Unitalen Algebra $\mathcal{A}$ und δ der Generator von τ. Dann heißt ω ein passiver Zustand, falls*

$$-i\omega\big(U^*\delta(U)\big) \geq 0 \qquad \forall U \in \mathbf{U}_0(\mathcal{A}) \cap \mathbf{D}(\delta). \tag{A.3}$$

Hierbei ist $U \in \mathbf{U}_0(\mathcal{A})$ die Zusammenhangskomponente von $\mathbb{1}$ der Gruppe $\mathbf{U}(\mathcal{A})$ aller unitären Elemente von $\mathcal{A}$. Im Falle des C^*-dynamisches Systems $\left(\bigotimes_{i=1}^n \mathcal{A}, \bigotimes_{j=1}^n \tau\right)$ heißt ω vollständig passiv, wenn $\bigotimes_{i=1}^n \omega$ für alle n passiv ist.

Im Gegensatz zu KMS-Zuständen sind Linearkombinationen passiver Zustände wieder passiv.

Theorem A.6 (Pusz-Woronowicz) *Sei $(\mathcal{A}, \tau)$ C^*-dynamisches System, ω ein Zustand auf der Unitalen Algebra $\mathcal{A}$, δ der Generator von τ und $\delta^{(n)}$ der Generator von $\bigotimes_{j=1}^n \tau$ auf $\bigotimes_{i=1}^n \mathcal{A}$. Dann gilt für die folgenden Aussagen*

(i) ω ist ein (τ, β)-KMS-Zustandmit $\beta \in \mathbb{R}_+$.

(ii) ω ist vollständig passiv.

(iii) ω ist passiv.

(iv) $-i\left(\bigotimes_{i=1}^n \omega\right)\left(B\delta^{(n)}(B)\right) \geq 0, \qquad \forall B = B^* \in \mathbf{D}(\delta^{(n)}),\ \forall n \in \mathbb{N}.$

(v) $-i\omega\big(B\delta(B)\big) \geq 0, \qquad \forall B = B^* \in \mathbf{D}(\delta).$

das Diagramm (A.1).

Wir geben nun einige Konvergenzeigenschaften von KMS-Zuständen und eine Begründung für die Terminologie von KMS-Zuständen bei $\beta = \pm\infty$.

Satz A.7 *Sei $(\mathcal{A}, \tau)$ C^*-dynamisches System und (ω_α) eine Folge von (τ, β_α)-Zuständen, $\beta_\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$, auf $\mathcal{A}$, so daß die Grenzwerte*

$$\lim_\alpha \omega_\alpha(A) = \omega(A) \quad \forall A \in \mathcal{A} \quad \textit{und} \quad \lim_\alpha \beta_\alpha = \beta \in \overline{\mathbb{R}} \tag{A.4}$$

existieren, dann ist ω ein (τ, β)-KMS-Zustand.

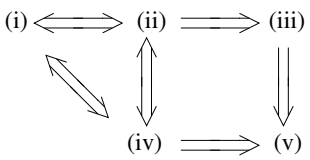

Abbildung A.1: *Diagramm zum Thm. von Pusz-Woronowicz*

Hilfreich für den beweis der Existenz von KMS-Zuständen, speziell Grundzuständen, in Systemen, die thermodynamische Limiten sind, ist der folgende

Satz A.8 *Sei $\mathcal{A}$ eine unitale C^*-Algebra und $(\tau^n)_{n\geq 1}$ eine Teilfolge einer einparametrigen Gruppe von *-Automorphismen von $\mathcal{A}$ mit*

$$\lim_{n\to\infty} \|\tau_t^n(A) - \tau_t(A)\| = 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathcal{A}.$$

Weiterhin gebe es ein (τ_t^n, β_n)-KMS-Zustand ω_n, $\beta_n \in \overline{\mathbb{R}}$, auf $\mathcal{A}$ mit

$$\lim_{n\to\infty} \beta_n = \beta \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Dann existiert ein (τ, β)-KMS-Zustand ω auf $\mathcal{A}$

$$\omega = \lim_{n\to\infty} \omega_n. \tag{A.5}$$

Zum Schluß sei noch bemerkt, dass nicht jedes C^*-dynamisches System $(\mathcal{A}, \tau)$ KMS-Zustände besitzen muß.

A.2 Die Menge der KMS-Zustände

Da die Menge der KMS-Zustände $\mathbf{K}_\beta \subset \mathbf{E}_\mathcal{A}$ (Menge aller Zustände auf $\mathcal{A}$) konvex ist, kann man zeigen, daß $\mathbf{K}_\beta$ bzgl. der schwach*-Topologie abgeschlossen ist. Deshalb kann man W^*-dynamische Systeme $(\mathcal{M}, \tau)$ betrachten.

Theorem A.9 *Sei $(\mathcal{A}, \tau)$ ein C^*-dynamisches System mit $\mathbb{1}$. Dann gelten für $\beta < \infty$ die folgende Aussagen:*

(i) $\mathbf{K}_\beta$ *ist konvex und schwach*-kompakt.*

(ii) $\mathbf{K}_\beta$ *ist ein Simplex.*

(iii) $\omega \in \mathbf{K}_\beta$ *ist ein Extremalpunkt (Ecke)von* $\mathbf{K}_\beta$ *genau dann, wenn* ω *ein Faktorzustand ist.*

(iv) ω_1, ω_1 *seien zwei Extremalpunkte von* $\mathbf{K}_\beta$ *, dann sind sie entweder identisch oder disjunkt.*

Falls $\mathcal{A}$ keine Identität besitzt, kann man sie trotzdem unital machen durch:

$$(\mathcal{A}, \tau) \to (\tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\tau}) \quad \text{mit}$$
$$\tilde{\mathcal{A}} := \mathbb{C}\mathbb{1} + \mathcal{A} \quad \text{und} \quad \tilde{\tau} : \tilde{\mathcal{A}} \ni (\alpha, A) \mapsto \tilde{\tau}_t(\alpha, A) := \big(\alpha, \tilde{\tau}_t(A)\big)$$

Der Vorteil einer Algebra mit $\mathbb{1}$ ist der, daß $\mathbf{E}_\mathcal{A}$ kompakt im Sinne der schwach*-Topologie ist.
Die Aussage *(ii)* ist für $\beta = \pm\infty$ im allgemeinen nicht richtig, denn beispielsweise ist im Falle von $\tau = \eta$ für alle $t \in \mathbb{R}$ $\mathbf{K}_\infty = \mathbf{E}_\mathcal{A}$. Besteht $\mathbf{K}_\beta$ aus genau einem Punkt, dann ist es ein Faktorzustand. Dies ist insofern wichtig, als Faktorzustände über cluster-Eigenschaften charakterisiert werden können, die weitreichende Korrelationen ausschliessen.

Satz A.10 *Folgeden Aussagen sind für* $\beta < \infty$ *äquivalent:*

(i) $\mathbf{K}_\beta$ *ist ein Gesicht in* $\mathbf{E}_\mathcal{A}^\mathbb{R}$.

(ii) $(\mathcal{A}, \omega)$ *ist schwach asymptotisch abelsch im Sinne für alle* $\omega \in \mathbf{K}_\beta$.

(iii) $(\mathcal{A}, \omega)$ *ist* $\mathbb{R}$*-zentral für alle* $\omega \in \mathbf{K}_\beta$.

A.3 Stabilität von KMS-Zuständen

Bei Stabilitätsuntersunchungen von KMS-Zuständen geht es darum ein C^*-dynamisches System $(\mathcal{A}, \tau)$ mit einem gestörtem System $(\mathcal{A}, \tau^P)$ der Störung $P = P^* \in \mathcal{A}$ zu vergleichen. Hierbei wird die Automorphismengruppe τ^P durch den Generator $\delta + \delta_P$ mit $\delta_P(A) := i[P, A]$ erzeugt. Es gibt zwei verschiedene Zugänge, eine "zeitunabhängige" von Connes und Araki, und eine "zeitabhängige" von Robinson. Der erste Zugang ist auf den Vergleich von τ-KMS-Zuständen mit τ^P-KMS-Zuständen zugeschnitten, während die zweite Methoden dazu geeignet ist, allgemeinere Zustände von Systemen, die die Ergodizitäteigenschaft besitzen (z.b. asymptotische Kommutativität), zu behandeln. Wir wollen nun auf dem direkten Weg auf die Haupttheoreme hinarbeiten. Die gestörte Gruppe τ^P ist die eindeutige Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{d\tau_t^P(A)}{dt} = \tau_t^P\big(\delta(A) + \delta_P(A)\big) \qquad \forall A \in D(\delta).$$

Durch Integration und anschliessender Iteration erhält man die explizite Form

$$\tau_t^P(A) = \tau_t(A) + \sum_{n\geq 1} i^n \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_{n-1}} dt_n \Big[\tau_{t_n}(P)\big[\cdots[\tau_{t_1}(P), \tau_t(A)]\big]\Big].$$

Man kann die gestörte Gruppe auch darstellen durch

$$\tau_t^P(A) = \Gamma_t^P \tau_t(A) \Gamma_t^{P*},$$

wobei

$$\Gamma_t^P = \mathbb{1} + \sum_{n\geq 1} i^n \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_{n-1}} dt_n \tau_{t_n}(P) \cdots \tau_{t_1}(P)$$

die Lösung der folgenden Differentialgleichung ist:

$$\frac{\Gamma_t^P}{dt} = i\Gamma_t^P \tau_t(P).$$

Man kann zeigen, daß Γ_t^P die cozyklische Relation

$$\Gamma_{t+s}^P = \Gamma_t^P \tau_t(\Gamma_t^P)$$

erfüllt. Alle oben auftretenden Integrale konvergieren im C^*-dynamischen Fall im Sinne der starken und im W^*-dynamischen Fall im Sinne der σ-schwachen Topologie. Wir geben nun einige Stabillitätseigenschaften von KMS-Zuständen im "zeitunabhängigen" Formalismus.

Theorem A.11 *Sei $(\mathcal{A}, \tau)$ ein C^*-dynamisches oder W^*-dynamisches System und ω ein (τ, β)-KMS-Zustandüder $\mathcal{A}$. Dann ist für alle $A \in \mathcal{A}$ und $P = P^* \in \mathcal{A}$ die Funktion*

$$F_A(t_1, \cdots, t_n) := \omega_T\big(A; \tau_{t_n}(P); \cdots; \tau_{t_1}(P)\big)$$

Grenzwert einer Funktion $F_A(z)\big(\omega_T\big(A; \tau_{z_n}(P); \cdots; \tau_{z_1}(P)\big)$, die innerhalb von $\mathcal{D}_\beta^{(n)} := \{z = (z_1, \cdots, z_n) : \ Im\, z_1 \in (0, \beta), Im\, z_i \in (0, Im\, z_{i-1})\}$ holomorph, in $\overline{\mathcal{D}_\beta^{(n)}}$ stetig und uniform beschränkt und

$$\sup_{z \in \mathcal{D}_\beta^{(n)}} |P_A(z)| \leq 2^n n! \|P\|^n \|A\|.$$

Gilt $2\|P\| < 1$, dann ist der gestörte (τ^P, β)-KMS-Zustand

$$\omega^P(A) = \frac{\omega(A\Gamma_{i\beta}^P)}{\omega(\Gamma_{i\beta}^P)}$$

gegeben durch die uniform konvergente Summe

$$\omega^P(A) = \omega(A) + \sum_{n\geq 1}(-1)^n \int_0^\beta ds_1 \cdots \int_0^{s_{n-1}} ds_n \omega_T\big(A; \tau_{is_n}(P); \cdots; \tau_{is_1}(P)\big). \tag{A.6}$$

Man kann zeigen, daß die Abbildung $\gamma_\tau^P : \omega \mapsto \omega^P$ ein Isomorphismus von der Menge der (τ,β)-KMS-Zustände in die Menge der (τ^P,β)-KMS-Zustände ist, die Extremalpunkte in Extremalpunkte abbildet.
Betrachten wir nun den Orbit des Zustandes ω unter der gestörten Evolution τ^P. Beim "zeitabhängigen" Formalismus sieht man das System als stabil an, wenn der netwickelte Zustand ω^P der eindeutige τ^P-KMS-Zustand von ω ist, in Formeln lautet diese Forderung

$$\omega^P(A) = \lim_{t\to\pm\infty} \omega\big(\tau_t^P(A)\big).$$

Wegen der τ-invarianten Eigenschaft von ω erhält man

$$\begin{aligned}\omega^P(A) &= \lim_{t\to\pm\infty} \omega\big(\tau_{-t}\tau_t^P(A)\big)\\ &= \omega(A)\\ &\quad + \lim_{t\to\pm\infty} \sum_{n\geq 1} i^n \int_0^t dt_1 \int_{t_1}^t dt_2 \cdots \int_{t_{n-1}}^t dt_n \omega\left(\Big[\tau_{t_n}(P)\big[\cdots[\tau_{t_1}(P), A]\big]\Big]\right).\end{aligned} \tag{A.7}$$

Wir haben also eine von der im Theorem angegebenen unterschiedliche Entwicklungen für $\omega^P(A)$ erhalten. Durch Termvergleich der beiden Formen erhält man schließlich eine Stabilitätsbedingung.

Theorem A.12 *Sei ω ein (τ,β)-KMS-Zustandüber dem C^*-dynamischen oder W^*-dynamischen System $(\mathcal{A},\tau)$ mit der starken Clustereigenschaft*

$$\lim_{t\to\pm\infty} \omega\big(A\tau_t(B)\big) = \omega(A)\omega(B) \qquad \forall A, B \in \mathcal{A}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}&\lim_{T_1\to\pm\infty} \cdots \lim_{T_n\to\pm\infty} i^n \int_0^{T_1} dt_1 \int_{t_1}^{T_2} dt_2 \cdots \int_{t_{n-1}}^{T_n} dt_n \omega\left(\Big[\tau_{t_n}(B)\big[\cdots[\tau_{t_1}(B), A]\big]\Big]\right)\\ &\qquad = \int_0^\beta ds_1 \cdots \int_0^{s_{n-1}} ds_n \omega_T\big(A; \tau_{is_n}(B); \cdots; \tau_{is_1}(B)\big),\end{aligned} \tag{A.8}$$

und im besonderen

$$\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T} dt\omega\big([A,\tau_t(P)]\big)=0 \tag{A.9}$$

für alle $A,P\in\mathcal{A}$.

Beispielsweise lautet die Stabilitätsbedingung erster Ordnung:

$$\lim_{T\to\pm\infty} i\int_0^T dt\omega\big([A,\tau_t(B)]\big)=\int_0^\beta ds\omega_T\big(A;\tau_{is}(B)\big).$$

Die Stabilitätsbedingung wird von allen (τ,β)-KMS-Zuständen, $\beta\in\overline{\mathbb{R}}$ erfüllt, die auf einem $L^1(\mathcal{A}_0)$-asymptotisch stabilen C^*-dynamischen System leben, d.h. auf einer normdichten Unteralgebra von $\mathcal{A}_0\subset\mathcal{A}$ mit

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt\|[A,\tau_t(B)]\|<\infty \qquad \forall A,B\in\mathcal{A}_0.$$

Bis jetzt haben wir gezeigt, daß KMS-Zustände bestimmten Stabilitätsbedingungen genügen. Das nächste Ziel ist, die KMS-Bedingung aus Stabillitätskriterien abzuleiten. Wir geben nun ein Ergebnis von Haag, Kastler und Trych-Pohlmeyer, die gezeigt haben, daß extremale Zustände $L^1(\mathcal{A}_0)$-asymptotisch stabiler C^*-dynamischer Systeme, die bei lokalen Störungen stabil sind, extremale (τ,β)-KMS-Zustände mit Werten $\beta\in\overline{\mathbb{R}}$ sind.

Theorem A.13 *Sei* $(\mathcal{A},\tau)$ *ein* $L^1(\mathcal{A}_0)$*-asymptotisch stabiles* C^**-dynamisches System und* ω *ein* τ*-invarianter Zustand über* $\mathcal{A}$. *Seien zusätzlich noch die beiden folgenden Bedingungen erfüllt:*

(i) Entweder

$$\lim_{\substack{inf\\ i\neq j}|t_i-t_j|\to\infty}\omega\big(\tau_{t_1}(A_1)\tau_{t_2}(A_2)\tau_{t_3}(A_3)\big)=\omega(A_1)\omega(A_2)\omega(A_3)\quad\forall A_k\in\mathcal{A},$$

oder ω *ist ein Faktorzustand.*

(ii) ω *genügt der Stabilitätsbedingung*

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt\omega\big([A,\tau_t(B)]\big)<\infty \qquad \forall A,B\in\mathcal{A}_0.$$

Dann ist ω ein extremaler (τ, β)-KMS-Zustandmit $\beta \in \overline{\mathbb{R}}$.

Die vorangegangenen drei Theoreme verknüpfen die Stabilität und die KMS-Bedingung für $L^1(\mathcal{A}_0)$-asymptotisch stabile C^*-dynamische Systeme aufs engste miteinander. Man kann also die Interpretation von KMS-Zuständen als Gleichgewichtszustände physikalischer Systeme genügend rechtfertigen.

Notation

x	$= (x_1, ..., x_n)$
ξ	$= (\xi_1, ..., \xi_n)$
α	$= (\alpha_1, ..., \alpha_n)$
$\|\alpha\|$	$= \Sigma_{i=1}^n \alpha_i$
$\alpha!$	$= \Pi_{i=1}^n \alpha_i$
x^α	$= \Pi_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}$
∂_x^α	$= (\partial/\partial x_1)^{\alpha_1} \cdots (\partial/\partial x_n)^{\alpha_n}$
D_x^α	$= (-1)^{\|\alpha\|} \partial_x^\alpha$
$\mathcal{C}^l(\Omega)$	Vektorraum der bis zur Ordnund $l \in \mathbb{N}_0$ stetig differenzierbaren Funktionen über Ω
$\mathcal{C}(\Omega)$	$= \mathcal{C}^0(\Omega)$
$\mathcal{C}^\infty(\Omega)$	$= \cap\{\mathcal{C}^l(\Omega) \mid l \in \mathbb{N}_0\}$
$\mathcal{E}(\Omega)$	$= \mathcal{C}^\infty(\Omega)$
$\mathcal{D}(\Omega)$	$= \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$
$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$	Vektorraum der in allen Ableitungen schnell fallenden $\mathcal{C}^\infty$-Funktionen über $\mathbb{R}^n$
$\mathcal{E}'(\Omega)$	Dualraum von $\mathcal{E}(\Omega)$
$\mathcal{D}'(\Omega)$	Dualraum von $\mathcal{D}(\Omega)$
$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$	Dualraum von $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$
$< u, \phi >$	Anwendung der Distribution u auf $\phi \in \mathcal{X} \quad (\mathcal{X} \in \{\mathcal{E}(\Omega), \mathcal{D}(\Omega), \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\}$
(u, ϕ)	$=< u, \overline{\phi} >$
singsupp(u)	singulärer Träger von u
$\hat{u}$	Fouriertransformierte von$u$
$S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{R}^n) = S^m_{\rho,\delta}$	Vektorraum der Kumano-goschen Symbole der Ordnung m und des Typs (ρ, δ)
S^m	$S^m_{0,1}$
S^∞	$\cup\{S^m \mid \quad m \in \mathbb{R}\}$
$S^{-\infty}$	$\cap\{S^m \mid \quad m \in \mathbb{R}\}$

$\mathcal{S}^m_{\rho,\delta}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{S}^m_{\rho,\delta}$	Vektorraum der Kumano-goschen Pseudodifferentialoperatoren (PsDOen) der Ordnung m und des Typs (ρ,δ)
$\mathcal{S}^m$	$\mathcal{S}^m_{0,1}$
$\mathcal{S}^\infty$	$\cup\{\mathcal{S}^m \mid \quad m \in \mathbb{R}\}$
$\mathcal{S}^{-\infty}$	$\cap\{\mathcal{S}^m \mid \quad m \in \mathbb{R}\}$
$p(X, D_x)$	von dem Symbol $p \in S^m_{\rho,\delta}$ erzeugter PsDO
$S^{m,m'}_{\rho,\delta}(\mathbb{R}^n) = S^{m,m'}_{\rho,\delta}$	Vektorraum der Kumano-goschen Doppelsymbole der Ordnung (m,m') und des Typs (ρ,δ)
$S^{m,m'}$	$S^{m,m'}_{0,1}$
$p(X, X', D_x, D_{x'})$	von dem Doppelsymbol $p \in S^{m,m'}_{\rho,\delta}$ erzeugter PsDO
$H_s(\mathbb{R}^n) = H_s$	Sobolev-Raum
$H_{-\infty}$	$\cup\{H_s \mid \quad m \in \mathbb{R}\}$
H_∞	$\cap\{S_s \mid \quad m \in \mathbb{R}\}$
$\mathfrak{K}(\xi_0)$	Menge der kegelförmigen Umgebungen von $\xi_0 \in \mathbb{R}^n_*$
$\mathfrak{K}(x_0, \xi_0)$	Menge der (in ξ) kegelförmigen Umgebungen von $(x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}_*$
$\Sigma(u)$	Menge der "Richtungen des singulären Verhaltens" von $u \in \mathcal{E}'$
$WF(u)$	Wellenfrontmenge von $u \in \mathcal{D}'$
μSC	mikrolokale Spektrumsbedingung
$\mu Tr(p) = \mu Tr(P)$	Mikroträger des Symbols p bzw. des PsDOs P

$\mathcal{A}, \mathcal{B}$	C^*-Algebren
$\mathcal{M}$	vier dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit
$\mathcal{A}(\mathcal{O})$	C^*-Algebra der in $\mathcal{O} \in \mathcal{M}$ meßbaren physikalischen Größen
Σ	Cauchy-Fläche
$\triangle(x_1, x_2)$	van Vleck-Morette-Determinante
χ^*, χ_*	Pullback, Push forward
$\sigma(x, y)$	geodätischer Abstand zwischen x und y in $\mathcal{M}$
$\omega_n(f_1, ..., f_n)$	n-Punktfunktion, $f_i \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$
$\Lambda(f, g)$	$= \omega_2(f, g)$
$W^{(2)}_G(x_1, x_2)$	Zweipunktfunktion des Grundzustandes
r_0	$= 2M$: Schwarzschild-Radius
r^*	$= r + r_0 \ln\left(\frac{r}{r_0} - 1\right)$: die Schildkrötenkoordinate
$f^T_-(r^*, t)$	gegen r_0 laufende Wellenpakete
$f^T_+(r^*, t)$	gegen $r = \infty$ $(+)$ laufende Wellenpakete
$\mathcal{H}$	Hilbertraum
$\mathcal{L}(\mathcal{H})$	Menge der linearen und beschränkten Operatoren auf $\mathcal{H}$
$\mathcal{E}_\mathcal{A}$	Menge aller Zustände auf $\mathcal{A}$
$\mathcal{K}_\beta$	Menge aller KMS-Zustände auf $\mathcal{A}$
$(\mathcal{A}, \mathbf{G}, \alpha)$	C^*-dynamisches System.
$\delta(A)$	$= \lim_{t\to 0}\left(\tau_t(A) - A\right)$: infinitesimaler Erzeuger von τ
P	Störung, $P = P^* \in \mathcal{A}$

Literaturverzeichnis

[Alf65] V. De Alfaro. *Potential Scattering, T. Regge*. North-Holland Publishing Company, 1965.

[And98] M. Andronache. über die eindeutigkeit stationärer physikalischer zustände für rotationssymmetrische schwarze löcher. Master's thesis, Hamburg, 1998.

[aW92] H. Baumgärtel and M. Wollenberg. *Causal Nets of Operator Algebras*. Akademie Verlag, 1992.

[Bac99] A. Bachelot. The hawking effect. *Annales Poincare Phys. Theor.*, 70:41, 1999.

[BD] N. D. Birrell and P. C. W. Davies. Quantum fields in curved space. Cambridge, Uk: Univ. Pr. (1982) 340p.

[BF00] Romeo Brunetti and Klaus Fredenhagen. Microlocal analysis and interacting quantum field theories: Renormalization on physical backgrounds. *Commun. Math. Phys.*, 208:623, 2000.

[BFK96] R. Brunetti, K. Fredenhagen, and M. Kohler. The microlocal spectrum condition and wick polynomials of free fields on curved spacetimes. *Commun. Math. Phys.*, 180:633–652, 1996.

[CM73] J.A. Wheeler C.W. Misner, K.S. Thorne. *Gravitation*. W.H. Freeman and Company, 1973.

[Dim80] J. Dimock. Algebras of local observables on a manifold. *Commun. Math. Phys.*, 77:219–228, 1980.

[DK86] J. Dimock and B. S. Kay. Classical and quantum scattering theory for linear scalar fields on the schwarzschild metric. 2. *J. Math. Phys.*, 27:2520, 1986.

[DK87] J. Dimock and Bernard S. Kay. Classical and quantum scattering theory for linear scalar fields on the schwarzschild metric. 1. *Ann. Phys.*, 175:366, 1987.

[Dui72] J.J. Duistermaat. Fourier integral operators 2. *Acta Math.*, (128):183–269, 1972.

[FH87] Klaus Fredenhagen and Rudolf Haag. Generally covariant quantum field theory and scaling limits. *Commun. Math. Phys.*, 108:91, 1987.

[FH90] Klaus Fredenhagen and Rudolf Haag. On the derivation of hawking radiation associated with the formation of a black hole. *Commun. Math. Phys.*, 127:273, 1990.

[FNWNy] S. A. Fulling, F. J. Narcowich, and R. M. Wald. Singularity structure of the two point function in quantum field theory in curved spacetime. ii. *Annals Phys.*, 136:243, N.y.

[Frea] K. Fredenhagen. Persönliche gespräche.

[Freb] K. Fredenhagen. Quantenfeldtheorie in gekrümmter raumzeit, vorlesungsskript.

[Fre90] K. Fredenhagen. Unveröffentlichte schriften zum beweis der hawkingstrahlung, 1990.

[FSW78] S. A. Fulling, M. Sweeny, and R. M. Wald. Singularity structure of the two point function in quantum field theory in curved space-time. *Commun. Math. Phys.*, 63:257, 1978.

[Ful] S. A. Fulling. Aspects of quantum field theory in curved space-time. CAMBRIDGE, UK: UNIV. PR. (1989) 315 P. (LONDON MATHEMATICAL SOCIETY STUDENT TEXTS, 17).

[Ful89] S. Fulling. *Aspects of Quantum Field Theory in Curved Spacetime*. Cambridge University Press, 1989.

[GK89] Giuseppe Gonnella and Bernard S. Kay. Can locally hadamard quantum states have nonlocal singularities? *Class. Quant. Grav.*, 6:1445, 1989.

[Haa] R. Haag. Local quantum physics: Fields, particles, algebras. Berlin, Germany: Springer (1992) 356 p. (Texts and monographs in physics).

[Haw75] S. W. Hawking. Particle creation by black holes. *Commun. Math. Phys.*, 43:199, 1975.

[HE73] S.W. Hawking and G.F.R. Ellis. *The Large Scale Structure of Space-Time*. Cambridge University Press, 1973.

[Hee94] M. Heese. Ausbreitung von singularitäten. Master's thesis, Hamburg, 1994.

[Hes] H. J. Hessling. Quantum equivalence principle. (in german).

[HHW67] R. Haag, N. M. Hugenholtz, and M. Winnink. On the equilibrium states in quantum statistical mechancics. *Commun. Math. Phys.*, 5:215–236, 1967.

[HK64] Rudolf Haag and Daniel Kastler. An algebraic approach to quantum field theory. *J. Math. Phys.*, 5:848–861, 1964.

[HNS84] Rudolf Haag, Heide Narnhofer, and Ulrich Stein. On quantum field theory in gravitational background. *Commun. Math. Phys.*, 94:219, 1984.

[Hör71] L. Hörmander. Fourier integral operators 1. *Acta Math.*, (127):79–183, 1971.

[Hör90] L. Hörmander. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators*, volume 1,3. Springer, 2nd edition, 1990.

[Jun95] Wolfgang Junker. Adiabatic vacua and hadamard states for scalar quantum fields on curved space-time. 1995.

[Jun99] W. Junker. Erratum to ädiabatic vacua and hadamard states for scalar quantum fields on curved space-time". 1999.

[Kg81] H. Kumano-go. *Pseudo-Differential Operators*. MIT Press, 1981.

[Köh95] Martin Köhler. The stress energy tensor of a locally supersymmetric quantum field on a curved space-time. 1995.

[KR83] R. Kadison and J.R. Ringrose. *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras*, volume 1,2,3. Academic Press, 1983.

[Kra99] K. Kratzert. Singularitätsstruktur der zweipunktfunktion des freien diracfeldes in einer global hyperbolischen raumzeit. Master's thesis, Hamburg, 1999.

[KW91] Bernard S. Kay and Robert M. Wald. Theorems on the uniqueness and thermal properties of stationary, nonsingular, quasifree states on space-times with a bifurcate killing horizon. *Phys. Rept.*, 207:49–136, 1991.

[Lim62] N. Limić. Theory of scattering on highly singular potentials. *Il Nuovo Cimento*, 1962.

[Nak90] M. Nakahara. *Geometry, Topology and Physics*. IOP Publishing, 1990.

[OB81] D.W. Robinson O. Bratelli. *Operator Algebrasa and Quantum Statistical Mechanics 2*. Springer, 1981.

[PR62] E. Predazzi and T Regge. The maximum analyticity principle in the angular momentum. *Il Nuovo Cimento*, 1962.

[Rad] M.J. Radzikowwski. *The Hadamard Condition and Kay's Conjecture in (Axiomatic) Quantum Field Theory on Curved Space-Time*. PhD thesis.

[Ros94a] H. C. Rosu. On the estimates to measure hawking effect and unruh effect in the laboratory. *Int. J. Mod. Phys.*, D3:545, 1994.

[Ros94b] Haret C. Rosu. Hawking like effects and unruh like effects: Toward experiments? 1994.

[RS75] M. Reed and B. Simons. *Methods of Modern Mathematical Physics*, volume 2. Academic Press, 1975.

[Sal] H. Salehi. On the hawking radiation associated with an oppenheimer-snyder collapsing star. DESY-91-016.

[Ste80] H. Stephani. *Allgemeine Relativitätstheorie*. Dt. Verlag der Wiss., zweite edition, 1980.

[SV00a] Hanno Sahlmann and Rainer Verch. Microlocal spectrum condition and hadamard form for vector- valued quantum fields in curved spacetime. 2000.

[SV00b] Hanno Sahlmann and Rainer Verch. Passivity and microlocal spectrum condition. *Commun. Math. Phys.*, 214:705–731, 2000.

[Tay81] M.E. Taylor. *Pseudodifferential Operators*. Princeton University Press, 1981.

[Tre80] F. Treves. *Introduction to Pseudodifferential and Fourier Integral Operators*, volume 1,2. Plenum Press, 1980.

[Unr76] W. G. Unruh. Notes on black hole evaporation. *Phys. Rev.*, D14:870, 1976.

[Ver] R. Verch. Hadamard vacua in curved space-time and the principle of local definiteness. Lectures given at 11th International Conference on Mathematical Physics (ICMP-11) (Satellite colloquia: 25-28 Jul), Paris, France, 18-23 Jul 1994.

[Ver96] Rainer Verch. Scaling algebras, the renormalization group and the principle of local stability in algebraic quantum field theory. 1996.

[Ver99] Rainer Verch. Wavefront sets in algebraic quantum field theory. *Commun. Math. Phys.*, 205:337, 1999.

[Wala] R. M. Wald. General relativity. Chicago, Usa: Univ. Pr. (1984) 491p.

[Walb] R. M. Wald. Quantum field theory in curved space-time and black hole thermodynamics. Chicago, USA: Univ. Pr. (1994) 205 p.

[Wal94] W. Walter. *Einführung in die Theorie der Distributionen*. Wissenschaftsverlag, dritte edition, 1994.

[Wal99] Robert M. Wald. The thermodynamics of black holes. 1999.

[Wat52] G.N. Watson. *A treatise on the Theory of Bessel Functions*. Cambridge University Press, London, 2d edition, 1952.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich recht herzlich bei Herrn Fredenhagen für die interessante Aufgabenstellung und für seine freundliche und geduldige Betreuung bei der Bearbeitung dieser Arbeit bedanken. Weiterhin gilt mein Dank der ganzen Algebraiker-Gruppe, ganz besonders dem DATSCHA-Team für die lustige Zeit.

Mein Studium wäre nicht möglich gewesen ohne die grenzenlose Unterstützung seitens meiner Familie, vor allem meiner Eltern. Taschakur.