Neutrino Properties and Proton Decay

Sören Wiesenfeldt

II. Institut für Theoretische Physik
Universität Hamburg

Diploma Thesis

March 2001

Abstract

Grand Unified Theories and neutrino experiments predict proton decay and massive neutrinos. The implications of a large $\nu_\mu - \nu_\tau$ mixing angle for the lifetime of the proton is studied for two symmetry groups $SU(5) \times U(1)_F$ and $SU(3)_c \times SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)_F$ in a supersymmetric model. The Yukawa couplings are related to the spontaneous breakdown of the $U(1)_F$ generation symmetry. The lifetime can be near or far above the experimental limit.

Neutrinoeigenschaften und Protonenzerfall

Sören Wiesenfeldt

II. Institut für Theoretische Physik
Universität Hamburg

Diplomarbeit

März 2001

Zusammenfassung

Große Vereinheitlichte Theorien und Neutrinoexperimente sagen die Instabilität des Protons und massive Neutrinos voraus. Die Auswirkungen eines großen $\nu_\mu - \nu_\tau$-Mischungswinkels auf die Lebensdauer des Protons werden anhand zweier Symmetriegruppen $SU(5) \times U(1)_F$ und $SU(3)_c \times SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)_F$ im supersymmetrischen Modell diskutiert. Die Yukawakopplungen werden durch die spontane Brechung der $U(1)_F$-Generationensymmetrie erzeugt. Die Lebensdauer des Protons kann in der Nähe oder weit oberhalb der experimentellen Grenze sein.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung **4**

1 Standardmodell und Große Vereinheitlichung **6**
1.1 Das Standardmodell 6
1.2 Große Vereinheitlichung 9
1.2.1 Georgi-Glashow-Modell 10
1.2.2 Alternative Modelle 14

2 Supersymmetrische Vereinheitlichung **16**
2.1 Supersymmetrie 17
2.2 Supersymmetrische Vereinigungstheorie 19
2.3 Protonenzerfall in supersymmetrischen Theorien 21

3 Neutrinophysik und Protonenzerfall **25**
3.1 Neutrinophysik 25
3.1.1 Seesaw-Mechanismus 26
3.1.2 Neutrinomassen und -mischungen 27
3.2 Protonenzerfall 30
3.3 Ein alternatives Modell 37
3.4 Diskussion der Parameter 40
3.5 Kosmologische Aspekte 42

4 Zusammenfassung und Ausblick **45**

A Notationen und Konventionen **48**

B Ergänzungen zu den Rechnungen **50**

Literaturverzeichnis **52**

Einleitung

James C. Maxwell (1831-1879) gelang es im 19. Jahrhundert erstmals, mit der Theorie des Elektromagnetismus zwei der damals bekannten Wechselwirkungen, die Elektrizität und den Magnetismus, zu vereinigen. Fast einhundert Jahre später führten Sheldon Glashow (* 1932), Abdus Salam (1926-1996) und Steven Weinberg (* 1933) ein Modell ein, das die nunmehr quantisierte Elektrodynamik mit der schwachen Wechselwirkung zur Theorie der elektroschwachen Wechselwirkung verband. Gemeinsam mit der Theorie der starken Wechselwirkung, der Quantenchromodynamik, bildet sie heute das Standardmodell der Teilchenphysik. Die experimentelle Bestätigung des Standardmodells ist überwältigend, es gibt jedoch zahlreiche Hinweise, daß es keine fundamentale, sondern nur eine Übergangstheorie darstellt.

Ein Hinweis kommt von den Neutrinoexperimenten. Neutrinos sind die einzigen masselosen Fermionen im Standardmodell, die Experimente deuten jedoch auf Teilchen mit geringer Masse hin. Eine geringe Masse läßt sich elegant mit der Einführung von rechtshändigen Neutrinos mit großen Majoranamassen erklären, die nur für elektrisch neutrale Teilchen möglich sind und die Leptonenzahlerhaltung verletzen. Diese Massen liegen oberhalb experimentell zugänglicher Energien und ermöglichen einen Blick jenseits des Standardmodells.

Das einzige noch nicht entdeckte Teilchen des Standardmodells ist das Higgsboson. Mit seiner Entdeckung wäre erstmals ein elementares skalares Teilchen nachgewiesen und der letzte Baustein des Standardmodells, die spontane Symmetriebrechung, bestätigt, da nur skalare Felder einen nichtverschwindenden Vakuumerwartungswert besitzen können, ohne die Lorentzinvarianz zu brechen. Hier tritt jedoch ein neues Problem, das Hierarchieproblem, auf, denn Skalare erhalten quadratisch divergente Massenkorrekturen. Mit der Einführung von Supersymmetrie, bei der Fermionen und Bosonen miteinander verknüpft werden, lassen sie sich kompensieren. Dabei werden neue Teilchen, die Superpartner, eingeführt, die neue Wechselwirkungsvertices ermöglichen. Mit dem im Bau befindlichen Large Hadron Collider (LHC) am CERN und einem zukünftigen Linear Collider (LC) hofft man, supersymmetrische Teilchen nachweisen zu können.

Schließlich treffen sich die drei Kopplungskonstanten des Standardmodells in supersymmetrischen Theorien unterhalb der Gravitationsskala, so daß sich dort die drei Eich-

wechselwirkungen möglicherweise in einer Großen Vereinheitlichten Theorie (Grand Unified Theory — GUT) vereinigen lassen. Im Übergang zu den zugänglichen Energien muß sich das Standardmodell ergeben, so daß die GUT-Eichgruppe die Standardmodellgruppe enthalten muß. Ansonsten bleibt die Wahl der Gruppe weitgehend frei. An der Planckskala sollte sich dann eine umfassende Theorie ergeben, die die Gravitationstheorie beinhaltet.

In Vereinheitlichten Theorien sind Quarks und Leptonen in gemeinsamen Multipletts miteinander verbunden. Dadurch treten auf natürliche Weise baryonen- und leptonenzahlverletzende Wechselwirkungen auf, die im Standardmodell nur in nicht pertubativen Effekten vorkommen. Sie ermöglichen einen Protonenzerfall, und ein experimenteller Nachweis des Protonenzerfalls wäre eine phantastische Bestätigung der Vereinigungstheorien, auch wenn ein Protonenzerfall nicht nur in GUTs möglich ist. Die Lebensdauer ist in supersymmetrischen Vereinigungsmodellen (Supersymmetric Unified Model — SUM) größer als in nichtsupersymmetrischen GUTs. Da bisher kein Zerfall nachgewiesen werden konnte, werden supersymmetrische Modelle bevorzugt.

In dieser Arbeit wird der Protonenzerfall in zwei Modellen untersucht, die die supersymmetrischen Vereinigungsmodelle mit den Erkenntnissen aus den Neutrinoexperimenten verbinden. Sie lassen sich durch die spontane Brechung einer zusätzlichen Symmetrie realisieren, die als Generationensymmetrie die drei Familien des Standardmodells unterschiedlich behandelt. Das erste Modell beruht auf der einfachsten Vereinigungsgruppe, $SU(5)$, die die Standardmodellgruppe als maximale Untergruppe enthält. Hier führen wir zusätzlich ein rechtshändiges Neutrino als Singlett ein. Das zweite Modell beruht auf einer komplizierteren Gruppe, E_6, die neben den bekannten Fermionen zahlreiche neue fordert, deren Massen oberhalb der experimentellen Energien liegen. Eines der zusätzlichen Fermionen ist ein rechtshändiges Neutrino.

Die Arbeit ist wie folgt gegliedert: Im ersten Kapitel wird das Konzept der Großen Vereinigung vorgestellt und am Beispiel des einfachsten Modells diskutiert; es wurde bereits 1974 von Howard Georgi (* 1947) und Glashow entwickelt und stellt den Prototyp der Großen Vereinheitlichten Theorie dar. Das zweite Kapitel widmet sich der Supersymmetrie und zeigt die Verknüpfung der beiden Ansätze zu supersymmetrischen Vereinigungsmodellen anhand der Erweiterung des Georgi-Glashow-Modells. Ferner werden die Operatoren, die zum Protonenzerfall führen, untersucht. Im dritten Kapitel wird das supersymmetrische Modell durch die Einführung massiver Neutrinos erweitert und die Yukawakopplungen durch die Brechung der Generationensymmetrie bestimmt. Damit können die Protonen- und Neutronenzerfallsmoden analysiert werden. Anschließend untersuchen wir den Zerfall im alternativen Modell. Zum Abschluß werden einige Aspekte, die sich aus der Betrachtung dieser Modelle in der Kosmologie ergaben und die Modelle zu beurteilen helfen, diskutiert. Kapitel 4 faßt die Ergebnisse zusammen. In zwei Anhängen finden sich Notationen und Konventionen sowie Ergänzungen zu den Rechnungen.

Kapitel 1

Standardmodell und Große Vereinheitlichung

Zur Einführung skizzieren wir, ausgehend vom Standardmodell, die Idee einer Großen Vereinigungstheorie und untersuchen explizit die einfachste Realisierung, die Eichgruppe $SU(5)$. Eine schöne Darstellung findet sich im Übersichtsartikel von Langacker [1], ausführliche Diskussionen zum Standardmodell und Vereinheitlichten Theorien finden sich in den Büchern von Peskin und Schroeder [2] bzw. Ross [3].

1.1 Das Standardmodell

Das Standardmodell der Teilchenphysik umfaßt die Theorien der starken und elektroschwachen Wechselwirkung: die Quantenchromodynamik (QCD) und die Glashow-Salam-Weinberg-Theorie (GSW). Alle Wechselwirkungen sind Eichwechselwirkungen, das heißt, sie werden durch den Austausch von Vektorbosonen vermittelt. Die Vektorbosonen der QCD sind die Gluonen, die der GSW-Theorie die W-Bosonen und das B-Boson (Tabelle 1.1).

Die fundamentalen Fermionen sind die Leptonen, die nicht stark wechselwirkenden Teilchen, und die Quarks, die Grundbausteine der Hadronen. Sie kommen in drei Ge-

Eichboson	Eichgruppe	Quantenzahlen	Kopplung
Gluonen	$SU(3)_c$	(8,1,0)	g_3
W-Bosonen	$SU(2)_L$	(1,3,0)	g_2
B-Boson	$U(1)_Y$	(1,1,0)	g'

Tabelle 1.1: *Die Eichbosonen des Standardmodells. Die Quantenzahlen beschreiben die $SU(3)_c$- und $SU(2)_L$-Darstellungen sowie die $U(1)_Y$-Hyperladung.*

Quark	Quantenzahlen	Ladung	Lepton	Quantenzahlen	Ladung
$\binom{u_L}{d_L}$	$(3,2,\frac{1}{6})$	$\begin{matrix}+2/3\\-1/3\end{matrix}$	$\binom{\nu_{eL}}{e_L^-}$	$(1,2,-\frac{1}{2})$	$\begin{matrix}0\\-1\end{matrix}$
u_L^C	$(3^*,1,-\frac{2}{3})$	$-2/3$			
d_L^C	$(3^*,1,\frac{1}{3})$	$+1/3$	e_L^+	$(1,1,1)$	$+1$

Tabelle 1.2: *Die Fermionen des Standardmodells*

nerationen vor, die erste ist in Tabelle 1.2 zu sehen. Hierbei sind die Fermionen in der chiralen Darstellung notiert, da nur linkschirale Fermionen an der $SU(2)$-Wechselwirkung teilnehmen. Bei der Konstruktion von Vereinheitlichten Theorien ist es zweckmäßig, nur mit Fermionen einer Chiralität zu arbeiten. Wir wählen die linkschiralen Fermionen und betrachten statt der rechtshändigen Fermionen die linkshändigen Komponenten ihrer Antiteilchen. Den Zusammenhang zwischen den Darstellungen stellt die Ladungskonjugation $\mathcal{C}$ her: $\Psi_R = \mathcal{C}\,(\overline{\Psi}_L)^T$.

Da im Standardmodell die Neutrinos ausschließlich linkshändig vorkommen, gibt es kein linkshändiges Antineutrino. Der Grund liegt darin, daß es an keiner Wechselwirkung teilnehmen und daher nicht beobachtet werden kann.

Die Multipletts lassen sich anhand ihrer Quantenzahlen identifizieren. Jede Fermionenfamilie erhalten wir so als Summe

$$(3,2,\tfrac{1}{6}) \oplus (3^*,1,-\tfrac{2}{3}) \oplus (3^*,1,\tfrac{1}{3}) \oplus (1,2,-\tfrac{1}{2}) \oplus (1,1,1)\ , \tag{1.1}$$

ebenso die Eichbosonen als

$$(8,1,0) \oplus (1,3,0) \oplus (1,1,0)\ . \tag{1.2}$$

Die Eichgruppe des Standardmodells erhält man aus den im Experiment beobachtbaren Symmetrien, und durch die Forderung nach Invarianz unter lokalen Transformationen ergeben sich die Eichtheorien, die renormierbar und anomaliefrei sind. Dies gewährleistet erstens, daß durch die Redefinition der Parameter von den „nackten“ auf die physikalischen Parameter die auftretenden Divergenzen absorbiert werden können. Dadurch werden die Größen Masse und Kopplung zu energieabhängigen, „laufenden“ Größen. Zweitens ist der mit der Symmetrie verbundene Noetherstrom erhalten. Anomalien zerstören die Renormierbarkeit der Theorie. Im Standardmodell heben sich gerade die Anomaliebeiträge der Leptonen und Quarks auf, bei der Konstruktion Vereinheitlichter Theorien müssen die Darstellungen so gewählt werden, daß die Theorie anomaliefrei ist.

Die Lagrangedichte des Standardmodells ist invariant unter Eichtransformationen. Da potentielle Massenterme dies nicht erfüllen, müssen die Eichbosonen und die Fermionen masselos sein, jedoch können mit Hilfe des Higgsmechanismus Massenterme generiert

werden. Dazu wird ein farbneutrales zusätzliches Dublett Φ skalarer Felder ϕ^+ und ϕ^0 mit der Standardmodelldarstellung $(1, 2, \frac{1}{2})$ eingeführt, dessen Potential

$$V(\Phi) = +\tfrac{1}{2}\,\mu^2\,\Phi^\dagger\Phi + \tfrac{1}{4}\,\lambda\,(\Phi^\dagger\Phi)^2 \qquad \text{mit} \quad \mu^2 < 0 \tag{1.3}$$

den nichtverschwindenden Vakuumerwartungswert

$$\langle 0|\,\Phi\,|0\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\ v\end{pmatrix} \qquad \text{mit} \quad v = \sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}} = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}\,G_F}} \tag{1.4}$$

besitzt. Die Fermikonstante G_F läßt sich experimentell bestimmen, woraus $v \simeq 246\,\mathrm{GeV}$ resultiert. Durch den Vakuumerwartungswert wird nun die Symmetrie der elektroschwachen Wechselwirkung in die $U(1)_{em}$ der Quantenelektrodynamik gebrochen, und die Eichbosonen werden massiv. Aus den W-Bosonen und dem B-Boson entstehen zusammen mit drei der vier Higgs-Freiheitsgraden die physikalischen Eichbosonen, die im Experiment beobachtet werden: das masselose Eichboson der elektromagnetischen Wechselwirkung, das Photon, und die massiven Eichbosonen der schwachen Wechselwirkung, die geladenen W-Bosonen und das neutrale Z-Boson. Der Zusammenhang ist gegeben durch

$$\begin{aligned} W^\pm &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}(W_1 \mp i W_2)\ , \\ Z &= B\sin\theta_W + W_3\cos\theta_W\ , \\ A &= B\cos\theta_W - W_3\sin\theta_W\ . \end{aligned}$$

Der schwache Mischungswinkel θ_W bestimmt das Verhältnis der Massen von W- und Z-Bosonen und beschreibt das Verhältnis der Kopplungen g' und g_2 (Tab. 1.1). Er ist ein freier Parameter des Standardmodells, und ein Test einer Vereinheitlichten Theorie besteht in der korrekten Vorhersage dieses Winkels, dessen Wert im $\overline{\mathrm{MS}}$-Schema $\sin^2\theta_W(M_Z) = 0.23117 \pm 0.00016$ ist [4].

Drei der vier Komponenten von Φ werden absorbiert, um den Eichbosonen Masse zu verleihen. Es verbleibt das experimentell noch gesuchte Higgsboson H, dessen Masse M_H von dem unbekannten Parameter λ abhängig ist. Bisher können nur Schranken angegeben werden: Aus den Experimenten folgt $M_H > 113.3\,\mathrm{GeV}$ [5, 6, 7], die Unitarität erfordert eine obere Schranke von etwa 1 TeV.

Yukawakopplungen zwischen Higgsbosonen und Fermionen generieren die Fermionenmassen; sie sind freie Parameter des Standardmodells. Der Zusammenhang zwischen den Massen- und Flavoureigenzuständen der Quarks kann auf vier Parameter einer Matrix, der CKM-Matrix (s. Anhang B), reduziert werden.

Grenzen des Standardmodells

Die Übereinstimmung des Standardmodells mit den Experimenten ist beeindruckend. Dennoch sprechen viele theoretische und experimentelle Gründe dafür, daß es keine fun-

damentale Theorie ist. Einige davon sind:

- Die Gruppenstruktur ist als direktes Produkt kompliziert. Sie erfordert drei unabhängige und betragsmäßig stark unterschiedliche Kopplungen und verlangt in der GSW-Theorie chirale Fermionen, in der QCD jedoch nicht.
- Es enthält drei Generationen, die gleiche Quantenzahlen und Wechselwirkungen, jedoch unterschiedliche Massen besitzen.
- Die elektrische Ladung ist nicht quantisiert, die Wahl der Hyperladung ist für jede Darstellung willkürlich.
- Die Higgsparameter und Yukawakopplungen sind freie Parameter. Zusammen besitzt das Standardmodell 19 freie Parameter: 3 Eichkopplungen, 1 $\mathcal{CP}$-verletzender Θ-Parameter der $SU(3)$, die Higgsmasse und der Vakuumerwartungswert, 10 Parameter der Quarkmassenmatrix (6 Massen, 3 Winkel, 1 $\mathcal{CP}$-verletzende Phase) und 3 Leptonenmassen.
- Neutrinomassen können nur zusätzlich durch nicht eichwechselwirkende rechtshändige Neutrinos eingeführt werden, allerdings müssen die Massen nach den derzeitigen experimentellen Schranken gering bleiben. Dadurch erhöht sich nicht nur die Anzahl freier Parameter, sondern stellt sich darüberhinaus die Frage, warum die Neutrinos so leicht sind. Andererseits ist der experimentelle Hinweis auf Neutrinomassen groß.
- Die Gravitation wird vernachlässigt.

Die Hoffnung bei der Konstruktion von Vereinheitlichten Theorien ist, vor allem die Vielzahl freier Parameter auf einige fundamentale zu beschränken und dabei die offenen Fragen zu lösen. Dies ist bisher noch nicht vollständig gelungen, jedoch wurden interessante Ansätze gemacht, die im folgenden Abschnitt diskutiert werden sollen.

1.2 Große Vereinheitlichung

Das Ziel der Vereinheitlichung ist, die Eichgruppe des Standardmodells in eine größere Gruppe einzubetten, die durch neue Symmetrien die freien Parameter einschränkt. Dazu wählen wir zunächst eine geeignete einfache Eichgruppe, die nur noch eine Kopplungskonstante enthält, welche die elektromagnetischen, schwachen und starken Wechselwirkungen bestimmt. Diese entkoppeln unterhalb der Vereinigungsskala durch die spontane Symmetriebrechung, so daß die drei unterschiedlichen Wechselwirkungen einfach das Ergebnis der Symmetriebrechung sind. Dann betten wir das Standardmodell so ein, daß es sich als Niederenergienäherung entpuppt und suchen schließlich geeignete Higgsdarstellungen, um die Symmetriebrechung durchzuführen und das Standardmodell zu erhalten.

Die Idee beruht auf der Annahme, daß erst bei der Vereinigungsskala, die gewöhnlich oberhalb von 10^{15} GeV liegt, „neue“ Physik auftritt, was durch den Verlauf der Kopplungskonstanten (Abbildung 2.1a) motiviert wird.

Wahl der Eichgruppe

Wir stellen folgende Anforderungen an die Eichgruppe:

- Die Gruppe G muß die Standardmodellgruppe G_{SM} als Untergruppe enthalten. Daher muß sie mindestens Rang 4 besitzen. Der Rang ist als maximale Anzahl kommutierender Generatoren definiert. Im Standardmodell existieren vier, üblicherweise wählt man die Farbgeneratoren T_3 und T_8, den Generator T_3 des schwachen Isospins und die Hyperladung Y. Um nicht zu viele neue Teilchen und Wechselwirkungen zu erzwingen, sollte G allerdings nicht zu groß werden.
- Die Theorie muß anomaliefrei sein.
- G sollte wie G_{SM} komplexe Darstellungen besitzen, damit sie chirale Fermionendarstellungen besitzt. Dies ist bei reellen Darstellungen nur mit der Einführung von schweren Fermionen, den Spiegelfermionen, möglich.

Die minimale Gruppe, die die Anforderungen erfüllt, ist die Gruppe $SU(5)$, die wir im folgenden betrachten.

1.2.1 Georgi-Glashow-Modell

Das Georgi-Glashow-Modell [8] war das erste Vereinigungsmodell und wurde bereits 1974 konstruiert. Es ist der Prototyp der Großen Vereinheitlichten Theorien, da es das Modell mit minimaler Fermion- und Higgsdarstellung ist.

Die Gruppe $SU(5)$ ist durch ihre fundamentale Darstellung definiert, eine Gruppe von unitären 5x5-Matrizen mit Determinante 1. Die 24 Generatoren L^j sind spurlos und werden so gewählt, daß sich eine $SU(3)\times SU(2)$-Untergruppenstruktur bildet: Die Gruppe $SU(3)$ wirkt auf die ersten drei und die Gruppe $SU(2)$ auf die letzten beiden Reihen und Spalten. Die Normierung lautet analog zu den Paulimatrizen $\mathrm{tr}(L^i L^j) = 2\delta^{ij}$.

Darstellung der Fermionen und Eichbosonen

Die direkte Summe der Fundamentaldarstellung $\mathbf{5}^*$ und des antisymmetrischen Produktes $\mathbf{10} = (\mathbf{5}\times\mathbf{5})_A$ ist anomaliefrei. Unter G_{SM} besitzt sie die Zerlegung

$$\mathbf{5}^* \to (3^*, 1, \tfrac{1}{3}) \oplus (1, 2^*, -\tfrac{1}{2}) \quad \text{und} \quad \mathbf{10} \to (3^*, 1, -\tfrac{2}{3}) \oplus (3, 2, \tfrac{1}{6}) \oplus (1, 1, 1)\ ,$$

so daß diese Darstellung gemäß (1.1) gerade alle Fermionen einer Generation enthält (vgl. auch Tab. 1.2). Explizit sieht die Darstellung unter Vernachlässigung von Mischungen folgendermaßen aus:

$$\mathbf{5}^* : \phi_L = \begin{pmatrix} d_1^C \\ d_2^C \\ d_3^C \\ \hline e^- \\ -\nu_e \end{pmatrix}_L \qquad \mathbf{10} : \psi_L = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & u_3^C & -u_2^C & -u^1 & -d^1 \\ -u_3^C & 0 & u_1^C & -u^2 & -d^2 \\ u_2^C & -u_1^C & 0 & -u^3 & -d^3 \\ \hline u^1 & u^2 & u^3 & 0 & -e^C \\ d^1 & d^2 & d^3 & e^C & 0 \end{array}\right)_L . \tag{1.5}$$

Quarks und Leptonen sind nun gemeinsam in den Multipletts eingebettet. Da das Photon ein Eichboson der Gruppe ist, muß der Ladungsoperator Q ein spurloser $SU(5)$-Generator sein, so daß die Summe der Ladungen in jedem Multiplett Null ist. Damit erhalten wir erstmals eine Erklärung der Ladungsquantisierung; denn für $\mathbf{5}^*$ gilt $3q_{d^C} + q_e = 0$. Quarks haben drittelzahlige Ladungen, weil sie in drei Farben auftreten.

Die Eichbosonen transformieren gemäß der adjungierten Darstellung, für die die Zerlegung

$$\mathbf{24} \to (8,1,0) \oplus (1,3,0) \oplus (1,1,0) \oplus (3,2^*,-\tfrac{5}{6}) \oplus (3^*,2,\tfrac{5}{6})$$

gilt. Der Vergleich mit (1.2) zeigt zunächst die zwölf bereits bekannten Bosonen des Standardmodells (Gluonen, W-Bosonen und B-Boson, s. auch Tab. 1.1), gefolgt von zwölf neuen Eichbosonen, den X- und Y-Bosonen, die Wechselwirkungen zwischen Quarks und Leptonen ermöglichen. Sie besitzen die Ladungen $Q_X = \frac{4}{3}$ und $Q_Y = \frac{1}{3}$. Explizit lautet die Darstellung der Eichbosonen

$$\mathbf{24} : A = \left(\begin{array}{ccc|cc} G_1^1 - \frac{2B}{\sqrt{30}} & G_2^1 & G_3^1 & \overline{X}^1 & \overline{Y}^1 \\ G_1^2 & G_2^2 - \frac{2B}{\sqrt{30}} & G_3^2 & \overline{X}^2 & \overline{Y}^2 \\ G_1^3 & G_2^3 & G_3^3 - \frac{2B}{\sqrt{30}} & \overline{X}^3 & \overline{Y}^3 \\ \hline X_1 & X_2 & X_3 & \frac{W_3}{\sqrt{2}} + \frac{3B}{\sqrt{30}} & \frac{W_1 + iW_2}{\sqrt{2}} \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 & \frac{W_1 - iW_2}{\sqrt{2}} & -\frac{W_3}{\sqrt{2}} + \frac{3B}{\sqrt{30}} \end{array}\right) . \tag{1.6}$$

Die drei Elemente G_j^j sind nicht unabhängig voneinander und führen zu zwei Gluonen.

Der kinetische Teil der Lagrangedichte für die Fermionen lautet

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_f &= i\,(\overline{\phi}_L^C)_a (\not{D} \phi_R^C)^a + i\,(\overline{\psi}_R)_{ac} (\not{D} \psi_L)^{ac} \\ &= (\overline{\phi}_L^C)_a \left[i \not{\partial}\, \delta_b^a + \frac{g_5}{\sqrt{2}} \not{A}_b^a \right] (\phi_R^C)^b + (\overline{\psi}_R)_{ac} \left[i \not{\partial}\, \delta_b^a + \sqrt{2} g_5 \not{A}_b^a \right] (\psi_L)^{bc} . \end{aligned} \tag{1.7}$$

Die Kopplungen des Standardmodells treffen sich an der Vereinigungsskala M_{GUT} (Abb. 2.1a). Betrachtet man G_{SM} als Untergruppe von $SU(5)$, so ist $\sqrt{3/5}\,Y$ ein normierter $SU(5)$-Generator, weswegen wir $g_1 = \sqrt{5/3}\,g'$ setzen. An der Vereingungsskala

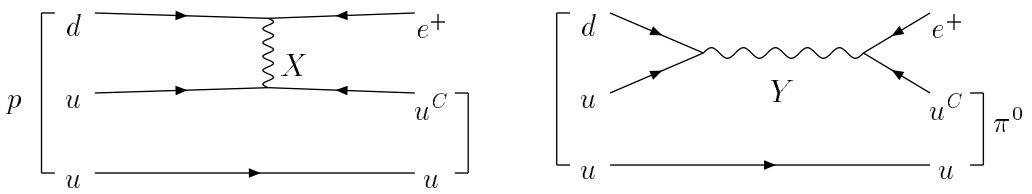


Abbildung 1.1: *Protonenzerfall via X- und Y-Boson*

gilt $g_1(M_{\rm GUT}) = g_2(M_{\rm GUT}) = g_5$, wodurch der elektroschwache Mischungswinkel kein freier Parameter mehr bleibt. Der numerische Wert ist $\sin^2\theta_W(M_{\rm GUT}) = \frac{3}{8}$. Mittels der Renormierungsgruppengleichungen ergibt sich die Vorhersage $\sin^2\theta_W(M_Z) \simeq 0.207$. Der Vergleich mit dem experimentellen Wert zeigt, daß die richtige Größenordnung getroffen wurde.

Protonenzerfall

Durch die X- und Y-Bosonen, die sowohl Farbladung als auch schwachen Isospin tragen, sind Transformationen zwischen Leptonen und Quarks möglich, wodurch ein Protonenzerfall initiiert werden kann. In Abbildung 1.1 sind mögliche Zerfälle dargestellt.

Die Masse der Bosonen wird durch den Vereinigungspunkt der Kopplungen bestimmt, so daß $M_X \simeq M_Y = \mathcal{O}(10^{15}\,\text{GeV})$ ist. Diese Masse ist erheblich größer als die Protonenmasse, so daß der Zerfall durch 4-Fermion-Wechselwirkungen approximiert werden kann, die durch die Operatoren [9, 10]

$$\begin{aligned} O_1 &= \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\,(\overline{u}_L^{\gamma C}\,\gamma^\mu\,u_L^\beta)(\overline{e}_L^C\,\gamma_\mu\,d_L^\alpha)\,, \\ O_2 &= \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\,(\overline{u}_L^{\gamma C}\,\gamma^\mu)(u_L^\beta\,\overline{e}_R^C + d_L^\beta\,\overline{\nu}_R^C)\,\gamma_\mu\,d_R^\alpha \end{aligned} \tag{1.8}$$

gegeben sind. Die griechischen Indices bezeichnen die Farbe der Quarks. Die Operatoren gehen mit der Stärke $\alpha_5\,/\,M_X^2$ ein, wobei $\alpha_5 = g_5^2/4\pi$ ist. Aus Abbilddung 2.1 lesen wir α_5 ab, und dann ist die Lebensdauer des Protons von der Größenordnung

$$\tau_p \sim \frac{1}{\alpha_5^2}\,\frac{M_X^4}{m_p^5} \simeq 10^{31}\,\text{Jahre}\,. \tag{1.9}$$

Spontane Symmetriebrechung

Nun muß die Gruppe so gebrochen werden, daß wir zunächst die Standardmodellgruppe und in einem zweiten Schritt die Gruppe $SU(3)_c \times U(1)_{em}$ erhalten.

Die erste Brechung erfolgt durch eine adjungierte **24**-Higgsdarstellung Σ_a^b, die den X- und Y-Bosonen Masse generiert, während alle Standardmodellteilchen masselos bleiben. Ihr Vakuumerwartungswert v ist von der Größenordnung 10^{15} GeV, und mit einem

geeigneten Potential ist

$$M_X^2 = M_Y^2 = \tfrac{25}{8}(g_5 v)^2 \ .$$

Unterhalb der elektroschwachen Skala wird die Standardmodellgruppe zu $SU(3)_c \times U(1)_{em}$ durch eine 5-dimensionale Higgsdarstellung H^a gebrochen, wodurch die Teilchen des Standardmodells mittels der Yukawakopplungen

$$\phi_{aL}\, \mathcal{C}\, \psi_L^{ab}\, H_b^\dagger + \text{h.c.} \quad \text{und} \quad \tfrac{1}{4}\epsilon_{abcde}\, \psi_L^{ab}\, \mathcal{C}\, \psi_L^{cd}\, H^e + \text{h.c.} \tag{1.10}$$

massiv werden. Die Zerlegung ist

$$\mathbf{5} \to (3, 1, -\tfrac{1}{3}) \oplus (1, 2, \tfrac{1}{2}) \ ,$$

so daß wir zuzüglich zum Higgsdublett des GSW-Modells ϕ ein Farbtriplett H_c^α erhalten. Mit dem Higgspotential (1.3) erhält man analog zum Vakuumerwartungswert (1.4):

$$\langle 0|\, H^5\, |0\rangle = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\, v_0 \qquad \text{mit} \quad v_0^2 = -\frac{\mu^2}{\lambda} \quad \text{und} \quad M_W^2 = \tfrac{1}{4} g_2^2 v_0^2 \ .$$

Unglücklicherweise existieren nun zwei neutrale Farbtripletts der Higgsfelder, H_c^α und Σ_5^α, von denen die X- und Y-Bosonen eine Linearkombination absorbieren. Die orthogonale Kombination jedoch, näherungsweise H_c^α, verkörpert masselose Higgsteilchen, die wiederum Protonenzerfälle initiieren können. In einer effektiven Theorie können sie durch die 4-Fermionen-Operatoren [9, 10]

$$\begin{aligned}
O_3 &= -\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\, (\overline{d}_R^{\beta C}\, u_L^\gamma)(\overline{u}_L^{\alpha C}\, e_R - \overline{d}_L^{\alpha C}\, \nu_R) \ , \\
O_4 &= 2\, \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\, (\overline{d}_R^{\alpha C}\, u_L^\beta)(\overline{u}_R^{\gamma C}\, e_L) \ , \\
O_5 &= 2\, \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\, (\overline{d}_R^{\beta C}\, u_L^\gamma)(\overline{e}_R^C\, u_L^\alpha - \overline{\nu}_R^C\, d_L^\alpha) \ , \\
O_6 &= -\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\, (\overline{d}_R^{\beta C}\, u_L^\gamma)(\overline{u}_L^{\alpha C}\, e_R)
\end{aligned} \tag{1.11}$$

beschrieben werden. Sind die Higgsteilchen bis auf Korrekturen $\mathcal{O}(\frac{v_0}{v})$ masselos, ist die Protonenlebensdauer zu gering. Um ihnen Masse zu verleihen, müssen im Potential Mischterme $V_M(\Sigma, H)$ eingeführt werden, die Wechselwirkungen zwischen den Higgsdarstellungen einführen und Massen $M_{H_c}^2 \simeq M_X^2$ generieren können. Dazu ist eine enorme Feineinstellung der Parameter v und v_0 nötig mit einer Genauigkeit von 10^{-13}, die durch Strahlungskorrekturen in jeder Ordnung wiederholt werden muß. Dieses Hierarchieproblem kann man bisher nur unter Einbeziehung von Supersymmetrie teilweise lösen.

Diskussion des Georgi-Glashow-Modells

Mit dem Georgi-Glashow-Modell wurde erstmals eine Vereinheitlichte Theorie konstruiert. Wesentliche Schwächen des Standardmodells können behoben werden, einige Punkte bleiben aber auch unklar, und dazu treten neue Probleme auf.

- Das Georgi-Glashow-Modell enthält die Eichgruppe des Standardmodells als maximale Untergruppe. Durch die Anordnung der Fermionen in der reduziblen Darstellung $\mathbf{5}^* \oplus \mathbf{10}$ kann die Multiplettstruktur erheblich vereinfacht werden, ohne neue Fermionen zu erzwingen. Allerdings wünscht man sich die Anordnung der Generationen in jeweils einer irreduziblen Darstellung.

- Es existiert keine Erklärung für die Existenz dreier Generationen und die Trennung von skalaren, chiralen und Vektordarstellungen.

- Die elektrische Ladung ist quantisiert und die drittelzahlige Ladung der Quarks erklärt. Die Wechselwirkungen des Standardmodells sind vereinheitlicht, es gibt nur noch eine Kopplungskonstante, wodurch der schwache Mischungswinkel θ_W festgelegt ist.

- Das Modell reduziert zunächst die Anzahl der freien Standardmodellparameter, indem es Beziehungen zwischen den Fermionmassen aufstellt. Durch die größeren Higgsdarstellungen und neue Phasen, die aufgrund der neuen Eichbosonen auftreten, enthält das Modell in minimaler Form jedoch 23 freie Parameter: 1 Kopplung, 1 Θ-Parameter, 9 Higgsparameter, 6 Quarkmassen (die die Leptonenmassen bestimmen) sowie 6 Mischungswinkel und $\mathcal{CP}$-verletzende Phasen.

- Baryonen- und leptonenzahlverletzende Wechselwirkungen treten auf natürliche Weise auf. Die Protonenlebensdauer ist mit etwa 10^{31} Jahren jedoch unter der derzeitigen experimentellen Schranke [4].

- Das Modell fordert eine zweite, sehr hohe Skala, die zwar darlegt, warum Protonen nur sehr langsam zerfallen, aber anderseits eine Erklärung fordert, warum die Skalen so unterschiedlich groß sind. Zudem können die Skalen nur unter großem Aufwand voneinander getrennt werden (Hierarchieproblem). Trotz der Nähe der zweiten Skala zu der Planckmasse, bei der Gravitationseffekte relevant werden, wird letztere weiterhin nicht mit einbezogen.

1.2.2 Alternative Modelle

Als erstes Modell war die Georgi-Glashow-Theorie sehr erfolgreich. In der Folge wurde versucht, durch Weiterentwicklung der Theorie die Probleme, insbesondere die unzureichende Lebensdauer der Protonen, zu lösen. Daneben wurden GUTs, die auf Gruppen mit einem höheren Rang basieren, untersucht.

Die Eichgruppe $SO(10)$ ist vom Rang 5 und kann zu $SU(5) \times U(1)$ brechen. Die Fundamentaldarstellung **16** läßt sich zerlegen in Darstellungen der $SU(5)$

$$\mathbf{16} = \mathbf{10} \oplus \mathbf{5}^* \oplus \mathbf{1} \tag{1.12}$$

und enthält alle Fermionen inklusive eines sterilen Teilchens der Standardmodelldarstellung $(1,1,0)$. Da die orthogonalen Gruppen — mit Ausnahme der $SO(12)$ — anomaliefrei sind, erklärt sich damit die Anomaliefreiheit der Darstellung $\mathbf{10} \oplus \mathbf{5}^*$ in $SU(5)$; denn die $\mathbf{1}$ als triviale Darstellung besitzt keine Anomalien. Das neutrale Teilchen läßt sich mit einem rechtshändigen Neutrino identifizieren. Zusätzlich zu den X- und Y-Bosonen treten weitere neue Eichbosonen auf.

Alternativ kann $SO(10)$ auch zu $SU(4) \times SU(2)_L \times SU(2)_R$ brechen, einer Gruppe, die Links-Rechts-Symmetrie aufweist. $SU(4)$ läßt sich wiederum zu $SU(3)_c \times U(1)_{B-L}$ brechen. Die Fermionendarstellung läßt sich dann unter $SU(3)_c \times SU(2)_L \times SU(2)_R$ zerlegen in

$$\mathbf{16} \to (3,2,1) \oplus (1,2,1) \oplus (3^*,1,2) \oplus (1,1,2) \ , \tag{1.13}$$

zwei $SU(2)_L$-Dublett- und zwei $SU(2)_R$-Dublett-Darstellungen. Bei höheren Energien sind die links- und rechtshändigen Fermionen sozusagen gleichberechtigt.

Die exzeptionelle Gruppe E_6, die große Anwendung in Stringtheorien findet, besitzt bereits Rang 6. Einerseits läßt sie sich zu $SO(10)$ brechen, sie enthält aber auch $SU(3)_c \times SU(3)_L \times SU(3)_R \equiv (SU(3))^3$ als maximale Untergruppe. Im Gegensatz zur Gruppe $SO(10)$ lassen sich in ihr nicht nur alle Fermionen in der Fundamentaldarstellung einer anomaliefreien Gruppe anordnen, ergänzt um zusätzliche neue Fermionen, deren Masse oberhalb der derzeit zugänglichen Energie ist; darüberhinaus lassen sich unterschiedliche Quark- und Leptoneigenschaften realisieren, ohne zusätzliche Darstellungen einführen zu müssen. Solch unterschiedliche Eigenschaften gibt es bei den Mischungswinkeln: Während im Quarksektor die CKM-Matrix (B.2) von kleinen Winkeln geprägt ist, deuten die Neutrinoexperimente auf große Mischungswinkel hin. Im Kapitel 3 werden wir neben $SU(5)$ die Gruppe $SU(3)_c \times SU(3)_L \times SU(3)_R$ betrachten.

Abgesehen von der zunehmenden Komplexität der Gruppen (die adjungierte Darstellung der E_6 ist 78dimensional) treten wiederum Probleme bei den Vorhersagen auf, z. B. bei Massenrelationen und Mischungswinkeln, da die Teilchen nun in gemeinsamen Multipletts angeordnet sind. Einige Schwierigkeiten, die bereits in $SU(5)$ zu sehen sind (z.B. das Hierarchieproblem), können in konventionellen GUTs nicht gelöst werden. Dafür ist ein neuer Ansatz nötig, und am aussichtsreichsten sind supersymmetrische Theorien.

Kapitel 2

Supersymmetrische Vereinheitlichung

Supersymmetrie ist eine Symmetrie zwischen Fermionen und Bosonen und vereinheitlicht die Raum-Zeit-Symmetrien und die inneren Symmetrien. Zu Beginn der siebziger Jahre erkannten Golfand und Likhtman [11] sowie Volkov und Akulov [12], daß die Anordnung von Teilchen unterschiedlichen Spins in einem Multiplett erlaubt ist, sobald man Symmetriealgebren zuläßt, die neben Kommutatoren auch Antikommutatoren enthalten. 1974 stellten Wess und Zumino [13] das erste supersymmetrische Modell der vierdimensionalen Quantenfeldtheorie vor.

Supersymmetrische Theorien besitzen einige attraktive Eigenschaften: Zunächst finden sich keine quadratisch divergenten Korrekturen zur Higgsmasse. Im Gegensatz zu den Fermionen und Eichbosonen enthält der Massenterm skalarer Teilchen zusätzlich zu einem logarithmisch divergenten einen quadratisch divergenten Term durch Fermionen- und skalare Schleifen. In supersymmetrischen Theorien heben sich solche Terme gegen Terme der korrespondierenden Schleifendiagramme skalarer Teilchen auf, und dies ist stabil in allen Ordnungen. In den Vereinigungstheorien treffen sich die Kopplungen der Eichwechselwirkungen nun nahezu exakt an einem Punkt bei $M \sim 2 \times 10^{16}\,\mathrm{GeV}$ (Abb. 2.1). Der dadurch vorhergesagte elektroschwache Mischungswinkel bei der elektroschwachen Skala $\sin^2\theta_W(M_Z) = 0.2315 \pm 0.003$ stimmt mit dem experimentellen Wert in beeindruckender Weise überein. Um experimentell nicht beobachtbarte Prozesse nicht unnatürlich zu unterdrücken, führt man in supersymmetrischen Theorien eine zusätzliche Symmetrie ein, durch die das leichteste supersymmetrische Teilchen (LSP) stabil ist. Dies ist ein aussichtsreicher Kandidat für dunkle Materie, die mehr als 90% der gesamten Masse des Universums auszumachen scheint. Da zur Zeit kalte dunkle Materie bevorzugt wird, kann das LSP aufgrund seiner großen Masse eine große Rolle spielen. Schließlich eröffnet sich ein natürlicher Weg, die Gravitation einzubeziehen, denn lokale Supersymmetrie beinhaltet Gravitation [14]. Diese Eigenschaften machten und machen das Studium supersymmetri-

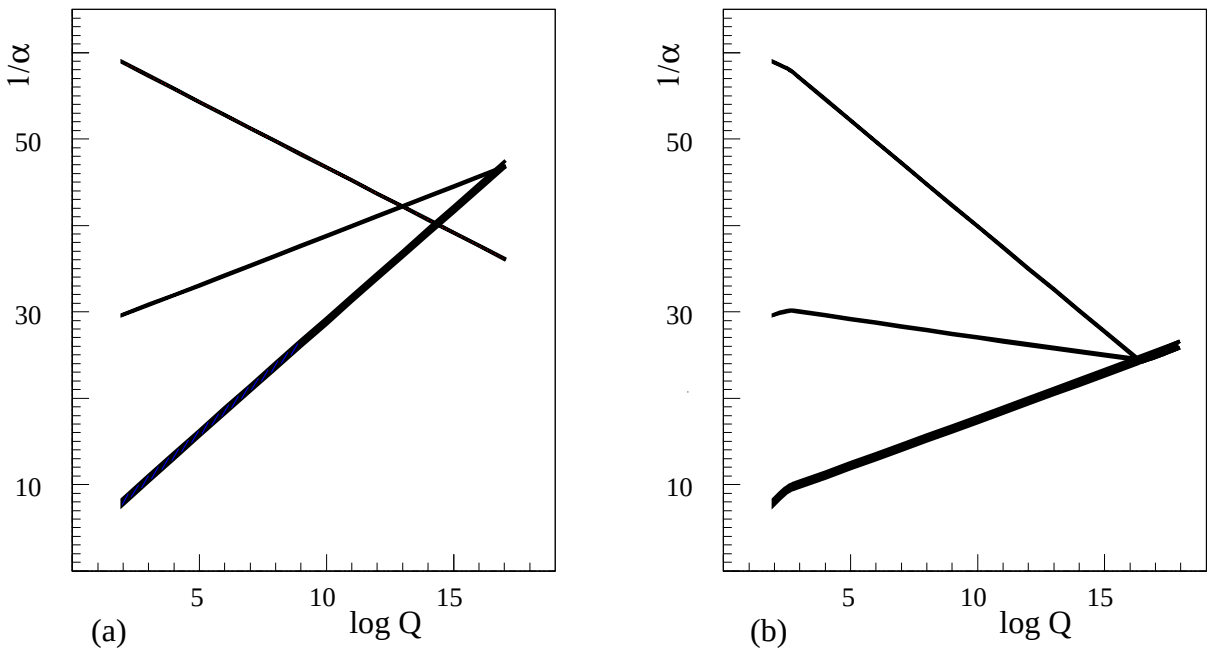


Abbildung 2.1: *Vereinigung der Kopplungskonstanten in (a) nicht supersymmetrischen, (b) supersymmetrischen Theorien* [18]

scher Theorien sehr populär, obwohl es bis heute keinen direkten experimentellen Hinweis auf Supersymmetrie gibt.

Eine ausführliche Diskussion von Supersymmetrie findet sich in den Artikeln von Sohnius [15], Nilles [16] und dem Buch von Wess und Bagger [17].

2.1 Supersymmetrie

Supersymmetrieoperationen transformieren Bosonen in Fermionen und umgekehrt. Der Generator der Transformation Q ist ein zweikomponentiger fermionischer Operator, der Spin $\frac{1}{2}$ trägt.[1] Er ist invariant unter Translationen, nicht jedoch unter Drehungen und Lorentztransformationen. Wählt man Q_α ($\alpha = 1{,}2$) als linkshändigen Weylspinor, so ist der hermitesch konjugierte Operator $\overline{Q}_{\dot\beta}$ ($\dot\beta = 1{,}2$) rechtshändig. Unter Einbeziehen von Grassmannzahlen läßt sich die Superalgebra vollkommen durch Kommutatoren bestimmen (vgl. Anhang A):

$$[\, Q_\alpha, P_\mu \,] = 0 \tag{2.1}$$

$$[\, \theta^\alpha Q_\alpha, \bar\theta^{\dot\beta} \overline{Q}_{\dot\beta} \,] = 2\, \theta^\alpha \sigma^\mu_{\alpha\dot\beta} \bar\theta^{\dot\beta}\, P_\mu \quad , \tag{2.2}$$

[1] In dieser Arbeit wird $N = 1$-Supersymmetrie betrachtet, bei der es nur einen Operator Q gibt. Zu $N > 1$ siehe Sohnius [15].

wobei P der Energieimpulsoperator und σ die Paulimatrizen sind. Dann ist

$$H = P^0 = \tfrac{1}{4}(\overline{Q}_1 Q_1 + Q_1 \overline{Q}_1 + \overline{Q}_2 Q_2 + Q_2 \overline{Q}_2) \geq 0 \ , \tag{2.3}$$

so daß der nicht entartete Grundzustand verschwindende Energie besitzt, während jeder weitere Zustand entartet ist und positive Energie besitzt.

Der Darstellungsraum der Superalgebra ist die Summe eines bosonischen und eines fermionischen Unterraumes, die von derselben Dimension sind und von den Operatoren Q_α und $\overline{Q}_{\dot\beta}$ aufeinander abgebildet werden. Der Superraum wird durch acht Koordinaten parameterisiert, die vier bekannten bosonischen x^μ und vier neue fermionische θ^α und $\bar\theta^{\dot\alpha}$. Die Fermionen und Bosonen sind Superpartner in einer irreduziblen Darstellung; sie besitzen dieselbe Masse, elektrische Ladung, schwachen Isospin und dieselbe Anzahl an Freiheitsgraden.

Die einfachste Realisierung ist das (links-)chirale Supermultiplett; es enthält ein linkshändiges Weylfermion und zwei reelle Skalare. Da das Fermion zwei Helizitätsfreiheitsgrade besitzt, ist die Anzahl der Freiheitsgrade von Bosonen und Fermionen gleich. Verändert man die Parameterisierung des Superraumes von x^μ zu $y^\mu = x^\mu + i\theta\sigma^\mu\bar\theta$, ist das chirale Superfeld unabhängig von der Koordinate $\bar\theta$ und kann in einer kurzen Reihe entwickelt werden mit dem komplexen skalaren Feld ϕ, dem linkshändigen Weylfermion ψ und dem komplexen skalaren Hilfsfeld F:

$$\Phi(y,\theta) \equiv \Phi_L(y,\theta) = \phi(y) + \theta^\alpha \psi_\alpha(y) + \theta^\alpha\theta^\beta \epsilon_{\alpha\beta} F(y) \ . \tag{2.4}$$

In dem Vektormultiplett V ist ein masseloses Boson A_μ mit Spin 1 und ein masseloses Weylfermion λ mit Spin $\frac{1}{2}$ angeordnet. Die explizite Abhängigkeit des Superfeldes von allen Koordinaten erfordert eine längere Entwicklung in θ und $\bar\theta$ bis zum „D-Term“ $\frac{1}{2}\theta\theta\bar\theta\bar\theta D$, der wieder von einem Hilfsfeld D bestimmt wird.

Die Lagrangedichte einer supersymmetrischen Eichtheorie ist gegeben durch

$$\mathcal{L} = \int d^2\theta \, d^2\bar\theta \, \mathcal{L}_{\mathrm{D}} + \int d^2\theta \, W \ ; \tag{2.5}$$

dabei ist W das von den chiralen Feldern abhängige Superpotential

$$W = \tfrac{1}{2} m_{ij} \Phi_i \Phi_j + \tfrac{1}{3} y_{ijk} \Phi_i \Phi_j \Phi_k \ , \tag{2.6}$$

das gemeinsam mit den Eichtransformationseigenschaften die Wechselwirkungen und Massen aller Teilchen bestimmt. Die Eigenschaften der Grassmannzahlen bewirken, daß nur Terme $\propto \theta\theta$ und $\propto \theta\theta\bar\theta\bar\theta$ zur Lagrangedichte beitragen (s. Anhang A).

Der chirale Teil lautet

$$\mathcal{L}_{\mathrm{chiral}} = \partial_\mu \phi_i^* \, \partial^\mu \phi_i - i \, \bar\psi_i \, \bar\sigma^\mu \, \partial_\mu \psi_i + F_i^* F_i - (\tfrac{1}{2} \, m_{ij} \, \psi_i \, \psi_j + y_{ijk} \, \psi_i \, \psi_j \, \phi_k + \mathrm{h.c.}) \ , \tag{2.7}$$

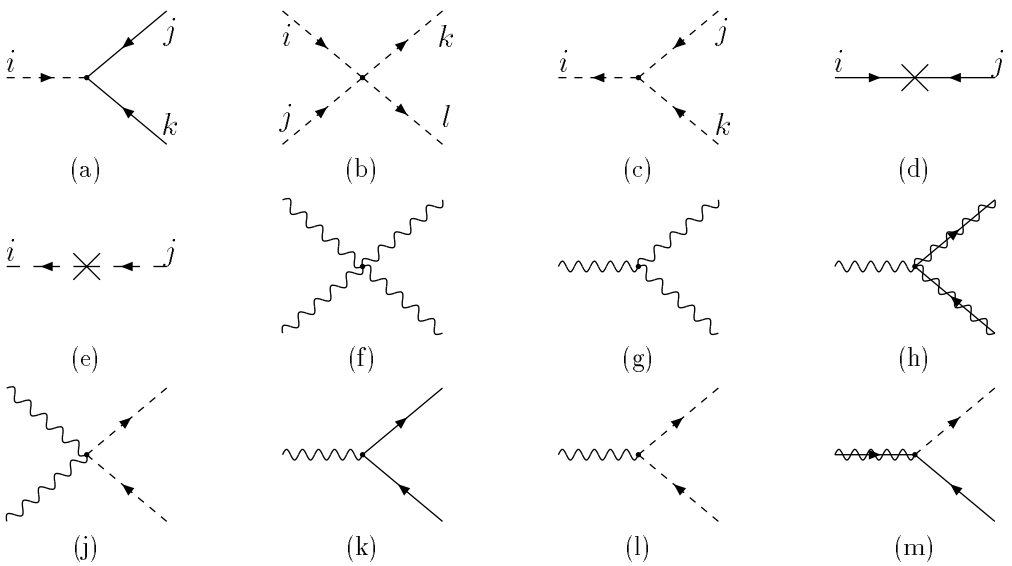


Abbildung 2.2: *Wechselwirkungen in supersymmetrischen Yang-Mills-Theorien: (a)-(e) resultieren aus der chiralen, (f)-(h) aus der Lagrangedichte der Vektorfelder, (j)-(m) beschreiben die Wechselwirkungen zwischen den verschiedenen Multipletts*

für die Supermultipletts der Eichbosonen ergibt sich

$$\mathcal{L}_{\text{Eich}} = -\tfrac{1}{4}\, G^a_{\mu\nu} G^{\mu\nu a} + i\, \bar{\lambda}^a\, \bar{\sigma}^\mu\, D_\mu \lambda^a + \tfrac{1}{2}\, D^a\, D^a \tag{2.8}$$

mit $G^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu - g f^{abc} A^b_\mu A^c_\nu$ und $D_\mu \lambda^a = \partial_\mu \lambda^a - g f^{abc} A^b_\mu \lambda^c$. Die Eichwechselwirkungen sind gegeben durch

$$\mathcal{L}_{\text{ww}} = \int d^2\theta\, d^2\bar{\theta}\, \bar{\Phi}\, e^{2gV} \Phi = \sqrt{2} i\, g \left(\phi^* \psi \lambda - \bar{\lambda} \bar{\psi} \phi \right) + g\, \phi^* \phi\, D \tag{2.9}$$

mit $\lambda = T^a \lambda^a$ und $D = T^a D^a$. T^a bezeichnet die Generatoren der Liealgebra, für die $[T^a, T^b] = i f^{abc} T^c$ gilt. Die korrespondierenden Feynmangraphen sind in Abbildung 2.2 zu sehen.

2.2 Supersymmetrische Vereinigungstheorie

Es liegt nun nahe, die Konzepte der Vereinheitlichten Theorie und Supersymmetrie zu einer supersymmetrischen Vereinheitlichten Theorie (SUM) zu verbinden. Das einfachste Modell, basierend auf der Eichgruppe $SU(5)$, entwickelten 1981 Dimopoulos und Georgi [19] und Sakai [20].

Da nur die chiralen Supermultipletts Fermionen enthalten, bei denen die links- und rechtshändigen Teilchen unterschiedlich transformiert werden, sind die Fermionen des

Superfeld		$S = \frac{1}{2}$	$S = 0$
Quark,	$Q = (U, D)$	$q_L = (u_L, d_L)$	$\tilde{q}_L = (\tilde{u}_L, \tilde{d}_L)$
Squark	U^C	u_R^C	$\tilde{u}_R^C$
	D^C	d_R^C	$\tilde{d}_R^C$
Lepton,	$L = (N, E)$	$l_L = (\nu_L, e_L)$	$\tilde{l}_L = (\tilde{\nu}_L, \tilde{e}_L)$
Slepton	E^C	e_R^C	$\tilde{e}_R^C$
Higgsino,	$H_u = (H_u^+, H_u^0)$	$\tilde{h}_u = (\tilde{h}_u^+, \tilde{h}_u^0)$	$h_u = (h_u^+, h_u^0)$
Higgsboson	$H_d = (H_d^0, H_d^-)$	$\tilde{h}_d = (\tilde{h}_d^0, \tilde{h}_d^-)$	$h_d = (h_d^0, h_d^-)$

Tabelle 2.1: *Die chiralen Superfelder des Standardmodells*

Standardmodells in chiralen Multipletts angeordnet (Tab. 2.1). Das erfordert zu jedem Fermion f einen skalaren Partner, das Sfermion $\tilde{f}$, von denen bisher noch keines gefunden wurde. Supersymmetrie kann also nicht exakt in der Natur realisiert sein, sondern muß gebrochen sein.

Der attraktivste Brechungsmechanismus ist die spontane Brechung. In supersymmetrischen Theorien wird sie zumeist durch nichtverschwindende Vakuumerwartungswerte der Hilfsfelder verursacht, die zu einer D- bzw. F-Brechung führen. Die Korrekturen sind proportional zu den Massenquadraten, und um sie gering zu halten, dürfen die Massen der Superpartner nicht wesentlich größer als 1 TeV sein.

Neben den Superpartnern der Fermionen muß ein zweites Higgsdublett eingeführt werden, um die Anomaliefreiheit zu gewährleisten und um den Fermionen Masse zu verleihen. Die Terme des Superpotentials lauten dann[2]

$$W_{\mathrm{Y}} = h_u Q U^C H_u + h_d Q D^C H_d + h_e E^C L H_d + \mu H_u H_d \quad . \tag{2.10}$$

Das neutrale Higgsboson des Standardmodells ist eine Linearkombination von H_u^0 und H_d^0. Die Vakuumerwartungswerte sind $\langle H_d \rangle = v_1$ und $\langle H_u \rangle = v_2$, das Verhältnis der beiden Werte ist $\tan\beta = \frac{v_2}{v_1}$.

Die Eichbosonen finden in Vektormultipletts Platz. Ihre Partner sind die Gauginos (Eichbosinos), Gluinos, Winos und das Bino, die zu Charginos und Neutralinos mischen.

In supersymmetrischen $SU(5)$-Theorien sind die Fermionen in den Superfeldern Φ_5 und Ψ_{10} angeordnet, ferner existieren die Higgsfelder $H_1(\mathbf{5})$ und $H_2(\mathbf{5}^*)$, in denen sich, nunmehr als supersymmetrische Multipletts, die Farbtripletts H_{1c} bzw. H_{2c} und die aus dem Standardmodell bekannten H_d und H_u befinden. Das chirale $SU(5)$-Superpotential

[2] Um dieselben Resultate aus dem $SU(5)$-Superpotential (2.11) zu erhalten, ist die Struktur der Quark- und Leptonterme unterschiedlich gewählt.

lautet

$$W_{\mathrm{Y}} = \tfrac{1}{4}\,\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon}\,h_2^{ij}\,\Psi_i^{\alpha\beta}\,\Psi_j^{\gamma\delta}\,H_2^{\epsilon} + \sqrt{2}\,h_1^{ij}\,\Psi_i^{\alpha\beta}\,\Phi_{j\,\alpha}\,H_{1\,\beta} + \mu H_{1\alpha}\,H_2^{\alpha} \quad . \tag{2.11}$$

Da auch Supersymmetrie gebrochen ist, existieren mindestens drei Brechungsstufen:

$$\begin{aligned} \mathrm{SUM} = \mathrm{GUT} \times \mathrm{SUSY} \quad &\xrightarrow[M_X]{} \quad SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y \times \mathrm{SUSY} \\ &\xrightarrow[M_{\mathrm{SUSY}}]{} \quad SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y \\ &\xrightarrow[M_Z]{} \quad SU(3)_c \times U(1)_{em} \quad . \end{aligned}$$

2.3 Protonenzerfall in supersymmetrischen Theorien

Der Protonenzerfall in nicht supersymmetrischen Theorien wird durch die Operatoren (1.8) und (1.11) bestimmt, die Massendimension sechs besitzen. Sie sind mit $\frac{1}{M_X^2}$ unterdrückt, so daß $\tau_p \sim M_X^4$ ist (1.9). Der Vereinigungspunkt der Kopplungen bestimmt die Masse M_X. Da er in supersymmetrischen Theorien eine Ordnung höher liegt, steigt die Lebensdauer weit über die experimentelle Schranke.

In supersymmetrischen Theorien sind zusätzlich auch Operatoren mit geringerer Massendimension möglich, die neue Zerfallsmöglichkeiten bieten. Die Entdeckung geht auf Sakai und Yanagida [21] sowie Weinberg [22] zurück, eine ausführliche Diskussion findet sich im Artikel von Hisano, Murayama und Yanagida [23].

Dimension-4-Operatoren und *R*-Symmetrie

Aus der allgemeinen Lagrangedichte für das chirale, das Vektormultiplett und für die Eichwechselwirkungen (2.7)-(2.9) ergeben sich zunächst die Operatoren

$$L_i\,L_j\,E_k^C \;, \quad Q_i\,D_j^C\,L_k \quad \text{und} \quad U_i^C\,D_i^C\,D_k^C \;. \tag{2.12}$$

Sie lassen sich nach Abbildung 2.2a realisieren und besitzen die Massendimension vier. Läßt man diese Operatoren mit Koeffizienten der Ordnung 1 zu, beträgt die Lebensdauer der Nukleonen nur noch Bruchteile von Sekunden (Abb. 2.3a). Um dies zu vermeiden, wird eine zusätzliche Symmetrie eingeführt [24].

Mit der R-Symmetrie lassen sich sämtliche vierdimensionalen Operatoren (2.12) verbieten[3]. Unter dieser $U(1)$-Symmetrie transformieren die Grassmannkoordinate θ und die chiralen Superfelder Φ als

$$\theta \to e^{i\alpha}\theta \quad \text{und} \quad \Phi \to e^{iR\alpha}\Phi \;,$$

[3]Es gibt Alternativen zur R-Symmetrie, die im Artikel von Ibanez und Ross [25] untersucht werden.

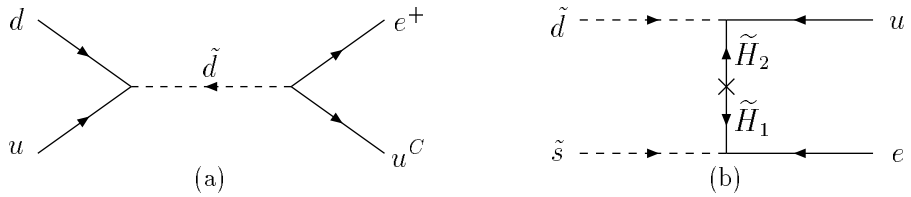


Abbildung 2.3: *$B-L$-verletzende Prozesse via (a) Austausch eines d-Squarks (Dimension-4-Operator) (b) Austausch eines Higgsinos (Dimension-5-Operator)*

so daß θ und Φ die Ladungen

$$R\,(\theta) = 1 \quad \text{und} \quad R\,(\Phi) = R$$

besitzen. Da die Lagrangedichte von $\int d^2\theta\, W$ (2.5) abhängig ist, ist die Theorie R-invariant, wenn

$$R\,(W) = 2$$

ist. Die Terme im Superpotential (2.10) erfordern die Ladungen

$$R\,(Q, L, U^C, D^C, E^C) = \tfrac{1}{2} \quad \text{und} \quad R\,(H_u, H_d) = 1\ , \tag{2.13}$$

wodurch die Dimension-4-Operatoren (2.12) verboten sind.

Alternativ läßt sich selbstverständlich auch fordern, daß die Koeffizienten der Operatoren sehr klein sind, etwa von der Größenordnung 10^{-7}. Dies wäre allerdings eine sehr unnatürliche Unterdrückung.

Dimension-5-Operatoren

Das $SU(5)$-Superpotential (2.11)

$$W_{\rm Y} = \tfrac{1}{4}\,\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon}\,h_2^{ij}\,\Psi_i^{\alpha\beta}\,\Psi_j^{\gamma\delta}\,H_2^{\epsilon} + \sqrt{2}\,h_1^{ij}\,\Psi_i^{\alpha\beta}\,\Phi_{j\,\alpha}\,H_{1\,\beta} + \mu H_{1\alpha}\,H_2^{\alpha}$$

enthält die baryonenzahlverletzenden Terme

$$h_2^{ij}\,(\,\tfrac{1}{2}\,Q_i\,Q_j + U_i^C\,E_j^C\,)\,H_{2c} + h_1^{ij}\,(\,Q_i\,L_j + U_i^C\,D_j^C\,)\,H_{1c}\ . \tag{2.14}$$

Nach dem Ausintegrieren der Higgsfelder ergibt sich

$$W_{\Delta B\neq 0} = \frac{1}{M_{H_c}} h_2^{ij} h_1^{km}\,[\,\tfrac{1}{2}(Q_iQ_j)(Q_kL_m) + (U_i^C\,E_j^C)(U_k^C\,D_m^C)]\ , \tag{2.15}$$

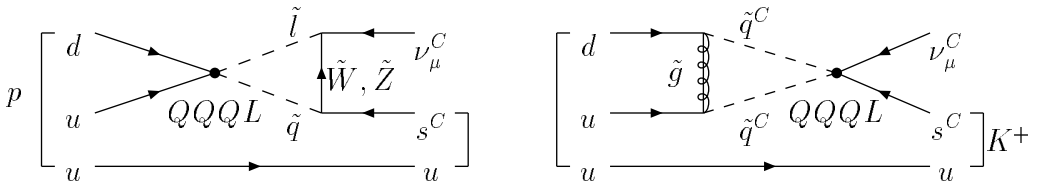


Abbildung 2.4: *Protonenzerfall via dim5-Operator*

wobei die kompakte Schreibweise unter Berücksichtigung der Mischungen zwischen den schwachen und Masseneigenzuständen[4]

$$(Q_i Q_j)(Q_k L_m) = \epsilon_{\alpha\beta\gamma}(u_i'^{\alpha} d_j'^{\beta} - d_i'^{\alpha} u_j'^{\beta})(u_k'^{\gamma} l_m' - d_k'^{\gamma} \nu_m') \quad \text{und}$$
$$(U_i^C E_j^C)(U_k^C D_m^C) = \epsilon_{\alpha\beta\gamma}(u_i^{C\prime\alpha} l_j^{C\prime})(u_k^{C\prime\beta} d_j^{C\prime\gamma})$$

bedeutet. Die Mischungen werden in Anhang B ausführlich betrachtet. Die Operatoren ergeben einen Beitrag für zwei Fermionen und zwei Skalare (Abb. 2.3b) und sind durch den Austausch eines farbigen Higgsinos H_c realisiert. Im Gegensatz zu dem dritten möglichen baryonen- und leptonenzahlverletzenden Operator

$$Q_i\, U_j^C\; E_k^C\; H_1 \tag{2.16}$$

sind sie R-invariant. In Abbildung 2.4 ist ein möglicher Zerfallsprozeß dargestellt; durch den Austausch eines Gluinos, Winos oder Zinos zwischen den Skalaren liegen im Endzustand wieder Fermionen vor. Der Dreickecksgraph soll nun berechnet werden.

Bezeichnet man die Masse des Eichbosinos mit M und mit m_j die Massen der Skalare, ergibt sich, wenn man die äußeren Viererimpulse vernachlässigt,

$$(\sqrt{2}g)^2 \int \frac{d^4k}{i(2\pi)^4} \frac{1}{m_1^2 - k^2} \frac{1}{m_2^2 - k^2} \frac{1}{M - \not{k}} = \frac{\alpha}{2\pi} f(M; m_1, m_2) \tag{2.17}$$

mit

$$f(M; m_1, m_2) = \frac{M}{m_1^2 - m_2^2} \left[\frac{m_1^2}{m_1^2 - M^2} \ln \frac{m_1^2}{M^2} - \frac{m_2^2}{m_2^2 - M^2} \ln \frac{m_2^2}{M^2} \right] . \tag{2.18}$$

Bei den Rechnungen werden wir die Massen der skalaren Teilchen als identisch annehmen; dann gilt

$$f(M; m) = \frac{M}{(M^2 - m^2)^2} \left(M^2 - m^2 + M^2 \ln \frac{m^2}{M^2} \right) . \tag{2.19}$$

[4] Wir weichen nun von der Notation in Tabelle 2.1 ab, indem wir die kleinen Buchstaben gleichermaßen für die Fermionen und ihre skalaren Partner verwenden.

Die Werte für die Yukawakopplungen und Massen sind modellabhängig, und im folgenden Kapitel wird der Zerfall in zwei ausgewählten Modellen untersucht. Sie enthalten Majoranamassen für Neutrinos, die durch den die R-Symmetrie verletzenden Dimension-5-Operator

$$L_i \, L_j \, H_2 \, H_2 \tag{2.20}$$

erzeugt werden. Um diesen Operator zuzulassen, verwendet man anstelle der R-Symmetrie die R-Parität, die die multiplikative Quantenzahl

$$R_p = (-1)^{3B+L+2S} \tag{2.21}$$

besitzt[5]. Die Standardmodellteilchen besitzen positive, ihre Superpartner negative Parität. Fordert man nun positive R-Parität der Operatoren, so bleiben die Dimension-4-Operatoren und der Operator (2.16) weiterhin verboten, nur der Operator (2.20) ist zusätzlich erlaubt.

Die Operatoren in (2.15) lassen sich in anderen SUMs ebenfalls aus dem Superpotential herleiten, nur in einfachen supersymmetrischen Erweiterungen des Standardmodells können sie ausschließlich als nichtrenormierbare Operatoren hingeschrieben werden. In Modellen, die auf einer anderen Eichgruppe beruhen, kann der Austausch auch durch andere skalare Teilchen realisiert werden, weswegen wir im folgenden bei allgemeinen Diskussionen den Begriff Leptoquark verwenden werden.

[5] Unglücklicherweise wird in der Literatur nicht klar zwischen den gleichklingenden Namen unterschieden. Häufig wird die hier bezeichnete R-Parität R-Symmetrie genannt, und als Exponenten findet man auch alternativ $3(B-L)+2S$ und $3B-L$.

Kapitel 3

Neutrinophysik und Protonenzerfall

Als farb- und elektrisch neutrale Teilchen nehmen Neutrinos im Standardmodell eine Sonderrolle ein. Sie nehmen nur an der schwachen Wechselwirkung teil und sind aufgrund ihres geringen Wirkungsquerschnittes kaum nachzuweisen; im Superkamiokande-Experiment findet im Detektor mit 50 000 Tonnen Wasser alle 90 Minuten ein Ereignis statt. Lange Zeit wurden Neutrinos als masselos angenommen. Bruno Pontecorvo äußerte 1956 erstmals die Vermutung von Neutrinooszillationen, wozu diese massiv sein müssen [26], und alle derzeitigen Experimente lassen sich damit gut erklären [27]. Es liegt daher nahe, Neutrinos als massive Teilchen zu betrachten.

Nach einer allgemeinen Einführung in die Neutrinophysik erweitern wir das supersymmetrische $SU(5)$-Modell durch massive Neutrinos. Durch die spontane Brechung einer Generationensymmetrie werden die hierarchische Struktur der Fermionenmassen und ein großer Mischungswinkel zwischen dem Myon- und Tauneutrino erzeugt. In diesem Modell berechnen wir nun die Protonenlebensdauer und vergleichen sie anschließend mit einem zweiten Modell, das auf einer anderen Eichgruppe beruht.

3.1 Neutrinophysik

Im Standardmodell sind Neutrinos ausschließlich linkshändig und masselos. Die Neutrinoexperimente deuten jedoch auf Neutrinooszillationen hin, die nur vorkommen können, wenn die schwachen und Masseneigenzustände nicht übereinstimmen. Dazu müssen die Neutrinos massiv sein, allerdings weiß man, daß die Masse im Vergleich zu den Massen der Quarks und geladenen Leptonen gering sein muß. Die gegenwärtigen experimentellen Obergrenzen für die Massen sind $m_{\nu_e} < 3\,\mathrm{eV}$, $m_{\nu_\mu} < 0.19\,\mathrm{MeV}$ und $m_{\nu_\tau} < 18.2\,\mathrm{MeV}$ [4].

Aus den meisten Experimenten lassen sich keine direkten Massengrenzen bestimmen, da die Oszillationslänge nur von den Massendifferenzen der Neutrinos abhängig ist. Im Fall zweier Generationen ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein Neutrino ν_1 in ν_2 transfor-

Sonnenneutrinos		
Small mixing-angle (SMA)	$\Delta m^2 = 5.4 \times 10^{-6}\,\mathrm{eV}^2$	$\sin^2 2\theta = 6.0 \times 10^{-3}$
Large mixing-angle (LMA)	$\Delta m^2 = 1.8 \times 10^{-5}\,\mathrm{eV}^2$	$\sin^2 2\theta = 0.76$
LOW (low mass)	$\Delta m^2 = 7.9 \times 10^{-8}\,\mathrm{eV}^2$	$\sin^2 2\theta = 0.96$
Vacuum (VAC)	$\Delta m^2 = 8.0 \times 10^{-11}\,\mathrm{eV}^2$	$\sin^2 2\theta = 0.75$
Atmosphärenneutrinos		
$\nu_\mu \leftrightarrow \nu_\tau$-Oszillationen	$\Delta m^2 = 2 - 6 \times 10^{-3}\,\mathrm{eV}^2$	$\sin^2 2\theta > 0.84$

Tabelle 3.1: *Daten der Solar- und Atmosphärenneutrinoexperimente* [4, 28]

miert,

$$P(\nu_1 \to \nu_2; t) = \sin^2 2\theta \, \sin^2 \frac{\Delta m^2 L}{4E_\nu} \; ; \tag{3.1}$$

dabei bezeichnet θ den Mischungswinkel und L die Oszillationslänge. Weil sich die Neutrinos mit nahezu Lichtgeschwindigkeit fortbewegen, gilt $L \simeq t$.

Aus den Daten lassen sich Grenzen für die Differenz Δm^2 der Massenquadrate und die Mischungswinkel θ bestimmen. Die aktuellen Ergebnisse sind in Tabelle 3.1 aufgeführt[1]. Bei den Experimenten mit Atmosphärenneutrinos ist das Resultat eindeutig, weswegen wir in den Modellen mit massiven Neutrinos im folgenden einen großen $\nu_\mu - \nu_\tau$-Mischungswinkel fordern. Bei den Sonnenneutrinos existieren insgesamt vier Lösungen, die mit den Daten verträglich sind: Eine Lösung betrachtet reine Vakuumoszillationen und erhält eine sehr kleine Differenz, die restlichen beziehen Oszillationen in Materie, hier in der Sonne, mit ein. Damit ergeben sich größere Werte für Δm^2, und nun existieren noch drei Möglichkeiten, die jeweils nach ihrem Charakteristikum bei der Massendifferenz und dem Mischungswinkel benannt sind. Interessanterweise bevorzugt nur eine, die SMA-Lösung, kleine Mischungswinkel, während die übrigen Lösungen einheitlich große Winkel fordern.

Aus kosmologischen Modellen erhält man ebenfalls Obergrenzen für die Massen der leichten Neutrinos; es gilt $\sum m_{\nu_i} \lesssim \mathcal{O}(1\,\mathrm{eV})$. Dadurch, daß es zur Zeit keine Evidenz für heiße dunkle Materie gibt, sind noch kleinere Massen bevorzugt.

Mit dem Seesaw-Mechanismus [29, 30] lassen sich die Neutrinomassen elegant erklären. Dabei nimmt man an, daß sehr massive rechtshändige Neutrinos existieren.

3.1.1 Seesaw-Mechanismus

Neutrinomassen können auf zwei Arten erzeugt werden: durch die Existenz rechtshändiger Neutrinos und durch leptonenzahlverletzende Wechselwirkungen. Der leptonenzahlverlet-

[1] Die Daten des Beschleunigerexperimentes LSND werden hier nicht berücksichtigt [27], vgl. die abschließende Diskussion im folgenden Kapitel.

zende Dimension-5-Operator

$$\mathcal{L}_{\Delta L=2} = \tfrac{1}{2}\, y_{ij}\, L_i H_2 \mathcal{C} L_j H_2 + \text{h.c.}\,, \tag{3.2}$$

kann in Theorien mit mehr als einer Higgsdarstellung auftreten und erzeugt, wenn das Higgsfeld den Vakuumerwartungswert $\langle H_2 \rangle = v_2$ annimmt, den Majoranamassenterm $\mathcal{L}_{\text{MM}} = -\frac{1}{2}\nu^T \mathcal{C} M \nu$ (s. Anhang A). Zusätzlich können rechtshändige Neutrinos eingeführt werden. Da sie weder elektromagnetisch noch schwach wechselwirken, besitzen sie die Darstellung $(1,1,0)$. Auf diese Weise ergeben sich Diracmassenterme für die Neutrinos. Dies soll im folgenden genauer ausgeführt werden.

Die Lagrangedichte für die Kopplungen und Massen der Leptonen lautet in allgemeinster Form:

$$\mathcal{L}_l = -h_{lij}\, \overline{E}_i L_j H_1 - h_{\nu ij}\, \overline{\nu}_i L_j H_2 - \tfrac{1}{2} h_{Rij}\, \overline{\nu}_i^C \nu_j R + \text{h.c.} \tag{3.3}$$

Die Vakuumerwartungswerte der Higgsfelder $\langle H_1 \rangle = v_1$ und $\langle H_2 \rangle = v_2$ generieren die Diracmassen der geladenen Leptonen $m_l = h_l v_1$ und der Neutrinos $m_D = h_\nu v_2$, die erheblich kleiner als die Majoranamassen $M = h_R \langle R \rangle$ angenommen werden. R ist ein zusätzliches Higgsfeld. Üblicherweise erwartet man die Diracmasse in der Größenordnung der Quarkmassen und die Majoranamassen oberhalb der derzeit zugänglichen Energien. Unter Berücksichtigung der Mischungen zwischen den schwachen und den Masseneigenzuständen, die die unitäre Matrix K beschreibt, ergeben sich als Masseneigenzustände

$$\nu \simeq K^\dagger \nu_L + \nu_L^C K \qquad \text{und} \qquad N \simeq \nu_R + \nu_R^C \tag{3.4}$$

mit den Massen

$$m_\nu \simeq K^\dagger m_D \frac{1}{M} m_D^T K^* \qquad \text{und} \qquad m_N \simeq M \quad , \tag{3.5}$$

also ein sehr leichtes Neutrino, das dem beobachteten entspricht, und ein sehr schweres, das für die Experimente bislang unsichtbar ist. Mit $m_D = \mathcal{O}\,(1\,\text{GeV})$ und $m_\nu = \mathcal{O}\,(0,1\,\text{eV})$ ist $M = \mathcal{O}\,(10^{10}\,\text{GeV})$.

3.1.2 Neutrinomassen und -mischungen

Aus den Experimenten lassen sich zwei Massenquadratdifferenzen bestimmen, die sich um mindestens zwei Größenordnungen unterscheiden (Tab. 3.1). Dieses deutet analog zu den Quarks und geladenen Leptonen auf eine Massenhierarchie bei den Neutrinos hin. Ein attraktiver Ansatz zur Massenerzeugung ist der Froggatt-Nielsen-Mechanismus [31], der auf einer spontan gebrochenen globalen $U(1)_F$-Generationensymmetrie beruht. Eine ausführliche Diskussion findet sich im Artikel von Lola und Ross [32].

ψ_i	$\mathbf{10}_3$	$\mathbf{10}_2$	$\mathbf{10}_1$	$\mathbf{5}^*_3$	$\mathbf{5}^*_2$	$\mathbf{5}^*_1$	$\mathbf{1}_3$	$\mathbf{1}_2$	$\mathbf{1}_1$
Q_i	0	1	2	a	a	$a+1$	b	c	d

Tabelle 3.2: *$U(1)_F$-Ladungen der Quarks und Leptonen; $a = 0, 1$, $0 \leq b \leq c \leq d$* [34]

Wir erweitern das Modell zu einem $SU(5) \times U(1)_F$-basierten Modell, in dem die Neutrinos massiv sind: Zusätzlich zu den Multipletts $\Psi \equiv \mathbf{10} = (Q, U^C, E^C)$ und $\Phi \equiv \mathbf{5}^* = (D^C, L)$ wird ein Singlett $\mathbf{1} = \nu^C$ eingeführt, so daß die Yukawawechselwirkungen mit den Higgsfeldern

$$W = h^u_{ij}\, \mathbf{10}_i\, \mathbf{10}_j\, H_2 + h^d_{ij}\, \mathbf{10}_i\, \mathbf{5}^*_j\, H_1 + h^\nu_{ij}\, \mathbf{1}_i\, \mathbf{5}^*_j\, H_2 + h^R_{ij}\, \mathbf{1}_i\, \mathbf{1}_j\, R \tag{3.6}$$

lauten. Ferner existiert ein skalares Feld ϕ, das bei einer Skala $\Lambda_k > \Lambda_{GUT}$ an die Multipletts koppelt und aufgrund seines nichtverschwindenden Vakuumerwartungswertes $\langle\phi\rangle$ die Yukawakopplungen bestimmt. Alle Felder besitzen $U(1)_F$-Ladungen Q_i, die wir nun untersuchen.

Das Feld ϕ trägt die Ladung $Q_\phi = -1$ und koppelt so häufig an die Multipletts $\mathbf{1}$, $\mathbf{5}^*$ und $\mathbf{10}$, daß die Lagrangedichte — in Analogie zu der Hyperladung im Standardmodell — nur Terme der $U(1)_F$-Gesamtladung Null erhält. Aus den nichtrenormierbaren Wechselwirkungen ergeben sich die Yukawakopplungen

$$h_{ij} = g_{ij} \left(\frac{\langle\phi\rangle}{\Lambda_k} \right)^{Q_i + Q_j} \quad . \tag{3.7}$$

g_{ij} sind Kopplungen der Ordnung 1, und im folgenden setzen wir $\frac{\langle\phi\rangle}{\Lambda_k} = \epsilon$.

Die Massenmatrizen der Quarks und Leptonen werden durch die Yukawakopplungen im $SU(5)$-Superpotential (3.6) bestimmt. Die up-Quark-Massenmatrix, die symmetrisch ist, ist durch den ersten, die Matrizen der down-Quarks und geladenen Leptonen sind durch den zweiten Teil und die Massenmatrizen der Neutrinos durch die verbleibenden beiden Terme gegeben. Die Ladungen der Multipletts werden so gewählt, daß sich die beobachtbaren Massenrelationen der Fermionen, die CKM-Matrix und der große $\nu_\mu - \nu_\tau$-Mischungswinkel ergeben; sie sind in Tabelle 3.2 angegeben. Wie in Kapitel 3.5 diskutiert wird, folgt aus dem Studium der Baryonenasymmetrie $a + d = 2$, und der Wert der bottom-Quark-Masse erlaubt dann nur noch **1.** $a = 0$ und **2.** $a = 1$ [33]. Die Yukawamatrizen der linkshändigen Neutrinos sind unabhängig von der Wahl von b, c und d.

1. Die Yukawamatrizen der Quarks ergeben sich aus den Termen $h_u Q U^C H_2$ und $h_d Q D^C H_1$. Sie besitzen die Struktur

$$h_d \sim \begin{pmatrix} \epsilon^3 & \epsilon^2 & \epsilon^2 \\ \epsilon^2 & \epsilon & \epsilon \\ \epsilon & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad h_u \sim \begin{pmatrix} \epsilon^4 & \epsilon^3 & \epsilon^2 \\ \epsilon^3 & \epsilon^2 & \epsilon \\ \epsilon^2 & \epsilon & 1 \end{pmatrix} \quad , \tag{3.8}$$

und die CKM-Matrix lautet

$$V_{\mathrm{CKM}} \sim \begin{pmatrix} 1 & \epsilon & \epsilon^2 \\ \epsilon & 1 & \epsilon \\ \epsilon^2 & \epsilon & 1 \end{pmatrix} , \tag{3.9}$$

Der Vergleich mit den experimentell bestimmten Einträgen der CKM-Matrix (B.2) bestimmt ϵ zu

$$\left(\frac{\langle\phi\rangle}{\Lambda_k}\right) = \epsilon \simeq \frac{1}{17} . \tag{3.10}$$

Die Yukawakopplungen der Leptonen ergeben sich aus den Termen $h_l E L H_1$, $h_\nu \nu^C L H_2$ und $h_R \nu^C \nu^C R$ und lauten

$$h_l = h_d , \quad h_\nu \sim \begin{pmatrix} \epsilon^{d+1} & \epsilon^{c+1} & \epsilon^{b+1} \\ \epsilon^d & \epsilon^c & \epsilon^b \\ \epsilon^d & \epsilon^c & \epsilon^b \end{pmatrix} , \quad h_R \sim \begin{pmatrix} \epsilon^{2d} & \epsilon^{d+c} & \epsilon^{d+b} \\ \epsilon^{c+d} & \epsilon^{2c} & \epsilon^{c+b} \\ \epsilon^{b+d} & \epsilon^{b+c} & \epsilon^{2b} \end{pmatrix} . \tag{3.11}$$

Die Massenmatrix m_ν der beobachteten Neutrinos erhält man aus (3.5); sie ist unabhängig von den gewählten Werten für b, c und d:

$$m_\nu \sim \begin{pmatrix} \epsilon^2 & \epsilon & \epsilon \\ \epsilon & 1 & 1 \\ \epsilon & 1 & 1 \end{pmatrix} . \tag{3.12}$$

Diese Matrix ist konsistent mit den Massendifferenzen und Mischungswinkeln aus Tabelle 3.1. Nach Diagonalisierung der Matrizen liest man die Massenrelationen ab:

$$\begin{aligned} m_u : m_c : m_t &\simeq \epsilon^4 : \epsilon^2 : 1 , \\ m_e : m_\mu : m_\tau \simeq m_d : m_s : m_b &\simeq \epsilon^3 : \epsilon : 1 , \\ m_{\nu_1} : m_{\nu_2} : m_{\nu_3} &\simeq \epsilon^2 : 1 : 1 . \end{aligned} \tag{3.13}$$

2. Für $a = 1$ ist

$$\begin{aligned} h_u &\sim \begin{pmatrix} \epsilon^4 & \epsilon^3 & \epsilon^2 \\ \epsilon^3 & \epsilon^2 & \epsilon \\ \epsilon^2 & \epsilon & 1 \end{pmatrix} , \qquad h_d \sim h_l \sim \begin{pmatrix} \epsilon^4 & \epsilon^3 & \epsilon^3 \\ \epsilon^3 & \epsilon^2 & \epsilon^2 \\ \epsilon^2 & \epsilon & \epsilon \end{pmatrix} , \\ h_\nu &\sim \begin{pmatrix} \epsilon^3 & \epsilon^2 & \epsilon^2 \\ \epsilon^2 & \epsilon & \epsilon \\ \epsilon^2 & \epsilon & \epsilon \end{pmatrix} , \qquad h_R \sim \begin{pmatrix} \epsilon^2 & \epsilon & \epsilon \\ \epsilon & 1 & 1 \\ \epsilon & 1 & 1 \end{pmatrix} , \end{aligned} \tag{3.14}$$

da $a = 1$ die Ladungen $d = 1$ und $b = c = 0$ festlegt. Die Yukawamatrix der beobachteten Neutrinos m_ν ist mit ϵ^2 unterdrückt, und die Massenrelationen lauten

$$\begin{aligned} m_u : m_c : m_t &\simeq \epsilon^4 : \epsilon^2 : 1 , \\ m_e : m_\mu : m_\tau \simeq m_d : m_s : m_b &\simeq \epsilon^4 : \epsilon^2 : \epsilon , \\ m_{\nu_1} : m_{\nu_2} : m_{\nu_3} &\simeq \epsilon^4 : \epsilon^2 : \epsilon^2 . \end{aligned} \tag{3.15}$$

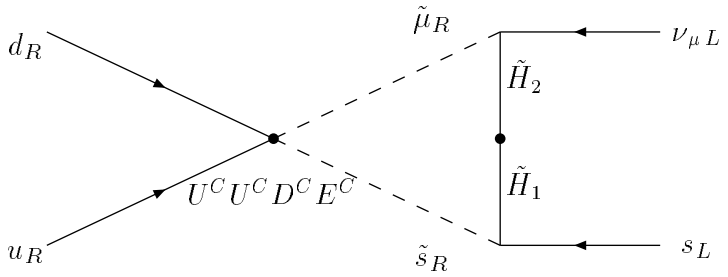


Abbildung 3.1: *Protonenzerfall via $U^C U^C D^C E^C$-Operator. Das Austauschteilchen zwischen den Skalaren muß ein schweres Higgsino sein.*

Für die schweren Neutrinos gilt jeweils

$$M_1 \,:\, M_2 \,:\, M_3 \simeq \epsilon^{2d} \,:\, \epsilon^{2c} \,:\, \epsilon^{2b} \,. \tag{3.16}$$

Durch den Vergleich der Massen von top- und bottom-Quark läßt sich $\tan\beta$ bestimmen:

$$\frac{m_t}{m_b} = \frac{h_t\, v_2}{h_b\, v_1} = \frac{h_t}{h_b}\, \tan\beta \,.$$

Im Fall $a = 0$ ergibt sich der Wert $\tan\beta \sim \frac{1}{\epsilon}$, im Fall $a = 1$ ist $\tan\beta \sim 1$.

3.2 Protonenzerfall

Die Zerfallsmoden können in zwei Gruppen eingeteilt werden: erstens Zerfall in ein geladenes Meson und ein Neutrino und zweitens in ein neutrales Meson und ein geladenes Lepton. Dimopoulos, Raby und Wilczek [35] erkannten, daß aufgrund der Farbantisymmetrie im bosonischen Operator der dominante Zerfall nicht flavourdiagonal sein kann. Im Endzustand sollte daher hauptsächlich ein Kaon vorliegen, während der Zerfall in ein Pion unterdrückt ist.

Dem 4-Fermionen-Operator folgt der Austausch eines Gauginos zwischen den Skalaren. Im Fall der Gluinos, Neutralinos und neutralen Higgsinos ist dieser flavourdiagonal und durch die geringeren Yukawakopplungen unterdrückt, obwohl die Eichkopplung α_3 einen größeren Wert besitzt [36, 23]. Sind die Squarkmassen der ersten und zweiten Generation vollständig entartet, verschwindet der Beitrag sogar. Der dominante Beitrag ist durch den Austausch eines geladenen Winos gegeben, der nicht-flavourdiagonal ist.

Da die rechtshändigen Fermionen $SU(2)$-Singletts sind, ist dieser Austausch beim Operator $U^C U^C D^C E^C$ nicht möglich. Die Beiträge der neutralen Teilchen verschwinden [36], so daß erneut ein Higgsino ausgetauscht werden muß (Abb. 3.1). Dessen Masse ist so groß, daß dieser Operator vernachläsigt werden kann.

$N \to K\nu$	670 (p), 86 (n)	$N \to \pi\nu$	25 (p), 112 (n)
$N \to K\mu^+$	120 (p), 26 (n)	$N \to \pi\mu^+$	473 (p), 100 (n)
$N \to Ke^+$	150 (p), 17 (n)	$N \to \pi e^+$	1600 (p), 158 (n)

Tabelle 3.3: *Die experimentellen Schranken der Protonen- und Neutronenzerfallsmoden in* 10^{30} *Jahren* [4]

Bei der Analyse des Zerfalls reicht es also aus, gegenüber (2.15) nur den Term[2]

$$W_{\mathrm{Y}} = \frac{1}{M_{H_c}} \frac{\alpha}{4\pi} h_2^{ij} h_1^{km} \, (Q_i Q_j)(Q_k L_m) \, f(M; m_1, m_2) \tag{3.17}$$

zu betrachten. Insgesamt sind die vier folgenden Prozesse zu untersuchen: $p \to K^+\nu$, $p \to K^0 l^+$, $p \to \pi^+\nu$ und $p \to \pi^0 l^+$. Die experimentellen Schranken finden sich in Tabelle 3.3.

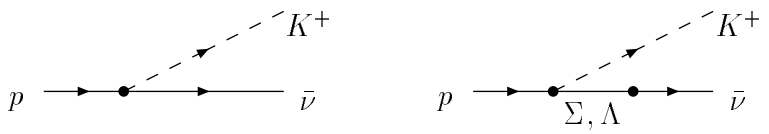
Bisher wurde der Zerfall auf Quarkebene betrachtet. Um die Zerfallsbreiten auszurechnen, muß man auf die Hadronenebene gelangen. Dazu wird hier die chirale Störungsrechnung verwendet. Ausgehend von den Berechnungen in nichtsupersymmetrischen Theorien von Claudson, Hall und Wise [38] berechneten Chadha und Daniel [39] die Zerfallsbreiten in supersymmetrischen Theorien:

$$\begin{aligned}
\Gamma(p \to K^+ \bar{\nu}_i) &= \frac{(m_p^2 - m_K^2)^2}{32\pi m_p^3 f_\pi^2} \left| C(uds\nu_i) \left[1 + \frac{m_p}{m_B}(D+F)\right] \right|^2 , \\
\Gamma(p \to K^0 l_i^+) &= \frac{(m_p^2 - m_K^2)^2}{32\pi m_p^3 f_\pi^2} \left| C(uusl_i) \left[1 - \frac{m_p}{m_B}(D-F)\right] \right|^2 , \\
\Gamma(p \to \pi^+ \bar{\nu}_i) &= \frac{m_p}{32\pi f_\pi^2} \left| C(udd\nu_i)\,(1+D+F) \right|^2 , \\
\Gamma(p \to \pi^0 l_i^+) &= \frac{m_p}{64\pi f_\pi^2} \left| C(uddl_i)\,(1+D+F) \right|^2
\end{aligned} \tag{3.18}$$

unter der in unseren Modellen zutreffenden Annahme, daß für die auftretenden Koeffizienten $C(uds\nu_i) = C(usd\nu_i)$ gilt.

Bei der Berechnung müssen das vollständige Baryon- und Mesonoktett berücksichtigt werden. Der Konvention von [39] folgend treten neben den Pol-Diagrammen noch Nicht-Pol-Diagramme auf (Abb. 3.2), deren Beiträge zu Korrekturen m_p/m_B führen; die Baryonenmasse $m_B = 1150\,\mathrm{MeV}$ stellt einen Mittelwert der Λ- und Σ-Massen $m_\Lambda = 1116\,\mathrm{MeV}$ und $m_\Sigma = 1193\,\mathrm{MeV}$ dar [4].

[2] An dieser Stelle erhalten Hisano et al. [23] einen Term, der um den Faktor 2 größer ist, und weisen darauf auch explizit hin (S. 54). Bei der Berechnung in dieser Arbeit ergab sich jedoch wieder das alte Ergebnis von Nath et al. [36], das auch Babu et al. [37] erhielten.



(a) Pol-Diagramm (b) Nicht-Pol-Diagramm

Abbildung 3.2: *Pol- und Nicht-Pol-Diagramm beim Zerfall* $p \to K^+\bar{\nu}$

Die Größen D und F sind der symmetrische und antisymmetrische Anteil des $SU(3)$-reduzierten Matrixelementes vom Axialvektorstrom und werden aus den Daten von semileptonischen Baryonzerfällen bestimmt [40]. Alle hier auftretenden Matrixelemente $\langle \text{Meson}| \, \text{Quarktriplett} \, |\text{Proton}\rangle$ der Zerfälle Nukleon N $\to$ Antilepton + Meson lassen sich auf das Hadronmatrixelement β

$$\beta u_L(\mathbf{k}) \equiv \epsilon_{\eta\sigma\tau} \langle 0| \, (d_L^\eta u_L^\sigma) u_L^\tau \, |p, \mathbf{k}\rangle \tag{3.19}$$

zurückführen[3], bei dem drei Quarks annihiliert werden [41], und dabei treten D und F als Koeffizienten auf. Beim Zerfall $p \to \pi^0 e^+$ lautet der Zusammenhang [38]

$$\left\langle \pi^0 \right| \epsilon_{\eta\sigma\tau} (d_L^\eta u_L^\sigma) u_L^\tau \, |p\rangle = \frac{i}{\sqrt{2} f_\pi} \langle 0| \, \epsilon_{\eta\sigma\tau} (d_L^\eta u_L^\sigma) u_L^\tau \, |p\rangle \, (1 + F + D) \; ,$$

womit sich das Auftreten der Pionzerfallskonstanten f_π in (3.18) erklärt. Das Hadronmatrixelement ist in den Koeffizienten C absorbiert, die wir nun untersuchen.

Die Koeffizienten C lassen sich schreiben als Produkt der Yukawakopplungen und einem konstanten Faktor, der sich aus Renormierungseffekten, dem Hadronmatrixelement, der Kopplungskonstanten, der Masse der farbigen Higgsinos und dem Dreiecksgraphen zusammensetzt.

In den Modellen liegen durch die Brechung der Vereinheitlichten Theorie und Supersymmetrie zwei Brechungsskalen vor, die die Renormierung der Yukawakopplungen und des Dimension-5-Operators beeinflussen. Die Effekte lassen sich jeweils durch einen Faktor ausdrücken, A_S für den Bereich zwischen der GUT- und der SUSY-brechenden Skala, A_L für den Bereich darunter. Die Effekte wurden erstmals 1982 von Ellis, Nanopoulos und Rudaz [42] diskutiert. Damals war die große top-Quark-Masse noch unbekannt, weswegen wir hier das neuere Resultat von Hisano et al. [23] verwenden.

Das Hadronmatrixelement wurde bereits diskutiert (3.19), und die Higgsinomasse kann durch Anwenden der Renormierungsgruppengleichungen eingeengt werden auf [43]

$$2,2 \times 10^{13} \, \text{GeV} \leq M_{H_c} \leq 2,4 \times 10^{16} \, \text{GeV} \equiv M_{H_c}^{max} \; . \tag{3.20}$$

[3]Unglücklicherweise werden sowohl dieses Matrixelement als auch das Verhältnis zwischen den Erwartungswerten der Higgsfelder mit β bezeichnet.

Protonenmasse	m_p	938,3 MeV	Kopplungskonstante	α	1/128
Neutronenmasse	m_n	939,6 MeV	Renormierungsfaktor	A_L	0,22
Kaonmasse	m_K	493,7 MeV	Renormierungsfaktor	A_S	0,59
Higgsinomasse	M_{H_c}	10^{16} GeV		D	0,81
Baryonenmasse	m_B	1150 MeV		F	0,44
Winomasse	$M_{\widetilde{W}}$	100 GeV	Hadronmatrixelement	β	0,003 GeV^3
Sfermionmasse	m	1 TeV	Pionzerfallskonstante	f_π	93 MeV

Tabelle 3.4: *Werte der Parameter*

Der Dreiecksgraph schließlich wurde bereits im vorigen Kapitel berechnet (2.19). Für die Massen der supersymmetrischen Teilchen liegen nur untere Schranken vor, das Teilchenspektrum ist ansonsten unbekannt. Die Massen der Sfermionen werden im folgenden als identisch $m = 1\,\mathrm{TeV}$ angenommen, die Winomasse angesichts der unteren Schranke von $68\,\mathrm{GeV}$ [4] als $M_{\widetilde{W}} = 100\,\mathrm{GeV}$.

Zusammen erhält man

$$C = \mathcal{Y}\frac{\beta}{M_{H_c}}\frac{\alpha}{4\pi}A_L A_S\, f(M;m)\ . \tag{3.21}$$

Für die Yukawakopplungen $\mathcal{Y}$ wird im folgenden das im vorigen Abschnitt diskutierte Modell verwendet. Die für die Rechnung notwenigen Matrixprodukte sind in Anhang B aufgeführt, die Werte der Parameter in Tabelle 3.4 zusammengefaßt.

Zerfall in geladenes Meson und Neutrino

Beim Zerfall $p \to K^+\bar{\nu}$ treten die Operatoren $(ud)(s\nu)$ und $(us)(d\nu)$ auf. Im Fall $a = 0$ ist die führende Ordnung für Myon- und Tauneutrinos bei beiden Operatoren $\mathcal{Y} = \epsilon^5$, so daß die Zerfallsbreite nach (3.18) gegeben ist durch:

$$\Gamma = \frac{(m_p^2 - m_K^2)^2}{32\pi m_p^3 f_\pi^2}\left|\epsilon^5\frac{\beta}{M_{H_c}}\frac{\alpha}{4\pi}A_L A_S\left[1 + \frac{m_p}{m_B}(D+F)\right]f(M;m)\right|^2\ . \tag{3.22}$$

Mit den Werten aus Tabelle 3.4 ergibt sich

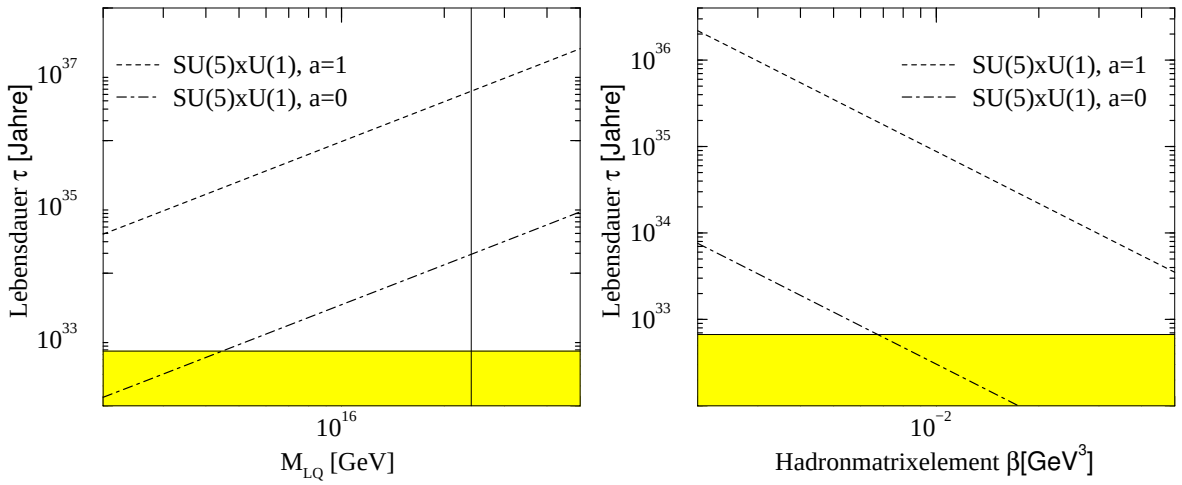
$$\Gamma = 6,2 \times 10^{-65}\,\mathrm{GeV}\ , \tag{3.23}$$

woraus die Lebensdauer

$$\tau = 3,4 \times 10^{33}\,\mathrm{Jahre} \tag{3.24}$$

resultiert. Der Wert ist größer als die experimentelle Schranke [4]

$$\tau^{exp} > 6,7 \times 10^{32}\,\mathrm{Jahre}\ , \tag{3.25}$$



(a) τ in Abhängigkeit der Leptoquarkmasse M_{LQ} für $\beta = 0,003\,\mathrm{GeV}^3$, dabei gilt $2 \times 10^{15}\,\mathrm{GeV} \leq M_{LQ} \leq 5 \times 10^{16}\,\mathrm{GeV}$. Eingezeichnet ist auch die obere Schranke von M_{LQ}, $M_{LQ}^{max} = 2,4 \times 10^{16}\,\mathrm{GeV}$.

(b) τ in Abhängigkeit vom Hadronmatrixelement β für $M_{LQ} = 10^{16}\,\mathrm{GeV}$, das im Intervall $0,002\,\mathrm{GeV}^3 \leq \beta \leq 0,05\,\mathrm{GeV}^3$ variiert.

Abbildung 3.3: *Protonenlebensdauer in Abhängigkeit der Masse des Leptoquarks und des Hadronmatrixelementes beim Zerfall* $p \to K^+\bar{\nu}$. *Die eingezeichnete experimentelle Grenze beträgt* $6,7 \times 10^{32}$ *Jahre* [4].

allerdings ist der Abstand zu dieser Grenze gering.

Im Fall $a = 1$ ist die führende Ordnung $\mathcal{Y} = \epsilon^6$, was zu

$$\Gamma = 2,1 \times 10^{-67}\,\mathrm{GeV}\,, \qquad \tau = 9,8 \times 10^{35}\,\mathrm{Jahre} \tag{3.26}$$

führt. Die Lebensdauer liegt weit oberhalb der Schranke (3.25). Grund dafür sind die geringen Yukawakopplungen.

Die Werte der Parameter können zumeist nur vorsichtig abgeschätzt werden. In den Abbildungen 3.3 ist zu sehen, wie die Lebensdauer von den Werten für die Higgsinomasse und das Hadronmatrixelement abhängt. Die Masse der Higgsinos besitzt die obere Schranke (3.20), für β existieren verschiedene Berechnungen, die im Bereich $(0,003 - 0,03)\,\mathrm{GeV}^3$ variieren. Die Einschränkungen an die beiden Parameter lauten im Fall $a = 0$

$$\begin{aligned} \beta &\lesssim 0,006\,\mathrm{GeV}^3 && (M_{H_c} = 10^{16}\,\mathrm{GeV})\,, \\ \beta &\lesssim 0,016\,\mathrm{GeV}^3 && (M_{H_c}^{max} = 2,4 \times 10^{16}\,\mathrm{GeV}) \quad \text{und} \\ M_{H_c} &\gtrsim 4,5 \times 10^{15}\,\mathrm{GeV} && (\beta = 0,003\,\mathrm{GeV}^3)\,. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Die aktuellste Bestimmung von β stammt von der JLQCD-Kollaboration (1999) [44] und

ergab $\beta = 0,014$, wodurch die Vorhersage des Modells direkt an der experimentellen Schranke läge, besonders wenn man die vernachlässigten Faktoren $\mathcal{O}(1)$ bedenkt.

Im Fall $a = 1$ treten keine Einschränkungen im betrachteten Bereich auf.

Der Zerfall $p \to \pi^+ \bar{\nu}$ wird durch den Operator $(ud)(d\nu)$ bestimmt. Aufgrund der Farbantisymmetrie sollte dieser Zerfall unterdrückt sein, und in der Tat ist die führende Ordnung in beiden Fällen um eine Größenordnung erhöht auf ϵ^6 im Fall $a = 0$ und auf ϵ^7 im Fall $a = 1$. Daraus resultiert

$$\tau = 4,1 \times 10^{35}\,\text{Jahre} \qquad (a = 0) \tag{3.28}$$

und

$$\tau = 1,2 \times 10^{38}\,\text{Jahre} \qquad (a = 1) \tag{3.29}$$

(Abb. 3.4(a)). Beide Werte liegen weit oberhalb der experimentellen Schranken (Tab. 3.3).

Zerfall in neutrales Meson und geladenes Lepton

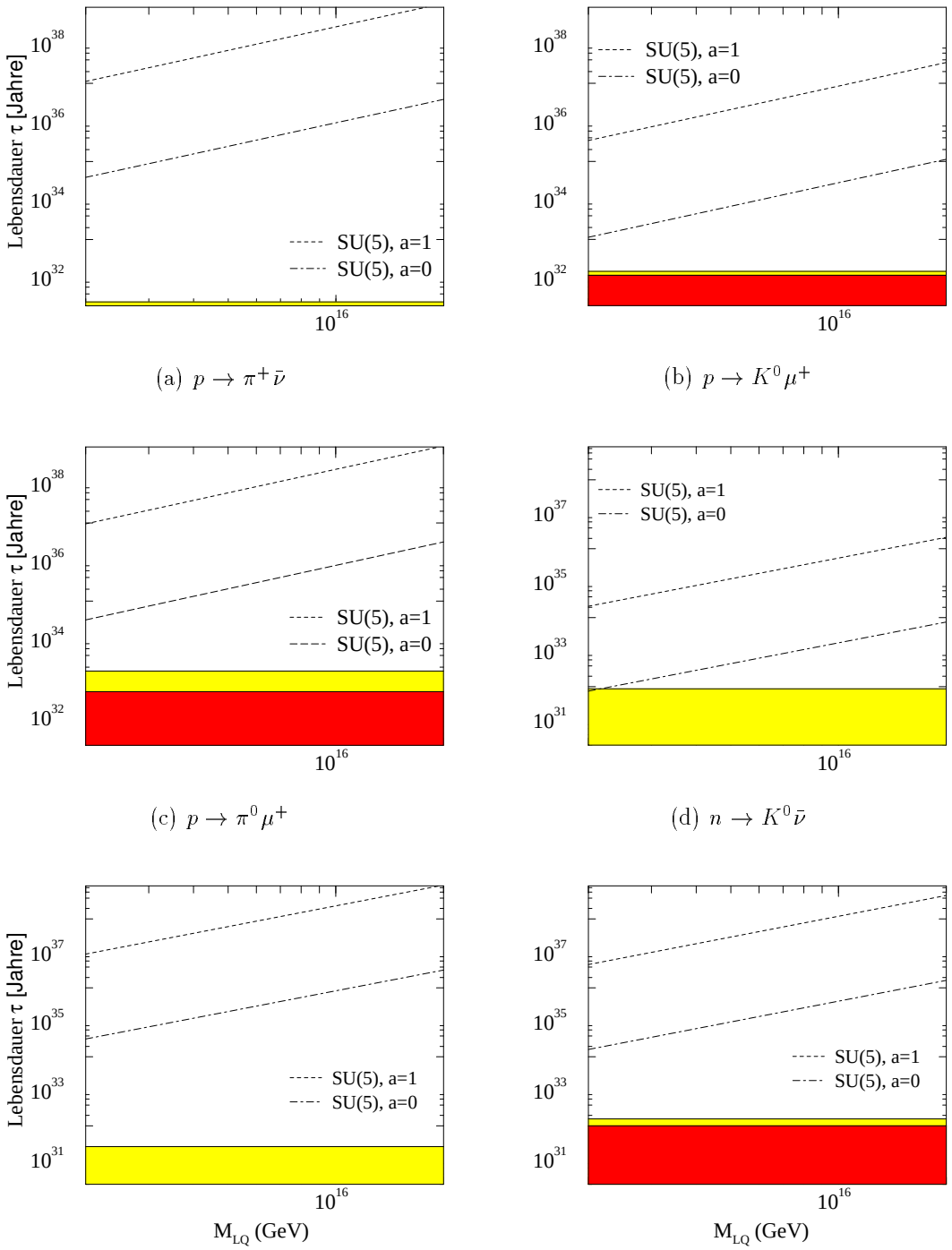
Bei den Zerfällen in ein geladenes Lepton ist die führende Ordnung in ϵ gegenüber den vorigen Zerfällen unverändert, da die Yukawakopplung $\mathcal{Y} \propto \epsilon^{Q+Q+Q+L}$ ist. Die Lebensdauern betragen beim Zerfall ins Myon

$$\begin{aligned} p \to K^0\mu^+ :&\quad 2,8 \times 10^{34}\,\text{Jahre}\ (a = 0)\,, \qquad 8,2 \times 10^{36}\,\text{Jahre}\ (a = 1)\,, \\ p \to \pi^0\mu^+ :&\quad 8,2 \times 10^{35}\,\text{Jahre}\ (a = 0)\,, \qquad 2,4 \times 10^{38}\,\text{Jahre}\ (a = 1)\,. \end{aligned} \tag{3.30}$$

Da das Tau-Lepton dieselbe $U(1)_F$-Ladung wie das Myon besitzt, ist die Zerfallsbreite gleich groß. Experimentell kann zur Zeit jedoch nur nach dem Zerfall in ein Myon oder Elektron gesucht werden. Durch die kleinere Yukawakopplung ist der Zerfall in ein Elektron unterdrückt.

Dominant ist der nicht-flavourdiagonale Zerfall in ein Kaon und ein Myon, Abbildung 3.4(b) zeigt die Lebensdauer in Abhängigkeit von der Masse des Leptoquarks, zusätzlich sind die experimentellen Schranken für den Zerfall in ein Myon (untere Grenze) und ein Elektron (obere Grenze) eingezeichnet. Die Lebensdauer für den myonischen Zerfall liegt bereits über der experimentellen Schranke für den Zerfall ins Elektron.

In Abbildung 3.4(c) ist schließlich der Zerfall in ein Pion und Myon samt der experimentellen Schranken für den elektronischen und myonischen Zerfall zu sehen; wieder ist der flavourdiagonale Zerfall unterdrückt.



(a) $p \to \pi^+ \bar{\nu}$ (b) $p \to K^0 \mu^+$

(c) $p \to \pi^0 \mu^+$ (d) $n \to K^0 \bar{\nu}$

(e) $n \to \pi^0 \bar{\nu}$ (f) $n \to \pi^- \mu^+$

Abbildung 3.4: *Protonen- und Neutronenlebensdauer bei verschiedenen Zerfallsmoden und die gegenwärtigen experimentellen Schranken (Tab. 3.3). Die Leptoquarkmasse variiert von* 2×10^{15} *GeV bis* 2×10^{16} *GeV. In den Abbildungen (b), (c) und (f) gilt die untere Schranke jeweils für den Zerfall ins Myon, die obere für den Zerfall ins Elektron.*

Neutronenzerfall

Neben dem Protonenzerfall ermöglichen die Dimension-5-Operatoren auch einen Neutronenzerfall via Leptoquark in ein Meson und ein Lepton. Die Zerfallsbreiten lauten [45]

$$\begin{aligned}
\Gamma(n \to K^0 \bar{\nu}_i) &= \frac{(m_p^2 - m_K^2)^2}{16\pi m_n^3 f_\pi^2} \left| C(uds\nu_i) \left[1 + \frac{m_n}{m_B} F\right] \right|^2 , \\
\Gamma(n \to \pi^0 \bar{\nu}_i) &= \frac{m_n}{64\pi f_\pi^2} \left| C(udd\nu_i) (1 + D + F) \right|^2 , \\
\Gamma(n \to \pi^- e_i^+) &= \frac{m_n}{32\pi f_\pi^2} \left| C(uddl_i) (1 + D + F) \right|^2 .
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Leider existiert keine Angabe für den Zerfall $n \to K^- l^+$. Die Koeffizienten sind gegenüber dem Protonenzerfall unverändert, und wir erhalten

$$\begin{aligned}
n \to K^0 \nu : &\quad 1,9 \times 10^{33} \text{ Jahre } (a = 0) , \qquad 5,4 \times 10^{35} \text{ Jahre } (a = 1) , \\
n \to \pi^0 \nu : &\quad 8,2 \times 10^{35} \text{ Jahre } (a = 0) , \qquad 2,4 \times 10^{38} \text{ Jahre } (a = 1) , \\
n \to \pi^- \mu^+ : &\quad 4,1 \times 10^{35} \text{ Jahre } (a = 0) , \qquad 1,2 \times 10^{38} \text{ Jahre } (a = 1) .
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Die Abbildungen 3.4(d)-(f) zeigen die Lebensdauer in Abhängigkeit von der Higgsinomasse mit den experimentellen Schranken in den verschiedenen Zerfallskanälen. Beim Zerfall ins geladene Lepton ist wieder das Elektron im Endzustand unterdrückt, so daß im Graphen nur der myonische Zerfall dargestellt ist, dessen Lebensdauer erneut oberhalb der Schranke des elektronischen Zerfalls liegt.

Zusammenfassend läßt sich sagen, daß nur der Zerfall des Protons in ein geladenes Kaon und ein Neutrino im Fall $a = 0$ gegenwärtig an der experimentellen Grenze liegt. Alle anderen Moden bestimmen Lebensdauern, die sich im Rahmen der Parameterwerte (Tab. 3.4) klar oberhalb der Schranken befinden.

3.3 Ein alternatives Modell

Neben $SU(5)$-basierten Theorien wurden Modelle untersucht, die auf Eichgruppen höheren Ranges beruhen. Ein Kandidat ist die Gruppe E_6, die als maximale Untergruppe die Gruppe $SU(3)_c \times SU(3)_L \times SU(3)_R \equiv (SU(3))^3$ enthält. Sie weist eine Links-Rechts-Symmetrie auf, und die Fundamentaldarstellung **27** läßt sich zerlegen in

$$\mathbf{27} \to (3, 3, 1) \oplus (3^*, 1, 3^*) \oplus (1, 3^*, 3) . \tag{3.33}$$

Die links- und rechtshändigen Quarks gehören unterschiedlichen Multipletts an, die linkshändigen $(3, 3, 1)$ und die rechtshändigen $(3^*, 1, 3^*)$. Die links- und rechtshändigen Leptonen sind gemeinsam im Multiplett $(1, 3^*, 3)$ angeordnet. Im folgenden bezeichnen wir die Multipletts als $\mathbf{L} = (l_L, e_L^C, \nu_L^C, \dots)$, $\mathbf{Q_L} = (q_L, \dots)$ und $\mathbf{Q_R} = (u_L^C, d_L^C, \dots)$.

ψ_i	$\mathbf{L}_3$	$\mathbf{L}_2$	$\mathbf{L}_1$	$\mathbf{Q}_{\mathrm{L}3}$	$\mathbf{Q}_{\mathrm{L}2}$	$\mathbf{Q}_{\mathrm{L}1}$	$\mathbf{Q}_{\mathrm{R}3}$	$\mathbf{Q}_{\mathrm{R}2}$	$\mathbf{Q}_{\mathrm{R}1}$
Q_i	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	0	2	3	0	0	1

Tabelle 3.5: *$U(1)_F$-Ladungen der $(SU(3))^3$-Multipletts* [32]

Analog zur Gruppe $SU(5)\times U(1)_F$ sollen nun im $SU(3)_c\times SU(3)_L\times SU(3)_R\times U(1)_F$-Modell durch die spontane Brechung der $U(1)_F$-Generationensymmetrie die Yukawakopplungen erzeugt werden. Da alle Leptonen in einer Darstellung sind, erhalten sie dieselben $U(1)_F$-Ladungen, so daß die leptonischen Yukawamatrizen symmetrisch sind. Die Wahl der Ladungen ist im Artikel von Lola und Ross [32] ausführlich diskutiert und in Tabelle 3.5 angegeben.

Im Gegensatz zum $SU(5)$-Modell ergeben sich die Yukawakopplungen der Down-Quarks und geladenen Leptonen mit dem Higgsfeld H_1 einerseits und diejenigen der Up-Quarks und Neutrinos mit H_2 andererseits bei zwei unterschiedlichen Massenskalen Λ_1 und Λ_2:

$$\begin{aligned} h_{dij} &= g_{dij}\left(\frac{\langle\phi\rangle}{\Lambda_1}\right)^{Q_i+Q_j}, \quad h_{lij} = g_{lij}\left(\frac{\langle\phi\rangle}{\Lambda_1}\right)^{Q_i+Q_j}, \\ h_{uij} &= g_{uij}\left(\frac{\langle\phi\rangle}{\Lambda_2}\right)^{Q_i+Q_j}, \quad h_{\nu ij} = g_{\nu ij}\left(\frac{\langle\phi\rangle}{\Lambda_2}\right)^{Q_i+Q_j}. \end{aligned} \tag{3.34}$$

Die Phänomenologie der Quark- und Leptonmassenmatrizen sowie der große Mischungswinkel zwischen ν_μ und ν_τ kann gut erklärt werden, wenn man

$$\left(\frac{\langle\phi\rangle}{\Lambda_1}\right) = \epsilon \simeq \frac{1}{4}, \quad \left(\frac{\langle\phi\rangle}{\Lambda_2}\right) = \bar{\epsilon} \simeq \epsilon^2 \tag{3.35}$$

wählt. Die Matrizen lauten

$$\begin{aligned} h_u &\sim \begin{pmatrix} \bar{\epsilon}^4 & \bar{\epsilon}^3 & \bar{\epsilon}^3 \\ \bar{\epsilon}^3 & \bar{\epsilon}^2 & \bar{\epsilon}^2 \\ \bar{\epsilon} & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad h_d \sim \begin{pmatrix} \epsilon^4 & \epsilon^3 & \epsilon^3 \\ \epsilon^3 & \epsilon^2 & \epsilon^2 \\ \epsilon & 1 & 1 \end{pmatrix}, \\ h_l &\sim \begin{pmatrix} \epsilon^5 & \epsilon^3 & \epsilon^{5/2} \\ \epsilon^3 & \epsilon & \epsilon^{1/2} \\ \epsilon^{5/2} & \epsilon^{1/2} & 1 \end{pmatrix}, \qquad h_\nu \sim \begin{pmatrix} \bar{\epsilon}^5 & \bar{\epsilon}^3 & \bar{\epsilon}^{5/2} \\ \bar{\epsilon}^3 & \bar{\epsilon} & \bar{\epsilon}^{1/2} \\ \bar{\epsilon}^{5/2} & \bar{\epsilon}^{1/2} & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{3.36}$$

die CKM-Matrix

$$V_{\mathrm{CKM}} \sim \begin{pmatrix} 1 & \epsilon & \epsilon^3 \\ \epsilon & 1 & \epsilon^2 \\ \epsilon^3 & \epsilon^2 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.37}$$

Die Yukawakopplungen der rechtshändigen Neutrinos sind bis auf die Faktoren g_{ij} mit denen der geladenen Leptonen identisch, so daß die Massenrelationen gegeben sind durch

$$\begin{aligned} m_u : m_c : m_t &\simeq \bar{\epsilon}^4 : \bar{\epsilon}^2 : 1 \,, \\ m_d : m_s : m_b &\simeq \epsilon^4 : \epsilon^2 : \epsilon \,, \\ m_e : m_\mu : m_\tau \simeq M_1 : M_2 : M_3 &\simeq \epsilon^5 : \epsilon : 1 \,, \\ m_{\nu_1} : m_{\nu_2} : m_{\nu_3} &\simeq \epsilon^{15} : \epsilon^3 : 1 \,. \end{aligned} \tag{3.38}$$

Im $SU(5)$-Modell ist der Parameter ϵ, der die Mischungen zwischen den Familien beschreibt, klein, und der große $\nu_\mu - \nu_\tau$-Mischungswinkel folgt aus der nichtparallelen Generationensymmetrie. Dagegen wird dieser Winkel im $(SU(3))^3$-Modell durch einen großen Wert für ϵ erzeugt, da die Leptonen einer Familie dieselben Ladungen besitzen, die Generationenstruktur also parallel ist:

$$\sin \Theta_{\mu\tau} \sim \sqrt{\epsilon} + \epsilon \,. \tag{3.39}$$

Protonenzerfall

Die Dimension-5-Operatoren in (2.15), die den Protonen- und Neutronenzerfall ermöglichen, sind unabhängig von dem Superpotential, aus dem sie gewonnen wurden. In die Lebensdauer geht nur die Masse des Austauschteilchens ein. Auch in $(SU(3))^3$-basierten Modellen sind die Operatoren erlaubt, und im folgenden soll die Lebensdauer in den verschiedenen Moden mit den Yukawakopplungen in diesem Modell bestimmt werden. Zum Vergleich mit den Ergebnissen aus dem $SU(5)$-Modell ist der Bereich, in dem die Leptoquarkmasse variiert, identisch. Für die Renormierungseffekte erwartet man ebenfalls keine großen Abweichungen von den $SU(5)$-Werten, so daß sie als gleich angenommen sind. Es müssen also nur die Yukawakopplungen bestimmt werden.

Im Vergleich zum $SU(5)$-Modell sind die $U(1)_F$-Ladungen größer. Bei den Zerfällen in ein geladenes Lepton, die durch die Operatoren $(u\,d')(u\,l)$ ermöglicht werden, ist daher eine höhere Lebensdauer zu erwarten, wegen $\epsilon^2 \simeq \bar{\epsilon}$ bei den Zerfällen in ein Neutrino dagegen eher eine kleinere Lebensdauer. Die Yukawakopplungen lauten für den Zerfall $p \to K\nu$

$$h_2 \propto \bar{\epsilon}^{Q_L} \epsilon^{Q_L} \sim \begin{pmatrix} \epsilon^9 & \epsilon^8 & \epsilon^6 \\ \epsilon^7 & \epsilon^6 & \epsilon^4 \\ \epsilon^3 & \epsilon^2 & 1 \end{pmatrix} \,, \quad h_1 \propto \epsilon^{Q_L} \bar{\epsilon}^{L} \sim \begin{pmatrix} \epsilon^8 & \epsilon^4 & \epsilon^3 \\ \epsilon^7 & \epsilon^3 & \epsilon^2 \\ \epsilon^5 & \epsilon & 1 \end{pmatrix} \,, \tag{3.40}$$

die führende Ordnung ist $\epsilon^{12} \sim \bar{\epsilon}^6$. Beim Zerfall $p \to \pi\nu$ ergibt sich ϵ^{13}, während bei den Zerfällen in ein geladenes Lepton die führenden Ordnungen $\epsilon^{29/2}$ bei $p \to K\mu$ und $\epsilon^{31/2}$ bei $p \to \pi\mu$ sind.

Daraus resultieren die Werte

$$\begin{aligned} p \to K^+\nu: &\quad \tau = 4,7 \times 10^{35}\,\text{Jahre}\,, \\ p \to \pi^+\nu: &\quad \tau = 3,2 \times 10^{36}\,\text{Jahre}\,, \\ p \to K^0\mu^+: &\quad \tau = 4,0 \times 10^{39}\,\text{Jahre} \quad \text{und} \\ p \to \pi^0\mu^+: &\quad \tau = 6,5 \times 10^{39}\,\text{Jahre}\,. \end{aligned} \tag{3.41}$$

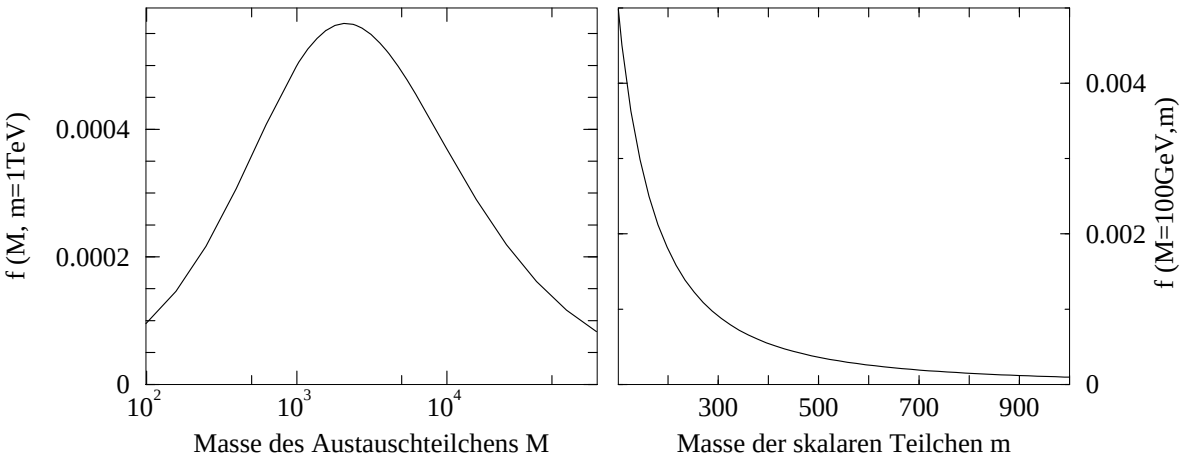
Wie erwartet, ist die Lebensdauer beim Zerfall ins Pion sehr hoch und beim Kaon von derselben Größenordnung wie im $SU(5)$-Modell.

Da die führenden Ordnungen beim Zerfall mittels des zweiten Operators $U^C U^C D^C E^C$ geringer sind, soll dieser ebenfalls betrachtet werden. Es ergibt sich $\epsilon^{9/4}$ beim Zerfall $p \to K\mu$ und $\epsilon^{11/4}$ bei $p \to \pi\mu$. Der Beitrag des Dreiecksgraphen ist dafür nun erheblich kleiner: Während $f(M_W, m) = 9,6 \times 10^{-5}$ ist, ist $f(M_{LQ}, m) = 5,9 \times 10^{-15}$. Die Zerfallsbreite ist proportional zum Quadrat des Produktes $\mathcal{Y} \times f(M, m)$, so daß bei $\epsilon \simeq \frac{1}{4}$ der Beitrag von diesem Operator zu vernachlässigen ist. Erst bei einer Leptoquarkmasse von etwa $10^{13}\,\text{GeV}$ ergibt sich eine gleichgroße Lebensdauer, allerdings ist die Vorhersage beim dominanten Zerfall $p \to \pi\nu$ dann unterhalb der experimentellen Schranke.

3.4 Diskussion der Parameter

An dieser Stelle soll diskutiert werden, wie scharf die Vorhersagen sind, die von einer Vielzahl von Parametern abhängen. Die Abhängigkeit von der Leptoquarkmasse und dem Hadronmatrixelement wurde bereits betrachtet. Die Ergebnisse aus der chiralen Störungstheorie können als fest betrachtet werden, da sie mit den alternativen Berechnungen, die das relativistische, das nichtrelativistische Quarksmodell oder die QCD-Summenregeln verwenden, übereinstimmen [46]. Die Renormierungsfaktoren ergaben bei der neueren Rechnung keine großen Unterschiede: Während der Wert für A_L gleich blieb, änderte sich A_S um den Faktor $1,5$. Die neue Rechnung berücksichtigte die große Yukawakopplung des top-Quarks, so daß eine nochmalige Rechnung keine großen Abweichungen erbringen dürfte. Die größten Unsicherheiten bleiben damit bei den Yukawakopplungen, bei denen nur die führende Ordnungen betrachtet und die Koeffizienten der Ordnung 1 vernachlässigt wurden, und den Massen der supersymmetrischen Teilchen, die im folgenden diskutiert werden.

Der Wert des Dreiecksgraphen steigt für größere Gauginomassen, bei $M = 1\,\text{TeV}$ beträgt sein Wert das fünffache des Wertes für $M = 100\,\text{GeV}$ (Abb. 3.5(a)). Ebenso steigt er für sinkende skalare Massen: Bei $m = 200\,\text{GeV}$ beträgt er fast das zwanzigfache des Wertes für $m = 1\,\text{TeV}$ (Abb. 3.5(b)). Dadurch kann angesichts der quadratischen Abhängigkeit von dem Dreiecksgraphen die Lebensdauer leicht um den Faktor 100 sinken.



(a) f in Abhängigkeit von M für $m = 1\,\mathrm{TeV}$

(b) f in Abhängigkeit von m für $M = 100\,\mathrm{GeV}$

Abbildung 3.5: *Wert des Dreiecksgraphen f in Abhängigkeit der Massen des Austauschteilchens und der skalaren Teilchen.*

Die beiden zur Zeit fern der experimentellen Grenze liegenden Modelle ließen sich dann experimentell bald testen, während das einfachste Modell ausgeschlossen wäre.

Solange die supersymmetrischen Teilchen nicht nachgewiesen sind und wir keine genaueren Informationen zu deren Massen besitzen, sind alle Modelle mit den experimentellen Schranken vereinbar. Tabelle 3.6 zeigt eine Übersicht aller Protonen- und Neutronenzerfallsmoden in den diskutierten Modellen.

Zerfall	$SU(5) \times U(1)_F$, $a = 0$	$SU(5) \times U(1)_F$, $a = 1$	$(SU(3))^3 \times U(1)_F$
$p \to K^+ \bar{\nu}_\mu$	$3,4 \times 10^{33}$	$9,8 \times 10^{35}$	$4,7 \times 10^{35}$
$p \to K^0 \mu^+$	$2,8 \times 10^{34}$	$8,2 \times 10^{36}$	$4,0 \times 10^{39}$
$p \to \pi^+ \bar{\nu}_\mu$	$4,1 \times 10^{35}$	$1,2 \times 10^{38}$	$3,2 \times 10^{36}$
$p \to \pi^0 \mu^+$	$8,2 \times 10^{35}$	$2,4 \times 10^{38}$	$6,5 \times 10^{39}$
$n \to K^0 \bar{\nu}_\mu$	$1,9 \times 10^{33}$	$5,4 \times 10^{35}$	$2,6 \times 10^{35}$
$n \to \pi^0 \bar{\nu}_\mu$	$8,2 \times 10^{35}$	$2,4 \times 10^{38}$	$6,3 \times 10^{36}$
$n \to \pi^- \mu^+$	$4,1 \times 10^{35}$	$1,2 \times 10^{38}$	$3,2 \times 10^{39}$

Tabelle 3.6: *Protonen- und Neutronenlebensdauer in den verschiedenen Zerfallsmoden (Angabe in Jahren)*

3.5 Kosmologische Aspekte

Die verwendeten Modelle wurden erstmals bei der Anwendung auf die Baryongenese vergleichend betrachtet. Es bietet sich an, die Ergebnisse dieser Analyse bei der Diskussion hinzuzunehmen. Eine ausführliche Diskussion und weitere Literaturangaben finden sich im Übersichtsartikel von Buchmüller und Plümacher [47].

Die Tatsache, daß im gesamten für uns erforschbaren Bereich des Universums mehr Materie als Antimaterie existiert, kann durch eine lokale oder globale Asymmetrie erklärt werden. Eine lokale Asymmetrie erscheint sehr unnatürlich, da weder Vernichtungsstrahlung gesehen wird, noch ein Mechanismus existiert, der eine dermaßen starke räumliche Trennung von Teilchen und Antiteilchen im frühen Universum erklären kann. Man nimmt daher an, daß das Universum eine globale Baryonenasymmetrie besitzt. Zur Erzeugung sind drei Voraussetzungen nötig: Baryonenzahlverletzung, $\mathcal{C}$- und $\mathcal{CP}$-Verletzung und die Abweichung vom thermischen Gleichgewicht. In den betrachteten Modellen können diese Bedingungen wie folgt realisiert werden: Der Zerfall schwerer Neutrinos in Lepton-Higgs- und Antilepton-Antihiggs-Paare ist $\mathcal{CP}$-verletzend. Durch die Expansion des Universums entkoppeln die Neutrinos bei der Temperatur, die ihrer Masse entspricht, vom Hintergrund und geraten aus dem thermischen Gleichgewicht. Beim Zerfall entsteht nun eine Leptonenasymmetrie, die durch Sphaleronprozesse mit $\Delta B = \Delta L = 3$ in eine Baryonenasymmetrie umgewandelt wird.

Die Baryonenasymmetrie wird durch den Parameter Y_B angegeben:

$$Y_B = \frac{n_B - n_{\bar{B}}}{s} \simeq \frac{n_B}{s} = 10^{-9} \; - \; 10^{-10} \; . \tag{3.42}$$

Er beschreibt das Verhältnis des Baryonenzahlüberschusses zur Entropiedichte s und ist direkt proportional zur $\mathcal{CP}$-Asymmetrie ε_1:

$$Y_B \sim (10^{-3} \; - \; 10^{-4})\, \varepsilon_1 \; . \tag{3.43}$$

Im $SU(5) \times U(1)_F$-Modell ist die Abhängigkeit der $\mathcal{CP}$-Asymmetrie von dem Parameter ϵ [33]

$$\varepsilon_1 \sim 10^{-1} \; \epsilon^{2(a+d)} \; . \tag{3.44}$$

Mit einer Neutrinomasse von der Größenordnung $10^{-2}\,\mathrm{GeV}$ ist die Masse des leichtesten der schweren Neutrinos gegeben durch

$$M_1 \sim \epsilon^{2(a+d)}\, 10^{15}\,\mathrm{GeV} \; , \tag{3.45}$$

und für die Baryonenasymmetrie gilt

$$Y_B \sim (10^{-4} \; - \; 10^{-5})\, \epsilon^{2(a+d)} \; . \tag{3.46}$$

Der Vergleich mit (3.42) bestimmt daraus die bereits verwendete Relation

$$a + d = 2 \tag{3.47}$$

und

$$M_1 \simeq 10^{10}\,\mathrm{GeV}\ . \tag{3.48}$$

Die Masse ist von derselben Größenordnung wie die Temperatur T_B, bei der die Baryonenasymmetrie entsteht.

Im Fall $a = b = 0$ sind die Yukawakopplungen der dritten Generation von der Ordnung 1. Dann ist mit (3.16) die Masse des schwersten Neutrinos

$$M_3 \sim \epsilon^{-4}\, M_1 \simeq 10^{15}\,\mathrm{GeV}\ , \tag{3.49}$$

und $B - L$ ist in der Nähe der GUT-Skala gebrochen. Für den Fall geringerer Yukawakopplungen ($a = 0$, $b = c = 1$, $d = 2$ oder $a = 1$, $b = c = 0$, $d = 1$) ergibt sich eine kleinere Masse

$$M_3 \sim \epsilon^{-2}\, M_1 \simeq 10^{12}\,\mathrm{GeV}\ , \tag{3.50}$$

so daß $B - L$ unterhalb der GUT-Skala gebrochen ist.

Das Modell $(SU(3))^3 \times U(1)$ sagt ebenfalls hierarchische Massen, einen großen Mischungswinkel und Yukawakopplungen der Ordnung 1 für die dritte Generation voraus. Die $B - L$-Brechungsskala liegt wiederum an der GUT-Skala, da $M_3 \sim 10^{15}\,\mathrm{GeV}$ ist. Wegen

$$\varepsilon_1 \sim 10^{-1}\,\epsilon^5 \tag{3.51}$$

ergibt sich jedoch eine deutlich höhere Temperatur

$$T_B \sim M_1 \sim 10^{12}\,\mathrm{GeV}\ . \tag{3.52}$$

T_B wird jedoch im allgemeinen durch $T_B \lesssim \mathcal{O}(10^{10}\,\mathrm{GeV})$ eingegrenzt, da ansonsten die Entropie des Universums zu groß wird. Dadurch sind die $SU(5)$-basierten Modelle bevorzugt. Insbesondere der Fall $a = 0$ in dem Modell ist sehr attraktiv, da die beiden Brechungsskalen die gleiche Größenordnung besitzen.

Die Sphaleronprozesse, die die Leptonen- in eine Baryonenasymmetrie umwandeln, sind im Bereich

$$T_{\mathrm{EW}} \sim 100\,\mathrm{GeV} < T < T_{\mathrm{SPH}} \sim 10^{12}\,\mathrm{GeV} \tag{3.53}$$

im thermischen Gleichgewicht und verknüpfen die Leptonen- und Baryonenasymmetrie, die durch Y_L und Y_B ausgedrückt werden, miteinander, so daß $Y_B \propto Y_L$ ist. Aus der Bedingung, daß die Zerfallsrate der schweren Neutrinos kleiner als die Expansion des Universums ist, läßt sich eine weitere Obergrenze für die Massen der leichten Neutrinos bestimmen, die für eine Temperatur der Leptogenese von $T \sim 10^{10}\,\mathrm{GeV}$ den Wert

$$\sum_i m_{\nu_i}^2 < \left(0,2\,\mathrm{eV}\sqrt{\frac{T_{\mathrm{SHP}}}{T}}\right)^2 \simeq 4\,\mathrm{eV}^2 \tag{3.54}$$

annimmt.

Kapitel 4

Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wurde untersucht, ob die Protonenlebensdauer in zwei von der Neutrinophysik motivierten Modellen und die experimentellen Schranken in Einklang stehen. Die Massen werden durch die spontane Brechung einer globalen Generationensymmetrie erzeugt, so daß man auf einfache Weise hierarchische Massen mit großen Mischungen im Neutrinosektor erhält.

Das erste Modell basiert auf der einfachsten Vereinigungsgruppe, der $SU(5)$. Zusätzlich zu den Multipletts der minimalen supersymmetrischen $SU(5)$-Modelle werden Singletts eingeführt, um massive Neutrinos zu ermöglichen. Die Ladungen der Multipletts werden so gewählt, daß bei den Quarks und geladenen Leptonen die Massenrelationen mit den experimentellen übereinstimmen und ein großer $\nu_\mu - \nu_\tau$-Mischungswinkel realisiert wird. Durch diese Vorgaben bleibt ein freier Parameter bei der Wahl der Fünfplettladungen, der die Protonenlebensdauer maßgeblich bestimmt.

Im einfachsten Fall ergeben sich für die dritte Generation jeweils Yukawakopplungen der Ordnung 1. Dies ist besonders angenehm, da nun keine allumfassende unnatürliche Unterdrückung auftritt, so daß die größeren up-Quark-Massen auf einen höheren Vakuumerwartungswert des zweiten Higgsmultipletts zurückzuführen sind. Der Preis dafür ist eine Lebensdauer, die sich sehr nahe an der experimentellen Schranke befindet. Da die minimalen $SU(5)$-Modelle bereits durch die experimentelle Schranke des Protonenzerfalls ausgeschlossen werden [48], ist das nicht verwunderlich; es wäre vielmehr überraschend, wenn die Berechnungen nur aufgrund der Neutrinomassen einen sehr viel höheren Wert ergeben hätten. Im anderen Fall sind die Yukawakopplungen der down-Quarks und Leptonen um eine Größenordnung unterdrückt, wodurch die Lebensdauer weit über die experimentelle Schranke steigt.

Das zweite Modell beruht auf einer Untergruppe der exzeptionellen Gruppe E_6, die bereits Rang 6 besitzt. Sie erfordert über das Singlett hinaus zusätzliche Fermionen, die bisher nicht in der Natur beobachtet werden konnten. Die maximale Untergruppe $(SU(3))^3$ besitzt Links-Rechts-Symmetrie, die links- und rechtshändigen Quarks sind in

zwei verschiedenen Multipletts angeordnet, ohne daß ihre Ladungen korreliert sind. Dagegen sind alle Leptonen, inklusive des rechtshändigen Neutrinos, in einem dritten Multiplett angeordnet, wodurch die leptonischen Massenmatrizen symmetrisch werden. Zur Massenerzeugung benötigt man nun zwei Massenskalen, und der große Mischungswinkel wird durch den größeren Wert des führenden Parameters in den Matrizen ermöglicht. Die berechneten Lebensdauer liegt in diesem Modell weit über der experimentellen Schranke.

Interessant ist nun der Vergleich mit den Erkenntnissen aus der Baryogenese. Dort ragt das einfachste Modell heraus, denn die beobachtete Baryonenasymmetrie kann natürlicherweise durch den Zerfall schwerer Neutrinos mit hierarchischen Massen bei der Brechung von $B-L$ an der GUT-Skala erklärt werden. und das Modell besticht durch nicht unterdrückte Kopplungen und eine gemeinsame Skala. Beim Protonenzerfall ist es andererseits stark eingeschränkt und erfordert einen baldigen experimentellen Nachweis, was im Hinblick auf die gegenwärtigen und zukünftigen Experimente natürlich hochinteressant ist.

Demgegenüber sind im anderen Fall dieses Modells die Yukawakopplungen unnatürlich unterdrückt, und eine zusätzliche Skala wird für die $B-L$-Brechung eingeführt. Das zweite Modell fordert zwei Brechungsskalen, um die gewünschten Yukawamatrizen zu erhalten, und eine zu hohe Temperatur T_B. Auf der anderen Seite besitzen sie eine große Toleranz bezüglich des Protonenzerfalls.

Im Rahmen der Neutrinoexperimente ist zweierlei zu beachten. Zunächst wurde darauf hingewiesen, daß die Ergebnisse des Beschleunigerexperimentes LSND nicht berücksichtigt werden. LSND ermittelte eine dritte Massendifferenz, die mit den übrigen aus Tabelle 3.1 nicht kompatibel ist und ein viertes leichtes neutrales Teilchen erfordert. Die Analyse der e^+e^--Reaktion an der Z-Resonanz ergibt drei an der schwachen Wechselwirkung teilnehmende Neutrinos [2], so daß das vierte neutrale Teilchen steril gegenüber allen Wechselwirkungen des Standardmodells wäre. Solange die Ergebnisse der übrigen Beschleunigerexperimente nicht eindeutig dieses Teilchen fordern, wird dieses Ergebnis nicht berücksicht. Ein steriles, leichtes Neutrino wäre für $SO(10)$-Modelle sehr attraktiv, da diese große Probleme mit der Erzeugung großer Neutrinomischungen haben und zusätzlich zur Fundamentaldarstellung Singletts einführen müssen (siehe z. B. [49]), die solchen sterilen Teilchen entsprechen könnten.

Zweitens zeigen die Diskussion um die Beschleuniger- und die Sonnenneutrinoexperimente, daß die Daten noch sehr uneinheitlich sind. In den kommenden Jahren wird die experimentelle Suche durch zusätzliche Experimente verstärkt werden [50], und dies bezieht insbesondere die direkten Experimente ein, die die Masse der Neutrinos und keine Massendifferenz bestimmen wollen; denn nur dadurch kann der Beweis für nicht verschwindende Neutrinomassen erfolgen und die Größe bestimmt werden. Im Zentrum steht die Suche nach dem neutrinolosen doppelten Betazerfall mit $\Delta L = 2$, der direkt

von den Neutrinomassen abhängig ist.

In dieser Diplomarbeit konnte gezeigt werden, daß mit der Einführung von Neutrinomassen ein einfaches supersymmetrisches $SU(5)$-Vereinigungsmodell wieder denkbar ist. Eine unnatürliche Unterdrückung der Yukawakopplungen oder das Verbot der Dimension-5-Operatoren ist nicht notwendig. Hierbei sollte allerdings bedacht werden, daß es zur R-Symmetrie Alternativen gibt, die die zum Protonenzerfall führenden Dimension-5-Operatoren verbieten, den Majoranamassen erzeugenden Operator dagegen erlauben. Wenn die experimentellen Schranken weiter steigen, wäre die Untersuchung dieser alternativen Symmetrien sehr interessant.

Letztlich bleibt — unabhängig von den Modellen — die Hoffnung, daß der experimentelle Nachweis des Protonenzerfalls bald erfolgen wird.

Anhang A

Notationen und Konventionen

Weyl-, Dirac- und Majorana-Spinoren

Die γ-Matrizen sind definiert durch die Clifford-Algebra $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$. Die *Weyl-* oder *chirale* Darstellung lautet

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \sigma^\mu = (1, \sigma^i)\,,\ \bar{\sigma}^\mu = (1, -\sigma^i)\ ;$$

dabei sind σ^i die Paulimatrizen.

Ein Fermion wird durch zweikomponentige, komplexe, antikommutierende Objekte, *Weyl*-Spinoren, beschreiben. Der Weylspinor ξ_α beschreibt ein linkshändiges Teilchen, der Spinor $\bar{\chi}^{\dot{\alpha}}$ ein rechtshändiges Teilchen. Unter Rotationen $\vec{\theta}$ und Lorentzboosts $\vec{\beta}$ transformieren sie folgendermaßen:

$$\xi \to (1 - \tfrac{i}{2}\vec{\theta}\cdot\vec{\sigma} - \tfrac{1}{2}\vec{\beta}\cdot\vec{\sigma})\xi\ , \quad \bar{\chi} \to (1 - \tfrac{i}{2}\vec{\theta}\cdot\vec{\sigma} + \tfrac{1}{2}\vec{\beta}\cdot\vec{\sigma})\bar{\chi}\ .$$

Mit zwei Weylspinoren läßt sich ein *Dirac*-Spinor bilden:

$$\Psi_{\rm D} = \begin{pmatrix} \xi_\alpha \\ \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}\ , \quad \overline{\Psi}_{\rm D} = (\chi^\alpha, \bar{\xi}_{\dot{\alpha}})\ , \quad \Psi_{\rm D}^C = \begin{pmatrix} \chi_\alpha \\ \bar{\xi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} = \mathcal{C}\overline{\Psi}_{\rm D}^T\ . \tag{A.1}$$

Der Zusammenhang zwischen Weylspinoren und den chiralen Darstellungen des Diracspinors, die man durch Anwendung der Chiralitätsoperatoren $\mathcal{P}_{\rm L,R} = \frac{1}{2}(1 \mp \gamma_5)$ auf den Diracspinor erhält, ist gegeben durch

$$\Psi_{\rm L} = \begin{pmatrix} \xi_\alpha \\ 0 \end{pmatrix}\ , \quad \Psi_{\rm R} = \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}\ .$$

Die Lagrangedichte eines massiven Diracfermions lautet

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\rm D} &= -i\overline{\Psi}_{\rm D}\partial\!\!\!/\Psi_{\rm D} - M\overline{\Psi}_{\rm D}\Psi_{\rm D} \\ &= -i\bar{\xi}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\xi - i\bar{\chi}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\chi - M(\xi\chi + \bar{\xi}\bar{\chi})\ . \end{aligned} \tag{A.2}$$

Ein *Majorana*-Spinor wird definiert durch die Bedingung $\Psi_{\rm M} = \Psi_{\rm M}^C$. Er läßt sich durch einen Weylspinor ξ und den adjungierten Spinor $\bar{\xi}$ darstellen

$$\Psi_{\rm M} = \begin{pmatrix} \xi_\alpha \\ \bar{\xi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} = \Psi_{\rm M}^C \ . \tag{A.3}$$

Die Lagrangedichte eines Majoranafermions mit der Masse M lautet

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\rm M} &= -\frac{i}{2}\overline{\Psi}_{\rm M}\partial\!\!\!/\Psi_{\rm M} - \frac{M}{2}\overline{\Psi}_{\rm M}\Psi_{\rm M} \\ &= -i\xi^\dagger\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\xi - \frac{M}{2}(\xi\xi + \bar{\xi}\bar{\xi}) \ . \end{aligned} \tag{A.4}$$

Ein Diracspinor $\Psi_{\rm D}$ läßt sich als Summe zweier Majoranaspinoren schreiben gemäß

$$\Psi_{\rm D} = \Psi_{\rm M1} + i\Psi_{\rm M2} \ .$$

Grassmannzahlen

In einer n-dimensionalen Grassmann-Algebra erfüllen die Generatoren η_j

$$\{\,\eta_i\,,\,\eta_j\,\} = 0 \quad , \quad i,j = 1,2\ldots n \ . \tag{A.5}$$

Jedes Element kann durch eine endliche Reihe dargestellt werden, da $\eta_j^2 = 0$ ist. Die Translationsinvarianz des Integrals erzwingt $\int d\eta_j = 0$, und normiert man $\int d\eta_i\,\eta_j = \delta_{ij}$, so ergibt Differentiation und Integration dasselbe Ergebnis.

Supersymmetrie-Algebra

Unter Supersymmetrie-Transformationen werden Bosonen in Fermionen überführt, so daß die Generatoren in einer Spin-$\frac{1}{2}$-Darstellung der Lorentzgruppe transformieren müssen. Die einfachste Realisierung ist ein linkshändiger und ein rechtshändiger Weylspinor Q_α und $\bar{Q}_{\dot{\beta}}$ mit

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = \{\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = 0 \ , \quad \{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = 2\sigma^\mu_{\alpha\dot{\beta}}P_\mu \ . \tag{A.6}$$

Mit dem Energie-Impuls-Operator P_μ und den Lorentzgeneratoren $M_{\mu\nu}$ formen sie die *Gradierte Liealgebra* oder *Superalgebra*:

$$\begin{aligned} [Q_\alpha, P_\mu] &= [\bar{Q}_{\dot{\beta}}, P_\mu] = 0 \\ [Q_\alpha, M_{\mu\nu}] &= \tfrac{1}{2}(\sigma_{\mu\nu})^\beta_\alpha Q_\beta \\ [\bar{Q}_{\dot{\beta}}, M_{\mu\nu}] &= \tfrac{1}{2}(\bar{\sigma}_{\mu\nu})^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}}\bar{Q}_{\dot{\alpha}} \end{aligned} \tag{A.7}$$

mit $\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{4}(\sigma_\mu\bar{\sigma}_\nu - \sigma_\nu\bar{\sigma}_\mu)$ und $\bar{\sigma}_{\mu\nu} = \frac{1}{4}(\bar{\sigma}_\mu\sigma_\nu - \bar{\sigma}_\nu\sigma_\mu)$.

Mit zweikomponentigen Grassmannzahlen θ, $\bar{\theta}$ läßt sich (A.6) mit Kommutatoren ausdrücken, und es ergibt sich (2.2)

$$[\theta^\alpha Q_\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\beta}}\bar{Q}_{\dot{\beta}}] = 2\,\theta^\alpha\sigma^\mu_{\alpha\dot{\beta}}\bar{\theta}^{\dot{\beta}}\,P_\mu \ .$$

Anhang B

Ergänzungen zu den Rechnungen

CKM-Matrix

Der Zusammenhang zwischen den schwachen und Masseneigenzuständen der Quarks im Standardmodell wird mit Hilfe der Cabibbo-Kobayashi-Maskawa-Matrix (CKM-Matrix) V_{CKM} angegeben. Sie ist so gewählt, daß bei den up-Quarks die Eigenzustände identisch sind. Für die down-Quarks gilt dann

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix} . \tag{B.1}$$

Die derzeit gültigen Werte sind [4]

$$\begin{pmatrix} 0.9742 & \text{bis} & 0.9757 & 0.219 & \text{bis} & 0.226 & 0.002 & \text{bis} & 0.005 \\ 0.219 & \text{bis} & 0.225 & 0.9734 & \text{bis} & 0.9749 & 0.037 & \text{bis} & 0.043 \\ 0.004 & \text{bis} & 0.014 & 0.035 & \text{bis} & 0.043 & 0.9990 & \text{bis} & 0.0003 \end{pmatrix} . \tag{B.2}$$

Produkte der Massenmatrizen

<u>$p \to X\nu$</u>

Die zu berechnenden Terme sind

$$W = h_2^{ij} h_1^{km} \left[(u_i'^{\alpha} d_j'^{\beta})(d_k'^{\gamma} \nu_m') - (d_i'^{\alpha} u_j'^{\beta})(d_k'^{\gamma} \nu_m') \right] . \tag{B.3}$$

Mit $h_2 = h_u$ und $h_1 = h_d$ lauten sie in den Masseneigenzuständen der down-Quarks

$$W = (h_u U_d)^{ij} (h_d U_d)^{km} \left[(u_i'^{\alpha} d_j^{\beta})(d_k^{\gamma} \nu_m') - (d_i^{\alpha} u_j'^{\beta})(d_k^{\gamma} \nu_m') \right] . \tag{B.4}$$

Mit der CKM-Matrix, $h_u U_d = Y_1$ und $h_d U_d = Y_2$ erhält man das Ergebnis

$$W = Y_1^{ij} Y_2^{km} \left[\left((V_{\mathrm{CKM}}\, u)_i^{\alpha}\, d_j^{\beta} \right) (d_k^{\gamma}\, \nu_m') - \left(d_i^{\alpha}\, (V_{\mathrm{CKM}}\, u)_j^{\beta} \right) (d_k^{\gamma}\, \nu_m') \right] . \tag{B.5}$$

	$SU(5)\times U(1)$, $a=0$	$SU(5)\times U(1)$, $a=1$	$(SU(3))^3\times U(1)$
Y_1	$\begin{pmatrix}\epsilon^4 & \epsilon^3 & \epsilon^2\\ \epsilon^3 & \epsilon^2 & \epsilon\\ \epsilon^2 & \epsilon & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\epsilon^4 & \epsilon^3 & \epsilon^2\\ \epsilon^3 & \epsilon^2 & \epsilon\\ \epsilon^2 & \epsilon & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\epsilon^9 & \epsilon^8 & \epsilon^6\\ \epsilon^7 & \epsilon^6 & \epsilon^4\\ \epsilon^3 & \epsilon^2 & 1\end{pmatrix}$
Y_2	$\begin{pmatrix}\epsilon^3 & \epsilon^2 & \epsilon^2\\ \epsilon^2 & \epsilon & \epsilon\\ \epsilon & 1 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\epsilon^4 & \epsilon^3 & \epsilon^3\\ \epsilon^3 & \epsilon^2 & \epsilon^2\\ \epsilon^2 & \epsilon & \epsilon\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\epsilon^8 & \epsilon^4 & \epsilon^3\\ \epsilon^7 & \epsilon^3 & \epsilon^2\\ \epsilon^5 & \epsilon & 1\end{pmatrix}$
V_{CKM}	$\begin{pmatrix}1 & \epsilon & \epsilon^2\\ \epsilon & 1 & \epsilon\\ \epsilon^2 & \epsilon & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & \epsilon & \epsilon^2\\ \epsilon & 1 & \epsilon\\ \epsilon^2 & \epsilon & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & \epsilon & \epsilon^3\\ \epsilon & 1 & \epsilon^2\\ \epsilon^3 & \epsilon^2 & 1\end{pmatrix}$
$p\to K^+\nu$	ϵ^5	ϵ^6	$\epsilon^{12}=\bar\epsilon^6$
$p\to \pi^+\nu$	ϵ^6	ϵ^7	$\epsilon^{13}=\bar\epsilon^{13/2}$

Tabelle B.1: *Werte für die Matrizen und die führende Ordnung in ϵ bzw. $\bar\epsilon$ in den Zerfallsprozessen $p\to X\nu$. Zu beachten ist, daß ϵ in den Modellen verschiedene Werte besitzt.*

In $(SU(3))^3\times U(1)_F$ ist $Y_1=h_2U_d$ und $Y_2=h_1U_d$ (3.40). Die Werte für die Matrizen und die führende Ordnung in ϵ bzw. $\bar\epsilon$ für die Zerfallsprozesse $p\to K^+\nu$ und $p\to\pi^+\nu$ sind in Tabelle B.1 angegeben.

$\underline{p\to Xl}$

Hier sind die Terme

$$W=h_2^{ij}h_1^{km}\Big[\,(u_i'^{\alpha}d_j'^{\beta})(u_k'^{\gamma}l_m')-(d_i'^{\alpha}u_j'^{\beta})(u_k'^{\gamma}l_m')\,\Big] \tag{B.6}$$

zu berechnen, die in den Masseneigenzuständen der up-Quarks

$$W=(h_uU_u)^{ij}(h_dU_u)^{km}\Big[\,(u_i^{\alpha}d_j'^{\beta})(u_k^{\gamma}l_m')-(d_i'^{\alpha}u_j^{\beta})(u_k^{\gamma}l_m')\,\Big] \tag{B.7}$$

lauten. Mit der CKM-Matrix, $h_uU_u=Y_3$ und $h_dU_u=Y_4$ erhält man das Ergebnis

$$W=Y_3^{ij}Y_4^{km}\Big[\,\Big(u_i^{\alpha}\,(V_{\mathrm{CKM}}\,d)_j^{\beta}\Big)\,(d_k^{\gamma}\,l_m')-\Big((V_{\mathrm{CKM}}\,d)_i^{\alpha}\,u_j^{\beta}\Big)\,(d_k^{\gamma}\,l_m')\Big]\,. \tag{B.8}$$

In $(SU(3))^3\times U(1)_F$ ist analog $Y_3=h_2U_u$ und $Y_4=h_1U_u$.

Literaturverzeichnis

[1] P. Langacker, *Grand unified theories and proton decay*, Phys. Rep. **72**, 185 (1981).

[2] M. E. Peskin und D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1995.

[3] G. Ross, *Grand unified theories*, Frontiers in Physics, vol. 60, Benjamin/Commings, 1985.

[4] D. E. Groom et al., *Review of particle physics*, The European Physical Journal **C 15**, 1 (2000).

[5] ALEPH-Collaboration, *Searches for neutral Higgs bosons in e^+e^- collisions at centre-of-mass energies from 192 to 202 GeV*, Phys. Lett. **B 499**, 53 (2001).

[6] DELPHI-Collaboration, *Search for the Standard Model Higgs boson at LEP in the year 2000*, Phys. Lett. **B 499**, 23 (2001).

[7] OPAL-Collaboration, *Search for the Standard Model Higgs boson in e^+e^- collisions at $\sqrt{S} \approx$ 192-209 GeV*, Phys. Lett. **B 499**, 38 (2001).

[8] H. Georgi und S. L. Glashow, *Unity of all elementary particle forces*, Phys. Rev. Lett. **32**, 438 (1974).

[9] F. Wilczek und A. Zee, *Operator analysis of nucleon decay*, Phys. Rev. Lett. **43**, 1571 (1979).

[10] S. Weinberg, *Baryon- and lepton-nonconserving processes*, Phys. Rev. Lett. **43**, 1566 (1979).

[11] Y. A. Golfand und E. P. Likhtman, *Extension of the algebra of Poincare group generators and violaton of P invariance*, JETP Lett. **13**, 323 (1971).

[12] D. V. Volkov und V. P. Akulov, *Possible universal neutrino interaction*, JETP Lett. **16**, 438 (1972).

[13] J. Wess und B. Zumino, *Supergauge transformations in four-dimensions*, Nucl. Phys. **B 70**, 39 (1974).

[14] P. van Nieuwenhuizen, *Supergravity*, Phys. Rep. **68**, 189 (1981).

[15] M. F. Sohnius, *Introducing Supersymmetry*, Phys. Rep. **128**, 39 (1985).

[16] H. P. Nilles, *Supersymmetry, supergravity and particle physics*, Phys. Rep. **110**, 1 (1984).

[17] J. Wess und J. Bagger, *Supersymmetry and Supergravity*, Princeton Series in Physics, Princeton University Press, 1983.

[18] U. Amaldi, W. de Boer und H. Fürstenau, *Comparision of Grand Unified Theories with elektroweak and strong coupling constants measured at LEP*, Phys. Lett. **B 260**, 240 (1991).

[19] S. Dimopoulos und H. Georgi, *Softly broken supersymmetry and SU(5)*, Nucl. Phys. **B 193**, 150 (1981).

[20] N. Sakai, *Naturalness in Supersymmetric GUTs*, Z. Phys. **C 11**, 153 (1981).

[21] N. Sakai und T. Yanagida, *Proton decay in a class of supersymmetric grand unified models*, Nucl. Phys. **B 197**, 533 (1982).

[22] S. Weinberg, *Supersymmetry at ordinary energies. masses and conservation laws*, Phys. Rev. **D 26**, 287 (1982).

[23] J. Hisano, H. Murayama und T. Yanagida, *Nucleon decay in the minimal supersymmetric SU(5) grand unification*, Nucl. Phys. **B 402**, 46 (1993).

[24] F. Fayet und S. Ferrara, *Supersymmetry*, Phys. Rep. **32**, 249 (1977).

[25] L. Ibanez und G. Ross, *Discrete gauge symmetries and the origin of baryon and lepton number conservation in supersymmetric versions of the standard model*, Nucl. Phys. **B 368**, 3 (1992).

[26] P. Ramond, *Neutrinos: A Glimpse Beyond the Stand Model*, Nucl. Phys. B. Proc. Suppl. **77**, 3 (1999).

[27] J. Ellis, *Summary of Neutrinos 2000*, hep-ph/0008334.

[28] Y. Hayato, *Super-Kamiokande: status and perspectives*, Nucl. Phys. **A 451**, 86 (2000).

[29] M. Gell-Mann, P. Ramond und R. Slansky, *Complex spinors and unified theories*, in: *Supergravity* (Hrsg. P. van Nieuvenheizen und D. Z. Freedman), North Holland Publ. Co., 1979.

[30] T. Yanagida, in: *Proceedings of the Workshop on unified Theories and Baryon Number Violation in the universe*, Tsukauba 1979 (Hrsg. O. Sawada und A. Sugamoto), KEK Report Nr. 79-18, 1979.

[31] C. D. Froggatt und H. B. Nielsen, *Hierarchy of quark masses, Cabibbo angles and CP violation*, Nucl. Phys. **B 147**, 277 (1979).

[32] S. Lola und G. G. Ross, *Neutrino masses from U(1) symmetries and the Super-Kamiokande data*, Nucl. Phys. **B 553**, 81 (1999).

[33] W. Buchmüller und T. Yanagida, *Quark lepton mass hierarchies and the baryon asymmetry*, Phys. Lett. **B 445**, 399 (1999).

[34] J. Sato und T. Yanagida, *Large Lepton Mixing in Seesaw Models — Coset-space Family Unification*, Nucl. Phys. B. Proc. Suppl. **77**, 293 (1999).

[35] S. Dimopoulos, S. Raby und F. Wilczek, *Proton decay in supersymmetric models*, Phys. Lett. **B 112**, 133 (1982).

[36] P. Nath, A. H. Chamseddine und R. Arnowitt, *Nucleon decay in supergravity unified theories*, Phys. Rev. **D 32**, 2348 (1985).

[37] K. S. Babu, J. C. Pati und F. Wilczek, *Suggested new modes in supersymmetric proton descay*, Phys. Lett. **B 423**, 337 (1998).

[38] M. Claudson, M. B. Wise und L. J. Hall, *Chiral Lagrangian for deep mine physics*, Nucl. Phys. **B 195**, 297 (1982).

[39] S. Chadha und M. Daniel, *Chiral Lagrangian calculation of nucleon decay modes induced by $D=5$ supersymmetric operators*, Nucl. Phys. **B 229**, 105 (1983).

[40] R. E. Shrock und L.-L. Wang, *New, Generalized Cabibbo Fit and Application to Quark Mixing Angles in the Sequential Weinberg-Salam Model*, Phys. Rev. Lett. **41**, 1692 (1978).

[41] S. J. Brodsky et al., *Baryon wave functions and nucleon decay*, Nucl. Phys. **B 238**, 561 (1984).

[42] J. Ellis, D. V. Nanopoulos und S. Rudaz, *A phenomenological comparison of conventional and supersymmtric GUTs*, Nucl. Phys. **B 202**, 43 (1982).

[43] J. Hisano et al., *Limit on the Color-Triplet Higgs Mass in the Minimum Supersymmetric SU(5) Model*, Mod. Phys. Lett. **A 10**, 2267 (1995).

[44] JLQCD-Collaboration, *Nucleon decay matrix elements from lattice QCD*, Phys. Rev. **D 62**, 014506 (2000).

[45] A. L. Macpherson, *Nucleon decay in non-minimal supersymmetric $SO(10)$*, Nucl. Phys. **B 472**, 79 (1996).

[46] W. Lucha, *Proton Decay in Grand Unified Theories*, Fortschritte der Physik **33**, 547 (1985).

[47] W. Buchmüller und M. Plümacher, *Neutrino masses and the baryon asymmetry*, International Journal of Modern Physics **A 15**, 5047 (2000).

[48] T. Goto und T. Nihei, *Effect of an RRRR dimension 5 operator on proton decay in the minimal SU(5) SUGRA GUT model*, Phys. Rev. **D 59**, 115009 (1999).

[49] S. Raby, *Neutrino Masses and SO(10) SUSY GUTs*, hep-ph/0012373.

[50] P. Langacker, *Neutrino Oscillation Workshop 2000: Conference Summary*, hep-ph/0101244.

Danksagung

Für die sehr interessante Aufgabenstellung und die stets freundliche, verständnisvolle und motivierende Betreuung möchte ich mich sehr herzlich bei Herrn Buchmüller bedanken. Herrn Mack danke ich sehr für die Betreuung vom Fachbereich.
Mein Dank gilt ebenso allen Freunden och alla vänner, die mir während der Arbeit und des gesamten Studiums auf vielfältigste Weise geholfen und so zum Gelingen der Diplomarbeit und des Studiums beigetragen haben.
Ein besonderer Dank gebührt schließlich meinen Eltern und Geschwistern, die mich auf jede erdenkliche Weise unterstützt haben.

Tack så mycket. Vielen Dank.