Howlands Formalismus in der zeitabhängigen Quantentheorie

Tobias Schlegelmilch

Diplomarbeit
II. Institut für Theoretische Physik
Universität Hamburg

August 2001

Gutachter der Diplomarbeit:

Prof. Dr. K. Fredenhagen
Prof. Dr. G. Mack

Howland's Formalism in Time-Dependent Quantum Theory

by Tobias Schlegelmilch

Abstract

The subject of this thesis is the investigation of strategies to solve the time-dependent Schrödinger equation. The emphasis is put on the application to quantum field theory: the nonperturbative construction of Bogolubov-S-matrices as limits of propagators in interaction picture. A formalism based on a paper by J. S. Howland proves to be suitable for this purpose. This is shown by examples from quantum mechanics. The additional difficulties arising in quantum field theory are investigated in the van-Hove-model. Here a method of regularization is developed.

Zusammenfassung

Gegenstand dieser Diplomarbeit ist die Untersuchung von Lösungsmethoden der zeitabhängigen Schrödingergleichung. Das Interesse gilt dabei der Anwendung in der Quantenfeldtheorie: Nichtstörungstheoretische Erzeugung von Bogolubov-S-Matrizen als Grenzwerte von Propagatoren im Wechselwirkungsbild. Ein Formalismus, der auf J. S. Howland zurückgeht, erweist sich hierfür als besonders geeignet. Dies wird anhand von Beispielen aus der Quantenmechanik demonstriert. Die zusätzlichen Schwierigkeiten, die in der Quantenfeldtheorie auftreten, werden im van-Hove-Modell untersucht. Hier ergibt sich ein Regularisierungsverfahren.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung **1**

1 Quantenfeldtheorie **3**
1.1 Axiome der Quantenfeldtheorie 3
1.1.1 Wightman-Axiome 3
1.1.2 Algebraische Quantentheorie 5
1.2 Quantenfeldtheorie freier Bosonen 6
1.3 Wechselwirkung 12
1.3.1 Die S-Matrix 12
1.3.2 Lokale Wechselwirkungen 14
1.3.3 Störungstheorie 16
1.4 Lokale S-Matrizen und Observablenalgebren 18
1.5 Die Idee dieser Arbeit 20

2 Zeitabhängige Quantenmechanik **21**
2.1 Die Dyson-Reihe 22
2.1.1 Beschränkter Hamiltonoperator 22
2.1.2 Wechselwirkungsbild 23
2.2 Der Satz von Yosida 25
2.2.1 Anwendung auf die Quantenmechanik 26
2.2.2 Anwendung auf die $(:\varphi^4:)_2$-Theorie 27
2.3 Allgemeinere Sätze 29
2.4 Floquettheorie 30
2.5 Zeitentwicklung als Paralleltransport 31
2.5.1 Heisenberggleichung 31
2.5.2 Schrödingergleichung 32

3 Howlands Formalismus **35**
3.1 Der Formalismus 35
3.1.1 Analogie zur klassischen Mechanik 35
3.1.2 Der Raum $\mathcal{K}$ 37
3.1.3 Zeitentwicklungsgruppen und Howlands Satz 40
3.1.4 Multiplikationen und direkte Integrale 44
3.2 Anwendungen und Beispiele 48
3.2.1 Dyson-Propagator 48
3.2.2 Punktförmige Störung 49

3.2.3 „kicked particle“ 52
3.2.4 Streutheorie 55

4 Der Formalismus in der QFT **57**
4.1 Das van Hove-Modell 57
4.1.1 Der Hamiltonoperator 58
4.1.2 Wechselwirkendes Feld und Zeitentwicklung 60
4.1.3 Punktförmige Quelle 63
4.2 Anwendung Howlands Methode 67
4.2.1 Reguläre Quelle 68
4.2.2 Punktförmige Quelle – Regularisierung 70

Zusammenfassung und Ausblick **79**

A Sätze **81**
A.1 Selbstadjungiertheit 81
A.2 Stationäre Streutheorie 83

Literaturverzeichnis **85**

Danksagung **89**

Einleitung

Die Elementarteilchenphysik beschäftigt sich mit den fundamentalen Bausteinen der Materie und ihren Wechselwirkungen. Elementarteilchenphysik ist Physik bei kurzen Abständen und hohen Energien – die von ihr beschriebenen Phänomene reichen vom Aufbau der Materie über das Geschehen in Sternen bis hin zu Prozessen bei der Entstehung des Universums.

Mit großer Anstrengung werden Hochenergie-Experimente mit Hilfe riesiger Beschleuniger durchgeführt, um das Wissen über die grundlegenden Eigenschaften der Materie zu testen.

Die theoretische Grundlage der Elementarteilchenphysik ist die Quantenfeldtheorie. Sie vereinigt Quantenmechanik mit der speziellen Relativitätstheorie und verankert physikalische Prinzipien wie Lokalität und Kausalität. Die Vorhersagen der Theorie stimmen für die Quantenelektrodynamik ausgezeichnet mit den Experimenten überein. Auch das Standardmodell, das darüber hinaus starke und schwache Wechselwirkung beschreibt, ist sehr erfolgreich.

Obwohl in der Quantenfeldtheorie Aussagen über Elementarteilchen und ihre Wechselwirkungen gemacht werden, ist bisher keinesfalls klar, was eine wechselwirkende Quantenfeldtheorie eigentlich ist.

Freie Quantenfelder können mathematisch rigoros behandelt werden, über ihre strukturellen Eigenschaften ist sehr viel bekannt.

Trotzdem ist der Versuch, mit diesem Wissen Beispiele wechselwirkender Felder zu konstruieren, in der vierdimensionalen Raum-Zeit bisher erfolglos geblieben. Zwar wurden in der Konstruktiven Quantenfeldtheorie ausgefeilte Techniken und mächtige Hilfsmittel entwickelt, trotzdem bleiben Aussagen für physikalisch getestete Theorien wie die QED problematisch. Yang-Mills-Theorien werden noch untersucht.

Erfolgreicher ist die Störungstheorie. Hier werden Streusituationen betrachtet – wechselwirkende Felder, die asymptotisch wie die gut bekannten freien Felder aussehen. Observablen wie z.B. Übergangswahrscheinlichkeiten werden in formale Potenzreihen nach physikalischen Parametern wie Ladungen oder Kopplungsstärken entwickelt. Zwar führt diese Entwicklung in höheren Ordnungen zu divergenten Termen, diese können aber durch „Renormierung“ mit einem präzisen physikalischen Sinn versehen werden. Die Frage nach der Konvergenz der Potenzreihe bleibt unbeantwortet, ihre Verwendung rechtfertigt sich durch die Übereinstimmung der berechneten Größen mit dem Experiment.

Die Erfolge der Störungstheorie führen zu einem starken Interesse, sie mathematisch zu untermauern und in den Rahmen der rigorosen Quantenfeldtheorie einzufügen. Allerdings bereitet schon der asymptotische Vergleich mit dem

freien Feld Probleme. Sie können umgangen werden, indem Wechselwirkungen betrachtet werden, die in einem beschränkten Raum-Zeit-Gebiet lokalisiert sind. Im Epstein-Glaser-Ansatz ist dies der erste Schritt zu einer präzisen Formulierung von Störungstheorie und Renormierung. Zentral sind hierbei lokale Streuoperatoren. Sie werden als Zeitentwicklungsoperatoren im Wechselwirkungsbild definiert, wenn die betrachteten Zeitintervalle die Dauer der Wechselwirkung ganz beinhalten.

Mit Hilfe der lokalen S-Matrizen und ihren kausalen Eigenschaften kann insbesondere die Algebra der physikalischen Observablen konstruiert werden. Daher erwächst die Hoffnung, sie als eine Art Brücke zwischen störungstheoretischem Ansatz und axiomatischer Quantenfeldtheorie auffassen zu können. Es wäre interessant, sie mit Hilfe konstruktiver Verfahren für lokale Wechselwirkungen zu berechnen.

Da die lokalen S-Matrizen über Zeitentwicklungsoperatoren definiert sind, stellt sich die Frage, wie diese z.B. in der zeitabhängigen Quantenmechanik erhalten werden. Stehen dort Sätze zur Verfügung, die zur Berechnung der lokalen S-Matrizen in der Quantenfeldtheorie hilfreich sind? Diese Idee geht auf eine Arbeit von W. F. Wrezinski [Wre72] zurück und soll in der vorliegenden Diplomarbeit aufgegriffen werden. Im Mittelpunkt steht hierbei ein Formalismus, der von J. S. Howland entwickelt wurde, um Streuprobleme in der zeitabhängigen Quantenmechanik auf stationäre Situationen zurückzuführen [How74].

Dabei gliedert sich der Aufbau der Diplomarbeit wie folgt: Im ersten Kapitel wird der Rahmen der Quantenfeldtheorie kurz zusammengefasst und die Idee präzisiert. Das zweite Kapitel beinhaltet einige Werkzeuge aus der zeitabhängigen Quantenmechanik, die zur Berechnung der Zeitentwicklungsoperatoren zur Verfügung stehen. Eignen sie sich zur Anwendung auf die Quantenfeldtheorie? Es zeigt sich, dass dies nur mit Einschränkungen der Fall ist. Das dritte Kapitel stellt Howlands Formalismus vor, der sich durch die relativ schwachen Voraussetzungen besser zu diesem Zweck eignet. Quantenmechanische Beispiele geben Hinweise darauf, wie Probleme mit zeitlich veränderlichen Definitionsbereichen oder singulären Wechselwirkungen im Rahmen des Formalismus behandelt werden können. Schließlich wird im vierten Kapitel Howlands Formalismus auf ein einfaches Beispiel aus der Quantenfeldtheorie angewendet. Hier ergibt sich ein Regularisierungsverfahren, in dessen Rahmen die Existenz lokaler S-Matrizen gezeigt wird. Darüber hinaus wird klar, dass Howlands Formalismus zur Anwendung auf kompliziertere Beispiele erweitert werden kann.

Kapitel 1

Quantenfeldtheorie

Die Quantenfeldtheorie ist eine äußerst erfolgreiche Theorie zur Beschreibung der Physik der Elementarteilchen. Ihre fundamentalen Wechselwirkungen – mir Ausnahme der Gravitation – werden in einem weiten Energiebereich durch konkrete Modelle beschrieben, die auf der Entwicklung physikalischer Messgrößen wie z. B. Streuwahrscheinlichkeiten nach physikalischen Parametern wie Massen oder Ladungen beruht. Dabei ergeben sich in höheren Ordnungen divergente bzw. undefinierte Ausdrücke, denen aber durch „Renormierung“ Sinn gegeben werden kann. Die Resultate, die durch diese Prozedur berechnet werden, stimmen ausgezeichnet mit dem Experiment überein.

Ein anderer Zugang zur Quantenfeldtheorie ist, die Struktur relativistischer Quantensysteme mit Hilfe eines Systems von Axiomen zu beschreiben. Eigenschaften dieser Systeme können dann gefolgert werden. Die Beweise des CPT- und des Spin-Statistik-Theorems sind Beispiele für Erfolge dieses Ansatzes. Zwei unterschiedliche Strategien in der axiomatischen Quantenfeldtheorie sind die Wightman-Theorie und die algebraische Quantentheorie. Im ersteren Ansatz stehen die Quantenfelder als Operatoren in einem Hilbertraum im Zentrum, während die zweite Möglichkeit die Observablen und ihre algebraischen Relationen in den Vordergrund stellt. Der Zusammenhang zwischen beiden Ansätzen wird noch immer erforscht. Die Algebraische Quantentheorie gilt als der grundlegendere Ansatz.

Die Konstruktion eines nichttrivialen Beispiels einer wechselwirkenden Quantenfeldtheorie über der vierdimensionalen Raumzeit ist bis heute mit größten Schwierigkeiten verbunden. Ein Beispiel für den „Stand der Technik“ ist z.B. [MRS93].

1.1 Axiome der Quantenfeldtheorie

1.1.1 Wightman-Axiome

Die Axiomatische Wightman-Theorie geht auf Gårding und Wightman zurück [GW64]. Sie wird in vielen Lehrbüchern diskutiert, z.B. in [SW89]. In der Theorie werden die grundlegenden Annahmen an die physikalische Struktur umgesetzt: Lokalität, Kovarianz, Unitarität und Stabilität. Im Mittelpunkt stehen die

Felder, eine äquivalente Formulierung stützt sich auf ihre Korrelationsfunktionen. Hier seien die Wightman-Axiome für ein neutrales, skalares Feld gegeben:

Hilbertraum Die reinen Zustände werden gegeben als Vektoren ψ eines Hilbertraums $\mathcal{H}$, der eine stark stetige, unitäre Darstellung $U(a,\Lambda)$ der restringierten Poincaré-Gruppe $\mathcal{P}_+^\uparrow$ trägt. Das Spektralmaß E des Viererimpulses $P = \int E(d^4p)p$, gegeben durch

$$(\psi, U(a,\mathbb{1})\psi) = \int (\psi, E(d^4p)\psi)e^{ipa} \quad \forall\psi \in \mathcal{H}, \tag{1.1}$$

hat seinen Träger im Abschluss des Vorwärtslichtkegels $V^+ = \{x \in \mathbb{R}^4 | x \cdot x > 0, x_0 > 0\}$:

$$E(B) = 0 \quad \text{für alle Borel-Mengen } B \subset \mathbb{R}^4 \setminus \overline{V^+} \tag{1.2}$$

Diese Forderung wird auch als Spektrumsbedingung bezeichnet.

Es gibt einen normierten, poincaré-invarianten Vektor $\Omega = U(a,\Lambda)\Omega$, der bis auf eine Phase eindeutig bestimmt ist. Dieser Vektor charakterisiert den Vakuum-Zustand.

Felder Das Feld $\varphi(x)$ ist eine hermitesche, operatorwertige, temperierte Distribution mit invariantem Definitionsbereich D, d. h. eine lineare Abbildung

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^4) \ni f \mapsto \varphi(f) = \int d^4x \varphi(x) f(x)$$

in die unbeschränkten Operatoren über $\mathcal{H}$ mit Definitionsbereich D, so dass die Erwartungswerte $(\psi, \varphi(f)\psi)$ stetig sind in $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$. Der Definitionsbereich genügt den Forderungen

$$\Omega \in D, \quad U(a,\Lambda)D \subset D, \quad \varphi(f)D \subset D, \quad \varphi(\bar{f}) = \varphi(f)^*|_D\,. \tag{1.3}$$

Transformationseigenschaft Die verschmierten Feldoperatoren transformieren sich gemäß

$$U(a,\Lambda)\varphi(f)U(a,\Lambda)^{-1} = \varphi(\langle a,\Lambda\rangle f) \tag{1.4}$$

mit $\langle a,\Lambda\rangle f(x) = f(\Lambda^{-1}(x-a))$

lokale Kommutativität Die verschmierten Feldoperatoren $\varphi(f), \varphi(g)$ kommutieren, wenn die Träger der Testfunktionen raumartig getrennt sind:

$$\operatorname{supp} f \times \operatorname{supp} g \Longrightarrow [\varphi(f), \varphi(g)] = 0 \tag{1.5}$$

Zyklizität des Vakuums: Ω ist zyklisch in Bezug auf die Algebra $\mathcal{F}_0$, die von $\mathbb{1}|_D$ und den verschmierten Feldern $\varphi(f), f \in \mathcal{S}$ erzeugt wird. Das bedeutet, $\mathcal{F}_0\Omega$ ist dicht in $\mathcal{H}$.

Der Schwartzraum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$ liegt zu Grunde, da hier die Fouriertransformation bijektiv ist, was z.B. auf $\mathcal{D}(\mathcal{R})$ nicht der Fall ist. Ein Beispiel für ein Feld, das die Wightmanaxiome erfüllt, ist das freie Feld, Abschnitt 1.2. Eine wichtige Konsequenz der Axiome in Hinblick auf den algebraischen Zugang ist das Reeh-Schlieder-Theorem: Es besagt, dass das Vakuum schon für die Polynomalgebra der Feldoperatoren, deren Testfunktionen ihren Träger in einer gemeinsamen offenen Gebiet haben, zyklisch ist.

1.1.2 Algebraische Quantentheorie

Die Quantenmechanik eines Systems mit endlicher Anzahl von Freiheitsgraden ist bestimmt durch die Vertauschungsrelationen zweier ausgezeichneter Observablen: Ort und Impuls. Sie werden dargestellt als Operatoren über einem Hilbertraum, dessen normierte Vektoren die Zustände repräsentieren. Der Satz von Stone–von Neumann besagt nun, dass diese Darstellung eindeutig (bis auf unitäre Äquivalenz) bestimmt ist. Deswegen ist es praktisch und auch angemessen, die ganze Theorie in diesem Hilbertraum zu formulieren. Der Wightman-Formalismus der Quantenfeldtheorie ist in dieser Hinsicht ähnlich – ein bestimmter Hilbertraum wird der Theorie zu Grunde gelegt.

Die Quantenfeldtheorie beschreibt Systeme mit unendlich vielen Freiheitsgraden. Hier gilt das oben erwähnte Theorem nicht mehr. Es gibt unendlich viele, inäquivalente irreduzible Darstellungen der Vertauschungsrelationen durch Operatoren in Hilberträumen. Eines der ersten Beispiele für das Auftreten von „strange representations“ ist das van-Hove-Modell [vH52]. Eng verknüpft mit diesem Problem ist Haags Theorem, das die Konstruktion einer wechselwirkenden Theorie über dem Fockraum der freien Felder verbietet.

Um Quantensysteme mit unendlich vielen Freiheitsgraden unabhängig von einer bestimmten Darstellung zu beschreiben, werden die Observablen, die in einem Gebiet der Raumzeit gemessen werden können, und ihre algebraischen Relationen als grundlegend angenommen. Zustände sind durch Funktionale auf der Algebra der Observablen gegeben. In diesem Rahmen arbeitet die Algebraische Quantentheorie, die z.B. in [Haa96], [Fre], [FR98] beschrieben ist. Neben den Vorteilen, die die Unabhängigkeit von der konkreten Darstellung der Vertauschungsrelationen im Hinblick auf die oben genannten Probleme bietet, erreicht die Algebraische Quantentheorie tiefe Einsichten in die Struktur von Quantensystemen. So kann beispielsweise das Auftreten von Superauswahlsektoren – Äquivalenzklassen inäquivalenter Darstellungen – in diesem Rahmen verstanden werden. Auch thermische Systeme, denen ein Teilchenbegriff fehlt, lassen sich mit Hilfe einer speziellen Klasse von Zuständen, den KMS-Zuständen, beschreiben. Insbesondere ist der Zugang anwendbar, um Quantenfeldtheorie auf gekrümmten Raumzeiten zu behandeln. Beispielhaft seien zwei Arbeiten erwähnt, die sich verschiedenen Problemen der Quantenfeldtheorie auf gekrümmten Raumzeiten zuwenden: [Kü01], [Saf01]. In grkümmten Räumen fehlt die Poincaréinvarianz, die über der Minkowski-Raumzeit dazu dient, die Vakuumdarstellung auszuzeichnen.

Hier soll der algebraische Zugang zur Quantentheorie vor allem deshalb erwähnt werden, weil das Auftreten von Divergenzen im später behandelten van-Hove-Modell klar wird. Die Relevanz lokaler S-Matrizen wird unterstrichen.

Auch in der algebraischen Quantentheorie ist das Prinzip der Lokalität verankert. Jedem Gebiet $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^4$ werden die dort messbaren beschränkten Observablen zugewiesen. Sie sind Elemente einer C^*-Algebra[1] $\mathfrak{A}(\mathcal{O})$. Ist das Netz lokaler Algebren $\mathcal{O} \mapsto \mathfrak{A}(\mathcal{O})$ bekannt, sind im Prinzip alle physikalischen Größen berechenbar. Die Observablenalgebra eines Gebiets sollte in den Algebren enthalten sein, die zu Umgebungen dieses Gebiets gehören. Außerdem sollte relativisti-

[1] Die Algebra besitzt eine Norm, für die $\|A^*A\| = \|A\|^2$ gilt

sche Kovarianz und Kausalität gelten. Dies sind die Grundlagen der Axiome der algebraischen Quantentheorie:

Isotonie. Wenn $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$ gilt, so folgt $\mathfrak{A}(\mathcal{O}_1) \subset \mathfrak{A}(\mathcal{O}_2)$

Kovarianz. Zu jedem $g = (a, \Lambda) \in \mathcal{P}_+^\uparrow$ gehört ein Automorphismus α_g so, dass $\alpha_g \mathfrak{A}(\mathcal{O}) = \mathfrak{A}(g\mathcal{O})$ gilt mit $g\mathcal{O} = \{\Lambda x + a | x \in \mathcal{O}\}$.

relativistische Kausalität. Liegen zwei Gebiete raumartig zueinander, kommutieren die dort lokalisierten Observablen $\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2 \Longrightarrow [A_1, A_2] = 0 \forall A_i \in \mathfrak{A}(\mathcal{O}_i)$.

erzeugende Eigenschaft. $\bigcup_{\mathcal{O}} \mathfrak{A}(\mathcal{O})$ erzeugt die Algebra der Observablen $\mathfrak{A}$ als C^*-Algebra.

Die Definition eines Zustands auf der Observablenalgebra $\mathfrak{A}$ soll nun so erfolgen, dass Observablen Erwartungswerte zugewiesen werden. Ein Zustand ist ein lineares Funktional $\omega : \mathfrak{A} \to \mathbb{C}$, das

normiert $\omega(\mathbb{1}) = 1$ und

positiv $\omega(A^*A) \geq 0 \; \forall A \in \mathfrak{A}$ ist.

Den Weg von der algebraischen Formulierung zurück in den Hilbertraum ebnet die GNS-Konstruktion (Gelfand, Naimark, Segal), die darauf basiert, dass jede C^*-Algebra als eine C^*-Unteralgebra der beschränkten Operatoren über einem Hilbertraum dargestellt werden kann. Genauer:

Satz 1.1.1 (GNS-Konstruktion) *Sei ω ein Zustand auf einer C^*-Algebra $\mathfrak{A}$. Dann existiert ein Hilbertraum $\mathcal{H}_\omega$, eine Darstellung π_ω von $\mathfrak{A}$ durch beschränkte Operatoren über $\mathcal{H}_\omega$ und ein Einheitsvektor Ω_ω in $\mathcal{H}_\omega$, so dass gilt:*

1. *$\omega(A) = (\Omega_\omega, \pi_\omega(A)\Omega_\omega)$ für alle $A \in \mathfrak{A}$*
2. *Ω_ω ist ein zyklischer Vektor in $\mathcal{H}_\omega$, d.h. $\pi_\omega(\mathfrak{A})\Omega_\omega$ ist dicht in $\mathcal{H}_\omega$.*

Die Konstruktion ist eindeutig bis auf unitäre Äquivalenz.

Umgekehrt ergeben die Dichtematrizen ρ in einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ bei gegebener Darstellung $\pi : \mathfrak{A} \to L(\mathcal{H})$ einen algebraischen Zustand durch $\omega(A) = \mathrm{tr}(\rho\pi(A))$.

Der Zusammenhang zwischen den Axiomen der Algebraischen Quantentheorie und den Wightman-Axiomen wird in [Haa96] und [BLOT90] diskutiert.

1.2 Quantenfeldtheorie freier Bosonen

Wird Quantenfeldtheorie axiomatisch formuliert, ist nicht von Anfang an klar, ob die geforderten Axiome konsistent sind. Das freie Feld erfüllt die Wightman-Axiome. Dies ist ein starker Hinweis darauf, dass die dort gemachten Annahmen sinnvoll sind. Auch der algebraische Zugang enthält die Theorie freier Felder.

Klassisches Feld. Das freie, massive, skalare Feld φ ist als Lösung der Klein-Gordon-Gleichung

$$\left(\Box + m^2\right)\varphi = 0, \quad \Box = \partial^\mu \partial_\mu \tag{1.6}$$

gegeben. Es ist durch seine Cauchydaten eindeutig bestimmt: Sind $\varphi(0,\mathbf{x}) = \varphi_1(\mathbf{x})$ und $\partial_0\varphi(0,\mathbf{x}) = \varphi_2((x))$ vorgegeben, berechnet sich die Lösung der Klein-Gordon-Gleichung im ganzen Raum aus dem Faltungsintegral

$$\varphi(t,\mathbf{x}) = -\int d^3\mathbf{y}\,[(\partial_0\Delta)(t,\mathbf{x}-\mathbf{y})\varphi_1(\mathbf{y}) + \Delta(t,\mathbf{x}-\mathbf{y})\varphi_2(\mathbf{y})] \tag{1.7}$$

Δ bezeichnet die Kommutatorfunktion, eine distributionelle Lösung der Klein-Gordon-Gleichung mit den Anfangsbedingungen $\Delta(0,\mathbf{x}) = 0$ und $(\partial_0\Delta)(0,\mathbf{x}) = -\delta(\mathbf{x})$. Sie ist antisymmetrisch und invariant unter eigentlichen, orthochronen Lorentztransformationen, woraus ihr Verschwinden für raumartige Argumente folgt.

Die Lagrangedichte, aus der die Klein-Gordon-Gleichung als Bewegungsgleichung folgt, lautet

$$\mathcal{L}_0(x) = \frac{1}{2}\left(\partial^\mu\varphi(x)\partial_\mu\varphi(x) - m^2\varphi^2(x)\right), \quad x = (t,\mathbf{x}) \tag{1.8}$$

Daraus ergibt sich für den kanonisch konjugierten Impuls

$$\pi(x) = \frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial\dot{\varphi}}(x) = \dot{\varphi}(x). \tag{1.9}$$

Zeit-Null-Feld und konjugierter Impuls sind also durch die Cauchydaten gegeben. Ausgehend von der klassischen Theorie gelingt der Übergang zur Quantenfeldtheorie, indem die Cauchydaten den kanonischen Vertauschungsrelationen unterworfen werden.

Quantenfeld. Die gleichzeitigen Vertauschungsrelationen lauten

$$[\varphi(t,\mathbf{x}),\varphi(t,\mathbf{y})] = 0 = [\pi(t,\mathbf{x}),\pi(t,\mathbf{y})] \tag{1.10}$$

$$[\varphi(t,\mathbf{x}),\pi(t,\mathbf{y})] = i\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \tag{1.11}$$

φ und π sind nun Quantenfelder. Der Kommutator für beliebige Zeiten muss selbst die Klein-Gordon-Gleichung erfüllen. Er ist auf der Cauchyfläche $t =$ const. durch obige Relationen festgelegt und ergibt sich allgemein zu

$$[\varphi(x),\varphi(y)] = i\Delta(x-y). \tag{1.12}$$

Bis zu diesem Punkt ist noch nicht genügend präzisiert, was für Objekte die Quantenfelder φ eigentlich sind. Sie werden erklärt als lineare Abbildung von einem Testfunktionenraum $\mathcal{D}(\mathbb{R}^4)$ in eine unitale *-Algebra $\mathfrak{A}_0$. Es soll hierbei gelten:

i) $\mathfrak{A}$ wird von den Elementen $\varphi(f), f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^4)$ erzeugt, wenn f den Testfunktionenraum durchläuft

ii) Die $*$-Operation ist realisiert durch $\varphi^*(f) = \varphi(\bar{f})$

iii) Die Klein-Gordon-Gleichung wird in einem distributionellem Sinn erfüllt: $\varphi((\Box + m^2)f) = 0$

iv) Auch die Vertauschungsrelation gilt distributionell $[\varphi(f), \varphi(g)] = i(\Delta * g)(f)$.

Um die Algebra zu konstruieren, wird die Tensoralgebra über $\mathcal{D}(\mathbb{R}^4)$ mit der komplexen Konjugation als Involution versehen (Borchersalgebra) und durch das Ideal dividiert, das durch die Vertauschungsrelation und die Feldgleichung erzeugt wird.

Um die GNS-Konstruktion durchzuführen, muss ein Zustand auf der Algebra ausgewählt werden. Durch diesen Zustand wird eine positiv semidefinite Sesquilinearform auf der Algebra definiert, deren Nullraum ein Linksideal bildet. Der Hilbertraum wird nun durch Restklassenbildung nach diesem Ideal und Vervollständigung erhalten.

Ein Zustand ω auf $\mathfrak{A}_0$ ist durch seine n-Punkt-Funktionen

$$\omega_n(f_1, \ldots, f_n) = \omega(\varphi(f_1) \ldots \varphi(f_n)) \tag{1.13}$$

festgelegt. Die n-Punkt-Funktion ist in jedem Eintrag eine Distribution und soll sich zu einer temperierten Distribution über $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{4n})$ fortsetzen lassen. Quasifreie Zustände sind Zustände, deren n-Punkt-Funktionen für ungerades n verschwinden. Für gerades n lassen sie sich aus der Zweipunktfunktion gewinnen

$$\omega_{2n} = \sum_{\sigma} \prod_{i=1}^{n} \omega_2(x_{\sigma(i)}, x_{\sigma(i+n)}), \tag{1.14}$$

wobei die Summe über die Permutationen σ des Tupels $(1, \ldots, 2n)$ läuft, für die $\sigma(1) < \cdots < \sigma(n)$ und $\sigma(i) < \sigma(i+n)$ gilt. Der einzige quasifreie Zustand, der translationsinvariant ist und zu einem positiven Hamiltonoperator führt, ist durch die Zweipunktfunktion Δ_+ bestimmt, die sich aus dem positiven Frequenzanteil der Kommutatorfunktion $\Delta = 2\Im\Delta_+$ zu

$$\omega_2(x, y) = \Delta_+(x - y) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2\omega_\mathbf{p}} e^{-i(\omega_\mathbf{p}, \mathbf{p})(x-y)} \tag{1.15}$$

mit $\omega_\mathbf{p} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ ergibt. Um den Nullraum der von Δ_+ bestimmten Sesquilinearform zu bestimmen, betrachte die Positivitätsbedingung

$$\iint d^4x d^4y \, \overline{f(x)} f(y) \Delta_+(x - y) = 2\pi \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2\omega_\mathbf{p}} |\tilde{f}(\omega_\mathbf{p}, \mathbf{p})|^2 \geq 0 \tag{1.16}$$

$\tilde{f}$ ist die Fouriertransformation $\tilde{f}(p) = (2\pi)^{-2} \int d^4x e^{-ipx} f(x)$. Die Ungleichung (1.16) wird für die Testfunktionen f zur Gleichung, deren Fouriertransformierte auf der Massenschale $H_m^+ = \{p \in \mathbb{R}^4 | p^2 = m^2, p_0 > 0\}$ zur Masse $m > o$ verschwindet. Division durch den so bestimmten Nullraum ergibt mit Hilfe der

GNS-Konstruktion eine treue Darstellung der Algebra $\mathfrak{A}_0$ über dem bosonischen Fockraum

$$\mathfrak{H}^+ = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathfrak{H}_n^+ \tag{1.17}$$

mit den n-Teilchenräumen

$$\begin{aligned} \mathfrak{H}_n^+ =& \{\psi : H_m^+ \times \cdots \times H_m^+ \to \mathbb{C} \text{ symmetrisch } | \\ & \|\psi\|^2 = \int \frac{d^3\mathbf{p}_1}{2\omega_{\mathbf{p}_1}} \cdots \int \frac{d^3\mathbf{p}_n}{2\omega_{\mathbf{p}_n}} |\psi(p_1, \ldots, p_n)|^2 < \infty\}. \end{aligned} \tag{1.18}$$

Die Fouriertransformierten der Testfunktionen werden nun als Wellenfunktionen aus dem Ein-Teilchen-Raum, der mit der Massenschale H_m^+ übereinstimmt, interpretiert. Der Null-Teilchen-Raum wird mit den komplexen Zahlen identifiziert. Eine ausgezeichnete Rolle spielt der Vakuumvektor $\Omega = (1, 0, 0, \ldots)$, er ist der zyklische Vektor aus der GNS-Konstruktion. Die Darstellung der Poincarégruppe im Ein-Teilchen-Raum legt die Darstellung in den n-Teilchen-Räumen fest.

Neben Operatoren, die in den einzelnen n-Teilchenräumen wirken, bilden andere Operatoren Elemente mit verschiedener Teilchenzahl aufeinander ab. Ein Beispiel hierfür sind der Erzeugungs- und Vernichtungsoperator. Der Vernichter reduziert die Teilchenzahl um Eins:

$$a(f) : \mathfrak{H}_{n+1}^+ \to \mathfrak{H}_n^+ \tag{1.19}$$

$$\left(a(f)\Phi\right)_n (p_1, \ldots p_n) = \sqrt{n+1} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2\omega_{\mathbf{p}}} \overline{\tilde{f}(p)} \Phi_{n+1}(p, p_1, \ldots, p_n) \tag{1.20}$$

während der Erzeuger sie erhöht:

$$a^*(f) : \mathfrak{H}_{n-1}^+ \to \mathfrak{H}_n^+ \tag{1.21}$$

$$\left(a(f)\Phi\right)_n (p_1, \ldots, p_n) =$$

$$\begin{cases} 0 & \text{falls } n = 0, \\ \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \tilde{f}(p_k) \Phi_{n-1}(p_1, \ldots p_{k-1}, p_{k+1}, \ldots, p_n) & \text{falls } n > 0. \end{cases} \tag{1.22}$$

$\tilde{f} \in \mathfrak{H}_1$. Beide Operatoren sind beschränkt, werden aber zu unbeschränkten Operatoren, wenn sie auf den Fockraum fortgesetzt werden. Ihr Definitionsbereich enthält den Unterraum der Fockraumvektoren finiter Teilchenzahl. Sie erfüllen die Vertauschungsrelationen

$$[a(f), a(g)] = [a^*(f), a^*(g)] = 0, \tag{1.23}$$

$$[a(f), a^*(g)] = (\tilde{f}, \tilde{g}) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2\omega_{\mathbf{p}}} \overline{\tilde{f}(p)} \tilde{g}(p) \tag{1.24}$$

Der Vernichter anihiliert das Vakuum für alle f: $a(f)\Omega = 0$.

Die Generatoren der Algebra $\mathfrak{A}_0$ werden nun dargestellt durch die Segal-Operatoren

$$\varphi(f) = a^*(f) + a(f). \tag{1.25}$$

Die Vertauschungsrelation ergibt sich zu

$$[\varphi(f),\varphi(g)] = (\tilde{f},\tilde{g}) - (\tilde{g},\tilde{f}) = 2\,\mathrm{Im}(\tilde{f},\tilde{g}) \tag{1.26}$$

Die Erzeuger und Vernichter zu scharfem Impuls $a^*(p), a(p)$ können als operatorwertige Distributionen erklärt werden durch

$$a^*(f) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2\omega_\mathbf{p}} a^*(p)\tilde{f}(p), \qquad a(f) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2\omega_\mathbf{p}} \overline{\tilde{f}(p)} a(p). \tag{1.27}$$

Durch Fouriertransformation ergeben sich entsprechende operatorwertige Distributionen im Ortsraum:

$$a^*(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2\omega_\mathbf{p}} a^*(p) e^{ipx}, \qquad a(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2\omega_\mathbf{p}} e^{-ipx} a(p). \tag{1.28}$$

Die quantisierte Version der Felds $\varphi(x)$, das die Klein-Gordon-Gleichung löst, ist die Summe der obigen operatorwertigen Distributionen

$$\varphi(x) = a^*(x) + a(x). \tag{1.29}$$

Für die von Null verschiedenen Vertauschungsrelationen der Erzeuger und Vernichter ergeben sich nach Konstruktion die richtigen Vertauschungsrelationen

$$[a(p), a^*(q)] = 2\omega_\mathbf{p}\delta(\mathbf{p}-\mathbf{q}), \qquad [a(x), a^*(y)] = \Delta_+(x-y) \tag{1.30}$$

Um den zum Feldoperator $\varphi(\tilde{f})$ konjugierten Impuls zu erhalten, wird der Feldoperator zum Zeitpunkt t im Heisenbergbild berechnet:

$$\begin{aligned} \varphi_t(f) &= e^{iH_0 t}\varphi(f)e^{-iH_0 t} \\ &= \varphi(f_t) \end{aligned} \tag{1.31}$$

H_0 ist der Hamiltonoperator, definiert als der Generator der Zeittranslationen. Für $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^4)$ definiert $\mathbb{R} \ni t \mapsto f_t, f_t(x) = f(x_0 - t, \mathbf{x})$ einen Automorphismus α_t der Observablenalgebra $\alpha_t(\varphi(f)) = \varphi(f_t)$. Diese Automorphismengruppe wird durch eine stark stetige Ein-Parametergruppe unitärer Operatoren im Fockraum implementiert. Der Hamiltonoperator H_0 ergibt sich dann mit Hilfe des Satzes von Stone und hat einen dichten Definitionsbereich $D(H_0)$. Im Ein-Teilchen-Raum wirkt der Hamiltonoperator durch Multiplikation mit $\omega_\mathbf{p}$ auf $\{\tilde{f} \mid \|\sqrt{\omega}\tilde{f}\|^2 < \infty\}$. Im Hinblick auf die spätere Anwendung auf das van-Hove-Modell soll die strenge Unterscheidung zwischen Testfunktion und Ein-Teilchen-Wellenfunktion im Argument der Feldoperatoren aufgegeben werden. Dort sollen auch allgemeinere Funktionenklassen zugelassen werden. Die richtige Interpretation ergibt sich aus dem Zusammenhang.

Formale Ableitung von $\varphi_t(f)$ nach t ergibt $d\varphi_t(f)/dt = \varphi(i\omega e^{i\omega t} f)$ und der konjugierte Impuls ist

$$\pi(f) := \left(\frac{d}{dt}\varphi_t(f)\right)_{t=0} = i\left(a^*(\omega f) - a(\omega f)\right) \tag{1.32}$$

mit den Vertauschungsrelationen

$$[\pi(f),\pi(g)] = 2i\,\mathrm{Im}\left(\omega\tilde{f},\omega\tilde{g}\right) \tag{1.33}$$

$$[\varphi(f),\pi(g)] = -2i\,\mathrm{Re}\left(\tilde{f},\omega\tilde{g}\right) \tag{1.34}$$

Die konkrete Form des Hamiltonoperators ist

$$H_0 = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2\omega_\mathbf{p}}\omega_\mathbf{p} a^*(p)a(p) = \int d^3\mathbf{x}h(x) \tag{1.35}$$

mit der Energiedichte

$$h(x) = \frac{m^2}{2} :\varphi^2(x): + \frac{1}{2} :\dot{\varphi}^2(x): + :\nabla\varphi^2(x): \tag{1.36}$$

Wegen des distributionellen Charakters des Feldes $\varphi(x)$ sind seine Potenzen oder die seiner Ableitungen nicht wohldefiniert; die Zweipunktfunktion ist zu singulär. Deshalb werden normalgeordnete Produkte $:\cdot:$ eingeführt, sie werden auch als Wickprodukte bezeichnet. Zwischen den Doppelpunkten stehen alle Vernichter rechts von den Erzeugern. Die Normalprodukte sind als quadratische Formen auf entsprechenden Definitionsbereichen wohldefiniert.

Es bleibt zu bemerken, dass die hier betrachtete Algebra $\mathfrak{A}_0$ nicht mit der Observablenalgebra $\mathfrak{A}$ übereinstimmt, da sie keine nichttriviale C^*-Norm besitzt. Kanonische Vertauschungsrelationen können nicht durch beschränkte Operatoren erfüllt werden. Um den Kontakt zur algebraischen Quantentheorie mit den starken Hilfsmitteln der Theorie der Operatoralgebren herzustellen, wird die Weyl-Algebra $\mathcal{W}(L,\sigma)$ über dem Raum $L = \mathcal{D}(\mathbb{R}^4,\mathbb{R})/\,\mathrm{Ran}(\Box+m^2)$ mit der symplektischen Form $\sigma(f,g) = \int dxdy f(x)g(y)\Delta(x-y)$ betrachtet. Ihre Erzeuger sind Elemente $W(f)$. Mit dem Vakuumzustand $\omega(W(f)) = \exp(-\frac{1}{2}\|\tilde{f}\|^2)$ ergibt sich über die GNS-Konstruktion ebenfalls der bosonische Fockraum als Darstellungsraum. Den allgemeinen Rahmen bildet die Theorie der CCR-Algebren.

Die freie bosonische Quantenfeldtheorie erfüllt auch die Wightman-Axiome und trägt dazu bei, diese zu untermauern. Das Reeh-Schlieder-Theorem verdeutlicht den Zusammenhang zu lokalen Observablenalgebren.

Die Konstruktion anderer nichttrivialer Feldtheorien ist Gegenstand der konstruktiven Quantenfeldtheorie. Es ist bis heute allerdings nicht gelungen, ein solches Beispiel über dem vierdimensionalen Minkowskiraum anzugeben.

Wie oben bemerkt, ist das Vakuum der einzige translationsinvariante Zustand, der eine GNS-Darstellung induziert, in der die Generatoren der Translationen der Spektrumsbedingung genügen. In engem Zusammenhang mit dieser Beobachtung steht Haags Theorem.

Satz 1.2.1 (Haagsches Theorem) *Sei φ_0 ein freies Feld im Fockraum $\mathfrak{H}$. Die räumlichen Translationen seien durch den Operator $U(\mathbf{x}) = U((0,\mathbf{x}),\mathbb{1})$ gegeben. Wenn es nun eine operatorwertige Distribution φ gibt, so dass*

1. *φ für $t = 0$ mit dem freien Feld übereinstimmt $\varphi(0,\mathbf{x}) = \varphi_0(0,\mathbf{x})$, $\dot{\varphi}(0,\mathbf{x}) = \dot{\varphi}_0(0,\mathbf{x})$*

2. $U(\mathbf{y})\varphi(t,\mathbf{x})U(\mathbf{y})^{-1} = \varphi(t,\mathbf{x}-\mathbf{y})$

3. *es existiert ein selbstadjungierter Operator H mit der Eigenschaft* $e^{iHt}\varphi(t,\mathbf{x})e^{-iHt}$

Dann unterscheidet sich H höchstens um eine additive Konstante vom Hamiltonoperator H_0 der freien Theorie und φ ist das freien Feld $\varphi = \varphi_0$.

Vor dem Hintergrund dieses Satzes wird klar, dass die Aufgabe, ein wechselwirkendes Feld zu konstruieren und seine Streutheorie zu analysieren, große Schwierigkeiten bereiten wird. Der Fockraumformalismus ist für dieses Vorhaben nicht ohne weiteres geeignet.

1.3 Wechselwirkung

Der axiomatische Zugang zur Quantenfeldtheorie hat seine Stärke in der Beschreibung struktureller Eigenschaften der Theorie. Die freien Felder fügen sich gut in das Theoriegebäude. Problematisch ist es, Beispiele für Quantenfeldtheorien zu konstruieren, die sowohl den Erwartungen der phänomenologischen Teilchenphysik genügen, als auch den Forderungen des axiomatischen Ansatzes.

Im Zentrum der phänomenologischen Teilchenphysik stehen Streuexperimente. Ansätze für Wechselwirkungen erfolgen in Analogie zu klassischen Lagrangeschen Feldtheorien. Beobachtbare Größen wie Streumatrixelemente werden in eine formale Störungsreihe entwickelt. Renormierung ist notwendig, um den auftretenden undefinierten Ausdrücken Ordnung für Ordnung Sinn zu geben. Die Übereinstimmung der so berechneten Größen mit dem Experiment ist z. B. in der QED beeindruckend. Allerdings gibt es keine Konvergenzaussagen für die Störungsreihe.

Eine Möglichkeit, zwischen den beiden Ansätzen zu vermitteln, bietet die mathematisch rigorose Formulierung der Störungstheorie. Sie enthält sowohl die Erfolge der phänomenologischen Quantenfeldtheorie, verortet die Störungstheorie aber gleichzeitig besser im Rahmen des axiomatischen Zugangs. Grundlegend sind hier Ideen von Hepp und Konzepte, die von Stückelberg und Bogolubov entwickelt wurden. Die Arbeit von Epstein und Glaser [EG73] klärt die Renormierung im Rahmen der Störungstheorie. Die dort entwickelte induktive Konstruktion zeitgeordneter Produkte wird z. B. in [Sch95] verwendet. Neuere Arbeiten, die die mathematisch exakte Formulierung der Störungstheorie aufgreifen und erweitern sind [FD01], [FB00].

Von der entgegengesetzten Richtung arbeitet die konstruktive Quantenfeldtheorie. Ausgehend von der axiomatischen Formulierung wird versucht, Beispiele wechselwirkender Theorien rigoros zu berechnen. Eine Übersicht über die großen Anstrengungen, die in dieser Richtung unternommen wurden, bietet [SW89].

1.3.1 Die S-Matrix

Streuexperimente sind das Hauptwerkzeug der Hochenergiephysik. Eine kurze Einführung in ihre Beschreibung findet sich in [Lüc], mathematisch ausgearbei-

tet in [RS79], [BW83].

In der Streutheorie wird ein wechselwirkendes System asymptotisch, d.h. für $t \to \pm\infty$, mit einem freien System verglichen. Im Heisenbergbild beschreiben die Zustände ein System zu allen Zeiten, bis eine Messung stattfindet. Sei $\mathcal{H}$ die Menge der reinen Zustände des wechselwirkenden Systems, $\mathcal{H}_0$ die entsprechende Menge des freien Systems. Die folgende Beschreibung ist in weiten Teilen auch auf klassische Systeme anwendbar.

Die Aufgabe der Streutheorie ist, zu gegebenem $\psi \in \mathcal{H}$ freie Zustände $\psi_\pm \in \mathcal{H}_0$ zu finden, die für $t \to \pm\infty$ „wie ψ aussehen". Um dies zu präzisieren, wird eine „asymptotische Bedingung" gestellt. $\psi \in \mathcal{H}$ wird als Streuzustand bezeichnet, wenn es ein ψ_+ und ein ψ_- aus $\mathcal{H}_0$ gibt, die der asymptotischen Bedingung genügen. Das freie System und die asymptotische Bedingung sollen so beschaffen sein, dass es zu jedem freien Zustand $\phi_0 \in \mathcal{H}_0$ genau einen Streuzustand $\psi \in \mathcal{H}$ gibt, der „in der Vergangenheit wie ϕ_0 aussah", d. h. $\psi_- = \phi_0$. Die gleiche Forderung wird an die Zukunft gestellt $\psi_+ = \phi_0$. Dann können verallgemeinerte Wellenoperatoren $V_{\text{in}}, V_{\text{out}}$ definiert werden durch

$$\mathcal{H}_0 \ni \phi_0 \mapsto V_{\text{in}}\phi_0 := \psi \in \mathcal{H} \quad \text{mit } \psi_- = \phi_0 \tag{1.37}$$

$$\mathcal{H}_0 \ni \phi_0 \mapsto V_{\text{out}}\phi_0 := \psi \in \mathcal{H} \quad \text{mit } \psi_+ = \phi_0 \tag{1.38}$$

Die Streutheorie betrachtet nun den Zusammenhang zwischen einlaufendem freien Zustand $\psi_- = V_{\text{in}}^{-1}\psi$ und auslaufendem freien Zustand $\psi_+ = V_{\text{out}}^{-1}\psi$ für beliebige Streuzustände. Die S-Matrix im Heisenbergbild ist nun definiert durch

$$\tilde{S} = V_{\text{in}}V_{\text{out}}^{-1} \tag{1.39}$$

und bildet $\mathcal{H}_{\text{out}} = V_{\text{out}}\mathcal{H}_0$ eins zu eins auf $\mathcal{H}_{\text{in}} = V_{\text{in}}\mathcal{H}_0$ ab. Diese Definition funktioniert auch im allgemeinen Fall, in dem $\mathcal{H}_{\text{in}} \not\subseteq \mathcal{H}_{\text{out}}$ gilt. Allerdings stellt $\tilde{S}$ nur indirekt über die verallgemeinerten Wellenoperatoren den gewünschten Zusammenhang zwischen ein- und auslaufenden freien Zuständen her.

Wenn kein Teilchen-Einfang im Streuprozess möglich ist, gibt es zu jedem einlaufenden auch einen auslaufenden freien Zustand. Dann gilt $\mathcal{H}_{\text{in}} \subset \mathcal{H}_{\text{out}}$ und die S-Matrix im Wechselwirkungsbild kann definiert werden als

$$S = V_{\text{out}}^{-1}V_{\text{in}}. \tag{1.40}$$

Sie bildet freie einlaufende auf auslaufende Zustände ab: $S\psi_- = \psi_+$. Der Zusammenhang zu $\tilde{S}$ ist $\tilde{S} = V_{\text{out}}SV_{\text{out}}^{-1}$.

In Systemen mit „schwacher asymptotischer Vollständigkeit", d.h. $\mathcal{H}_{\text{in}} = \mathcal{H}_{\text{out}}$, gilt auch $\tilde{S} = V_{\text{in}}SV_{\text{in}}^{-1}$.

Um konkrete Streusituationen zu erfassen, muss nun das freie und wechselwirkende System spezifiziert und die asymptotische Bedingung formuliert werden. Dann kann die S-Matrix berechnet und ihre Eigenschaften untersucht werden.

Die S-Matrix im Wechselwirkungsbild bildet freie Zustände auf freie Zustände ab. Mit Hilfe von „Zuständen im Wechselwirkungsbild" kann sie formal durch Operatoren ausgedrückt werden, die im Raum der freien Zustände definiert sind. $\psi_I(t) \in \mathcal{H}_0$ heißt momentaner Zustand zur Zeit t im Wechselwirkungsbild, wenn die Messungen aller Observablen zur Zeit t in dem freien

Zustand $\psi_I(t)$ dieselben Erwartungswerte liefert wie Messungen im Streuzustand $\psi \in \mathcal{H}$. Die asymptotische Bedingung ist dann äquivalent zu

$$\psi_I(t) \longrightarrow \psi_\pm \quad \text{für } t \to \pm\infty. \tag{1.41}$$

Für die Anwendung in der Quantentheorie können mit diesem Begriff vom Vergleich von Zuständen zwei weitere Zustände definiert werden: $U(t)\psi$ ist der Zustand im Wechselwirkungsbild, der für $t = 0$ die gleichen Erwartungswerte ergibt wie Messung im Zustand ψ und $U_0(t)\psi_0(t)$ der Zustand im freien System, der zur Zeit $t = 0$ in diesem Sinn wie ψ_0 aussieht.

Weiterhin sei $W(t) = \psi_I(t)$, dann folgt aus der asymptotischen Bedingung formal $W(t)\psi \to \psi_+ = V_{\text{out}}^{-1}\psi$ und mit der freien Zeitentwicklung sowie der Zeitentwicklung, die durch das wechselwirkende System auf den freien Zuständen gegeben ist $W(t) = U_0(t)U(t)^{-1}$ mit $W(0) = \mathbb{1}$. Mit der Definition der S-Matrix im Wechselwirkungsbild:

$$S = \lim_{t_\pm \to \pm\infty} U_0(t_+)U(t_+)^{-1}U(t_-)U_0(t_-)^{-1} = W_+W_-^{-1}. \tag{1.42}$$

In der Quantenmechanik ist es ohne Probleme möglich, sowohl das freie als auch ein wechselwirkendes System, das einen wohldefinierten, selbstadjungierten Hamiltonoperator besitzt, im selben Hilbertraum zu betrachten. Dann vereinfacht sich die Beschreibung des Wechselwirkungsbilds wie in Abschnitt 2.1.2 und Bedingungen für seine Existenz können angegeben werden [RS75].

Wenn sich der Hamiltonoperator des wechselwirkenden Systems nur innerhalb eines beschränkten Zeitintervalls vom freien Hamiltonoperator unterscheidet, ist die S-Matrix mit der Zeitentwicklung im Wechselwirkungsbild identisch, wenn diese über ein Intervall betrachtet wird, das das obige enthält.

1.3.2 Lokale Wechselwirkungen

Von einem phänomenologischen Standpunkt aus betrachtet, sollten Quantenfeldtheorien mit Lagrangeschen Wechselwirkungstermen physikalisch sinnvoll sein. Diese Annahme zu bestätigen führt im axiomatischen Rahmen zu großen Schwierigkeiten. Das Programm ist bescheidener: Konstruktion einfacher Modelle, die eine nichttriviale S-Matrix besitzen.

Eine ausführliche Beschreibung der Strategien und Erfolge der konstruktiven Quantenfeldtheorie würde an dieser Stelle den Rahmen sprengen, statt dessen sei auf [SW89] verwiesen.

Eine wesentliche Idee bei der Konstruktion wechselwirkender Theorien ist die Einschränkung eines Systems auf ein beschränktes Raumgebiet.

Eines der ersten Modelle, die betrachtet wurden, ist das Yukawa-Modell Y_4. Ein Spinorfeld $\psi(x)$ wechselwirkt mit einem Bosefeld $\varphi(x)$ über

$$H_Y = \lambda \int d^3x : \psi^+(x)\psi(x) : \varphi(x), \tag{1.43}$$

die freien Hamiltonoperatoren H_{0B} für das Boson und H_{0F} für das Fermion werden hinzu addiert. Eine „cutoff“-Version entsteht, indem H_Y in einen Würfel

mit Volumen V eingeschränkt wird. Weiterhin werden die Felder in Fourierreihen entwickelt und alle Moden zu Frequenzen größer als eine Schranke K verworfen:

$$H_{Y;V,K} = \lambda \int_V d^3x : \psi_K^+(x)\psi_K(x) : \varphi_K(x). \tag{1.44}$$

Werden auch die freien Hamiltonoperatoren in V eingeschränkt, ergibt sich mit $H_{V,K} = H_{0F,V} + H_{0B,V} + H_{Y;V,K}$ ein System mit unendlich vielen Freiheitsgraden, von denen nur endlich viele über $H_{Y;V,K}$ gekoppelt sind. Die Zeitentwicklung ist explizit berechenbar.

Dieses Modell ist besonders einfach, weil die Wechselwirkung nur linear im Bosonfeld φ ist, der freie Hamiltonoperator hingegen quadratisch. Etwas komplizierter sind Modelle mit Selbstkopplung von höherem Grad. Mit einem nach unten beschränkten Polynom P beschreibt die cutoff-$P(\varphi)_4$-Theorie mit der Wechselwirkung

$$H_{I;V,K} = \lambda \int_V d^3x P(\varphi_K(x)) \tag{1.45}$$

eine unendliche Anzahl von Oszillatoren, von denen endlich viele gekoppelt sind. Auch dieses Modell wird gelöst, die Ergebnisse können auf weitere cutoff-Modelle gekoppelter Fermionen und Bosonen übertragen werden.

Als nächstes stellt sich die Frage, wie sich die Modelle verhalten, wenn der Grenzübergang $|V|, K \to \infty$ vollzogen wird.

Beim Entfernen des Energie-cutoffs K wird das Auftreten von Divergenzen durch Selbstenergie erwartet. Renormierung wird notwendig. Um bessere Kontrolle über die Renormierung und die hierbei auftretenden Schwierigkeiten zu erhalten, wird ein weiterer Vereinfachungsschritt durchgeführt: Die Anzahl der Raumdimensionen wird verringert. So weist die $\lambda(:\varphi^4:)_2$-Theorie – zwei Raum-Zeit-Dimensionen – keine UV-Divergenzen auf, hat aber die für Quantenfeldtheorien typische nichtverschwindende Vakuumpolarisation. Sie dient damit oft als Test für Existenzaussagen. Die Wickordnung macht den Wechselwirkungsausdruck zu einem wohldefinierten Operator, zerstört aber die formale Positivität der vierten Potenz. Damit muss gezeigt werden, das der Hamiltonoperator nach unten beschränkt ist.

Im Fall von $\lambda(:\varphi^3:)_3$ wird die Situation durch UV-Divergenzen verkompliziert. Hier schafft die Verwendung einer zur Vakuumdarstellung inäquivalenten Darstellung Abhilfe, das Vorgehen wird als „Wellenfunktionsrenormierung“ bezeichnet. Hier und auch im Fall von Y_2 kann der renormierte Hamiltonoperator konstruiert und seine Positivität gezeigt werden.

Nun sollte auch die Einschränkung auf ein endliches Volumen V fallen gelassen werden. Aber selbst in zwei Raumzeitdimensionen macht das Integral

$$\lambda \int dx : \varphi^4(0,x) : \tag{1.46}$$

im Allgemeinen keinen Sinn. Die Implementierung eines Felds, das einer Dynamik mit obiger Wechselwirkung genügt, stünde im Widerspruch zu Haags Theorem.

Die wesentliche Idee ist nun, statt der Einschränkung auf ein festes Volumen eine lokalisierte Wechselwirkung zu betrachten. Zu einer gegebenen glatten Funktion g mit kompaktem Träger, die in einem Gebiet G gleich Eins ist, kann der lokale Hamiltonoperator

$$H(g) = H_0 + \lambda \int dx : \varphi(x)^4 : g(x) \tag{1.47}$$

definiert werden. In dem Doppelkegel der Raumzeitpunkte, die nicht von Punkten außerhalb von G durch zeitartige Kurven erreicht werden können[2], kann der lokale Hamiltonoperator nicht vom „richtigen“ unterschieden werden. Das bedeutet, dass $\varphi(t,x) = \exp(-iH(g)t)\varphi(0,x)\exp(iH(g)t)$ unabhängig von g ist, solange x und t in dem besagten Doppelkegel bleiben.

Zwar konvergiert $H(g)$ nicht, wenn der Träger von g über den ganzen Raum ausgedehnt wird, aber die Felder $\varphi(f), f \in \mathcal{D}(\mathcal{O})$ sollten für ein festes Gebiet $\mathcal{O}$ die Algebra der lokalen Observablen erzeugen, wenn der Träger von g nur genügend ausgedehnt ist.

Hier ergibt sich also ein Anknüpfungspunkt zur algebraischen Formulierung der Quantenfeldtheorie. Aus dieser Perspektive können auch die Probleme mit (1.46) interpretiert werden. Offenbar gibt es lokale Algebren mit einem Automorphismus der Zeitentwicklung, aber in der betrachteten Darstellung kann dieser nicht global implementiert werden. Eine mögliche Strategie ist nun, genäherte Vakuumzustände als Grundzustände der lokalen Hamiltonoperatoren zu konstruieren und als Kandidaten für eine Anwendung der GNS-Konstruktion zu verwenden. Die Durchführung dieses Programms findet sich in [Gli85a].

Die lokalen Hamiltonoperatoren $H(g)$ eröffnen aber noch weitere Möglichkeiten: Da g kompakten Träger hat, kann in das Wechselwirkungsbild transformiert werden. Dort liefert die Zeitentwicklung eine über die Testfunktion g parametrisierte Familie lokaler S-Matrizen.

Damit rückt sie Zeitentwicklung im Wechselwirkungsbild in den Mittelpunkt des Interesses. In der Quantenmechanik kann diese zumindest formal als Dysonreihe entwickelt werden, siehe Abschnitt 2.1. Die S-Matrix ist dann formal ein Exponential zeitgeordneter Produkte. Die Störungstheorie übernimmt einen ähnlichen Ansatz in die Quantenfeldtheorie.

1.3.3 Störungstheorie

Werden lokale S-Matrizen $S(g)$ als über die Zeitentwicklung im Wechselwirkungsbild erklärt, muss diese als Lösung einer zeitabhängigen Schrödingergleichung bekannt sein. Die Formulierung einer solchen dynamischen Gleichung ist in der Quantenfeldtheorie problematischer als in der Quantenmechanik. Ähnlich wie die Exponentialfunktion als Lösung einer Differential- oder einer Funktionalgleichung bestimmt werden kann, ist auch eine Charakterisierung der lokalen S-Matrizen über eine Funktionalgleichung möglich [BS79].

Sei $\{S(g)|g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}), \leq g(x) \leq 1\}$ eine Familie lokaler S-Matrizen. g kann als ein Maß für das Einschalten einer Wechselwirkung interpretiert werden. Die S-Matrizen $S(g)$ sollen die folgenden Bedingungen erfüllen:

[2] „kausaler Schatten“

Normiertheit $S(0) = \mathbb{1}$

Unitarität $S(g)^* = S(g)^{-1}$

Relativistische Kovarianz $U(a,\Lambda)S(g)U(a,\Lambda)^{-1} = S(\langle a,\Lambda\rangle g)$ mit $\langle a,\Lambda\rangle g(x) = g(\Lambda^{-1}(x-a))$

Kausalität Liegt g_2 später als g_1, d.h. $x_0 < y_0 \forall (x,y) \in \operatorname{supp} g_1 \times \operatorname{supp} g_2$, so gilt $S(g_1+g_2) = S(g_2)S(g_1)$

Darüber hinaus sollen die Funktionalableitungen

$$T_n(x_1,\ldots,x_n) = \frac{\delta}{\delta g(x_1)}\cdots\frac{\delta}{\delta g(x_n)} S(g)\Big|_{g=0} \tag{1.48}$$

als operatorwertige Distributionen über $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{4n})$ existieren. Die Operatoren, die sich durch Verschmierung ergeben, und ihre Adjungierten sollen einen gemeinsamen Definitionsbereich D besitzen, der die Wightmandomäne enthält.

Die Eigenschaften der Distributionen $T_n(x_1,\ldots,x_n)$ und ihre Konstruktion stehen im Mittelpunkt der Stückelberg-Bogolubov-Epstein-Glaser Störungstheorie. Mit ihrer Hilfe schreibt sich die lokale S-Matrix formal als Taylorentwicklung

$$\begin{aligned} S(g) &= \exp\left(\int d^4g(x)\frac{\delta}{\delta\tilde{g}(x)}\right) S(\tilde{g})\Big|_{\tilde{g}=0} \\ &= \mathbb{1} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\int d^4x_1\ldots d^4x_n T_n(x_1,\ldots,x_n)g(x_1)\ldots g(x_n) \end{aligned} \tag{1.49}$$

Wird eine physikalisch motivierte Quantenfeldtheorie betrachtet, wird die Wechselwirkung mit der Wechselwirkungs-Lagrangedichte $\mathcal{L}_{\text{int}}$ definiert, die aus Wickprodukten freier Felder und deren Ableitungen besteht. Formal ist die S-Matrix mit der Testfunktions-Kopplungs„konstanten“ g

$$\begin{aligned} S(g) &= T\exp\left(-i\int d^4x g(x)\mathcal{L}_{\text{int}}(x)\right) \\ &= \mathbb{1} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-i)^n}{n!}\int d^4x_1\ldots d^4x_n T(\mathcal{L}_{\text{int}}(x_1)\ldots\mathcal{L}_{\text{int}}(x_n))g(x_1)\ldots g(x_n) \end{aligned} \tag{1.50}$$

gegeben. $T(\cdot)$ bezeichnet die zeitgeordneten Produkte – durch Vergleich mit (1.49) wird der Zusammenhang mit den T-Produkten klar.

Im nächsten Schritt werden die Eigenschaften der T-Produkte untersucht. Zentral ist die kausale Faktorisierung der S-Matrix, die sich auf der Ebene der T-Produkte wiederfindet. Diese Eigenschaften werden in der induktiven Konstruktion der T-Produkte von Epstein und Glaser verwendet. Insbesondere wird die Renormierung als Fortsetzungsproblem von Distributionen erkannt. Die induktive Konstruktion wird z.B. in [Pra97] erläutert. Da Renormierung und Konstruktion der T-Produkte im Ortsraum stattfindet, eignet sich die Methode

besonders gut, um Renormierung auf gekrümmten Raumzeiten zu untersuchen [FB00].

Interessant ist, welche wichtige Rolle die Idee einer lokalisierten Wechselwirkung auch an dieser Stelle spielt. Unabhängig von der störungstheoretischen Konstruktion der T-Produkte kann ein enger Zusammenhang zwischen den lokalen S-Matrizen und den lokalen Observablenalgebren hergestellt werden. Dazu dient eine Umformulierung der Kausalitätsbedingung [Sla77]. Es gilt für Testfunktionen $f, g, h \in \mathcal{D}$ die Funktionalgleichung

$$S(f+g+h) = S(f+g)S^{-1}(g)S(g+h), \tag{1.51}$$

falls $\operatorname{supp} f + \overline{V_+} \cap \operatorname{supp} h = \emptyset$ ist. Der Träger von g ist keiner Beschränkung unterworfen. Für $g = 0$ ergibt sich wieder die Bogolubov-Kausalität der S-Matrix.

1.4 Lokale S-Matrizen und Observablenalgebren

Wie in Abschnitt 1.1.2 dargestellt, ist ein physikalisches System vollständig beschrieben, wenn das lokale Netz, d. h. die lokalen Observablenalgebren $\mathfrak{A}(\mathcal{O})$ und die Abbildung

$$\mathcal{O} \mapsto \mathfrak{A}(\mathcal{O}) \tag{1.52}$$

bekannt sind. Das lokale Netz einer wechselwirkenden Quantenfeldtheorie kann mit Hilfe der lokalen S-Matrizen konstruiert werden. Damit erhalten die lokalen S-Matrizen eine zentrale Bedeutung.

Hier soll, [FD01] folgend, kurz dieser Zusammenhang beschrieben werden.

Sei $\{S(f) | f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^4, \mathcal{V})\}$ eine Familie lokaler S-Matrizen. $S(f)$ ist ein Element einer unitalen $*$-Algebra $\mathfrak{A}$. Der Testfunktionenraum $\mathcal{D}(\mathbb{R}^4, \mathcal{V})$ kann als $\mathcal{D}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}) \otimes \mathcal{V}$ aufgefasst werden. Hierbei ist $\mathcal{V}$ ein abstrakter, endlichdimensionaler, reeller Vektorraum, seine Elemente sind die möglichen Wechselwirkungs-Lagrangedichten. In Gleichung (1.50) ist beispielsweise $f = g\mathcal{L}_{\text{int}}$ als ein Element aus $\mathcal{D}(\mathbb{R}^4, \mathcal{V})$ zu verstehen.

Nun sollen die S-Matrizen der kausalen Funktionalgleichung (1.51) genügen. Weitere Lösungen dieser Gleichung sind die „relativen S-Matrizen“, die durch

$$S_g(f) = S(g)^{-1}S(g+f) \tag{1.53}$$

definiert seien. Dabei ist g fixiert und $\mathcal{D}(\mathbb{R}^4, \mathcal{V}) \ni f \mapsto S_g(f)$ als Funktional von f betrachtet. Da die $S_g(f)$ Gleichung (1.51) lösen, folgt, dass sie für raumartig getrennte Träger kommutieren

$$[S_g(f), S_g(h)] = 0 \quad \text{für } \operatorname{supp} f \times \operatorname{supp} h. \tag{1.54}$$

Die lokalen Observablenalgebren $\mathfrak{A}_g(\mathcal{O})$ sind nun bestimmt, indem jedem Gebiet $\mathcal{O}$ der Raumzeit die unitale $*$-Algebra zugewiesen wird, die die $\{S_g(f), f \in \mathcal{D}(\mathcal{O}, \mathcal{V})$ erzeugen.

Weiterhin ergibt sich mit Hilfe von (1.51), dass die Struktur der Algebra $\mathfrak{A}_g(\mathcal{O})$ nur lokal von g abhängt. Das heißt: Wenn $g = g'$ gilt in einer Umgebung

einer kausal abgeschlossenen Menge, die $\mathcal{O}$ enthält, dann existiert ein unitäres Element V aus $\mathfrak{A}$, das zwischen $\mathfrak{A}_g(\mathcal{O})$ und $\mathfrak{A}_{g'}(\mathcal{O})$ vermittelt:

$$VS_g(f)V^{-1} = S_{g'}(f) \quad \forall f \in \mathcal{D}(\mathcal{O}, \mathcal{V}). \tag{1.55}$$

Die Struktur der Algebren wird durch die Abweichung zwischen g und g' außerhalb dieser Umgebung nicht wesentlich geändert. Diese Aussage wird in [FB00] bewiesen.

Das lokale Netz ist also bestimmt, wenn die relativen S-Matrizen für Testfunktionen $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^4, \mathcal{V})$ bekannt sind.

In [FB00] wird auch angegeben, wie zu einer bestimmten Lagrangedichte $\mathcal{L} \in \mathcal{V}$ die globale Algebra der Observablen $\mathfrak{A}_\mathcal{L}$ konstruiert werden kann. Dazu muss der Einfluss der Einschaltfunktionen erfasst werden. Sei $\Theta(\mathcal{O})$ die Menge der Testfunktionen $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^4)$ mit $\theta(x) = 1$ in einer kausal abgeschlossenen Umgebung von $\mathcal{O}$. Betrachte das Bündel

$$\bigcup_{\theta \in \Theta(\mathcal{O})} \{\theta\} \times \mathfrak{A}_{\theta\mathcal{L}}(\mathcal{O}). \tag{1.56}$$

Sei $\mathcal{U}(\theta, \theta')$ die Menge der unitären Operatoren $V \in \mathfrak{A}$ mit

$$VS_{\theta\mathcal{L}}(h) = S_{\theta\mathcal{L}}(h)V \quad \forall h \in \mathcal{D}(\mathcal{O}, \mathcal{V}). \tag{1.57}$$

Weiterhin werden die Schnitte $A = (A_\theta)_{\theta \in \Theta(\mathcal{O})}$, $A_\theta \in \mathfrak{A}_{\theta\mathcal{L}}(\mathcal{O})$ des Bündels (1.56), die die Bedingung

$$VA_\theta = A_\theta V \quad \forall V \in \mathcal{U}(\theta, \theta') \tag{1.58}$$

erfüllen, als „kovariant konstant“ bezeichnet. Die Menge der kovariant konstanten Schnitte definiert eine Algebra. Die Algebra $\mathfrak{A}_\mathcal{L}(\mathcal{O})$ der lokalen Observablen sei nun als die Algebra der kovariant konstanten Schnitte des Bündels (1.56) gewählt. $\mathfrak{A}_\mathcal{L}(\mathcal{O})$ enthält insbesondere die Elemente $S_\mathcal{L}(f)$, der entsprechende Schnitt ist $(S_\mathcal{L}(f))_\theta = S_{\theta\mathcal{L}}(f)$.

Um die Konstruktion abzuschließen, müssen noch die Einbettungen $i_{12} : \mathfrak{A}_\mathcal{L}(\mathcal{O}_1) \to \mathfrak{A}_\mathcal{L}(\mathcal{O}_2)$ für $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$ bekannt sein. Für die Fasern gilt $\mathfrak{A}_{\theta\mathcal{L}}(\mathcal{O}_1) \subset \mathfrak{A}_{\theta\mathcal{L}}(\mathcal{O}_2)$ für $\theta \in \Theta(\mathcal{O}_2)$. Diese Inklusion vererbt sich auf die Algebra der Schnitte, wenn die Basis $\Theta(\mathcal{O}_1)$ auf $\Theta(\mathcal{O}_2)$ eingeschränkt wird.

Damit ist das Netz lokaler Algebren im Sinne von Abschnitt 1.1.2 bekannt.

1.5 Die Idee dieser Arbeit

Wechselwirkende Quantenfeldtheorien existieren auf der Ebene der Störungstheorie. Um sich wechselwirkenden Theorien auch in allgemeinerem Rahmen zu nähern, wäre es wünschenswert, Familien lokaler S-Matrizen in konkreten Modellen wie $P(\varphi)_n$, Y_n oder in Modellen mit äußeren Feldern, zu konstruieren. Sie ermöglichen den Kontakt zur algebraischen Formulierung der Quantenfeldtheorie.

Nun sollte diese Konstruktion ohne Verwendung der Störungstheorie erfolgen, um die Frage nach der Konvergenz der Störungsreihe zu vermeiden. Da die S-Matrizen aus Zeitentwicklungsoperatoren im Wechselwirkungsbild gewonnen werden, bietet es sich an, Methoden aus der zeitabhängigen Quantenmechanik zu verwenden. Diese Idee geht auf [Wre72] zurück. Dort werden die lokalen S-Matrizen mit Hilfe des Satzes von Yosida in der $(:\varphi^4:)_2$-Theorie konstruiert. Kausalität und Unitarität können gezeigt werden. Allerdings erweisen sich die Voraussetzungen für den Satz von Yosida als einschränkend.

In der vorliegenden Arbeit soll nun eine Methode der zeitabhängigen Quantenmechanik – Howlands Formalismus – auf ihre Anwendbarkeit zur Konstruktion lokaler S-Matrizen untersucht werden.

Kapitel 2

Zeitabhängige Quantenmechanik

Im Folgenden sollen Methoden zur Lösung der zeitabhängigen Schrödingergleichung vorgestellt werden.

Quantenmechanische Fragestellungen mit zeitabhängigem Hamiltonoperator treten in verschiedenen physikalischen Situationen auf.

So kann es sein, dass nur ein Teilsystem eines größeren Systems bekannt ist. Öfter wird ein Teilsystem aus einem Gesamtsystem isoliert. Die als bekannt vorausgesetzte Wirkung des größeren Systems auf das Teilsystem kann als Näherung durch eine explizit zeitabhängige Kraft beschrieben werden. Ein typisches Beispiel ist der Stark-Effekt, bei dem ein periodisch zeitabhängiges elektrisches Feld mit einem geladenen Teilchen wechselwirkt [Yaj82].

Nichtperiodische Zeitabhängigkeit entsteht, wenn Wechselwirkungen oder Störungen eines Systems nur über eine endliche Zeitspanne auftreten oder asymptotisch verschwinden [Sch75], [Soh78].

Ähnliche Methoden finden beim „charge-transfer"-Modell der Dreikörperstreuung Verwendung. Hierbei bewegen sich zwei schwere Ionen aneinander vorbei, betrachtet wird die Bewegung eines Elektrons unter dem Einfluss ihrer Felder.

Auch zufällig verteilte Wechselwirkungen, wie sie durch thermodynamische Fluktuationen entstehen, könnten untersucht werden.

Jeder reine Zustand eines physikalischen Systems zum Zeitpunkt t wird durch einen Strahl in einem separablen Hilbertraum $\mathcal{H}_t$ beschrieben. Um die zeitliche Entwicklung des Systems zu erhalten, werden gewöhnlich zwei Annahmen zu Grunde gelegt. Zum einen soll es möglich sein, die Hilberträume zu verschiedenen Zeiten in natürlicher Weise miteinander zu identifizieren. Zum anderen wird angenommen, dass Vektorrepräsentanten der Strahlen in dem zu den ursprünglichen Räumen isomorphen Hilbertraum $\mathcal{H}$ gewählt werden können, so dass die Zeitentwicklung durch die Differentialgleichung

$$i\frac{d}{dt}\varphi_s(t) = H(t)\varphi_s(t), \qquad \varphi_s(s) = \psi \tag{2.1}$$

gegeben ist. $H(t)$ ist eine Schar selbstadjungierter Operatoren in $\mathcal{H}$, meistens wird diese ganze Schar als „zeitabhängiger Hamiltonoperator" bezeichnet. (2.1)

ist die zeitabhängige Schrödingergleichung. Lösungen dieser Gleichung als Anfangswertaufgabe werden mit Hilfe von Propagatoren beschrieben.

Definition 2.0.1 *Ein Propagator ist eine stark stetige, unitäre, operatorwertige Funktion über $\mathbb{R}^2$, so dass*

$$U(t,t) = \mathbb{1} \tag{2.2}$$

gilt und die Chapman-Kolmogorov-Gleichung erfüllt ist

$$U(t,r)U(r,s) = U(t,s) \qquad \forall t,r,s. \tag{2.3}$$

Ist der Propagator bekannt – es genügt $U(\cdot,0)$ als Funktion der Zeit – so ergibt sich die Lösung der Schrödingergleichung durch Anwendung auf einen Zustand, der die Anfangsbedingung beschreibt. Damit lassen sich Propagatoren durch die Bedingung

$$i\frac{d}{dt}U(t,s) = H(t)U(t,s), \qquad U(s,s) = \mathbb{1} \tag{2.4}$$

charakterisieren, äquivalent zu (2.1).

Die Propagatoren entsprechen in gewissem Sinne den unitären Ein-Parameter-Gruppen, die in der statischen Quantenmechanik die Zeitentwicklung beschreiben. Sie besitzen allerdings keine Gruppeneigenschaft.

Die zeitabhängige Schrödingergleichung (2.1) kann als Spezialfall einer Entwicklungsgleichung in einem allgemeineren Rahmen betrachtet werden. So werden in der mathematischen Literatur Differentialgleichungen in Banachräumen behandelt, die dieselbe Struktur wie die zeitabhängige Schrödingergleichung haben. An Stelle des Hamiltonoperators treten dann Generatoren von Halbgruppen. Kato behandelt diese Problemstellung in [Kat53]. Seit dieser Zeit sind große Fortschritte in diesem Gebiet erzielt worden [Yos74].

Außer der Lösbarkeit der zeitabhängigen Schrödingergleichung interessieren z.B. die Spektraltheorie zeitabhängiger Hamiltonoperatoren und damit verbunden die Eigenschaften der Zustände [EV83].

Methoden zur Behandlung zeitabhängiger Probleme in der Quantenmechanik finden sich z. B. in [Sim71, RS75, CFKS87].

2.1 Die Dyson-Reihe

2.1.1 Beschränkter Hamiltonoperator

Die Differentialgleichung (2.4), der der Propagator genügt, ist formal äquivalent zu der Integralgleichung

$$U(t,s) = \mathbb{1} - i\int_s^t dt'\, H(t')U(t',s) \tag{2.5}$$

Durch wiederholtes Einsetzen ergibt sich die Dysonreihe

$$U(t,s) = \mathbb{1} + \sum_{n=1}^{\infty}(-i)^n \int_s^t dt_1 \int_s^{t_1} dt_2 \cdot \ldots \cdot \int_s^{t_{n-1}} dt_n H(t_1)\cdot\ldots\cdot H(t_n) \tag{2.6}$$

Dyson benutzt diese Entwicklung in [Dys75] zur störungstheoretischen Beschreibung der Quantenelektrodynamik. Ist $t \mapsto H(t)$ eine stark stetige Abbildung in die beschränkten, selbstadjungierten Operatoren, konvergiert $U(t,s)$ wegen des Satzes über gleichmäßige Beschränktheit, und $\varphi_s(t) = U(t,s)\psi$ ist eine Lösung der Schrödingergleichung (2.1). Die Konvergenz der Reihenentwicklung (2.6) ergibt sich über die Abschätzung

$$\|U_n\| \leq \frac{1}{n!}\left(\int_s^t dt' \, \|H(t')\|\right)^n \leq \frac{|t-s|^n}{n!}\left(\sup_{t' \in [t,s]} \|H(t')\|\right)^n . \tag{2.7}$$

Die Propagatoreigenschaften (2.2), (2.3) sind erfüllt. Die Selbstadjungiertheit der Schar von Hamiltonoperatoren $H(t)$ geht nur in die Unitarität des Propagators ein und sorgt in physikalischer Interpretation für die Erhaltung der Wahrscheinlichkeit. Ohne Selbstadjungiertheit lassen sich mit dem beschriebenen Verfahren immer noch Lösungen einer analogen Entwicklungsgleichung erzeugen.

Die Abschätzung (2.7) gilt, wenn die Hamiltonoperatoren $H(t)$ beschränkt sind für alle t. Unter dieser Voraussetzung konvergiert die Dysonreihe in der Norm. Der Zeitentwicklungsoperator kann in diesem Fall auch als Paralleltransporter interpretiert werden, siehe Abschnitt 2.5.2.

Wenn der zeitabhängige Hamiltonoperator unbeschränkt ist und eine Abschätzung der Form (2.7) nicht durchgeführt werden kann, ist es schwierig, eine Aussage über die Konvergenz der Dysonreihe zu machen. In der Anwendung wird die Reihe meist als formale Potenzreihe Term für Term definiert, ohne die Konvergenz zu untersuchen.

2.1.2 Wechselwirkungsbild

Die Forderung, dass $H(t)$ zu jedem Zeitpunkt ein beschränkter Operator ist, ist für die Anwendung in der Quantenmechanik zu restriktiv – schon der freie Hamiltonoperator ist unbeschränkt. Die Anwendung der Dysonreihe gelingt trotzdem, wenn ihre Voraussetzungen im Wechselwirkungsbild erfüllt sind. Das Wechselwirkungsbild wird bei der Beschreibung von Streuprozessen eingeführt, siehe Abschnitt 1.3.1. Für einen Hamiltonoperator, der eine Summe aus freiem Hamiltonoperator und Potentialterm ist, teilt das Wechselwirkungsbild die Zeitabhängigkeit zwischen Operatoren und Zuständen auf. Es liegt damit zwischen Schrödinger- und Heisenbergbild. Das Wechselwirkungsbild entsteht, wenn anstatt des Hamiltonoperators der Form

$$H(t) = H_0 + V(t), \quad H_0 \text{ unbeschränkt, selbstadjungiert} \tag{2.8}$$

der transformierte Operator

$$H_{\mathrm{ww}} = e^{iH_0 t} V(t) e^{-iH_0 t} \tag{2.9}$$

zugrunde gelegt wird. Genügt $t \mapsto V(t)$ den Voraussetzungen der Dysonentwicklung, so gilt dies auch für $t \mapsto H_{\mathrm{ww}}(t)$. Bezeichnet $\tilde{U}(t,s)$ den Propagator im Wechselwirkungsbild, erfüllt also das Anfangswertproblem

$$i\frac{d}{dt}\tilde{U}(t,s) = H_{\mathrm{ww}}(t)\tilde{U}(t,s), \qquad \tilde{U}(s,s) = \mathbb{1}, \tag{2.10}$$

so wird das ursprüngliche Problem formal durch

$$U(t,s) = e^{-iH_0 t}\tilde{U}(t,s)e^{iH_0 s} \tag{2.11}$$

gelöst.

Ist $t \mapsto V(t)$ auch integrierbar, $\int dt\|V(t)\| < \infty$, kann außer den Propagatoren über kompakten Intervallen auch der Grenzwert $t \to \infty, s \to -\infty$ gebildet werden. Dieser Grenzwert des Propagators im Wechselwirkungsbild definiert die S-Matrix

$$S = \lim_{t_\pm \to \pm\infty} \tilde{U}(t_+, t_-) = \lim_{t_\pm \to \pm\infty} e^{iH_0 t_+} U(t_+, t_-) e^{-iH_0 t_-}. \tag{2.12}$$

Hier wird die quantenmechanische Beschreibung der Streusituation deutlich: Ein normierter Zustand φ zu einem festen Zeitpunkt $t_- = 0$ wird durch S mit der freien Zeitentwicklung nach $t_- \to -\infty$ gebracht. Aus der Vergangenheit kommend unterliegt der Zustand der vollen, wechselwirkenden Dynamik bis $t_+ \to \infty$. Schließlich wird der auslaufende Streuzustand wieder mit der freien Zeitentwicklung zurück nach $t_+ = 0$ gebracht, wo er mit einem anderen auslaufenden Streuzustand ψ verglichen werden kann. Die Übergangswahrscheinlichkeit von φ nach ψ ist dann

$$P(\varphi \to \psi) = |(\psi, S\varphi)|^2. \tag{2.13}$$

Mit der Entwicklung (2.6) des Propagators im Wechselwirkungsbild ergibt sich die Entwicklung der S-Matrix, die den Ausgangspunkt zur störungstheoretischen Berechnung von Übergangswahrscheinlichkeiten bildet

$$S := \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \cdot \ldots \cdot \int_{-\infty}^{t_{n-1}} dt_n H_{\mathrm{ww}}(t_1) \cdot \ldots \cdot H_{\mathrm{ww}}(t_n) \tag{2.14}$$

In jedem Glied der Summe kann die Integration auch über den Würfel im $\mathbb{R}^n$ ausgeführt werden. Dabei muss die Nichtvertauschbarkeit der $H_{\mathrm{ww}}(t_i)$ berücksichtigt werden. Dazu dient das zeitgeordnete Produkt $T(\cdot)$, ein Funktional, das seine Argumente so ordnet, dass Operatoren, die zu späteren Zeitpunkten ausgewertet werden, links von denen zu früheren Zeiten stehen.

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int dt_1 \cdot \ldots \cdot \int dt_n T(H_{\mathrm{ww}}(t_1) \cdot \ldots \cdot H_{\mathrm{ww}}(t_n)) \\ &= T\left(\exp -i \int dt H_{\mathrm{ww}}(t)\right) \end{aligned} \tag{2.15}$$

Wenn $H_{\mathrm{ww}}(t)$ ein beschränkter Operator, aber als Funktion der Zeit nicht integrierbar ist, kann die Konvergenz der S-Matrix durch Multiplikation der Wechselwirkung mit einer Testfunktion $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}), g(x) \in [0,1]$ erreicht werden:

$$\begin{aligned} i\frac{d}{dt}\tilde{U}_g(t,s) &= H_{\mathrm{ww}}(t)g(t)U_g(t,s), \\ U_g(t,s) &= T\left(\exp -i \int_s^t dt'\, H_{\mathrm{ww}}(t')g(t')\right) \end{aligned} \tag{2.16}$$

Die S-Matrix existiert in diesem Fall und ist identisch mit dem Propagator zu Zeiten, die früher bzw. später als der Träger von g liegen. Dabei erhält $S = S(g)$ eine funktionale Abhängigkeit von g.

$$S(g) = U_g(t,s) \quad \text{für } s < \operatorname{supp} g < t. \tag{2.17}$$

Kausalität findet Ausdruck in der Faktorisierungseigenschaft

$$S(f+g) = S(f)S(g) \quad \text{für } \operatorname{supp} f > \operatorname{supp} g. \tag{2.18}$$

Der Grenzwert $g \to 1$ mit $\operatorname{supp} g \to \mathbb{R}$ wird in der Quantenfeldtheorie als adiabatischer Limes bezeichnet.

Die Schwierigkeit im Wechselwirkungsbild besteht darin, dass $\tilde{U}(t,s)\psi$ außerhalb des Definitionsbereichs von H_0 liegen könnte, selbst wenn $\psi \in D(H_0)$. Dann ist die Gleichung

$$i\frac{d}{dt}U(t,s)\psi = (H_0 + V(t))\, e^{-iH_0 t}\tilde{U}(t,s)e^{iH_0 t}\psi \tag{2.19}$$

bedeutungslos. Wenn $t \mapsto [H_0, V(t)]$ stark stetig ist, kann dieses Problem nicht auftreten ([RS75]). Diese Bedingung ist ein Spezialfall der Voraussetzungen für den Satz von Yosida.

2.2 Der Satz von Yosida

Die Lösung der Entwicklungsgleichung

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t), \qquad t \in I \subset \mathbb{R} \tag{2.20}$$

im allgemeineren Rahmen von Banachräumen wurde von Kato in [Kat53] angegeben. Die Unbekannte $x(t)$ ist hierbei Element eines Banachraums X, $A(t)$ ist ein gegebener, linearer, im Allgemeinen unbeschränkter Operator von $D(A(t)) \subset X$ nach X. Yosida überarbeitete den Satz, er ist mit vereinfachtem Beweis unter anderem in [Yos74] zu finden und wird oft auch als Satz von Yosida zitiert. Die Idee zur Lösung des Problems ist recht einfach und an die klassische Polygon-Methode zur Behandlung gewöhnlicher Differentialgleichungen angelehnt.

Sei $A(t)$ der Generator einer Kontraktionshalbgruppe $e^{-tA(t)}$, $\|e^{-tA(t)}\| \leq 1$ über X. Die Lösung von (2.20) werde in Form eines Propagators gesucht, der sich als Grenzwert der „näherungsweisen Propagatoren“ mit stückweise konstantem Generator

$$U_k(t,s) = \begin{cases} e^{-(t-s)A(\frac{i-1}{k})} & \text{falls} \quad \frac{i-1}{k} \leq s \leq t \leq \frac{i}{k} \quad \text{mit} \quad 1 \leq i \leq k, \\ U_k(t,r)U_k(r,s) & \text{falls} \quad 0 \leq s \leq r \leq t \leq 1 \end{cases} \tag{2.21}$$

ergibt. Die Voraussetzungen, damit diese Folge in k gegen die gesuchte Lösung konvergiert, liefert der Satz von Yosida:

Satz 2.2.1 *Sei X ein Banachraum, I ein offenes Intervall in den reellen Zahlen und $A(t) \forall t \in I$ Generator einer Kontraktionshalbgruppe. Die Resolventenmenge aller $A(t)$ enthalte die Null. Außerdem gelte:*

i) Der Definitionsbereich der $A(t)$ ist unabhängig von t, $D(A(t)) = D$

ii) $A(t)A(s)^{-1} \in L(X,X)$ ist ein beschränkter Operator[1]

iii) Für alle $x \in X$ ist $(t-s)^{-1}[A(t)A(s)^{-1} - \mathbb{1}]x$ gleichmäßig stark stetig in s und t für $s \neq t$ aus eine beliebigen kompakten Teilintervall von I

iv) Für alle $x \in X$ existiert der Grenzwert $\lim_{s \uparrow t}(t-s)^{-1}[A(t)A(s)^{-1} - \mathbb{1}]x =: C(t)x$ gleichmäßig in t und $C(t)$ ist als operatorwertige Funktion stark stetig und beschränkt.

Dann existiert für alle $s \leq t$ aus einem beliebigen kompakten Teilintervall von I und jedes $x \in X$ der Grenzwert

$$U(t,s)x = \lim_{k \to \infty} U_k(t,s)x \tag{2.22}$$

gleichmäßig in s und t. Der Propagator $U(t,s)$ ist stark stetig und erzeugt eine Lösung $x_s(t) := U(t,s)y$ der Anfangswertaufgabe

$$\frac{d}{dt}x_s(t) = -A(t)x_s(t), \qquad x_s(s) = y \in X. \tag{2.23}$$

Außerdem gilt $\|x_s(t)\| \leq \|y\| \forall t \geq s$.

Beweis. Der Beweis findet sich in [Yos74] oder auch [RS75]. □

Die Voraussetzungen des Satzes sind recht unhandlich; besonders die zeitliche Konstanz des Definitionsbereiches der Generatoren ist eine starke Einschränkung. Trotzdem ist der Satz nützlich in der Quantenmechanik, er liefert für Standardbeispiele wie z. B. ein zeitabhängiges Kato-Potential $V(t) \in L^2 + L^\infty$ starke Lösungen der Schrödingergleichung. Die „näherungsweisen Propagatoren“ $U_k(t,s)$ implizieren eine Konstruktionsvorschrift.

2.2.1 Anwendung auf die Quantenmechanik

Eine den Gegebenheiten in der Quantenmechanik besser angepasste Version des Satzes lautet

Satz 2.2.2 *Sei $H(t)$, $t \in I \subset \mathbb{R}$ eine Schar selbstadjungierter Operatoren über einem Hilbertraum $\mathcal{H}$. Für alle t sei $H(t)$ halbbeschränkt: $H(t) \geq -E_0 + 1$ für ein $E_0 > 0$. Die Resolvente $(H(t) + E_0)^{-1}$ sei im starken Sinn differenzierbar und außerdem $\|(H(t)+E_0)\frac{d}{dt}(H(t)+E)^{-1}\|$ als Funktion von t beschränkt. Dann*

[1] Diese Bedingung ist redundant; sie folgt mit Hilfe des Satzes vom abgeschlossenen Graphen aus der zeitlichen Konstanz der Definitionsbereiche. Für den umgekehrten Schluss siehe auch Abschnitt 2.2.2 .

existiert für alle $\psi \in D(H(s))$ *eine stark stetige Funktion* $\varphi(\cdot)$ *mit* $\varphi(s) = \psi$ *und*

$$i\frac{d}{dt}\varphi(t) = H(t)\varphi(t). \tag{2.24}$$

Der Propagator $U(t,s)$ *definiert durch* $U(t,s)\psi = \varphi(t)$ *setzt sich als unitärer Operator auf* $\mathcal{H}$ *fort.*

Yosida bemerkt in [Yos74], dass auch in dieser Formulierung des Satzes die Schar von Hamiltonoperatoren einen gemeinsamen, t-unabhängigen Definitionsbereich aufweisen. Diese Beobachtung folgt aus der Beschränktheit von $\|(H(t)+E_0)\frac{d}{dt}(H(t)+E)^{-1}\|$ in t, siehe Abschnitt 2.2.2.

Simon liefert in [Sim71] die Anwendung des Satzes auf das Kato-Potential der Form $L^2(\mathbb{R}^3) + L^\infty(\mathbb{R}^2)$:

Satz 2.2.3 *Sei* $V(t) = V_1(t) + V_2(t)$ *für* t *aus einem kompakten Intervall* I *gegeben. Für jedes* t *sei* $V_1(t) \in L^2(\mathbb{R}^3)$ *und* $V_2(t) \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$. *Darüberhinaus sei* V_1 *differenzierbar in* t *als eine* L^2*-wertige Funktion und* V_2 *differenzierbar in* t *als eine* L^∞*-wertige Funktion.* $H(t) := H_0 + V(t)$. *Dann gibt es zu jedem* $\psi \in D(H_0)$ *eine Lösung der Schrödingergleichung mit Anfangswert* ψ.

Zwar werden die Lösungen der zeitabhängigen Schrödingergleichung nur auf kompakten Intervallen geliefert, diese können aber stückweise aneinander gefügt werden.

Potentiale vom Kato-Typ werden oft erwähnt, sie sind einfach zu handhaben. Damit ist ein Standard-Anwendungsgebiet der zeitabhängigen Quantenmechanik abgedeckt.

2.2.2 Anwendung auf die $(:\varphi^4:)_2$-Theorie

Der Satz von Yosida findet auch in der Quantenfeldtheorie Anwendung. Im Mittelpunkt stehen hier die lokalen S-Matrizen $S(f)$. Wie im ersten Kapitel erläutert, kann mit Hilfe der S-Matrizen $S(f)$ die Algebra der Observablen konstruiert werden. Sie ergeben sich aus den Zeitentwicklungsoperatoren im Wechselwirkungsbild, welche Lösungen einer Schrödingergleichung mit lokalisiertem, zeitabhängigem Hamiltonoperator sind.

Üblicherweise wird diese Gleichung durch eine formale Reihenentwicklung und störungstheoretische Behandlung der zeitgeordneten Produkte gelöst.

Die Idee, statt dessen Hilfsmittel aus der zeitabhängigen Quantenmechanik zur Berechnung des Propagators zu verwenden, geht auf die Arbeit [Wre72] von W. F. Wrezinski zurück.

Hier werden die lokalen S-Matrizen für die $(:\varphi^4:)_2$-Theorie mit Hilfe des Satzes von Yosida berechnet, allerdings mit einer Einschränkung an die Lokalisierungsfunktion.

Ausgangspunkt ist die Schrödingergleichung

$$i\frac{d}{dt}\psi(t) = (H_0 + V(t))\psi(t), \qquad \psi(0) = \chi \tag{2.25}$$

über dem bosonischen Fockraum $\mathfrak{H}^+$ in zwei Raum-Zeit-Dimensionen. Die Zustandsvektoren $\psi(t), \chi$ sind aus dem Definitionsbereich $D = D(H_0) \cap D(V(t))$, der dicht in $\mathfrak{H}^+$ ist. H_0 ist der freie, bosonische Hamiltonoperator und $V(t)$ ist durch

$$V(t) = f_1(t)V = f_1(t) \int dx\ f_2(x) : \varphi^4(0,x) : \tag{2.26}$$

gegeben. Hier tritt die spezielle Einschränkung der Lokalisierung auf: die Funktion f soll in Raum- und Zeitanteil faktorisieren $f(t,x) = f_1(t)f_2(x)$. Dabei soll $f_2 \in C_0^\infty(\mathbb{R}), f \geq 0$ gelten und f_1 zweimal stetig differenzierbar mit kompaktem Träger sein.

Unter diesen Voraussetzungen gelingt es in [Wre72], den Satz von Yosida anzuwenden. Er liefert stark stetige Propagatoren $U(t,s)$ und im Wechselwirkungsbild lokale S-Matrizen $S(f)$, die funktional von f abhängen. Des Weiteren kann im Sinne der funktionalen Definition der S-Matrizen nach Bogolubov (Abschnitt 1.3.3) Unitarität und Kausalität gezeigt werden, wobei sich hierbei die Lokalisierungsfunktionen nur im zeitlichen Anteil unterscheiden dürfen: $S(g_1 + g_2) = S(g_2)S(g_1)$ für $g_i(t,x) = \tilde{g}_i(t)g(x)$, $\operatorname{supp} g_1 < \operatorname{supp} g_2$. Allerdings ist der Beweis der relativistische Transformationseigenschaft nicht möglich. Lorentztransformationen mischen Raum- und Zeitkoordinaten. Die Faktorisierung der Lokalisierung ist also eine Einschränkung.

Die Faktorisierung $f(t,x) = f_1(t)f_2(x)$ wird in [Wre72] gefordert, damit der Definitionsbereich D unabhängig von t wird, was eine Voraussetzung des Satzes von Yosida darstellt. Für den Operator $H(t) = H_0 + V(t) + M$ mit einer Konstanten M, die für $H(t) > 0$ sorgt, wird

$$\|H(t)\frac{d}{dt}H(t)^{-1}\psi\| = \|2VH(t)^{-1}\dot{f}_1(t)\psi\| \leq c\|\psi\| \tag{2.27}$$

gezeigt, wobei die Faktorisierung ausgenutzt wird. Damit ergibt sich, dass $H(t)\frac{d}{dt}H(t)^{-1}$ stark stetig in t ist. Daraus folgt die Unabhängigkeit von $D(H(t))$. Weil diese Tatsache in der vierten Auflage von [Yos74] nicht mehr bewiesen wird, eine kurze Anmerkung: Sei $H(t)\frac{d}{dt}H(t)^{-1} = C(t)$ stark stetig in t und seien die anderen Voraussetzungen des Satzes von Yosida außer der Zeitunabhängigkeit von $D(H(t))$ erfüllt. Sei $W(t)$ die Lösung der Gleichung $\frac{d}{dt}W(t) = -C(t)W(t)$ mit $W(t_0) = \mathbb{1}$. Dann ist

$$\frac{d}{dt}\left(H(t)^{-1}W(t)\right) = H(t)^{-1}C(t)W(t) - H(t)^{-1}C(t)W(t) = 0 \tag{2.28}$$

und somit

$$H(t)^{-1}W(t) = H(t_0)^{-1}W(t_0) = H(t_0)^{-1}. \tag{2.29}$$

Damit gilt $D(H(t)) = \operatorname{Ran}(H(t_0)^{-1})$ unabhängig von t.

Hier wird deutlich, dass die Zeitunabhängigkeit des Definitionsbereichs des Hamiltonoperators für die Anwendung in der Quantenfeldtheorie eine starke Einschränkung darstellt.

Um im Sinne von Wrezinski Propagatoren für Systeme der QFT mit Mitteln der zeitabhängigen Quantenmechanik zu berechnen, wäre ein Verfahren wünschenswert, dass diese Bedingung nicht stellt.

2.3 Allgemeinere Sätze

Soll die Schrödingergleichung mit Potentialen gelöst werden, die nicht in die Klasse der Kato-Potentiale fallen, kommen die bisher erwähnten Methoden an ihre Grenze. Simon konstruiert in [Sim71] Beispiele für Potentiale der Rollnik-Klasse, deren Definitionsbereich als Multiplikationsoperatoren keine stetigen Funktionen enthält. Der Schnitt ihres Definitionsbereichs mit dem des freien Hamiltonoperators ist damit trivial. Nicht nur die von Yosidas Satz geforderte, zeitliche Konstanz der Definitionsbereiche lässt sich so verletzen; die Summe von freiem Hamiltonoperator und Potential ist nicht als dicht definierter Operator erklärbar. Die Lösung dieses Problems bietet in diesem Fall die Definition des Hamiltonoperators als quadratische Form. Ein Satz, der genügend allgemein ist, um auch als quadratische Formen definierte zeitabhängige Hamiltonoperatoren mit Rollnik-Potentialen zu erfassen, ist der folgende Satz von Kisynski [Kis64] in einer Formulierung von Simon [Sim71]. Er liefert schwache Lösungen der Schrödingergleichung.

Satz 2.3.1 *Sei $\mathcal{H}_{+1} \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{H}_{-1}$ ein gestaffeltes Raumtripel[2]. Sei $H(t) : \mathcal{H}_{+1} \to \mathcal{H}_{-1}$ für t aus einem kompakten Intervall eine Schar von Operatoren, die bezüglich des $\mathcal{H}$-Skalarprodukts selbstadjungiert sind. Darüber hinaus seien sie bezüglich der $\mathcal{H}_{\pm 1}$-Graphennormen beschränkt und differenzierbar mit stetiger Ableitung. Dann gibt es zu jedem $\psi \in \mathcal{H}_{+1}$ eine eindeutige Funktion $\varphi(\cdot)$ mit Werten in $\mathcal{H}_{+1}$ so dass gilt:*

i) $\varphi(\cdot)$ ist schwach $\mathcal{H}_{+1}$-stetig, das heißt $(\chi, \varphi(\cdot))$ ist stetig für alle $\chi \in \mathcal{H}_{-1}$

ii) Für alle $\chi \in \mathcal{H}_{-1}$ gilt $i\frac{d}{dt}(\chi, \varphi(t)) = (\chi, H(t)\varphi(t)$ und $\varphi(0) = \psi$.

Beweis. Für den Fall $H(t) = H_0 + V(t)$ ist der Satz in [Sim71] beweisen, der allgemeine Fall in [Kis64]. □

Damit auch starke Lösungen der Schrödingergleichung existieren, muss zusätzlich $H(t)$ zweimal stetig differenzierbar sein [Kis64].

Einen anderen Satz zur Lösung der zeitabhängigen Schrödingergleichung liefert Sohr in [Soh78]:

Satz 2.3.2 *Sei $H(t) : D(H(t)) \to \mathcal{H}$ für jedes $t \in [0, \infty)$ selbstadjungiert und nach unten halbbeschränkt $H(t) \geq -E_0 + 1$ für ein $E_0 > 0$. Darüber hinaus gelte*

i) Für jedes $\varphi \in \mathcal{H}$ existiere eine auf $[0, \infty)$ lokal[3] beschränkte Ableitung $t \mapsto \frac{d}{dt}(\varphi, (H(t) + E_0)^{-1}\varphi)$.

ii) Für jedes $t > 0$ gibt es ein $k \geq 0$, so dass

$$\frac{d}{ds}(\varphi, (H(s) + E_0)^{-1}\varphi) + k(\varphi, (H(s) + E_0)^{-1}\varphi) \geq 0 \tag{2.30}$$

gilt für alle $\varphi \in \mathcal{H}$ und alle $s \in [0, t]$.

[2] „scale of spaces“: $\mathcal{H}_{+n}$ ist gegeben durch $D(H^{n/2})$, abgeschlossen unter der entsprechenden Graphennorm. Räume mit negativem Index können mit den jeweiligen Dualräumen der Räume zu positivem Index identifiziert werden.

[3] auf jedem Kompaktum

Dann existiert eine eindeutig bestimmte Schar $U : (t, s) \mapsto U(t, s), 0 \leq s \leq t < \infty$ *von Propagatoren für die zeitabhängige Schrödingergleichung.*

Beweis. siehe [Soh78]. □

Im Gegensatz zu den Voraussetzungen im Satz von Yosida sind auch hier Bedingungen im Sinne von quadratischen Formen formuliert. Sohr merkt an, dass der Definitionsbereich des zeitabhängigen Hamiltonoperators nicht konstant sein muss, vertieft diesen Punkt in [Soh78] aber nicht. Zum Beweis kommen Methoden zum Einsatz, die Eigenschaften Hilbertraum-wertiger L^2-Funktionen verwenden. Diese Funktionen benutzt auch Howland zur Formulierung seines Formalismus.

2.4 Floquettheorie

Das Anwendungsgebiet der Floquettheorie sind periodische gewöhnliche Differentialgleichungen. Grundlage ihrer Untersuchung ist der Satz von Floquet-Lyapunov:

Satz 2.4.1 *Zu dem gewöhnlichen Differentialgleichungssystem*

$$\frac{d}{dt}\varphi = A(t)\varphi \tag{2.31}$$

mit periodischer Koeffizientenmatrix $A(t) = A(t+T)$ *existiert eine Substitution* $\psi = B(t)\varphi$ *mit invertierbarer periodischer Matrix* $B(t)$ *so, dass das ursprüngliche System in eines mit konstanter Koeffizientenmatrix* A_0 *überführt wird.*

Beweis. siehe [Kuc93] □

Nach dem Theorem von Euler lautet die Lösung des konstanten Systems

$$\psi(t) = e^{i\lambda t} \sum_{k=0}^{n} a_k t^k \tag{2.32}$$

eine Rücksubstitution liefert die „Floquet-Lösung“

$$\varphi(t) = e^{i\lambda t} \sum_{k=0}^{n} a_k(t) t^k \tag{2.33}$$

mit periodischen vektorwertigen Funktionen $a_k(t)$. $e^{i\lambda}$ wird als „Floquet-Multiplikator“ bezeichnet. λ ist die „Quasienergie“. An diesen Parametern lassen sich Eigenschaften der Differentialgleichung wie Stabilität, Lösbarkeit der inhomogenen Gleichung oder auch Spektren studieren.

Der Beweis des Satzes verläuft konstruktiv – Angabe der Substitution – oder über die Betrachtung des Monodromie-Operators. Dieser beschreibt die Entwicklung des Systems längs einer Trajektorie über eine Periode T. In der physikalischen Literatur wird dieser Operator oft als „Floquet-Hamiltonoperator“ $U(T + s, s)$ bezeichnet. Er hängt von der Anfangszeit s und der Periode T ab. Seine Eigenvektoren – falls sie existieren – beschreiben gebundene Zustände

des Systems. Es gibt auch Sätze, die Streuzustände mit dem kontinuierlichen Spektrum des Floquet-Operators in Verbindung bringen [How79a], [How89].

Die Floquet-Theorie zur Behandlung zeitlich periodischer Schrödingergleichungen soll hier nicht näher untersucht werden.

2.5 Zeitentwicklung als Paralleltransport

In der klassischen Mechanik definieren Lösungen der Hamiltonschen Bewegungsgleichungen Integralschnitte eines Hamiltonschen Zusammenhangs. So kann die Zeitentwicklung als Paralleltransport aufgefasst werden. Eine ähnliche Betrachtungsweise ist auch in der Quantenmechanik möglich [MS00].

2.5.1 Heisenberggleichung

Die Beschreibung eines Quantensystems im algebraischen Rahmen erfolgt durch eine C^*-Algebra $\mathfrak{A}$ mit einer positiven Linearform ω. Dieser Zustand legt über die GNS-Konstruktion eine Darstellung π von $\mathfrak{A}$ mit zyklischem Vakuum Ω fest, so dass $\omega(A) = (\Omega, \pi(A)\Omega) \forall A \in \mathfrak{A}$ gilt.

Die Quantenfeldtheorie beschreibt speziell relativistische Systeme, Lorentztransformationen mischen Raum-und Zeitkoordinaten. Im Gegensatz dazu spielt die Zeit in der Quantenmechanik nur die Rolle eines Parameters. Hier werden nur gleichzeitige Vertauschungsrelationen betrachtet. Zu jedem Zeitpunkt t liegt ein Quantensystem mit einer Observablenalgebra $\mathfrak{A}_t$ vor. Das Konzept zur allgemeinen Beschreibung dieser Situation ist das Bündel

$$\bigcup_{t\in\mathbb{R}} \{t\} \times \mathfrak{A}_t, \tag{2.34}$$

es sei zur Abkürzung mit A bezeichnet und besitzt die Projektion $\tau : \mathsf{A} \to \mathbb{R}$, $\tau(\mathfrak{A}_t) = t$. Die Algebren $\mathfrak{A}_t$ seien isomorph zu einer unitalen C^*-Algebra $\mathfrak{A}$. A besitzt die lokalen Trivialisierungen

$$\phi_I : \tau^{-1}(I) \to I \times \mathfrak{A}$$
$$\phi_1(A) = (\tau(A), \tilde{\phi}_I(A))$$

für ein offenes Intervall $I \subset \mathbb{R}$. Liegt t im Schnitt zweier Intervalle $t \in I_1 \cap I_2$, so sind die Übergangsfunktionen $g_{12} = \tilde{\phi}_{I_1}|_{\mathfrak{A}_t} \circ (\tilde{\phi}_{I_2}|_{\mathfrak{A}_t})^{-1} : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ Automorphismen der Faser $\mathfrak{A}$.

Betrachte nun die glatten Schnitte $\alpha : \mathbb{R} \to \mathsf{A}$, $\tau(\alpha(t)) = t$. Die Menge der Schnitte sei mit $\mathsf{A}(\mathbb{R})$ bezeichnet und bildet eine $*$-Algebra bezüglich faserweiser Operation.Insbesondere ist $\mathsf{A}(\mathbb{R})$ ein Modul über den glatten Funktionen $C^\infty(\mathbb{R})$.

Ein Zusammenhang ∇ ist nun definiert als Abbildung, die einer Derivation in $C^\infty(\mathbb{R})$ eine Derivation in $\mathsf{A}(\mathbb{R})$ zuweist. Diese soll eine kovariante Leibnitzregel erfüllen.

Das Standardvektorfeld über $\mathbb{R}$ ist $\frac{\partial}{\partial t}$. Ihm wird nun die kovariante Ableitung ∇_t mit

$$\nabla_t(f\alpha) = \alpha\frac{\partial}{\partial t}f + f\nabla_t\alpha \quad f \in C^\infty(\mathbb{R}),\ \alpha \in \mathsf{A}(\mathbb{R}) \tag{2.35}$$

zugeordnet. Damit ist ein Zusammenhang erklärt.

Nun ist das Bündel A mit der zusammenziehbaren Basis $\mathbb{R}$ trivial, hat aber im Allgemeinen keine kanonische Trivialisierung. Bezüglich der Trivialisierung $\mathsf{A} = \mathbb{R} \times \mathfrak{A}$ hat ∇_t die Form

$$\nabla_t(\alpha) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \delta_t\right)(\alpha), \tag{2.36}$$

wobei die δ_t für alle t Derivationen der C^*-Algebra $\mathfrak{A}$ mit $\delta_t(AB) = \delta_t(A)B + A\delta_t(B)$, $\delta_t(A^*) = \delta_t(A)^*$ sind. Ein Schnitt α wird nun als Integralschnitt bezeichnet, wenn er

$$\nabla_t(\alpha) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \delta_t\right)(\alpha) = 0 \tag{2.37}$$

erfüllt. Gleichung (2.37) ist die Heisenberggleichung der Quantenmechanik, falls die Derivationen δ_t innere Derivationen der Algebra $\mathfrak{A}$ sind.

Wenn nun vorausgesetzt wird, dass die δ_t für alle $t \in \mathbb{R}$ stark stetige Ein-Parametergruppen von Automorphismen der Algebra $\mathfrak{A}$ erzeugen, dann kann der Operator des Paralleltransports bezüglich ∇_t über $[s,t]$ als ein zeitgeordnetes Exponential geschrieben werden

$$U_{(t,s)} = T \exp\left(\int_s^t dt' \delta(t')\right). \tag{2.38}$$

Obige Voraussetzung ist erfüllt, wenn die Derivationen $\delta(t)$ beschränkt sind. Für ein beliebiges Element $A \in \mathfrak{A}$ und $t \geq s$ ist dann der Schnitt α mit

$$\alpha(t) = U_{(t,s)}(A) \tag{2.39}$$

eine Lösung der Gleichung (2.37).

2.5.2 Schrödingergleichung

Um zur Schrödingergleichung zu gelangen, sei das Quantensystem durch die von-Neumann-Algebra $B(\mathcal{H}_t)$ der beschränkten Operatoren über einem Hilbertraum $\mathcal{H}_t$ beschrieben. Die dem Bündel (2.34) entsprechende Struktur ist hier das Hilbertbündel H

$$\bigcup_{t\in\mathbb{R}} \{t\} \times \mathcal{H}_t, \tag{2.40}$$

mit Basis $\mathbb{R}$, typischer Faser $\mathcal{H}$ und glatten Übergangsfunktionen.

Die glatten Schnitte ψ in H bilden ein Modul $\mathsf{H}(\mathbb{R})$ über $C^\infty(\mathbb{R})$. Hier weist ein Zusammenhang der Derivation $\frac{\partial}{\partial t}$ in $C^\infty(\mathbb{R})$ einen Differentialoperator erster Ordnung ∇_t in $\mathsf{H}(\mathbb{R})$ zu, so dass

$$\nabla_t(f\psi) = \psi\frac{\partial}{\partial t}f + f\nabla_t\psi \tag{2.41}$$

für beliebige $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ und Schnitte ψ gilt. Wie im letzten Abschnitt kann eine Trivialisierung $\mathsf{H} = \mathbb{R} \times \mathcal{H}$ gewählt werden. Die kovariante Ableitung erhält dann die Form

$$\nabla_t(\psi) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{i}H(t)\right)(\psi), \tag{2.42}$$

wobei $\{H(t), t \in \mathbb{R}\}$ eine Familie selbstadjungierter, beschränkter Operatoren über $\mathcal{H}$ ist. Damit ist auch eine Familie beschränkter Derivationen $\delta_t(\cdot) = -i[H(t), \cdot]$ über $B(\mathcal{H})$ gegeben. Umgekehrt ist jede beschränkte Derivation einer von-Neumann-Algebra eine innere Derivation. Ein Integralschnitt des Hilbertbündels H ist gegeben durch eine Lösung der Gleichung

$$\nabla_t(\psi) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{i}H(t)\right)(\psi) = 0. \tag{2.43}$$

Dies ist die zeitabhängige Schrödingergleichung. Der Paralleltransporter über das Intervall $[s,t]$ bezüglich des durch ∇_t gegebenen Zusammenhangs ist

$$U(t,s) = T\exp\left(\int_s^t dt'\delta(t')\right). \tag{2.44}$$

Eine Lösung der Schrödingergleichung mit Anfangswert $\varphi \in \mathcal{H}$ ist der Schnitt $\psi \in \mathsf{H}(\mathbb{R})$ mit

$$\psi(t) = U(t,s)\varphi \tag{2.45}$$

Das Ergebnis entspricht der Dysonreihe (2.6) in Exponentialschreibweise mit Zeitordnung.

Die Konvergenz der Dysonreihe kann für beschränkte Hamiltonoperatoren leicht gezeigt werden. Auch hier ist der Paralleltransporter für einen Zusammenhang gegeben, der mit Hilfe von beschränkten, selbstadjungierten Hamiltonoperatoren erklärt ist. Was kann für den Fall von unbeschränkten Hamiltonoperatoren ausgesagt werden?

Für festes t und s ist $U(t,s)$ ein unitärer Operator. Die Menge $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ der unitären Operatoren über $\mathcal{H}$ ist eine reelle, unendlichdimensionale Lie-Gruppe bezüglich der Operatornorm-Topologie. Die zugehörige Lie-Algebra ist die Algebra der anti-selbstadjungierten Operatoren $\frac{1}{i}H$ über $\mathcal{H}$ mit der Lie-Klammer $[\frac{1}{i}H, \frac{1}{i}H']$. Nach Konstruktion genügt $U(t,s)$ der Differentialgleichung $\frac{\partial}{\partial t}U(t,s) - \frac{1}{i}HU(t,s) = 0$. Lösungen dieser Gleichung sind Ein-Parameter-Gruppen, die in $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ stetig sind. Da diese Gleichung invariant unter Rechtsmultiplikation $U(t,s) \mapsto U(t,s)V, V \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$ ist, kann $U(t,s)$ als Paralleltransporter in dem trivialen Hauptfaserbündel $\mathbb{R} \times \mathcal{U}(\mathcal{H})$ angesehen werden [MS00]. Für $s = 0$ ist $t \mapsto U(t,0)$ eine Kurve in $\mathcal{U}(\mathcal{H})$, die stetig in der Operatornorm-Topologie ist. Nun ist die Operatornorm-Topologie nicht die für die Quantenmechanik relevante Topologie. Wenn $t \mapsto U(t,0)$ eine stetige Kurve in der starken Topologie ist, tritt der in der Quantenmechanik übliche Fall ein: Der Schnitt $\psi(t) = U(t,0)\varphi$ ist stark stetig, aber nur auf einer dichten Teilmenge $D \subset \mathcal{H}$

differenzierbar. Die in Gleichung (2.43) auftretenden Hamiltonoperatoren $H(t)$ sind unbeschränkt und nicht überall definiert.

Die unitäre Gruppe $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ wird sowohl mit der Operatornorm- als auch mit der starken Topologie eine topologische Gruppe. In beiden Fällen kann ein topologisches Hauptfaserbündel $\mathbb{R} \times \mathcal{U}(\mathcal{H})$ erklärt werden. Wird die – im quantenmechanischen Fall relevante – starke Topologie zu Grunde gelegt, fehlt die Differenzierbarkeit, um $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ auch als Lie-Gruppe zu verstehen. Das entsprechende Hauptfaserbündel hat keine differenzierbare Struktur, die mit der starken Topologie auf $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ verträglich wäre. Daher scheitert die übliche Definition eines Zusammenhangs in diesem Fall. Wie trotzdem die Zeitentwicklung in der Quantenmechanik als Paralleltransport beschrieben werden kann, ist in [ACP82] dargestellt.

Kapitel 3

Howlands Formalismus

Howlands Formalismus zur Behandlung zeitabhängiger Probleme in der Quantenmechanik geht auf den Artikel [How74] zurück. Motiviert von einem Verfahren der klassischen Mechanik wird das zeitabhängige Problem auf ein stationäres zurückgeführt. Der Zugang ist sehr natürlich und einfacher als die bisher beschriebenen Methoden. Allerdings ist das Resultat, das durch die Anwendung des Formalismus erzielt wird, weniger stark. Aber gerade diese schwächere Aussage lässt die Hoffnung zu, dass auch Fälle behandelt werden können, die in Hinblick auf die Konstruktion lokaler S-Matrizen eine Rolle spielen.

3.1 Der Formalismus

3.1.1 Analogie zur klassischen Mechanik

Klassische Mechanik. Ein klassisches physikalisches System werde durch eine Hamiltonfunktion $H(q,p,t), q,p \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}$ beschrieben, die explizit von der Zeit t abhängt. Die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen lauten

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{3.1}$$

Die Zeitabhängigkeit der Hamiltonfunktion erschwert die Integration. Die Bedeutung dieser Zeitabhängigkeit ist, dass in dem betrachteten System die Energie keine Erhaltungsgröße ist. Das System unterliegt einer äußeren Kraft.

Wird nun die Energie E dieser äußeren Kraft hinzugenommen, entsteht ein konservatives System. E ist der konjugierte Impuls zu t, die Zeit wird damit wie eine zusätzliche „räumliche“ Koordinate behandelt. Die neue Hamiltonfunktion lautet

$$K(q,t,p,E) := H(q,p,t) + E. \tag{3.2}$$

Mit einer neuen „Zeit“-Variablen σ lauten die Hamiltonschen Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{dq_i}{d\sigma} &= \frac{\partial H}{\partial p_i} & \frac{dp_i}{d\sigma} &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, \ldots, n \\ \frac{dt}{d\sigma} &= \frac{\partial K}{\partial E} = 1 & \frac{dE}{d\sigma} &= -\frac{\partial H}{\partial t}, \end{aligned}$$

sie sind den ursprünglichen Gleichungen (3.1) äquivalent. Die dritte Beziehung beschreibt den einfachen Zusammenhang zwischen der alten und der neuen Zeitvariable $t = \sigma + \text{const}$. Die Hamiltonfunktion K hängt nicht von σ ab. Das Rezept, um ein System mit explizit zeitabhängiger Hamiltonfunktion in ein konservatives System zu überführen, lautet also: „Betrachte die Zeit t als räumliche Variable und addiere ihren konjugierten Impuls zur ursprünglichen Hamiltonfunktion".

Quantenmechanik. Dieses Rezept kann nun leicht in die Quantenmechanik übersetzt werden. An Stelle der Bewegungsgleichungen tritt die zeitabhängige Schrödingergleichung

$$i\frac{d}{dt}\varphi(t) = H(t)\varphi(t), \qquad \varphi(t) \in \mathcal{H} \tag{3.3}$$

wobei $\{H(t)|t \in \mathbb{R}\}$ eine Familie selbstadjungierter Operatoren über $\mathcal{H}$ ist. Wird t als zusätzliche „räumliche" Variable aufgefasst, hat sie den konjugierten Impuls $-i\frac{d}{dt}$. Der erweiterten Hamiltonfunktion des klassischen Problems entspricht dann der formale Operator

$$K := H(t) - i\frac{d}{dt} \tag{3.4}$$

und die Analogie zwischen klassischem und quantenmechanischen Vorgehen lässt erwarten, dass zwischen den Lösungen der mit (3.4) gebildeten Schrödingergleichung und (3.3) eine Beziehung besteht.

Um den Zusammenhang zwischen dem zeitabhängigen und dem konservativen System zu finden, sei angenommen, dass die zeitabhängigen Hamiltonoperatoren $H(t)$ einen gemeinsamen Definitionsbereich D haben und die Schrödingergleichung (3.3) zu gegebenem Anfangswert eine Lösung besitzt, die mit Hilfe der Standardmethoden aus dem letzten Kapitel konstruiert und mit Hilfe eines unitären Propagators $U(\cdot,\cdot)$ dargestellt wird. Die neue Schrödingergleichung lautet

$$i\frac{d}{d\sigma}\varphi = K\varphi, \qquad \varphi \in \mathcal{K} := L^2(\mathbb{R}, \mathcal{H}). \tag{3.5}$$

Ihre Lösung ist durch $\exp(-i\sigma K)$, als Operator über einem Funktionenraum, gegeben.

Der Propagator U kann nun benutzt werden, um eine Abbildung in $\mathcal{K}$ zu definieren. Sei $V : \mathbb{R} \to L(\mathcal{K})$ gegeben durch

$$\sigma \mapsto V(\sigma)\varphi(\cdot) := U(\cdot, \cdot - \sigma)\varphi(\cdot - \sigma). \tag{3.6}$$

Direkte Rechnung zeigt, dass $V(\cdot)$ eine stark stetige Ein-Parameter-Gruppe unitärer Operatoren in $\mathcal{K}$ ist. Wird ein passender Definitionskern von K zu Grunde gelegt, z.B. $C_0^1(\mathbb{R}, D)$, ergibt sich durch Differentiation, dass $V(\cdot)$ von K erzeugt wird. $V(\cdot)$ ist also gerade die Lösung der neuen Schrödingergleichung (3.5) und die Beziehung zum Propagator des ursprünglichen Problems ist

$$e^{-i\sigma K}\varphi(t) = U(t, t-\sigma)\varphi(t-\sigma), \qquad \varphi \in \mathcal{K}. \tag{3.7}$$

V ist der Prototyp einer „Zeitentwicklungsgruppe“ über $\mathcal{K}$, die Howland definiert und dann verwendet, um den beschriebenen Zusammenhang zu verallgemeinern.

3.1.2 Der Raum $\mathcal{K}$

Um allgemein Zeitentwicklungsgruppen nach dem Vorbild (3.7) zu definieren, ist es nützlich, ein paar Tatsachen über den zu Grunde liegenden Funktionenraum $\mathcal{K} = L^2(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ und die auf ihm definierten Operatoren zusammen zu stellen.

Sei $\mathcal{H}$ ein separabler Hilbertraum mit Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)$. $\mathcal{K}$ ist nun der Raum der $\mathcal{H}$-wertigen L^2-Funktionen:

Definition 3.1.1 *Der Hilbertraum der $\mathcal{H}$-wertigen Funktionenklassen ist definiert als $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{H})$:*

$$\mathcal{K} := L^2(\mathbb{R}, \mathcal{H}) = \left\{ \varphi : \mathbb{R} \to \mathcal{H} \,\middle|\, \varphi \text{ (schwach) messbar}, \int_{\mathbb{R}} \|\varphi(t)\|^2 < \infty \right\}$$

Das Skalarprodukt ist gegeben durch $(\varphi, \psi)_{\mathcal{K}} = \int dt (\varphi(t), \psi(t))$; die Norm ist $\|\varphi\|_{\mathcal{K}} = \sqrt{(\varphi, \varphi)_{\mathcal{K}}}$

$\mathcal{K}$ ist isomorph zum Tensorprodukt $L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{H}$: Seien $\{a_n\} \subset L^2(\mathbb{R})$ und $\{\phi_n\} \subset \mathcal{H}$ Orthonormalbasen. Eine Funktion ψ aus $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ nimmt ihre Werte in $\mathcal{H}$ an und schreibt sich als $\psi(\cdot) = \sum c_n(\cdot)\phi_n$. Der Koeffizient ist eine L^2-Funktion in t. Die Menge $\{a_n \phi_m\} \subset L^2(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ ist orthonormiert. Sie bildet auch eine Basis: Sei $\psi \notin \overline{\text{span}(a_n \phi_m)}$. Dann gilt $(\psi, a_n \phi_m) = 0 \; \forall n, m \in \mathbb{N}$. Das bedeutet $\int dt \; a_n(t) c_m(t) = 0 \; \forall n, m \in \mathbb{N}$ und daraus folgt $c_m(t) = 0$ für fast alle t. Also ist $||\psi(t)||^2_{\mathcal{H}} = \sum |c_m(t)|^2 = 0$ fast überall in t und damit $||\psi|| = 0$. Die Abbildung $j : L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{H} \to L^2(\mathbb{R}, \mathcal{H}), \; a_n \otimes \phi_m \mapsto a_n \phi_m$ liefert dann die Isomorphie $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{H}) \cong L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{H}$.

Wichtiger als die Tensorproduktstruktur scheint in Hinblick auf Howlands Formalismus die Beschreibung von $\mathcal{K}$ als direktes Integral, siehe Abschnitt 3.1.4.

Ist eine Familie zeitabhängiger Operatoren in $\mathcal{H}$ gegeben, so kann sie auch als Operator in $\mathcal{K}$ betrachtet werden. Dabei ist es sinnvoll, den Definitionsbereich so zu wählen, dass sich Eigenschaften der Operatoren in $\mathcal{H}$ auch auf den Funktionenraum fortpflanzen.

Definition 3.1.2 *Sei $\{A(t) | t \in \mathbb{R}\}$ eine Familie linearer, dicht definierter Operatoren über $\mathcal{H}$ mit (zeitabhängigen) Definitionsbereichen $D(A(t))$. Zu dieser Familie gehört ein Operator über $\mathcal{K}$, der als operatorwertiger Multiplikationsoperator im L^2-Sinn definiert wird: Sei*

$$\mathcal{K} \supset D(A) = \{\varphi \in \mathcal{K} | \varphi(t) \in D(A(t)) \text{ fast überall, „} t \mapsto A(t)\varphi(t) \text{“ } \in \mathcal{K}\} \tag{3.8}$$

dicht in $\mathcal{K}$. Dann operiert A auf $D(A)$ durch $(A\varphi)(\cdot) = A(\cdot)\varphi(\cdot)$

Damit zu einer gegebenen Familie $\{A(t) | t \in \mathbb{R}\}$ der Operator A über $\mathcal{K}$ wohldefiniert ist, muss er einen dichten Definitionsbereich besitzen. Wenn umgekehrt

ein dicht definierter Operator A über $\mathcal{K}$ gegeben ist, kann durch Dekomposition von $\mathcal{K}$ in ein direktes Integral eine Familie $\{A(t)|t \in \mathbb{R}\}$ mit dichten Definitionsbereichen $D(A(t))$ erhalten werden, siehe Abschnitt 3.1.4.

Ist $A(t)$ eine Familie beschränkter Operatoren, so ist auch A über $\mathcal{K}$ beschränkt mit Norm $\|A\| = \operatorname{ess\,sup}_{t\in\mathbb{R}}\|A(t)\|$. Ein Spezialfall bilden die skalaren Multiplikationsoperatoren: Sei $\phi \in L^\infty(\mathbb{R})$. Dann hat der durch

$$M(\phi)\varphi(\cdot) = \phi(\cdot)\varphi(\cdot) \tag{3.9}$$

definierte Operator die Norm $\|M(\phi)\| = \|\phi\|_\infty$. Mit Hilfe der skalaren Multiplikationen kann entschieden werden, ob ein beliebiger Operator über $\mathcal{K}$ ein Multiplikationsoperator ist, ob ihm also eine operatorwertige Funktion über $\mathcal{H}$ entspricht. Das Kriterium liefert

Satz 3.1.1 *Ein beschränkter Operator A über $\mathcal{K}$ ist ein Multiplikationsoperator $\Longleftrightarrow$ A kommutiert mit allen skalaren Multiplikationen $[A, M(\phi)] = 0 \;\forall\; \phi \in l^\infty(\mathbb{R})$. Es gilt dann*

i) Die operatorwertige Funktion $A(\cdot)$ über $\mathcal{H}$ ist bis auf eine Nullmenge eindeutig bestimmt.

ii) A ist invertierbar $\Longleftrightarrow$ $A(t)$ ist fast überall invertierbar und $\operatorname{ess\,sup}\|A^{-1}(t)\| < \infty$

iii) A ist unitär $\Longleftrightarrow$ $A(t)$ ist fast überall unitär

iv) $A(t)$ ist für fast alle t ein konstanter Operator $\Longleftrightarrow$ A vertauscht mit den Translationen $[A, T_\sigma] = 0 \;\forall\; \sigma$ wobei $T_\sigma\varphi(\cdot) := \varphi(\cdot - \sigma)$

Beweis. Der Beweis findet sich in [NF]. □

Es ist leicht zu sehen, dass zu einer Schar positiver Operatoren über $\mathcal{H}$ ein Multiplikationsoperator gehört, der selbst positiv ist. Die selbe Aussage gilt auch für eine selbstadjungierte Schar:

Satz 3.1.2 *Sei $A(t) : D(A(t)) \to \mathcal{H}$ eine Familie linearer, dicht definierter Operatoren. $A(t)$ sei selbstadjungiert für alle $t \in \mathbb{R}$. Dann ist auch $A : D(A) \to \mathcal{K}$ selbstadjungiert.*

Beweis. Prüfe das grundlegende Kriterium der Selbstadjungiertheit: A ist selbstadjungiert, wenn A symmetrisch und abgeschlossen ist und $\ker(A* \pm i) = \{0\}$.

Die Symmetrie von A ist klar. Für Abgeschlossenheit ist zu zeigen:

$$\text{aus} \left\{ \begin{array}{c} D(A) \supset \{\varphi_n\} \to \varphi \in \mathcal{K} \\ A\varphi_n \to \psi \in \mathcal{K} \end{array} \right\} \text{folgt} \quad \varphi \in D(A) \quad \text{und} \quad A\varphi = \psi \tag{3.10}$$

Sei also eine Folge $\{\varphi_n\} \subset D(A)$ gegeben, die gegen ein $\varphi \in \mathcal{K}$ konvergiert. Desweiteren konvergiere $A\varphi_n$ gegen $\psi \in \mathcal{K}$. $\{\varphi_n\} \to \phi$ bedeutet $\lim\|\varphi_n - \varphi\|_\mathcal{K} = 0$. Daraus folgt [For84]: es existiert eine Teilfolge $\{\varphi_{n_\nu}\}$, die punktweise fast überall gegen φ konvergiert. Punktweise Konvergenz ist Konvergenz in $\mathcal{H}$:

$\lim\|\varphi_{n_\nu} - \varphi\| = 0$ fast überall in t. Wegen der Eindeutigkeit des Grenzwertes geht die Teilfolge gegen den selben Grenzwert wie die ursprüngliche. Daher kann statt $\{\varphi_n\}$ nun $\{\varphi_{n_\nu}\} = \{\varphi_m\}$ betrachtet werden. Mit der gleichen Argumentation findet sich eine Teilfolge $\{\varphi_{m_\mu}\}$ mit $\lim\|A(t)\varphi_{m_\mu}(t) - \psi(t)\| = 0$. Für die Folge $\{\varphi_{m_\mu}\} = \{\varphi_k\}$ gilt also fast überall: $\varphi_k(t) \in D(A(t)), \varphi_k(t) \to \varphi(t), A(t)\varphi_k(t) \to \psi(t)$. Da alle $A(t)$ selbstadjungiert sind, sind sie insbesondere abgeschlossen. Deswegen folgt $\varphi(t) \in D(A(t))$ und $A(t)\varphi(t) = \psi(t)$ fast überall. Also gilt $\varphi \in D(A)$ und $A\varphi = \psi$. Damit ist A ein abgeschlossener Operator auf $\mathcal{K}$.

Sein nun $\chi \in \ker(A^* \pm i)$. Dann löst χ die Gleichung $A^*\chi = \mp i\chi$. Auf der Ebene des Hilbertraums $\mathcal{H}$ bedeutet das $A^*(t)\chi(t) = \mp i\chi(t)$ im L^2-Sinn. Damit ist $\chi(t)$ fast überall im Kern von $A^*(t) \pm i$. Da alle $A(t)$ nach Voraussetzung selbstadjungiert sind, ist $\chi(t) = 0$ fast überall und $\chi = 0 \in \mathcal{K}$. Daraus folgt $\ker(A^* \pm i) = \{0\}$ und A ist selbstadjungiert auf $\mathcal{K}$. □

Ein weiterer spezieller Operator, der im Folgenden eine Rolle spielt, ist der Ableitungsoperator. Eine Funktion $\varphi \in \mathcal{K}$ wird als absolut stetig bezeichnet, wenn die Ableitung $d\varphi/dt = \dot{\varphi}$ fast überall im starken Sinn existiert. Die Funktion „$t \mapsto \dot{\varphi}$“ ist dann Bochner-integrierbar (siehe [Sch75]).

Definition 3.1.3 *Sei* $D(\frac{d}{dt}) = \{\varphi \in \mathcal{K} | \varphi$ *absolut stetig,* „$t \mapsto \varphi(t)$“ $\in \mathcal{K}\}$. *Dann ist der Ableitungsoperator gegeben durch*

$$\frac{d}{dt} : D(\frac{d}{dt}) \to \mathcal{K}, \quad (\frac{d}{dt}\varphi)(t) = \dot{\varphi}(t) \tag{3.11}$$

Auf diesem Definitionsbereich ist $i\frac{d}{dt}$ selbstadjungiert.

Ist H_0 ein zeitlich konstanter selbstadjungierter Operator über $\mathcal{H}$, kann seine Summe mit dem Ableitungsoperator auf Grund der Tensorproduktstruktur des Raumes $\mathcal{K}$ leicht gebildet werden und ist als Operator wesentlich selbstadjungiert

Satz 3.1.3 *Sei* H_0 *ein konstanter selbstadjungierter Operator in* $\mathcal{H}$ *mit Definitionsbereich* $D(H_0)$. *Dann ist* $H_0 - i\frac{d}{dt}$ *wesentlich selbstadjungiert auf* $D(\frac{d}{dt}) \otimes D(H_0)$.

Beweis. Der Beweis folgt direkt aus [RS80], Theorem VIII.33, oder aus der Beobachtung, dass Fouriertransformation bezüglich t den dicht definierten Operator $H_0 - i\frac{d}{dt}$ in einen reellwertigen Multiplikationsoperator überführt. Also ist $H_0 - i\frac{d}{dt}$ unitär äquivalent zu einem selbstadjungierten Operator und damit selbst selbstadjungiert. □

Wenn $H(t)$ explizit zeitabhängig ist, ist es wesentlich schwieriger, den Ableitungsoperator zu addieren. Ohne zusätzliche Voraussetzungen an $H(t)$ wird dies nicht möglich sein.

Der Begriff des Propagators soll in Hinblick auf den Satz von Howland etwas verallgemeinert werden: Die Forderung nach starker Stetigkeit in beiden Variablen wird fallen gelassen. Wenn eine beschränkte, messbare, operatorwertige Funktion $\mathbb{R}^2 \ni (t, s) \mapsto U(t, s)$ (2.2) und (2.3) Lebesgue- fast überall erfüllt,

wird sie im Folgenden als Propagator bezeichnet. Jeder Propagator kann in der Form

$$U(t,s) = U(t)U^{-1}(s) \tag{3.12}$$

geschrieben werden, wobei $U(\cdot)$ eine beschränkte, messbare, fast überall invertierbare, operatorwertige Funktion über $\mathcal{H}$ ist. $U(\cdot)$ ist eindeutig bestimmt bis auf einen konstanten Faktor ungleich Null. Der Beweis dieser Aussage ergibt sich aus der Beobachtung, dass auf Grund von (2.3) $U(t) = U(t,r)$ gewählt werden kann:

$$U(t,s) = U(t,r)U^{-1}(s,r), \quad t \geq r \geq s. \tag{3.13}$$

Der operatorwertigen Funktion $U(\cdot)$ über $\mathcal{H}$ entspricht nun wieder ein Multiplikationsoperator U über $\mathcal{K}$. Dieser kann mit Hilfe von Satz 3.1.1 charakterisiert werden.

Nun sind die Voraussetzungen vorhanden, um mit Howland Zeitentwicklungsgruppen zu definieren.

3.1.3 Zeitentwicklungsgruppen und Howlands Satz

Wie oben bemerkt, soll (3.7) als Prototyp einer Zeitentwicklungsgruppe angesehen werden. Wird erst eine inverse Translation und dann $V(\sigma)$ angewendet,

$$e^{-iK\sigma}T_\sigma^*\varphi(t) = U(t,t-\sigma)\varphi(t), \tag{3.14}$$

so zeigt die rechte Seite der Gleichung, dass es sich bei dieser Operation um die Multiplikation mit einer operatorwertigen Funktion handelt. Multiplikationsoperatoren können nach Satz 3.1.1 daran erkannt werden, dass sie mit skalaren Multiplikationen vertauschen. Das ist die Grundlage für die Definition

Definition 3.1.4 (Zeitentwicklungsgruppe) *Eine Zeitentwicklungsgruppe ist eine stark stetige, unitäre Gruppe $e^{-i\sigma K}$ über $\mathcal{K}$ für die gilt, dass $e^{-i\sigma K}T_\sigma^*$ für jedes σ eine Multiplikation mit einer operatorwertigen Funktion ist. Das heißt: $[e^{-i\sigma K}T_\sigma^*, M(\phi)] = 0 \;\forall\; \phi \in L^\infty(\mathbb{R})$. Der Generator K wird als Zeitentwicklungsgenerator bezeichnet.*

Den Zusammenhang zwischen Zeitentwicklungsgruppen und messbaren Propagatoren stellt der Satz von Howland her:

Satz 3.1.4 (Howland) *Eine stark stetige, unitäre Ein-Parameter-Gruppe $V(\sigma) = e^{-i\sigma K}$ ist eine Zeitentwicklungsgruppe $\Longleftrightarrow$ Es gibt eine messbare, unitäre, operatorwertige Funktion $U(\cdot) : \mathbb{R} \to L(\mathcal{H})$ die als Multiplikationsoperator über $\mathcal{K}$*

$$e^{-i\sigma K} = UT_\sigma U^{-1} \tag{3.15}$$

mit $U\varphi(\cdot) = U(\cdot)\varphi(\cdot)$ erfüllt.

Beweis. Für den Fall, dass die Zeitentwicklungsgruppe nur beschränkt ist, findet sich der Beweis in [How74]. Im unitären Fall bietet der Beweis, [How79a] folgend, mehr Einsicht; er reduziert sich auf J. von Neumanns Satz über die Eindeutigkeit der Darstellung der kanonischen Vertauschungsrelationen.

Dass (3.15) eine Zeitentwicklungsgruppe definiert, ist klar. Wenn umgekehrt $e^{-i\sigma K}$ eine Zeitentwicklungsgruppe ist, bedeutet dies nach der Definition 3.1.4

$$e^{-i\sigma K} T_\sigma^* M(\phi) = M(\phi) e^{-i\sigma K} T_\sigma^* \qquad \forall \phi \in L^\infty(\mathbb{R}) \tag{3.16}$$

und damit

$$e^{-i\sigma K} M(\phi) e^{i\sigma K} = T_\sigma M(\phi) T_\sigma^* = M(\phi_\sigma) \tag{3.17}$$

wobei $\phi_\sigma(\cdot) = \phi(\cdot - \sigma)$. Mit der speziellen Funktion $\phi = \chi_I$, der charakteristischen Funktion eines Intervalls I, ergibt sich das Spektralmaß E_I des skalaren Multiplikationsoperators $Q\varphi(t) = t\varphi(t)$ – sozusagen des „zeitliche Positionsoperators“ – und die letzte Gleichung wird zur kanonischen Vertauschungsrelation in integrierter Form

$$e^{-i\sigma K} E_I e^{i\sigma K} = E_{I+\sigma}. \tag{3.18}$$

Nach von Neumanns Satz über die Eindeutigkeit der Darstellung der kanonischen Vertauschungsrelationen existiert ein unitärer Operator $U : \mathcal{K} \to L^2(\mathbb{R}, \mathcal{H}')$, so dass die Vertauschungsrelationen in $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{H}')$ Schrödinger-Form annehmen

$$U^* e^{-i\sigma K} U = T'_\sigma, \qquad U^* E_I U = E'_I.$$

Mit $\mathcal{H}' = \mathcal{H}$ ergibt die erste Gleichung gerade (3.15); die zweite Gleichung stellt sicher, dass U eine Multiplikation mit einer operatorwertigen Funktion ist. □

Der Zusammenhang zu den kanonischen Vertauschungsrelationen ist plausibel: Der Generator der Zeitentwicklungsgruppe hat formal die Gestalt (3.4). $H(t)$ wird über $\mathcal{K}$ zu einer Multiplikation, die Vertauschungsrelation von K mit skalaren Multiplikationen wird damit alleine vom Anteil des Ableitungsoperators bestimmt. Mit anderen Worten: die Differenz von K und $-i\frac{d}{dt}$ ist gerade ein Multiplikationsoperator. Dass die über die Zeit parametrisierte Familie von Hamiltonoperatoren des ursprünglichen Systems als Operator über $\mathcal{K}$ diese Eigenschaft hat, geht wesentlich ein und ist durch die Struktur von $\mathcal{K}$ bedingt. Dieser Punkt soll in Abschnitt 3.1.4 noch einmal aufgegriffen werden.

Wenn zwei verschiedene Operatoren U_1 und U_2 nach Satz 3.1.4 die Äquivalenz der Translation zur selben Zeitentwicklungsgruppe vermitteln, so gilt für sie offensichtlich

$$U_1 T_\sigma U_1^{-1} = U_2 T_\sigma U_2^{-1} \quad \Rightarrow \quad [U_1^{-1} U_2, T_\sigma] = 0 \tag{3.19}$$

was nach Satz 3.1.1 bedeutet, dass $U_1^{-1} U_2$ ein konstanter Multiplikationsoperator C ist. C ist invertierbar und wegen des Zusammenhangs $U_1 = C U_2$ erzeugen beide operatorwertigen Funktionen denselben Propagator $U(t, s)$. Die

beschränkten (unitären) Zeitentwicklungsgruppen stehen also in einem eineindeutigen Zusammenhang zu den beschränkten (unitären), messbaren Propagatoren!

Ergibt sich mit Howlands Formalismus eine Lösung der zeitabhängigen Schrödingergleichung? Um Dynamik zu konstruieren, muss als erstes der Ausdruck $K = H(t) - i\frac{d}{dt}$ als dicht definierter Operator oder als quadratische Form erklärt werden. Selbstadjungiertheit auf einem entsprechenden Definitionsbereich ist zu zeigen. Ist K selbstadjungiert, so ist $\exp(-i\sigma K)$ eine stark stetige Ein-Parameter-Gruppe, in $\mathcal{K}$ ist der Satz von Stone anwendbar. Ein gegebener Anfangszustand $\psi \in \mathcal{H}$ wird eine Funktion in $\mathcal{K}$ durch Multiplikation mit einer Testfunktion, die in einem kompakten Intervall I identisch gleich Eins ist. Mit der operatorwertigen Funktion $U(t)$ aus dem Satz von Howland 3.1.4 ist $U(t,s) = U(t)U^*(s)$ ein Propagator und $\varphi_s(t) = U(t,s)\psi(t)$ eine Lösung der Schrödingergleichung für $t, s \in T$:

$$\begin{aligned}(-iK\varphi_s)(t) &= \frac{d}{d\sigma} e^{-i\sigma K} U(t,s)\psi(t)|_{\sigma=0} \\ &= \frac{d}{d\sigma} U(t, t-\sigma)U(t-\sigma, s)\psi(t-\sigma)|_{\sigma=0} \\ &= 0 \\ \Longrightarrow -i\frac{d}{dt}\varphi_s(t) &= H(t)\varphi_s(t), \qquad \varphi_s(s) = \psi\end{aligned} \tag{3.20}$$

Lösungen der zeitabhängigen Schrödingergleichung erfordern allerdings Propagatoren, die nicht nur schwach messbar, sondern stark stetig und auf einer dichten Menge differenzierbar sind. Diese Eigenschaft wird für die mit Howlands Formalismus erhaltenen Propagatoren nicht garantiert, sie muss extra gezeigt werden. In [How79b] bemerkt Howland, dass die Propagatoren stetig sind, falls K auch eine Kontraktions-Halbgruppe über $C_0(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ erzeugt. Kann K als eine „kleine“ Störung eines Operators K_0 aufgefasst werden, zu dem ein stetiger Propagator gehört, so könnte versucht werden, die Stetigkeit des gewünschten Propagators aus dieser Tatsache herzuleiten. Eine weitere Möglichkeit wäre, nachdem die Existenz eines Propagators mit Hilfe des Satzes von Howland gesichert ist, die Stetigkeit über die entsprechenden Sätze aus Kapitel 2 zu erhalten oder Methoden aus der Streutheorie zu verwenden.

Wie schon bemerkt, muss in der Praxis erst geprüft werden, ob K dicht definierbar ist. Falls ja, muss die Selbstadjungiertheit von K nachgewiesen werden, um die Existenz eines unitären Propagators zu erhalten. Die Gleichung (3.15) zeigt, dass K äquivalent zum Ableitungsoperator auf $\mathcal{K}$ ist und damit unbeschränkt. Viele Standardsätze, die in der Quantenmechanik zum Beweis von Selbstadjungiertheit dienen, funktionieren nur für positive oder halbbeschränkte Operatoren und sind deshalb hier nicht anwendbar. Methoden, auf die diese Einschränkung nicht zutrifft, sind neben dem grundlegenden Kriterium der Selbstadjungiertheit Nelsons Satz über analytische Vektoren oder das Kommutatortheorem, bei dem ein unbeschränkter Operator auf verschiedene Arten gegen einen passenden halbbeschränkten, selbstadjungierten Operator abgeschätzt wird.

Die Resolvente des Operators K kann auch aus (3.15) bestimmt werden

$$(K-\lambda)^{-1} = U\left(-i\frac{d}{dt}-\lambda\right)^{-1}U^{-1} \tag{3.21}$$

und ergibt sich nach [How74] zu

$$(K-\lambda)^{-1}\varphi(t) = \begin{cases} i\int\limits_{-\infty}^{t} ds\, e^{i\lambda(t-s)}U(t,s)\varphi(s) & \operatorname{Im}\lambda > 0 \\ -i\int\limits_{t}^{\infty} ds\, e^{i\lambda(t-s)}U(t,s)\varphi(s) & \operatorname{Im}\lambda < 0 \end{cases} \tag{3.22}$$

Howland merkt an, dass die Zeitentwicklungsgruppe $e^{-i\sigma K}$ oft nicht zugänglich ist. Nützlich ist deshalb ein Kriterium, anhand von Eigenschaften von $(K-\lambda)^{-1}$ oder K selbst Generatoren von Zeitentwicklungsgruppen zu identifizieren. Solche Kriterien liefern die folgenden beiden Sätze aus [How74], wo sich auch die Beweise finden.

Satz 3.1.5 *Eine unitäre Gruppe $e^{-i\sigma K}$ ist eine Zeitentwicklungsgruppe über $\mathcal{K}$ $\Longleftrightarrow$ Für jedes $\phi \in C_0^1(\mathbb{R})$ gilt $M(\phi)D(K) \subset D(K)$ und*

$$[K, M(\phi)] = -iM(\dot{\phi}) \quad \text{auf } D(K) \tag{3.23}$$

Dieser Satz präzisiert die oben erwähnte Beobachtung, dass K mit den skalaren Multiplikationen wie der Ableitungsoperator vertauscht, sofern K eine Zeitentwicklungsgruppe generiert. Interessant ist Satz 3.1.5 auch in Hinblick auf die geometrische Formulierung der Zeitentwicklung als Paralleltransport in Abschnitt 2.5.2: Sei $\psi \in \mathsf{H}(\mathbb{R})$ ein glatter Schnitt des Hilbertbündels H mit Basis $\mathbb{R}$. $\mathsf{H}(\mathbb{R})$ ist ein Modul über $C^\infty(\mathbb{R})$. Die Bedingung, die an eine kovariante Ableitung $\tilde{K}$ gestellt wird, lautet

$$\tilde{K}(\phi\psi) = \psi\frac{\partial}{\partial t}\phi + \phi\tilde{K}(\psi) \tag{3.24}$$

für alle $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$ und Schnitte $\psi \in \mathsf{H}(\mathbb{R})$. Diese Gleichung hat dieselbe Form wie Gleichung (3.23) mit $\tilde{K} = iK$. Diese Ähnlichkeit suggeriert, Howlands Formalismus in einem geometrischen Rahmen zu untersuchen.

Eine Bedingung an die Resolvente von K liefert der folgende Satz:

Satz 3.1.6 *Sei K der Generator einer unitären Gruppe und $R(\lambda) := (K-\lambda)^{-1}$ für $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$. Dann erzeugt K eine Zeitentwicklungsgruppe genau dann, wenn*

$$[R(\lambda), M(\phi)] = iR(\lambda)M(\dot{\phi})R(\lambda) \tag{3.25}$$

für alle $\phi \in C_0^1(\mathbb{R})$ und alle λ mit $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$ gilt.

Mit Hilfe des letzten Satzes ergibt sich eine Möglichkeit zu untersuchen, ob die Eigenschaft, eine Zeitentwicklungsgruppe zu erzeugen, in einem Grenzübergang erhalten werden kann.

Wenn K und K_n selbstadjungiert sind, kann Konvergenz im verallgemeinerten Sinn (sgs)[1] $K_n \to K$ definiert werden durch die Konvergenz der Resolventen in der Norm $(K_n - \lambda)^{-1} \to (K - \lambda)^{-1}$ für $\mathrm{Im}\,\lambda \neq 0$. Erzeugt K_n für jedes n eine Zeitentwicklungsgruppe, so gilt dies auch für den Grenzwert im verallgemeinerten Sinn

Satz 3.1.7 *Wenn K_n für jedes n eine unitäre Zeitentwicklungsgruppe erzeugt und $K_n \to K$ (sgs) konvergiert, dann ist auch K Generator einer unitären Zeitentwicklungsgruppe. Wenn $U_n(t,s)$ und $U(t,s)$ die entsprechenden Propagatoren bezeichnet, dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \int_S dtds\ (\psi, U_n(t,s)\varphi) = \int_S dtds\ (\psi, U(t,s)\varphi) \tag{3.26}$$

für alle $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$ und messbare Teilmengen S des $\mathbb{R}^2$.

Beweis. Der Beweis dieser Aussage findet sich in [How89]. □

Abschließend soll bemerkt werden, dass dem Raum $\mathcal{K}$ keine direkte physikalische Bedeutung zukommt. Die Integrierbarkeit der Funktionen in $\mathcal{K}$ erfordert ein Verschwinden der Norm der Zustände in $\mathcal{H}$ für große und kleine t. Auch ist der neue „Hamiltonoperator“ K im Allgemeinen nicht nach unten beschränkt.

Trotzdem ist Howlands Formalismus mehr als ein Kunstgriff. Er bietet gegenüber den konstruktiven Verfahren des erstem Kapitels eine deutliche Vereinfachung des Existenzbeweises für Lösungen der zeitabhängigen Schrödingergleichung – allerdings auf Kosten der Stetigkeit der Propagatoren. Vor allem aber ist die implizit angenommene Identifikation der Hilberträume zu verschiedenen Zeiten in der „faserigen“ Struktur des Raums $\mathcal{K}$ zu erkennen. Dies wird deutlich, wenn $\mathcal{K}$ als direktes Integral interpretiert wird.

3.1.4 Multiplikationen und direkte Integrale

In Howlands Strategie, eine zeitabhängige Schrödingergleichung in eine stationäre umzuwandeln, geht wesentlich ein, dass der zeitabhängigen Familie von Hamiltonoperatoren über $\mathcal{K}$ ein Multiplikationsoperator über $\mathcal{K} = L^2(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ zugeordnet wird. Dieser wird über seine Vertauschungsrelationen mit skalaren Multiplikationen charakterisiert. So gelingt es, auch bezüglich t eine Darstellung der kanonischen Vertauschungsrelationen zu realisieren.

Diesem Verfahren liegen allgemeine Eigenschaften des Hilbertraums $\mathcal{K}$ und seiner Operatoren zu Grunde. $\mathcal{K}$ ist ein Beispiel für ein direktes Integral. Die Zerlegung eines Hilbertraums in ein direktes Integral spielt für Darstellungen lokal kompakter Gruppen die Rolle, die direkte Summen für kompakte Gruppen spielen. Nahe verwandt ist dem Problem auch die Zerlegung von von-Neumann-Ringen in Faktoren, Unterringe mit trivialem Zentrum (Satz von Murray und von Neumann). Von-Neumann-Ringe sind schwach abgeschlossene $*$-Unteralgebren in $B(\mathcal{H})$, der Menge der linearen, beschränkten Operatoren über einem Hilbertraum $\mathcal{H}$. Faktoren können dann über Eigenschaften der in ihnen enthaltenen Projektoren klassifiziert werden.

[1] strongly in the generalized sense

Die hier beschriebene Konstruktion von direkten Integralen findet sich in Lehrbüchern über Operatoralgebren, siehe z.B. [Sak71].

Sei (Λ, σ) ein lokalisierbarer Maßraum. Für jedes $t \in \Lambda$ sei ein Hilbertraum $\mathcal{H}(t)$ gegeben. Mit $\mathcal{Z}$ sei die Menge der vektorwertigen Funktionen ζ über Λ bezeichnet, für die $\zeta(t) \in \mathcal{H}(t)$ gilt. Sie bildet einen linearen Raum.

Nun wird ein Messbarkeitsbegriff benötigt:

Definition 3.1.5 *Eine Familie $\{\mathcal{H}(t)|t \in \Lambda\}$ heißt messbar, falls eine abzählbare Familie $\{\zeta_n|n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{Z}$ existiert mit*

1. *$t \mapsto (\zeta_n(t), \zeta_m(t))$ ist lokal σ-messbar für alle $n, m \in \mathbb{N}$*
2. *$\{\zeta_n(t)|n \in \mathbb{N}\}$ ist dicht in $\mathcal{H}(t)$ für σ-fast alle $t \in \Lambda$.*

Sei nun eine messbare Familie $\{\mathcal{H}(t)|t \in \Lambda\}$ vorgegeben.

Definition 3.1.6 *Sei $\mathcal{V} \subset \mathcal{Z}$ ein linearer Unterraum. $\mathcal{V}$ ist messbar, falls*

1. *für $\zeta, \xi \in \mathcal{V}$ ist $t \mapsto (\zeta(t), \xi(t))$ lokal σ-messbar*
2. *es existiert eine abzählbare Familie $\{\eta_n|n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{V}$ so, dass $\{\eta_n(t)|n \in \mathbb{N}\}$ in $\mathcal{H}(t)$ dicht ist für σ-fast alle $t \in \Lambda$. Eine solche Familie heißt fundamentale Familie in $\mathcal{V}$.*

Sei nun $\{\mathcal{V}_\alpha|\alpha \in I\}$ für eine Indexmenge I die Menge aller messbaren Unterräume von $\mathcal{Z}$. Sie ist nicht leer, denn sie enthält den von der Familie $\{\zeta_n|n \in \mathbb{N}\}$ erzeugten Unterraum. Die Relation der Mengen-Inklusion definiert eine Ordnung auf $\{\mathcal{V}_\alpha|\alpha \in I\}$. Mit Hilfe des Lemmas von Zorn kann nun auf die Existenz eines maximalen Elements $\mathcal{V}_0$ geschlossen werden.

Sei $\mathcal{M}(\Lambda, \sigma)$ der lineare Raum der lokal σ-messbaren, komplexwertigen Funktionen über λ. $\mathcal{V}_0$ ist invariant unter Multiplikation mit $\mathcal{M}(\Lambda, \sigma)$, denn der lineare Raum, der von $\{f \cdot \zeta|\zeta \in \mathcal{V}_0, f \in \mathcal{M}(\Lambda, \sigma)\}$ erzeugt wird, ist wieder messbar. $\mathcal{V}_0$ ist aber maximal.

Mit Hilfe einer fundamentalen Familie $\{\eta_n(t)|n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{V}_0$ kann nun rekursiv, ähnlich zum Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren, eine abzählbare Familie $\{e_n|n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{V}_0$ konstruiert werden, so dass für σ-fast alle $t \in \Lambda$ die Familie $\{e_n(t)|n \in \mathbb{N}\}$ ein vollständiges Orthonormalsystem von $\mathcal{H}(t)$ bildet.

Nun sei $\mathcal{K}$ die Menge der Funktionen ζ aus dem maximalen messbaren Unterraum $\mathcal{V}_0$, für die

$$\int_\Lambda \|\zeta(t)\|^2 d\sigma(t) < \infty \tag{3.27}$$

gilt. Die Norm ist hierbei in $\mathcal{H}(t)$ auszuwerten. Mit ζ_1 und ζ_2 ist auch die Summe ein Element aus $\mathcal{K}$, was aus der Hölderschen Ungleichung folgt. Damit ist $\mathcal{K}$ ein linearer Raum. Darüber hinaus ist $\mathcal{K}$ ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt

$$(\xi, \zeta) := \int_\Lambda (\xi(t), \zeta(t)) d\sigma(t), \tag{3.28}$$

$\mathcal{K}$ wird als der zu $\mathcal{V}_0$ assoziierte Hilbertraum bezeichnet. Die Menge $\{L^2(\Lambda, \sigma) \cdot e_n|n \in \mathbb{R}\}$ ist dicht in $\mathcal{K}$. Es gilt der Satz [Sak71]

Satz 3.1.8 *Sei $\{\mathcal{H}(t)|t \in \Lambda\}$ eine messbare Familie von Hilberträumen. $\mathcal{V}_0$ und $\tilde{\mathcal{V}}_0$ seien zwei maximale messbare Unterräume von $\mathcal{Z}$. $\mathcal{K}$ und $\tilde{\mathcal{K}}$ seien die entsprechenden assoziierten Hilberträume. Dann existiert ein unitärer Operator $V(t)$ über $\mathcal{H}(t), t \in \Lambda$ so, dass für alle $\zeta \in \mathcal{K}$ durch $\tilde{\zeta}(t) = V(t)\zeta(t)$ eine unitäre Abbildung $\mathcal{K} \to \tilde{\mathcal{K}}, \zeta \mapsto \tilde{\zeta}$ erklärt wird.*

Zu einer gegebenen messbaren Familie von Hilberträumen $\{\mathcal{H}(t)|t \in \Lambda\}$ gibt es also einen bis auf unitäre Äquivalenz eindeutig bestimmten assoziierten Hilbertraum $\mathcal{K}$. Dieser wird als das direkte Integral

$$\mathcal{K} = \int_\Lambda \oplus \mathcal{H}(t) d\sigma(t) \tag{3.29}$$

bezeichnet.

Umgekehrt kann ein gegebener Hilbertraum $\mathcal{K}$ auch bezüglich eines Maßraums in ein direktes Integral zerlegt werden.

Jede wesentlich beschränkte Funktion $\phi : \Lambda \to \mathbb{C}$ definiert einen beschränkten Operator $M(\phi)$ über $\mathcal{K}$ durch $M(\phi)\zeta(\cdot) := \phi(\cdot)\zeta(\cdot)$ mit der Norm $\|M(\phi)\| = \operatorname{ess\,sup}_{t\in\Lambda}|\phi(t)|$. Die Gesamtheit der Operatoren $M(\phi)$ bildet eine kommutative von-Neumann-Algebra. Mit anderen Worten: zu einer gegebenen „Dekomposition“ eines Hilbertraums $\mathcal{K}$ als direktes Integral gehört eine kommutative von-Neumann-Algebra R. Es gilt nun auch die Umkehrung:

Satz 3.1.9 *Zu jedem von-Neumann-Ring R von Operatoren über einem Hilbertraum $\mathcal{K}$ gehört eine Zerlegung von $\mathcal{K}$ in ein direktes Integral. Die Elemente von R haben bezüglich der Zerlegung die Gestalt $M(\phi)$.*

Beweis. Der Beweis in [NF] beruht wesentlich auf der Tatsache, dass ein Ring der Art R aus allen Funktionen eines selbstadjungierten Operators A besteht. Die Zerlegung geschieht nun bezüglich des Spektralmaßes von A. Dort wirkt A, wie auch die wesentlich beschränkten Funktionen von A, als Multiplikation. □

Sei nun eine operatorwertige Funktion $t \mapsto A(t)$ gegeben, wobei $A(t)$ ein Operator in $\mathcal{H}(t)$ ist. $A(\cdot)$ ist messbar, falls $A(t)$ für σ-fast alle t ein Operator über $\mathcal{H}(t)$ ist. Für jede Funktion $\zeta \in \mathcal{K}$ gilt $A(t)\zeta(t) \in \mathcal{H}(t)$ für fast alle t. Wenn $A(\cdot)$ in der Norm wesentlich beschränkt ist, definiert

$$\mathcal{K} \ni \zeta \mapsto A\zeta(\cdot) := A(\cdot)\zeta(\cdot) \in \mathcal{K} \tag{3.30}$$

einen Operator der Norm $\|A\| = \operatorname{ess\,sup}\|A(t)\|$. Dieser Operator kommutiert mit allen Elementen aus R; er ist ein Element der Kommutanten R' von R. Auch hier gilt die Umkehrung: Jeder Operator $A \in R'$ ist, bezüglich der zu R gehörenden Zerlegung von $\mathcal{K}$ in ein direktes Integral, eine wesentlich beschränkte, operatorwertige Funktion. Die Aussagen des Satzes 3.1.1 gelten sinngemäß.

Alle Operatoren einer Familie $\mathcal{A} \subset R'$ können gleichzeitig „diagonalisiert“ werden. Bezeichnet $\mathcal{A}(t)$ die Menge der Operatoren $A(t)$, $A \in \mathcal{A}$, t fest gewählt, so taucht nun die Frage auf, unter welcher Bedingung $\mathcal{A}(t)$ für fast alle t irreduzibel[2] ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn R ein maximal kommutativer[3] Unterring von $\mathcal{A}'$ ist.

[2] $\mathcal{A}(t)$ irreduzibel $\Leftrightarrow \mathcal{A}(t)' = \{c \cdot \mathbb{1}\}, c \in \mathbb{C}$

[3] Algebra $R \subset \mathcal{A}'$ maximal kommutativ $\Leftrightarrow R' = R''$

Mit Hilfe dieser Aussage kann die Zerlegung in direkte Integrale benutzt werden, um von Neumanns Satz über die Faktorzerlegung[4] zu erhalten: Wenn $\mathcal{A}$ ein von-Neumann-Ring ist, wähle R als das Zentrum von $\mathcal{A}$. Es ergibt sich eine Zerlegung von $\mathcal{A}$ als direktes Integral von schwach abgeschlossenen Ringen $R(t)$, erzeugt von den irreduziblen Mengen $\mathcal{A}(t)$. $R(t)$ sind dann Faktoren, ihr Zentrum besteht aus Vielfachen der Eins.

Desweiteren kann eine Aussage über die Zerlegung von Darstellungen lokal kompakter Gruppen in irreduzible Darstellungen erhalten werden. Diese Anwendungen sollen an dieser Stelle nicht vertieft werden.

In Hinblick auf Howlands Formalismus wird klar, dass das Konzept der direkten Integrale eine Grundannahme der zeitabhängigen Quantenmechanik beinhaltet. Die Zustände $\psi(t)$ zum Zeitpunkt t sind Elemente eines Hilbertraums $\mathcal{H}(t)$. Zu verschiedenen Zeitpunkten sind verschiedene Hilberträume möglich. Diese sind aber isomorph und tragen in der Quantenmechanik auch äquivalente Darstellungen der kanonischen Vertauschungsrelationen. Deshalb lassen sie sich mit einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ identifizieren und die Struktur des direkten Integrals wird zu einem Tensorprodukt

$$\mathcal{K} = \int_{\mathbb{R}} \oplus \mathcal{H} dt = L^2(\mathbb{R}, \mathcal{H}) = L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{H} \tag{3.31}$$

Dem liegt $\mathbb{R}$ mit dem Lebesguemaß dt zu Grunde. Die Propagatoren, die sich in Howlands Formalismus ergeben, vermitteln die unitäre Äquivalenz der Darstellungen der kanonischen Vertauschungsrelationen und ähneln in ihrer Struktur den Operatoren $V(t)$ aus Satz 3.1.8. Damit ist einleuchtend, dass die Propagatoren in Howlands Formalismus nur messbar sein können.

In der Quantenfeldtheorie treten inäquivalente Darstellungen der kanonischen Vertauschungsrelationen auf. Hier wird es nicht mehr möglich sein, die Hilberträume zu verschiedenen Zeiten in natürlicher Weise miteinander zu identifizieren. Das Problem wird in Abschnitt 4.2 eine Rolle spielen. Dort kann trotz dieses Mankos eine Regularisierungsprozedur mit Hilfe von Howlands Formalismus erreicht werden.

Um aber kompliziertere Fälle zu betrachten, wird es notwendig sein, die Identifizierung der Hilberträume $\mathcal{H}(t)$ aufzugeben. Dies ist zwar auch im Rahmen der direkten Integrale möglich, aber dieser Formalismus enthält zu wenig Information, um reichhaltige Strukturen zu liefern. Interessanter wird die Beschreibung durch Bündel. Wie oben bemerkt, ist die Ähnlichkeit des Operators K mir einer kovarianten Ableitung ein weiteres Indiz, dass eine Verallgemeinerung von Howlands Formalismus für Hilbertbündel interessant sein könnte.

[4] Ein von-Neumann-Ring R ist ein „Faktor“, wenn sein Zentrum trivial ist: $R \cap R' = \{c \cdot \mathbb{1}\}, c \in \mathbb{C}$

3.2 Anwendungen und Beispiele

Was leistet Howlands Formalismus zur Lösung zeitabhängiger Schrödingergleichungen im Vergleich zur Dysonreihe oder Howlands Satz? In diesem Abschnitt sollen Beispiele in dieser Hinsicht untersucht werden. Dabei liegt das Augenmerk zum einen auf Situationen mit zeitlich veränderlichem Definitionsbereichen der zeitabhängigen Schar von Hamiltonoperatoren, zum anderen auf Wechselwirkungsanteilen, die in gewissem Sinne „singulär“ sind. Beide Fälle modellieren Situationen aus der Quantenfeldtheorie, können aber schon an einfachen quantenmechanischen Beispielen studiert werden.

3.2.1 Dyson-Propagator

Als einfachstes Beispiel soll der Fall eines Systems mit zeitabhängigem Hamiltonoperator dienen, der so einfach ist, dass die Schrödingergleichung auch mit Hilfe der Dysonreihe gelöst werden kann. Howlands Formalismus liefert dann das gleiche Ergebnis.

Sei $H(t) = H_0 + V(t)$ mit einem selbstadjungierten Operator H_0 über $\mathcal{H}$. $V(t)$ sei zu jedem Zeitpunkt ein beschränkter Operator. Als Abbildung $V : t \mapsto V(t) \in L(\mathcal{H})$ betrachtet, sei V stark stetig und in der Norm gleichmäßig beschränkt. Durch die Transformation $H_{\mathrm{ww}}(t) = e^{iH_0 t} V(t) e^{-iH_0 t}$ findet der Übergang ins Wechselwirkungsbild statt. Da die Voraussetzungen stark genug sind, kann mit Hilfe der Dyson-Reihe ein Propagator der Schrödingergleichung erhalten werden, wie in Abschnitt 2.1 beschrieben ist.

Sei nun $\mathcal{K} = L^2(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ der zu Grunde liegende Hilbertraum. Auf der dichten Teilmenge $D = C_0^1(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ ist der Ableitungsoperator $-id/dt$ wesentlich selbstadjungiert. Für $\varphi \in \mathcal{K}$ ist der beschränkte Operator H_{ww} durch $H_{\mathrm{ww}}\varphi(\cdot) = H_{\mathrm{ww}}(\cdot)\varphi(\cdot)$ erklärt. Wegen der Beschränktheit von H_{ww} ist die Differenz

$$K := H_{\mathrm{ww}} - i\frac{d}{dt} \tag{3.32}$$

auf D erklärt und auch wesentlich selbstadjungiert. K ist der Generator einer Zeitentwicklungsgruppe: Sei $\phi \in C^1(\mathbb{R})$. Dann ist $M(\phi)D \subset D$ und für $\varphi \in \mathcal{K}$ gilt

$$KM(\phi)\varphi = M(\phi)K\varphi - iM(\dot{\phi})\varphi \tag{3.33}$$

und Satz 3.1.5 liefert die Behauptung. Der Satz von Howland sagt nun: Es existiert ein Propagator $\tilde{U}(t,s)$ so, dass

$$e^{-i\sigma K}\varphi(t) = \tilde{U}(t, t-\sigma)\varphi(t-\sigma) \tag{3.34}$$

gilt. Unter den obigen Voraussetzungen an $V(t)$ konvergiert auch die Dysonreihe. Der Propagator ist in beiden Fällen derselbe: Sei $\tilde{U}$ der Multiplikationsope-

rator über $\mathcal{K}$, der aus dem Dysonpropagator für $s = 0$ entsteht

$$\begin{aligned}\tilde{U}(t) &= \tilde{U}(t,0) \\ &= \mathbb{1} + \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdot \ldots \cdot \int_0^{t_{n-1}} dt_n H_{\mathrm{ww}}(t_1) \cdot \ldots \cdot H_{\mathrm{ww}}(t_n).\end{aligned} \tag{3.35}$$

$\tilde{U}$ wirkt als Intertwiner, vermittelt zwischen den Darstellungen der Translationen auf $\mathcal{K}$: Durch gliedweise Differentiation – oder mit dem Wissen, dass der Dysonpropagator die Schrödingergleichung im Wechselwirkungsbild löst – ergibt sich

$$K\tilde{U} = \tilde{U}\left(-i\frac{d}{dt}\right) \tag{3.36}$$

In integrierter Form ist das Gleichung (3.15), der Dysonpropagator ist mit dem in Howlands Formalismus erzeugten Propagator identisch. Insbesondere folgt die Stetigkeit des Propagators aus der Stetigkeit der Dysonreihe.

Nun kann noch ins Schrödingerbild rücktransformiert werden: Sei $W = \exp(-iH_0 t)$ als unitärer Multiplikationsoperator über $\mathcal{K}$ gegeben. Wenn $\exp(-i\sigma K$ eine Zeitentwicklungsgruppe ist, dann gilt dies auch für $W \exp(-i\sigma K)W^*$. Aus (3.34) folgt dann

$$\left(We^{-i\sigma K\varphi}W^*\right)(t) = e^{-itH_0}\tilde{U}(t, t-\sigma)e^{i(t-\sigma)H_0}\varphi(t-\sigma) \tag{3.37}$$

und damit

$$U(t,s) = e^{-itH_0}\tilde{U}(t,s)e^{isH_0}. \tag{3.38}$$

3.2.2 Punktförmige Störung

Eine notwendige Bedingung für die Anwendung des Satzes von Yosida auf ein zeitabhängiges Problem aus der Quantenmechanik ist die zeitliche Konstanz des Definitionsbereichs des Hamiltonoperators. Diese Bedingung ist sehr restriktiv. Leicht kann ein Beispiel konstruiert werden, bei dem sich der Definitionsbereich des Hamiltonoperators beim „Einschalten“ eines Störterms ändert. Howlands Formalismus kann auch in diesem Fall angewendet werden und liefert die Existenz eines unitären Propagators.

Betrachte den zeitabhängigen Hamiltonoperator, der formal durch den Ausdruck

$$H(t) = H_0 + c(t)\delta(x), \qquad H_0 = -\frac{d^2}{dx^2} \tag{3.39}$$

über $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$ gegeben ist. $c \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ sei eine nicht negative Testfunktion. Der Störterm ist eine symbolische Schreibweise für die quadratische Form

$$d_t(\varphi, \psi) = c(t)\overline{\varphi(0)}\psi(0), \qquad \varphi, \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}). \tag{3.40}$$

Diese Form ist nicht abschließbar und kann nicht durch einen Operator dargestellt werden. Trotzdem kann der Formsumme mit dem freien Hamiltonoperator mit Hilfe des KLMN-Theorems [RS75] oder Anhang A.1.4, Sinn gegeben werden: Sobolevs Lemma garantiert zu jedem $a > 0$ die Existenz einer positiven Zahl b, so dass

$$d_t(\varphi,\varphi) \leq c(t)\|\varphi\|_\infty \leq c(t)\left(a(\varphi,-\frac{d}{dx}\varphi)+b\|\varphi\|\right) \tag{3.41}$$

gilt. Wähle a so klein, dass $\sup_{t\in\mathbb{R}} c(t)a < 1$, dann liefert das KLMN-Theorem zu festem t einen eindeutig bestimmten selbstadjungierten Operator $H(t)$ mit

$$(\varphi, H(t)\psi) = (\varphi, H_0\psi) + d_t(\varphi,\psi) \tag{3.42}$$

auf dem Form-Definitionsbereich des freien Hamiltonoperators $Q(H(t)) = Q(H_0)$. Wenn t nicht im Träger von c liegt, ist der Operator mit dem freien Hamiltonoperator identisch. Ist jedoch $c(t) > 0$, so ist dies nicht mehr der Fall. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit ein t gewählt mit $c(t) = 1$. $D(H(t))$ enthält die Funktionen φ, für die $-d^2/dx^2\varphi(x) + \delta(x)\varphi(x)$ quadratintegrabel ist, wobei die Differentiation distributionell aufgefasst wird. So ist eine Funktion φ mit kompaktem Träger, die überall glatt ist, aber in einer Umgebung des Ursprungs wie $1+\frac{1}{2}|x|$ aussieht, im Definitionsbereich von $H(t)$. Der Term proportional zur Delta-Distribution, der bei der Differentiation des Betrages entsteht, hebt sich genau mit dem Delta-Störterm weg. Der Definitionsbereich des Operators, der zur Formsumme (3.42) gehört, entspricht bei eingeschalteter Störung nicht mehr dem Definitionsbereich des freien Hamiltonoperators. Yosidas Theorem ist also nicht geeignet, um Lösungen der zeitabhängigen Schrödingergleichung zu erhalten.

Um die Dynamik mit Hilfe von Howlands Formalismus zu konstruieren, soll

$$K = H - i\frac{d}{dt} \tag{3.43}$$

als selbstadjungierter Operator über dem Funktionenraum $\mathcal{K} = L^2(\mathbb{R},\mathcal{H})$ erklärt werden. H ist dabei der Operator, der durch $(H\varphi)(\cdot) = H(\cdot)\varphi(\cdot)$ auf dem zu (3.8) analogen Definitionsbereich gegeben ist. Wesentliche Selbstadjungiertheit von K auf $D = C_0^\infty(\mathbb{R}) \otimes C_0^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{K}$ ergibt sich nun durch Anwendung des Kommutatortheorems, [RS75] oder Anhang A.1.5. K ist ein unbeschränkter Operator, kann aber gegen einen positiven, selbstadjungierten Operator N abgeschätzt werden: gilt $K^2 \leq \alpha N^2$ und $\pm[K,N] \leq \beta N$ für positive Konstanten α,β als quadratische Formen auf D, so folgt die wesentliche Selbstadjungiertheit von K auf diesem Definitionskern.

Mit den Konstanten a, b aus der Anwendung des KLMN-Theorems wähle $A = \max\{1, a\|\dot{c}\|_\infty\}$ und $B = \max\{1, b\|\dot{c}\|_\infty\}$ und betrachte den Operator

$$N = (AH_0 + B)^2 + c\delta_x - \frac{d^2}{dt^2} \tag{3.44}$$

auf $D \subset \mathcal{K}$. Der δ-Term bezieht sich auf die räumliche Variable x und ist wie oben stellvertretend für die Formsumme zu verstehen. N ist positiv - insbesondere größer Eins - und wesentlich selbstadjungiert. Mit Hilfe des Kommutators

$$[c\delta_x, -i\frac{d}{dt}] = i\dot{c}\delta_x \tag{3.45}$$

und der Abschätzung

$$\begin{aligned}(\varphi, \dot{c}\delta_x\varphi)_{\mathcal{K}} &= \int dt\ \dot{c}(t)\overline{\varphi(t,0)}\varphi(t,0) \\ &\leq \sup_{t\in\mathbb{R}}|\dot{c}(t)| \int dt \int dx \left(a\overline{\varphi(t,x)}(-\frac{d^2}{dx^2}\varphi(t,x)) + b\overline{\varphi(t,x)}\varphi(t,x)\right) \\ &= \|\dot{c}\|_\infty \left(a(\varphi, -\varphi'')_{\mathcal{K}} + b\|\varphi\|^2_{\mathcal{K}}\right)\end{aligned} \tag{3.46}$$

ergibt sich

$$[c\delta_x, -i\frac{d}{dt}] \leq AH_0 + B. \tag{3.47}$$

Damit kann eine Bedingung des Kommutatortheorems gezeigt werden: Auf D gilt

$$\begin{aligned}\pm[K,N] &= \pm\left([c\delta_x, -\frac{d^2}{dt^2}] + [-i\frac{d}{dt}, c\delta_x]\right) \\ &= \pm\left([c\delta_x, -i\frac{d}{dt}](-i\frac{d}{dt}) + (-i\frac{d}{dt})[c\delta_x, -i\frac{d}{dt}] + [-i\frac{d}{dt}, c\delta_x]\right) \\ &\leq \left([c\delta_x, -i\frac{d}{dt}]\right)^2 - \frac{d^2}{dt^2} + |[-i\frac{d}{dt}, c\delta_x]| \\ &\leq 2\left((AH_0+B)^2 - \frac{d^2}{dt^2}\right) \leq 2N,\end{aligned}$$

da $AH_0 + B > 1$. Auch die Bedingung an den Operator K selbst ist erfüllt:

$$\begin{aligned}K^2 = \left(H - i\frac{d}{dt}\right)^2 &\leq \left(H - \frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2} + \frac{1}{2}\right)^2 \\ &\leq \left(AH_0 + B + c\delta_x - \frac{d^2}{dt^2}\right)^2 \\ &\leq \left((AH_0+B)^2 + c\delta_x - \frac{d^2}{dt^2}\right)^2 = N^2.\end{aligned}$$

Damit folgt aus dem Kommutator-Theorem die wesentliche Selbstadjungiertheit von K auf D.

K ist der Generator einer Zeitentwicklungsgruppe im Sinne Howlands, denn offensichtlich erfüllt K das Kriterium 3.1.5. Die Multiplikation mit einer differenzierbaren Funktion $\phi \in C_0^1(\mathbb{R})$ lässt D invariant und vertauscht mit K in der richtigen Weise

$$[K, M(\phi)] = -iM(\dot{\phi}). \tag{3.48}$$

Der Satz von Howland garantiert nun die Existenz eines messbaren, unitären Propagators $U(t,s)$ so, dass

$$e^{-i\sigma K}\varphi(t) = U(t, t-\sigma)\varphi(t-\sigma) \tag{3.49}$$

erfüllt ist.

Das Beispiel eines Hamiltonoperators mit punktförmigem Störterm zeigt, dass die Anwendung von Howlands Formalismus auch dann möglich ist, wenn die Voraussetzungen des Theorems von Yosida offenbar verletzt sind. Gerade die Zeitabhängigkeit des Definitionsbereichs des Hamiltonoperators tritt auch in Beispielen aus der Quantenfeldtheorie mit lokaler Wechselwirkung auf. Die Anwendbarkeit von Howlands Formalismus bei zeitabhängigen Definitionsbereichen lässt hoffen, dass mit seiner Hilfe Fortschritte in Hinblick auf die Erzeugung lokaler S-Matrizen erzielt werden können. Der Preis, der für die schwächeren Voraussetzungen zu zahlen ist, ist das Fehlen von Stetigkeitsaussagen und einer Konstruktionsvorschrift. Da in der Quantenfeldtheorie aber nicht direkt der Zeitentwicklungsoperator, sondern der Streuoperator im Wechselwirkungsbild interessiert, sollte dieser Nachteil nicht zu gravierend sein.

3.2.3 „kicked particle“

Dieses Beispiel betrachtet die zeitliche Lokalisierung einer Wechselwirkung im Extremfall. Ein freies Teilchen erhält zum Zeitpunkt $t = 0$ einen „Tritt“, d.h. ein infinitesimal kurzer Kraftstoß verursacht eine endliche Impulsänderung. In diesem Fall kann kein stetiger Propagator erwartet werden. Howlands Methode erzeugt einen messbaren Propagator und gibt deshalb Anlass zu der Vermutung, eine dem Problem angemessene Beschreibung zu liefern.

Liegt der Nullpunkt nicht im betrachteten Zeitintervall, sollte der Propagator mit der freien Zeitentwicklung übereinstimmen. Im Augenblick $t = 0$ erfährt der freie Zustand eine Änderung, der Propagator unterscheidet sich von $\exp(-itH_0)$.

Der Hamiltonoperator des „kicked particle“ lautet formal

$$H(t) = \frac{1}{2m}p^2 + V\delta(t) = H_0 + V(t), \tag{3.50}$$

V sei ein linearer, beschränkter, selbstadjungierter Operator in $\mathcal{H}$. Der Deltadistributions-Term bewirkt, dass $H(t)$ nicht als Operator, aber auch nicht als quadratische Form interpretiert werden kann.

Trotzdem soll im folgenden das Wechselwirkungsbild angewendet werden. Kann dort dem formale Ausdruck Sinn gegeben werden, so trifft dies auch im Schrödingerbild zu. $H_{\mathrm{ww}}(t) = \tilde{V}\delta(t), \tilde{V} = \exp(itH_0)V\exp(-itH_0)$. Die Tilde sei im Folgenden unterdrückt.

Als erster Schritt muss dem formalen Ausdruck $K = V\delta - i\frac{d}{dt}$ ein Sinn als Operator über $\mathcal{K}$ gegeben, dann die Voraussetzungen des Satzes von Howland überprüft werden.

Fortsetzung des Ableitungsoperators

Betrachte den Operator $A = -id/idt$ auf dem Definitionsbereich $D(A) = \{\varphi \in C_0^1(\mathbb{R}, \mathcal{H}) \mid \varphi(0) = 0\}$. A ist ein symmetrischer, aber nicht selbstadjungierter Operator. Denn der adjungierte Operator $A^* = d/idt$ ist auf der größeren Menge $D(A^*) = AC(\mathbb{R}, \mathcal{H}) \cap L^2(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ definiert. $AC(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ bezeichne dabei die absolut stetigen, $\mathcal{H}$-Vektorwertigen Funktionen.

Das Verschwinden der Funktionen aus $D(A)$ im Nullpunkt schränkt A zu stark ein. Die Strategie ist, den Definitionsbereich von A etwas zu vergrößern. Damit schrumpft $D(A^*)$. K soll erklärt werden als selbstadjungierte Fortsetzung von A. Es kann passieren, dass viele selbstadjungierte Fortsetzungen eines Operators existieren. Dann muss diejenige ausgewählt werden, die das System physikalisch angemessen beschreibt. Zur Bestimmung der Fortsetzungen dient die Theorie der Defekträume, [RS75]. Die Defekträume $\mathcal{N}_\pm$ sind gegeben durch $\mathrm{Ker}(i \mp A^*) = \mathrm{Ran}(i \pm A)^\perp$. Nach dem grundlegenden Kriterium der Selbstadjungiertheit ist die Dimension der Defekträume gleich Null für einen selbstadjungierten Operator. Sind die Dimensionen der Defekträume – Defektindizes genannt – von Null verschieden aber gleich, so gibt es selbstadjungierte Fortsetzungen. Diese stehen in eineindeutigem Zusammenhang mit den partiellen Isometrien, die $\mathcal{N}_-$ auf $\mathcal{N}_+$ abbilden.

Die Gleichung

$$A^*\varphi = \pm i\varphi \tag{3.51}$$

hat die Lösungen in $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{H})$

$$\varphi_\pm = \theta(\pm t) e^{\mp t}\chi, \qquad \chi \in \mathcal{H} \tag{3.52}$$

$\theta(t)$ bezeichnet die Heaviside-Distribution. Damit hat A die Defekträume $\mathcal{N}_\pm = \{\varphi = \theta(\pm t)\ e^{\mp t}\chi \mid \chi \in \mathcal{H}\text{beliebig}\}$, die Defektindizes (n_+, n_-) sind beide unendlich. Zu jeder partiellen Isometrie $\mathcal{S} : \mathcal{N}_- \mapsto \mathcal{N}_+$ existiert eine Fortsetzung A_S von A auf dem Definitionsbereich

$$D(A_S) = \{\varphi_0 + \varphi_- + \mathcal{S}\varphi_- \mid \varphi_0 \in D(A); \varphi_- \in \mathcal{N}_-\} \tag{3.53}$$

Da jede symmetrische Fortsetzung von A in A^* enthalten ist, wird A_S auf $D(A_S) \subset D(A^*)$ erklärt durch

$$A_S\psi = A^*(\varphi_0 + \varphi_- + \mathcal{S}\varphi_-) = A\varphi_0 + i\varphi_- - i\mathcal{S}\varphi_- \tag{3.54}$$

für alle $\psi \in D(A_S)$. Im vorliegenden Fall bildet $\mathcal{S}$ t auf $-t$ ab. Darüber hinaus kann χ durch eine unitäre Abbildung S in einen anderen Vektor $S\chi$ transformiert werden. Wird speziell $S = \exp(-iV)$ gewählt, so ist A_V als selbstadjungierte Erweiterung von $-id/idt$ erklärt durch:

$$\begin{aligned} D(A_V) &= \{\varphi_0 + \theta(-t)\chi e^t + \theta(t)\ \left(e^{-iV}\chi\right) e^{-t} \mid \varphi_0 \in C_0^1(\mathbb{R}, \mathcal{H}), \varphi_0(0) = 0, \chi \in \mathcal{H}\} \\ A_V\psi &= \frac{d}{idt}\varphi_0 + i\theta(-t)\chi e^t - i\theta(t)\ \left(e^{-iV}\chi\right) e^{-t} \quad \text{für } \psi \in D(A_V) \end{aligned} \tag{3.55}$$

Mit diesem Definitionsbereich ist A_V ein selbstadjungierter Operator über $\mathcal{K}$. Der „Howland-Hamiltonian“ K wird nun erklärt durch Identifikation mit A_V.

K generiert eine Zeitentwicklungsgruppe über $\mathcal{K}$. Dies ergibt Satz 3.1.5: Sei $g \in C_0^1(\mathbb{R})$. Es gilt $C_0^1(\mathbb{R}) \cdot D(A) \subset D(A)$. Die Fortsetzung im Nullpunkt bleibt von der Multiplikation von $D(A)$ mit einer stetigen Funktion mit kompaktem Träger unbeeinflusst. Sei $\psi \in D(K)$. K wirkt als Ableitungsoperator, es gilt die Produktregel

$$KM(g)\psi = -iM(\frac{d}{dt}g)\psi + M(g)K\psi \tag{3.56}$$

Damit lautet der Kommutator

$$[K, M(g)] = -iM(\dot{g}). \tag{3.57}$$

und K generiert eine Zeitentwicklungsgruppe nach Howland. Der Satz 3.1.4 kann auf $\exp(-i\sigma K)$ angewendet werden. Dieser Satz sichert nun die Existenz eines messbaren Propagators.

Der Propagator

Nach Satz 3.1.4 existiert eine Familie messbarer Propagatoren $\tilde{U}(t) : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}$ in der Weise, dass $\tilde{U}(t,s) = \tilde{U}(t)\tilde{U}(s)^*$ und

$$\left(e^{-i\sigma K}\psi\right)(t) = \tilde{U}(t, t-\sigma)\psi(t-\sigma) \tag{3.58}$$

gilt. Wie sieht der Propagator $\tilde{U}(t,s)$ aus? Setze $s = t - \sigma$ und betrachte

$$\psi_s(t) = \tilde{U}(t,s)\psi(s) = \left(e^{-i(t-s)K}\psi\right)(t) \tag{3.59}$$

Der Index s gibt den Zeitpunkt an, zu dem Anfangsbedingungen festgelegt sind. Zwei Fälle müssen unterschieden werden:

1. Falls $0 \notin [s,t]$ ist $K = \frac{d}{idt}$, also der Generator der Translationen in t. Es ergibt sich

   $$\left(e^{-i(t-s)K}\psi\right)(t) = \left(T_{t-s}\right)\psi(t) = \psi(t-t+s) = \psi(s) \tag{3.60}$$

   Also ist

   $$\tilde{U}(t,s) = \mathbb{1} \tag{3.61}$$

2. Falls $0 \in [s,t]$: Wenn $\psi \in D(K)$, dann unterscheiden sich der links- und rechtsseitige Grenzwert von $\psi(t)$ in $t = 0$ um die unitäre Transformation $S = e^{iV}$.

   $$\lim_{t\uparrow 0}\psi(t) = \chi, \qquad \lim_{t\downarrow 0}\psi(t) = e^{-iV}\chi \tag{3.62}$$

   Da der Propagator in jeden Intervall, das nicht den Nullpunkt enthält, konstant gleich dem Einsoperator ist, folgt aus der Faktorisierung (2.3) des Propagators

   $$\tilde{U}(t,s) = e^{-iV} \quad \text{falls } s < 0 < t \tag{3.63}$$

Macht man die Transformation ins Wechselwirkungsbild rückgängig, erhält man aus (3.61) und (3.63) den Propagator $U(t,s)$, der zu $H = H_0 + V\delta(t)$ gehört:

$$U(t,s) = \begin{cases} e^{-i(t-s)H_0} & \text{falls } 0 \notin [s,t] \\ e^{-itH_0}e^{-iV}e^{isH_0} & \text{sonst.} \end{cases} \tag{3.64}$$

Außer im Nullpunkt ist der Propagator mit dem freien Propagator identisch, den man aus der Integration der freien Schrödingergleichung erhält. Im Augenblick $t = 0$ erfährt der Zustandsvektor eine unitäre Transformation. Gleichung (3.63) liefert auch die S-Matrix: der Grenzübergang ist trivial

$$S = e^{-iV}. \tag{3.65}$$

Dieses Ergebnis erscheint der Situation angemessen und rechtfertigt nachträglich die Identifikation des Operators K mit der selbstadjungierten Fortsetzung A_V des Ableitungsoperators.

3.2.4 Streutheorie

Eine Mögliche Anwendung von Howlands Formalismus besteht in der Streutheorie [How74]. Howland zeigt, dass man Wellenoperatoren und Streumatrix für das zeitabhängige, quantenmechanische System erhält, indem man die üblichen Methoden der stationären Streutheorie auf $id/d\sigma\varphi = K\varphi$ über $\mathcal{K}$ anwendet.

In der Streutheorie werden Zustände betrachtet, die sich asymptotisch wie freie Zustände verhalten. Wenn mit $U_0(t,s)$ und $U(t,s)$ Lösungen der zeitabhängigen Schrödingergleichung als stetige Propagatoren gegeben sind – einmal zum freien Hamiltonoperator H_0 und einmal mit einem Potential $H(t) = H_0 + V(t)$ – geschieht diese Betrachtung mit Hilfe der Wellenoperatoren. Diese werden als Grenzwert der Zeitentwicklung definiert

$$W_\pm(s) := \lim_{t\to\pm\infty} U_0(s,t)U(t,s) \tag{3.66}$$

und hängen in zeitabhängigen Modellen explizit von gegebenen Anfangsbedingungen zur Zeit s ab. In welcher Topologie der Grenzwert zu verstehen ist, kann in unterschiedlichen Problemen variieren. Hier sei die starke Operatortopologie zu Grunde gelegt.

Auch der S-Operator bezieht sich auf die Anfangsbedingung

$$S(s) = W_+(s)W_-(s)^{-1} \qquad s\text{: Anfangsbedingungen zur Zeit } s. \tag{3.67}$$

Mit Hilfe der freien und der vollen Zeitentwicklung kann ein anderer Bezugszeitpunkt erreicht werden

$$W_\pm(t) = U_0(t,s)W_\pm(s)U(t,s) \tag{3.68}$$

$$S(t) = U_0(t,s)S(s)U_0(s,t). \tag{3.69}$$

Üblicherweise wird die S-Matrix wie in Abschnitt 2.1.2 auf den Zeitpunkt $t = 0$ bezogen: $S := S(0)$.

Aus der Existenz von $U(t,s)$ und $U_0(t,s)$ als unitäre Operatoren über $\mathcal{H}$ folgt wie in Gleichung (3.7) die Existenz von K und K_0 als Generatoren von Zeitentwicklungsgruppen über $\mathcal{K}$. Falls auch die Wellenoperatoren über $\mathcal{H}$ existieren, ergibt sich die Existenz der „Wellenoperatoren“ über $\mathcal{K}$

$$\mathcal{W}_\pm := \lim_{\sigma\to\pm\infty} e^{i\sigma K} e^{-i\sigma K_0}. \tag{3.70}$$

Diese Operatoren wirken als Multiplikationen: $\mathcal{W}_\pm = M(W_\pm(t))$. Auch der S-Operator ergibt sich wie üblich zu $\mathcal{S} = \mathcal{W}_+\mathcal{W}_-^{-1}$ und beschreibt die Multiplikation mit $S(t)$. Mit Hilfe der Multiplikation U_0 mit der freien Zeitenwicklung $U_0(t,0)$ ergibt sich $U_0\mathcal{S}U_0^{-1}$ zur Multiplikation mit dem konstanten Streuoperator S.

Wenn nun die Propagatoren der zeitabhängigen Schrödingergleichung nicht bekannt sind, kann Howlands Formalismus angewendet werden. Sind $e^{-i\sigma K}$ und $e^{-i\sigma K_0}$ als Zeitentwicklungsgruppen gegeben, so liefert der Satz von Howland die Existenz messbarer Propagatoren. Kann die Existenz von Wellenoperatoren und S-Matrix über $\mathcal{K}$ gezeigt werden, so existieren auch die Wellen- und Streuoperatoren über $\mathcal{H}$. Dies ist die Aussage des folgenden Satzes, der zeigt, wie die Streutheorie der zeitabhängigen Schrödingergleichung mit Hilfe von Howlands Formalismus auf den stationären Fall reduziert werden kann.

Satz 3.2.1 *$\mathcal{W}_+$ existiert über $\mathcal{K}$ $\Longleftrightarrow$*

$$W_+ = s\lim_{\sigma\to\infty} \frac{1}{h}\int_0^h U_0(t+\sigma)^{-1}U(t+\sigma)\,dt \tag{3.71}$$

existiert als Operator über $\mathcal{H}$ für alle $h > 0$. U_0 ist die operatorwertige Funktion, die als Multiplikation zwischen der Zeitentwicklungsgruppe $e^{-i\sigma K_0}$ und der Translation T_σ vermittelt. U ist entsprechend gegeben. Es gilt $U_0^{-1}\mathcal{W}_+U = M(W_+)$. Existiert auch $\mathcal{S} = \mathcal{W}_+\mathcal{W}_-^{-1}$, so ist $U_0\mathcal{S}U_0^{-1}$ die Multiplikation mit dem konstanten Operator S.

Für W_- gilt die entsprechende Aussage. Der Beweis findet sich in [How74], dort wird die Aussage auch noch etwas verschärft.

Um die Existenz und asymptotische Vollständigkeit der Wellenoperatoren für das durch K und K_0 gegebene Streuproblem über $\mathcal{K}$ zu zeigen, stehen viele ausgefeilte Techniken zur Verfügung [RS79], [BW83]. Ein Beispiel ist Cooks Methode (Satz A.2.1).

Kapitel 4

Der Formalismus in der QFT

4.1 Das van Hove-Modell

Das van-Hove-Modell beschreibt das skalare, massive Bosonfeld in Wechselwirkung mit einer klassischen, äußeren Quelle. Als ein Spielzeugmodell dient es zum Test der Howland-Methode in einer einfachen Quantenfeldtheorie.

Das van-Hove-Modell wurde zuerst als einfachste Beschreibungen der Kernwechselwirkungen formuliert. Im Grenzfall punktförmiger Quelle treten UV-Divergenzen auf, Renormierung ist nötig.

Insbesondere soll hier das Modell mit einer zeitabhängigen Quelle untersucht werden. Der Propagator kann explizit berechnet werden, weshalb sich das Modell gut zum Vergleich mit der Howland-Methode eignet. Interessant hierbei ist, ob Howlands Formalismus auch in den zu diskutierenden singulären Grenzfällen des Modells greift und ob hieraus Schlüsse für die Anwendung in realistischeren Modellen gezogen werden können.

Ein klassisches Feld in Wechselwirkung mit einer Quelldichte $\rho(t, \mathbf{x})$ genügt der Feldgleichung

$$\left(\Box + m^2\right) \varphi = \rho \tag{4.1}$$

Diese „inhomogene Klein-Gordon-Gleichung“ motiviert dazu, die Quantentheorie des freien Bosonfelds um eine einfache Wechselwirkung zu erweitern.

Fügt man zu der Theorie des freien, skalaren, neutralen Bosonfelds eine äußere, unquantisierte Quelle hinzu, so ergibt sich das van-Hove-Modell[1]. Die Quelle wird beschrieben durch eine glatte Funktion $\rho(t, \mathbf{x})$ mit kompaktem Träger. Der Hamiltonoperator des „wechselwirkenden“ Systems erweist sich als unitär äquivalent zu dem der freien Theorie. Das Modell ist lösbar.

Eine Streutheorie des van-Hove-Modells kann erstellt werden, sie erweist sich für zeitunabhängige Quelldichte als trivial. Die Zeitentwicklung kann explizit berechnet werden.

Trotz der Einfachheit des Modells treten als Grenzfälle typische Probleme der Quantenfeldtheorie auf. Das van-Hove-Modell kann als eine feldtheoretische Beschreibung von Mesonen aufgefasst werden. Ihre Wechselwirkung mit Nukleonen wird durch den Quellterm ρ approximiert. Wird der Grenzübergang $\rho \to \delta$

[1] 1952 von L. van Hove in [vH52]

zu einer punktförmigen Quelldichte vollzogen, kann dieser singuläre Quellterm als Einfluss eines Nukleons auf das Mesonfeld interpretiert werden. Wie sich zeigt, ist die Dynamik in diesem Fall nicht mehr als ein Operator im Fockraum der freien Felder implementierbar. Es treten Divergenzen von verschiedenem Grad auf - insbesondere ist der Zeitentwicklungsoperator divergent, während die S-Matrix als Operator erhalten bleibt. Dies entspricht der Erwartung, die auch an realistischere Modelle mit einer lokalisierten Wechselwirkung gestellt wird; die Streumatrix verhält sich als Operator im Fockraum freier Felder besser als die Zeitentwicklung selbst.

Das van-Hove-Modell beschreibt allerdings keine echte wechselwirkende Theorie. Die Rückwirkung der Mesonen auf das Nukleon wird vernachlässigt. In einem etwas realistischeren Modell tritt an die Stelle der Quelldichte ρ ein Fermionenstrom der Form $:\overline{\psi}(x)\psi(x):$. Es entsteht das Yukawa-Modell der Kernwechselwirkung, das z. B. in [Gli85b] behandelt wird. In diesem Sinne ist das van-Hove-Modell eine stark vereinfachte Beschreibung der Kernkräfte.

Mathematisch rigoros wird das van-Hove-Modell in [Coo61] behandelt. In [Emc72] und [Key] finden sich Darstellungen, die den Schwerpunkt mehr auf die physikalischen Konsequenzen setzen.

4.1.1 Der Hamiltonoperator

Um einen Ansatz für den Hamiltonoperator im van-Hove Modell zu finden, wird das entsprechende klassische System betrachtet. Ausgehend von der Feldgleichung (4.1) und der zugehörigen klassischen Hamiltondichte wird dem freien Hamiltonoperator (1.35) ein zeitabhängiger Wechselwirkungsterm hinzugefügt

$$H(t) = H_0 + \int d^3\mathbf{x}\, \varphi(0,\mathbf{x})\rho(t,\mathbf{x}) = H_0 + \varphi(\hat{\rho}_t). \tag{4.2}$$

Dabei ist $\hat{\rho}_t$ die Quelldichte im Impulsraum, gegeben durch

$$\hat{\rho}_t(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3\mathbf{x}\, e^{-i\mathbf{kx}}\rho(t,\mathbf{x}). \tag{4.3}$$

Der Operator $H(t)$ ist für jedes fixierte $t \in \mathbb{R}$ auf $D(H(t)) = \mathcal{F}$, dem dichten Unterraum der Vektoren finiter Teilchenzahl und schnell abfallenden Wellenfunktionen, definiert und symmetrisch. Mit Hilfe des Satzes von Kato-Rellich ergibt sich, dass $H(t)$ auf $\overline{D(H_0)}$ selbstadjungiert und auf jedem Definitionskern von H_0 wesentlich selbstadjungiert ist. Um den Satz von Kato-Rellich [RS75], A.1.3 anwenden zu können, muss gezeigt werden, dass $\varphi(\hat{\rho}_t)$ H_0-beschränkt mit Schranke kleiner Eins ist.

Als erstes muss sichergestellt sein, dass $\varphi(\hat{\rho}_t)$ auf $D(H_0)$ definiert ist. Es genügt, Erzeuger und Vernichter zu untersuchen. Zwischen den Hilberträumen zur Teilchenzahl n und $n+1$ bzw. $n-1$ sind Erzeuger und Vernichter beschränkte Operatoren, deshalb ergeben sich die Abschätzungen

$$\|a(\hat{\rho}_t)\psi\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|(a(\hat{\rho}_t)\psi)^{(n)}\|^2 \leq \|\hat{\rho}_t\|^2 \sum_{n=0}^{\infty} n\|\psi^{(n)}\|^2 \quad \forall\psi \in D(H_0) \tag{4.4}$$

und

$$\|a^*(\hat{\rho}_t)\psi\|^2 \leq \|\hat{\rho}_t\|^2 \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\|\psi^{(n)}\|^2 \quad \forall\psi \in D(H_0). \tag{4.5}$$

Diese Reihen konvergieren, da der Ein-Teilchen-Hamiltonoperator von unten durch die Masse m beschränkt ist:

$$\infty > \|H_0\psi\| \geq m^2 \sum_{n=0}^{\infty} n^2\|\psi^{(n)}\|^2 \quad \forall\psi \in D(H_0). \tag{4.6}$$

Damit ist $\varphi(\hat{\rho}_t)$ auf $D(H_0)$ definiert. Wegen

$$\|\varphi(\hat{\rho}_t)\psi\|^2 \leq \|a^*(\hat{\rho}_t)\psi\|^2 + \|a(\hat{\rho}_t)\psi\|^2 \tag{4.7}$$

ergibt sich die Abschätzung

$$\|\varphi(\hat{\rho}_t)\psi\|^2 \leq \|\hat{\rho}_t\|^2 \sum_{n=0}^{\infty} n^2(2n+1)\|\psi^{(n)}\|^2 < \infty \quad \forall\psi \in D(H_0), \tag{4.8}$$

mit deren Hilfe die H_0-Beschränktheit des Wechselwirkungsterms folgt. Die Ungleichung

$$\|\varphi(\hat{\rho}_t)\psi\|^2 \leq A^2\|H_0\psi\|^2 + B^2\|\psi\|^2, \quad A < 1 \tag{4.9}$$

ist erfüllt, falls für alle n

$$A^2m^2n^2 - 2\|\hat{\rho}_t\|^2 n + B^2 - \|\hat{\rho}_t\|^2 \geq 0 \tag{4.10}$$

gilt, was durch die Wahl

$$A = \frac{\sup_{t\in\mathbb{R}}\|\hat{\rho}_t\|}{\lambda m}, \quad B > \sup_{t\in\mathbb{R}}\|\hat{\rho}_t\|(\lambda+1) \quad \text{mit } \lambda > \frac{\sup_{t\in\mathbb{R}}\|\hat{\rho}_t\|}{m} \tag{4.11}$$

erreicht wird. Das Supremum der Ein-Teilchen-Norm der Quelldichte über die Zeit t existiert, da ρ eine Testfunktion bezüglich t ist. Damit sind die Voraussetzungen der Satzes von Kato-Rellich gegeben und $H(t)$ ist ein selbstadjungierter Operator auf dem Definitionsbereich des freien Hamiltonoperators.

Mit Hilfe obiger Abschätzungen für Erzeuger und Vernichter kann eine zu (4.7) ähnliche Ungleichung auch für $\pi(f)$ gezeigt werden. Damit ist $\pi(f)$ als selbstadjungierter Abschluss seiner Restriktion auf $D(H_0)$ erklärt und erzeugt eine Ein-Parameter-Gruppe unitärer Operatoren $V_f(s) = \exp(-is\pi(f))$, die $D(H_0)$ invariant lässt.

Zur Untersuchung des Spektrums des Hamiltonoperators im van-Hove-Modell wird nun die unitäre Transformation $V_t := V_{(\omega^{-2}\hat{\rho}_t)}(-1)$. Explizit ergibt sich

$$V_t = e^{i\pi(\omega^{-2}\hat{\rho}_t)} \tag{4.12}$$

Da später auch singuläre Quelldichten betrachtet werden sollen, ist es nützlich zu beobachten, dass V_t als Operator existiert, wenn die Einteilchennorm des Exponenten endlich ist:

$$\|\omega^{-2}\pi(\hat{\rho}_t)\Omega\|^2 = [a(\omega^{-1}\hat{\rho}_t), a^*(\omega^{-1}\hat{\rho}_t)] = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2\omega_\mathbf{p}} \frac{\overline{\hat{\rho}_t(\mathbf{p})}\hat{\rho}_t(\mathbf{p})}{\omega_\mathbf{p}^2} < \infty \qquad (4.13)$$

Diese Bedingung ist erfüllt, wenn $\hat{\rho}_t$ für alle t im Definitionsbereich des inversen freien Ein-Teilchen-Hamiltonoperators liegt, also insbesondere, wenn $\hat{\rho}$ bezüglich der Impulsvariablen schnell fallend ist oder kompakten Träger hat.

Die Anwendung des Operators V_t zeigt, dass das Spektrum des freien Hamiltonoperators durch die Wechselwirkung nur um eine Konstante verschoben wird[2]:

$$\begin{aligned} V_t H_0 V_t^{-1} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}[i\omega^{-2}\pi(\hat{\rho}_t), \ldots, [i\omega^{-2}\pi(\hat{\rho}_t), H_0]\ldots] \\ &= H_0 + \varphi(\hat{\rho}_t) - \frac{1}{2}\int d^3\mathbf{p}\ \frac{\overline{\hat{\rho}_t(\mathbf{p})}\hat{\rho}_t(\mathbf{p})}{\omega_\mathbf{p}^2} \end{aligned} \qquad (4.14)$$

An dieser Stelle wird die Verbindung zu der einfachen Beschreibung der Kernkräfte deutlich: in $(-1)/\omega^2$ erscheint die Fouriertransformierte des Yukawa-Potentials

$$W = \int d^3\mathbf{p}\ \frac{\overline{\hat{\rho}_t(\mathbf{p})}\hat{\rho}_t(\mathbf{p})}{\omega_\mathbf{p}^2} = -\iint d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{y}\frac{e^{-m|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\overline{\rho(t,\mathbf{x})}\rho(t,\mathbf{y}), \qquad (4.15)$$

der c-Zahl-Term entsteht also durch Selbstwechselwirkung der massiven Bosonen. Damit diese Integrale endlich sind, genügt die obige allgemeinste Bedingung an ρ nicht, W könnte logarithmisch divergieren. Da die Zeitentwicklung von Erwartungswerten durch die Subtraktion einer konstanten reellen Zahl vom wechselwirkenden Hamiltonoperator nicht verändert wird, kann W in einem „renormierten“ Hamiltonoperator absorbiert werden. Dies entspricht einer willkürlichen Festlegung der Grundzustandsenergie auf Null. Freier und wechselwirkender Hamiltonoperator sind dann unitär äquivalent.

$$H_{\text{ren}}(t) := H(t) - W \quad \Rightarrow \quad H_{\text{ren}}(t) = V_t H_0 V_t^{-1}. \qquad (4.16)$$

Die Transformation des freien in den wechselwirkenden Hamiltonoperator wird genauer in [Coo61] untersucht[3]. In diesem Artikel wird auch die Zeitentwicklung für das van-Hove-Modell berechnet.

4.1.2 Wechselwirkendes Feld und Zeitentwicklung

Wie oben gezeigt, kann der Hamiltonoperator des van-Hove-Modells mit glatter, endlich ausgedehnter Quelldichte als Operator im Fockraum der freien Felder

[2] Formale Rechnungen mit Exponentialfunktionen unbeschränkter Operatoren sind riskant. Hier wird das Ergebnis aber durch sorgfältige Rechnung bestätigt; siehe [Key].

[3] Theorem 1 bei Cook.

$\varphi(f), \pi(g)$ dargestellt werden. Damit ist das Modell aber noch nicht ausreichend beschrieben. Verschiedene Schwierigkeiten treten auf: So ist beispielsweise das Vakuum Ω nicht der Grundzustand von $H_{\mathrm{ren}}(t)$ für festes t und auch nicht invariant unter der von $H_{\mathrm{ren}}(t)$ generierten Zeitentwicklung. Da die Algebra der Observablen von $\varphi(f)$ und $\pi(g)$ aus Ω erzeugt wird, erscheint die Benutzung der freien Felder hierfür im van-Hove-Modell ungeeignet. Punktweise, also für fixierten Zeitpunkt t, wird eine Darstellung der kanonischen Vertauschungsrelationen durch „wechselwirkende“ Felder mit passendem Vakuum gesucht.

Als neue Darsteller der kanonischen Vertauschungsrelationen ist folgende Wahl geeignet:

$$\varphi_\rho(f) = V_t \varphi(f) V_t^*, \qquad \pi_\rho(f) = V_t \pi(f) V_t^* \tag{4.17}$$

Das zeitabhängige Vakuum $\Omega_t := V_t \Omega$ übernimmt dann die Rolle von Ω für die freien Felder. Wie oben kann die Wirkung der Transformation V_t mit Hilfe der Vertauschungsrelationen berechnet werden

$$\varphi_\rho(f) = V_t \varphi(f) V_t^* = \varphi(f) + 2\,\mathrm{Re}(f, \omega^{-1}\hat{\rho}_t). \tag{4.18}$$

Mit der Dynamik des freien Feldes ergibt sich formal mit der Abkürzung $f_t = e^{i\omega t} f$

$$\varphi_{\rho,t}(f) = V_t \varphi(f_t) V_t^* = V_t e^{iH_0 t} \varphi(f) e^{-iH_0 t} V_t^* = e^{iH_{\mathrm{ren}}(t)t} \varphi_\rho(f) e^{-iH_{\mathrm{ren}}(t)t}, \tag{4.19}$$

das wechselwirkende Feld entwickelt sich also in der richtigen Weise mit der vollen Dynamik.

Wird Gleichung (4.18) in Hinblick auf die algebraische Formulierung der Quantenfeldtheorie betrachtet, wird deutlich, dass der Übergang von der freien Theorie ins van-Hove-Modell durch Anwendung eines Automorphismus

$$\beta_{\hat{\rho}_t}(\cdot) = V_t \cdot V_t^* \tag{4.20}$$

auf die Erzeuger erreicht wird. Dadurch ist es möglich, das Modell auf der Ebene der Algebra der Observablen zu diskutieren, die durch $\beta_{\hat{\rho}_t}$ auf sich abgebildet wird.

Insbesondere kann die Zeitentwicklung als Automorphismus formuliert werden, ohne konkret den wechselwirkenden Hamiltonoperator als darstellenden Operator ihres Generators angeben zu müssen. Für eine beliebige Observable können die Abbildungen betrachtet werden, die im Fockraum des freien Feldes durch die Zeitentwicklung dargestellt werden

$$\mathfrak{A} \ni A \mapsto \alpha_t^0(A) = e^{iH_0 t} A e^{-iH_0 t} \tag{4.21}$$

$$\mathfrak{A} \ni A \mapsto \alpha_t^{\hat{\rho}_t}(A) = e^{iH_{\mathrm{ren}}(t)t} A e^{-iH_{\mathrm{ren}}(t)t}, \tag{4.22}$$

womit einerseits

$$\alpha_t^{\hat{\rho}_t}(\varphi_{\rho,t}(f)) = \alpha_t^{\hat{\rho}_t}(\beta_{\hat{\rho}_t}(\varphi(f))) = \alpha_t^{\hat{\rho}_t}(\varphi(f)) + 2\,\mathrm{Re}(f, \omega^{-1}\hat{\rho}_t) \tag{4.23}$$

und andererseits

$$\alpha_t^{\hat{\rho}_t}(\varphi_{\rho,t}(f)) = \beta_{\hat{\rho}_t}(\alpha_t^0(\varphi(f))) = \alpha_t^0(\varphi(f)) + 2\,\mathrm{Re}(f_t, \omega^{-1}\hat{\rho}_t) \tag{4.24}$$

folgt. Kombination beider Gleichungen ergibt

$$\alpha_t^{\hat{\rho}_t}(\varphi(f)) = \alpha_t^0(\varphi(f)) + 2\,\mathrm{Re}(f_t - f, \omega^{-1}\hat{\rho}_t). \tag{4.25}$$

Damit ist die Zeitentwicklung des van-Hove-Modells auf den Generatoren der Algebra $\mathfrak{A}$ ausgedrückt, ohne den Hamiltonoperator $H_{\mathrm{ren}}(t)$ zu verwenden. Wie sich später zeigt, ist der Hamiltonoperator für singuläre Quelldichte divergent – hingegen kann der Automorphismus der Zeitentwicklung weiterhin auf der Ebene der Algebra der Observablen sinnvoll definiert werden.

Im Fockraum der freien Felder kann für eine genügend reguläre Quelldichte aber auch der Propagator im Wechselwirkungsbild direkt konstruiert werden. Zu diesem Zweck wird die zeitliche Variation der Quelldichte durch stückweise konstante Dichten angenähert. Für eine zeitlich konstante Quelldichte $\rho(0,\mathbf{x})$ ergeben sich die unitären Zeitentwicklungsoperatoren zu

$$U_0(t) = e^{-iH_0 t} \quad \text{freie Zeitentwicklung} \tag{4.26}$$

$$\tilde{U}(t) = e^{-iH_{\mathrm{ren}} t} \quad \text{volle Zeitentwicklung} \tag{4.27}$$

Für das van-Hove-Modell mit zeitunabhängiger Quelldichte beweist Cook [Coo61] die Existenz der Wellenoperatoren. Unter den Voraussetzungen, dass der Ein-Teilchen-Hamiltonoperator h_0 selbstadjungiert ist, $\hat{\rho} \in D(h_0^{-2})$ und $e^{i\omega t}\omega^{-1}\hat{\rho} \to 0$ konvergiert, ergibt sich daraus

$$S = W_+ W_-^{-1} = e^{-\frac{1}{2}\|\omega^{-1}\hat{\rho}\|^2}\mathbb{1}. \tag{4.28}$$

Die Streumatrix ist für konstante Quelldichte ein Vielfaches der Eins, die Streutheorie des van-Hove-Modells damit trivial.

Um eine Näherung für den zeitabhängigen Fall zu erhalten, wird eine Zerlegung des Intervalls $[t_1, t_n]$ angenommen. Es gelte $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ und die Funktion $\hat{\rho}_t$ sei stückweise konstant: $\hat{\rho}_t = \hat{\rho}_{t_i}$ für $t_i \leq t < t_{i+1}$. Aufgrund der Chapman-Kolmogorov-Gleichung (2.3), die der Propagator erfüllt, wird die Zeitentwicklung durch Hintereinanderausführung der Zeitentwicklung auf den Teilintervallen erzeugt:

$$U(t_n, t_1) = U(t_n, t_{n-1}) \ldots U(t_2, t_1). \tag{4.29}$$

Cook findet im Grenzwert immer feinerer Zerlegungen des Intervalls den Propagator für einen zeitabhängigen Quellterm im van-Hove-Modell

$$U(t_2, t_1) = \exp\left(i\varphi\left(\int_{t_1}^{t_2} dt\; e^{i\omega t}\hat{\rho}_t\right)\right)\exp\left(i\theta(t_2, t_1)\right) \tag{4.30}$$

mit der Phase

$$\theta(t_2, t_1) = \Im\left[\int_{t_1}^{t_2} dt\;\left(\int_{t_1}^{t} dt'\; e^{i\omega t'}\hat{\rho}_{t'}, e^{i\omega t}\hat{\rho}_t\right) + i\int_{t_1}^{t_2} dt\;\left(\hat{\rho}_t, \omega^{-1}\hat{\rho}_t\right)\right]. \tag{4.31}$$

Um die folgenden Betrachtungen zu vereinfachen, ist es sinnvoll, im Ortsraum zu rechnen. Dort lautet der Propagator

$$U(t_2,t_1) = \exp\left(i\int_{t_1}^{t_n} dt \int d^3\mathbf{x}\,\varphi(t,\mathbf{x})\rho(t,\mathbf{x})\right)\exp\left(i\theta(t_2,t_1)\right) \quad \text{mit}$$

$$\theta(t_2,t_1) = -\frac{1}{2}\left(\int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3\mathbf{x}\int_{t_1}^{t} dt' \int d^3\mathbf{y}\;\Delta(t-t',\mathbf{x}-\mathbf{y})\rho(t,\mathbf{x})\rho(t',\mathbf{y})\right.$$
$$\left. + \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3\mathbf{x}\int d^3\mathbf{y}\;\frac{e^{-m|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\rho(t,\mathbf{x})\rho(t,\mathbf{y})\right).$$

Wie in (2.12) wird der S-Operator als Grenzwert des Propagators erklärt, er behält eine funktionale Abhängigkeit von der Quelldichte

$$S(\rho) = \lim_{t\to\infty} U(t,-t). \tag{4.32}$$

4.1.3 Punktförmige Quelle

Ist die Quelldichte eine glatte Funktion mit kompaktem Träger, $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R}^4)$, so können sowohl die Zeitentwicklung, als auch der Automorphismus $\beta_{\hat{\rho}t}$ durch Operatoren im Fockraum der freien Felder implementiert werden. Dies ändert sich, wenn die Quelldichte eine räumlich punktförmige Quelle beschreibt, die im Ursprung lokalisiert ist:

$$\rho(t,\mathbf{x}) \longrightarrow c(t)\otimes\delta(\mathbf{x}), \qquad c \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \text{ nicht negativ} \tag{4.33}$$

Im Impulsraum entspricht dieser Situation $\hat{\rho}_t(\mathbf{p}) \to c(t)\otimes 1$.

In Hinblick auf diesen Grenzübergang kann das wechselwirkende Feld $\varphi_\rho(f)$ als eine Näherung angesehen werden. Die Quelldichte ρ führt im Impulsraum zu einem „cutoff“, große Frequenzen werden nicht berücksichtigt. Der Übergang zur punktförmigen Quelle entfernt diesen cutoff, die eigentliche „wechselwirkende“ Theorie wird sichtbar.

Der Hamiltonoperator des van-Hove-Modells (4.2) wird singulär. Auch die Transformation V_t verliert ihren Sinn – sie ist logarithmisch divergent:

$$\|\pi(\frac{c(t)}{\omega_{\mathbf{p}}^2})\Omega\|^2 = \frac{|c(t)|^2}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3\mathbf{p}}{2\omega_{\mathbf{p}}}\frac{1}{\omega_{\mathbf{p}}^2} \propto \int\frac{d\omega}{\omega} \tag{4.34}$$

Für punktförmige Quelldichte ist das van-Hove-Modell nicht länger unitär äquivalent zur freien Theorie. Die wechselwirkenden Felder sind zu jedem Zeitpunkt t mit $c(t) > 0$ eine Darstellung der kanonischen Vertauschungsrelationen, inäquivalent zu der durch freie Felder oder anderen Zeitpunkten. Obwohl das van-Hove-Modell sehr einfach ist, zeigt sich hier ein typisches Problem, das auch bei anderen Quantenfeldtheorien auftritt - allgemein bei Systemen mit unendlich vielen Freiheitsgraden, für die der Satz von Stone- von Neumann nicht gilt.

Bemerkenswert ist, dass auf der Ebene der Algebra der Observablen auch im Grenzfall punktförmiger Quelldichte die Zeitentwicklung problemlos definiert werden kann. Der Unterschied zur freien Zeitentwicklung besteht in dem c-Zahl-Term in (4.25). Dieser ist aber endlich, sofern $\hat{f}$ genügend regulär – z.B. Schwartzfunktion – ist

$$c(t)(\omega^{-1}, \hat{f}_t - \hat{f}) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2\omega_\mathbf{p}} \frac{e^{i\omega_\mathrm{P}}\hat{f} - \hat{f}}{\omega_\mathbf{p}} < \infty. \tag{4.35}$$

Hier zeigt sich, dass die Formulierung einer Quantenfeldtheorie unabhängig von einer konkreten Darstellung in einem Hilbertraum äußerst nützlich sein kann.

Wird zur Beschreibung der Theorie der Fockraum der freien Felder gewählt, treten die „üblichen“ Divergenzen auf. Wie nicht anders zu erwarten, kann auch der Propagator nicht mehr angegeben werden. Abgesehen von den skalaren Anteilen im Exponent des Propagators, die divergent sind, kann der operatorwertige Anteil nicht sinnvoll definiert werden. Die Ein-Teilchen-Norm $\|\int_{t_1}^{t_n} dt\, \varphi(t,0)c(t)\Omega\|^2$ enthält Anteile divergenter Randterme

$$\int \frac{d^3\mathbf{p}}{2\omega_\mathbf{p}} c(t_1) \frac{e^{-it_1\omega_\mathrm{P}}}{i\omega_\mathbf{p}} \propto \int_m^\infty d\omega e^{-it_1\omega}. \tag{4.36}$$

Anders ist es beim S-Operator - er bleibt als Operator erhalten. Wird vor dem Übergang zur punktförmigen Quelle der Term im Exponent gestrichen, der das Integral über das Yukawa-Potential enthält, ergibt sich formal der Ausdruck

$$S(c) = \exp\left(i\int dt\, \varphi(t,0)c(t) - \frac{i}{2}\iint\limits_{t\geq t'} dtdt'\, \Delta(t-t',0)c(t)c(t') \right). \tag{4.37}$$

Da der S-Operator nur bis auf eine Phase festgelegt ist, kann diese Streichung des stark divergenten Anteils verantwortet werden. Dabei wird die Energieskala willkürlich fixiert.

Auch diese Eigenschaft des van-Hove-Modells kann in komplexeren Theorien mit lokaler Wechselwirkung erwartet werden: Der Streuoperator ist regulärer als die Zeitentwicklung, deren Grenzwert er darstellt.

Es muss sich im folgenden zeigen, dass der entstehende Ausdruck tatsächlich einen Operator definiert und dass dieser sich als S-Operator richtig verhält.

Eigenschaften von $S(c)$

Angenommen, der Ausdruck (4.37) definiert einen Operator. Abgesehen von der bloßen Existenz sollten die Eigenschaften erfüllt sein, die von einem S-Operator zu erwarten sind. So sollte der S-Operator faktorisieren, wenn die Testfunktion im Argument eine Summe mit disjunkten Trägern ist

$$S(c_1 + c_2) = S(c_1)S(c_2) \quad \text{für supp}\, c_1 > \text{supp}\, c_2. \tag{4.38}$$

Dies ist der Fall, da der Kommutator der Felder im Exponent, genau wie alle anderen Terme, die ein Produkt c_1c_2 enthalten, aufgrund der Trägereigenschaften

der Testfunktionen verschwindet

$$\iint dtdt' \, [\varphi(t,0), \varphi(t',0)] c_1(t) c_2(t) = 0. \tag{4.39}$$

Des weiteren reproduziert eine Variationsableitung die Wechselwirkung

$$\frac{\delta S}{i\delta c} = \frac{\partial}{i\partial \lambda} S(\lambda c)\Big|_{\lambda=0} = \mathbb{1} \int dt \; \varphi(t,0) c(t) \tag{4.40}$$

Existenz von $S(c)$

Ist nun der Ausdruck (4.37) als Operator erklärbar? Nach einem Resultat von Borchers reicht es aus, ein Quantenfeld über eine zeitartige Kurve zu integrieren. Deshalb ist zu erwarten, dass der operatorwertige Anteil im Exponent keine Probleme bereitet. Tatsächlich ist

$$\| \int dt \; \varphi(t,0) c(t) \Omega \|^2 = \iint dtdt' \; c(t) c(t') \delta_+(t-t',0) \tag{4.41}$$

$$= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2\omega_\mathbf{p}} |\hat{c}(\omega_\mathbf{p})|^2 < \infty \tag{4.42}$$

da $c \in C_0^\infty \Rightarrow \hat{c}$ schnell abfallend und $\omega_\mathbf{p} \geq m > 0$.

Der zweite Term im Exponent ist eine c-Zahl. Damit der Ausdruck erklärt werden kann, sollte also das Integral endlich sein

$$\iint\limits_{t \geq t'} dtdt' \; \Delta(t-t') c(t) c(t') = \iint dtdt' \; \Theta(t) \Delta(t,0) c(t+t') c(t') \overset{!}{<} \infty. \tag{4.43}$$

Da c kompakten Träger hat, hat $\int dt' c(t+t') c(t') = (c * \check{c})(t)$ als Faltung finiter Funktionen auch kompakten Träger. Damit reduziert sich das Problem auf die Frage, ob $\Theta(t)\Delta(t,0) := \Delta_{\text{ret}}(t,0)$ eine Distribution über $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ ist. Im Allgemeinen können Distributionen nicht multipliziert werden, ohne dass zusätzliche Bedingungen an singuläre Träger bzw. Wellenfrontmengen erfüllt sind. Hier reicht es aus,

$$\Delta^+_{\text{ret}}(t,0) = -\frac{i}{2(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2\omega_\mathbf{p}} \Theta(t) e^{-i\omega_\mathbf{p} t} \tag{4.44}$$

zu behandeln, $\mathcal{D}'$ ist ein linearer Raum.

Sei $\mathcal{D}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ der Raum der Testfunktionen, deren Träger den Ursprung nicht enthält. Offensichtlich ist ${}^0\Delta^+_{\text{ret}} = \Delta^+_{\text{ret}}|_{\mathcal{D}(\mathbb{R}\setminus\{0\})}$eine wohldefinierte Distribution. Lässt sich ${}^0\Delta^+_{\text{ret}}$ auf $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ fortsetzen, so ist das Integral (4.41) endlich.

Elegant lassen sich Fortsetzungsprobleme von Distributionen mit Hilfe des Steinmann-Skalengrads klassifizieren und lösen, siehe [FB00] oder [Pra97].

Zur Definition des Skalengrads werden Dilatationen im Testfunktionenraum erklärt als Abbildungen

$$\Lambda : \mathbb{R}^+ \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{D}(\mathbb{R}^d), \quad (\lambda, \phi) \mapsto \lambda^{-d} \phi(\lambda^{-1} \cdot) = \phi^\lambda. \tag{4.45}$$

Auf der Ebene der Distributionen ergibt sich daraus eine Abbildung

$$\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d) \ni t \mapsto t_\lambda := \langle t, \Lambda\phi\rangle = t(\phi^\lambda). \tag{4.46}$$

Ist t eine reguläre Distribution, schreibt sich t_λ als

$$t_\lambda(\phi) = \int d^d x\ t(\lambda x)\phi(x). \tag{4.47}$$

Damit wird der Skalengrad $\mathrm{sd}(t)$ gebildet:

Definition 4.1.1 *Sei $t \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$. Der Skalengrad von t ist*

$$\mathrm{sd}(t) = \inf\{\alpha | \lim_{\lambda\to 0} \lambda^\alpha t_\lambda = 0\} \tag{4.48}$$

und es gilt der folgende Satz, der in [FB00] und [Pra97] bewiesen wird:

Satz 4.1.1 *Sei $t_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ gegeben mit Skalengrad $\mathrm{sd}(t_0)$. Dann gilt:*

1. *Falls $\mathrm{sd}(t_0) < d$, dann existiert eine eindeutige Fortsetzung $t \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ von t_0, so dass $\mathrm{sd}(t) = \mathrm{sd}(t_0)$ und $t|_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d\setminus\{0\})} = t_0$.*
2. *Falls $\infty > \mathrm{sd}(t_0) \geq d$, so existiert ein endlichdimensionaler Raum von Fortsetzung, die $\mathrm{sd}(t) = \mathrm{sd}(t_0)$ und $t|_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d\setminus\{0\})} = t_0$ erfüllen.*

Zur Konstruktion der Fortsetzungen im Fall 2. wird gewöhnlich die singuläre Ordnung[4] $\rho = sd(t_0) - d$ verwendet. Sei $\mathcal{D}^\rho(\mathbb{R}^d)$ die Menge der Testfunktionen, die bis zum Grad ρ im Ursprung verschwinden. Wird dieser Testfunktionenraum zu Grunde gelegt, so ist Fall 1. erfüllt und es kann eindeutig fortgesetzt werden. $\mathcal{D}^\rho(\mathbb{R}^d)^\perp$ enthält die Ableitungen der δ-Funktion bis zur Ordnung ρ. Vorschalten einer Projektion W auf den Raum $\mathcal{D}^\rho(\mathbb{R}^d)$,

$$W : \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{D}^\rho(\mathbb{R}^d), \quad \phi \mapsto \phi - \sum_{|\sigma|\leq\rho} w_\sigma \partial^\sigma\phi(0) \tag{4.49}$$

spielt also Fall 2. auf Fall 1 zurück. Dabei ist w_σ zu jedem Multiindex σ eine Testfunktion, für die $\partial^\sigma w_\sigma = 1$ und $\partial^{\sigma'} w_\sigma = 0$ falls $\sigma' \neq \sigma$ gilt. Eine Testfunktion $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ wird in $\phi = (\mathbb{1} - W)\phi + W\phi = \phi_1 + \phi_2$ zerlegt. ϕ_2 ist dann von der Form

$$\phi_2(x) = \sum_{|\sigma|=[\rho]+1} x^\sigma \psi_\sigma(x) \tag{4.50}$$

mit Testfunktionen $\psi_\sigma \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Definition von t als

$$\langle t, \phi\rangle = \sum_{|\sigma|=[\rho]+1} \langle x^\sigma t_0, \psi_\sigma\rangle + \langle t, \phi_1\rangle \tag{4.51}$$

[4] Das Fortsetzungsproblem von Distributionen tritt in dieser Form bei der Renormierung auf. Dort entspricht ρ dem Grad der Divergenz von Feynmangraphen

liefert eine Fortsetzung von t_0. Denn für den Term $x^\sigma t_0$ kann gezeigt werden, dass er Skalengrad kleiner als d hat. Bei gegebenem W können die Fortsetzungen von t_0 durch ihre Werte auf den Testfunktionen w_σ charakterisiert werden. Die Wahl einer bestimmten Fortsetzung entspricht der Renormierung in der Physik.

Was ist der Skalengrad von ${}^0\Delta^+_{\text{ret}}$? Auf Testfunktionen mit Träger in der positiven Halbachse ist

$$
\begin{aligned}
{}^0\Delta^+_{\text{ret}}(\lambda t, 0) &= -\frac{i}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3\mathbf{p}}{2\omega_{\mathbf{p}}} e^{-i\omega_{\mathbf{p}}\lambda t} && (4.52)\\
&= -\frac{2i}{(2\pi)^3}\int dp\ \frac{p^2}{2\omega_{\mathbf{p}}} e^{-i\omega_{\mathbf{p}}\lambda t} && (4.53)\\
&= -\frac{1}{\lambda^2}\frac{2i}{(2\pi)^3}\int dp\ \frac{p^2}{2\omega^\lambda_{\mathbf{p}}} e^{-i\omega^\lambda_{\mathbf{p}} t} \quad \text{mit } \omega^\lambda_{\mathbf{p}} = \sqrt{p^2+\lambda^2 m^2}. && (4.54)
\end{aligned}
$$

Daraus folgt $\mathrm{sd}({}^0\Delta^+_{\text{ret}}) = 2$, die singuläre Ordnung beträgt $\rho = 1$. Damit ist ${}^0\Delta^+_{\text{ret}}$ auf $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ fortsetzbar. Die Fortsetzungen bilden eine zweiparametrige Schar und können mit Hilfe der W-Operation erzeugt werden.

Damit ist gezeigt, dass $S(c)$ wie in (4.37) definiert werden kann.

4.2 Anwendung Howlands Methode

Mit dem van-Hove-Modell steht ein Beispiel zur Verfügung, mit dem sich – trotz seiner Einfachheit – einige typische Probleme von Quantenfeldtheorien reproduzieren lassen. So treten unitär inäquivalente Darstellungen der kanonischen Vertauschungsrelationen auf. Die Zeitentwicklung ist im Grenzfall punktförmiger Quelle nicht mehr unitär implementierbar, der S-Operator hingegen schon. Damit ähnelt die Situation dem Fall „QED mit äußerem Feld“. Dort lassen sich Kriterien für die Existenz des S-Operators angeben, während die Zeitentwicklung selbst nicht existiert [Sch95], [LM96].

Ist die Quelle zeitabhängig oder wird gleich im Wechselwirkungsbild gerechnet, kann versucht werden, die Zeitentwicklung mit den Standardmethoden der Quantenmechanik zu berechnen. Allerdings sind weder die Voraussetzungen für eine Entwicklung in die Dysonreihe gegeben, noch lässt sich der Satz von Yosida anwenden: Der Definitionsbereich des renormierten Hamiltonoperators hängt von der Zeit ab

$$D(H_{\text{ren}}) = V_t D(H_0). \tag{4.55}$$

Durch Entfernen des Impulsraum-cutoffs kann die Situation noch verschlimmert werden: In drei Raum-Zeit-Dimensionen sind die Definitionsbereiche sogar disjunkt, in vier Dimensionen ist das Problem so nicht definiert.

Diese Tatsache hindert aber nicht an dem Versuch, die Dynamik mit Hilfe der Howlandmethode zu berechnen. Die Anwendung auf quantenmechanische Beispiele mit variablem Definitionsbereich des Hamiltonoperators oder gar Singularitäten lässt die Hoffnung zu, dass zumindest die Existenz der S-Matrix im van-Hove-Modell für punktförmige Quelldichte reproduziert werden kann. Das ist zwar an sich kein Fortschritt, aber ein wichtiges Resultat in Hinblick auf die

Behandlung „ernsthafter“ Probleme der konstruktiven Quantenfeldtheorie mit lokalisierter Wechselwirkung.

Howland definiert den Propagator etwas allgemeiner als es in der Quantenmechanik üblich ist. Dort sollen Zeitentwicklungsoperatoren gewöhnlich stark stetig und auf einer dichten Menge stark differenzierbar sein. Die Propagatoren, die mit Hilfe der Zeitentwicklungsgruppen generiert werden, sind im Allgemeinen nur messbar, nicht stetig. Deshalb ist es interessant, ob mit diesem schwächeren Begriff der Zeitentwicklung im Rahmen des van-Hove-Modells gearbeitet werden kann.

Das Vorgehen erfolgt in drei Schritten:

1. Anwendung von Howlands Formalismus auf das van-Hove-Modell mit regulärer Quelldichte - „straightforward“ in Analogie zu dem Beispiel in Abschnitt 3.2.2

2. Anwendung auf den Fall punktförmiger Quelldichte in drei Raumzeitdimensionen. Durch das Verwerfen einer Raumdimension werden die auftretenden Singularitäten schwächer - insbesondere steht die Transformation V_t als Hilfsmittel zur Verfügung. Es ergibt sich ein Regularisierungsschema, das das Problem auf den ersten Schritt zurückspielt.

3. Regularisierung des Hamiltonoperators für punktförmige Quelldichte in vier Dimensionen.

Die Anwendung der Regularisierung auf das Modell mit punktförmiger Quelldichte in vier Dimensionen wird durch eine Plausibilitätsüberlegung untermauert.

4.2.1 Reguläre Quelle

Der Definitionsbereich des Hamiltonoperators im van-Hove-Modell mit zeitabhängiger Quelle wird im Allgemeinen von der Zeit abhängen $D(H_{\mathrm{ren}}) = V_t D(H_0)$. Das Problem ist ähnlich zu dem in Abschnitt 3.2.2 behandelten quantenmechanischen Beispiel. Hier liegt allerdings eine Viel-Teilchen-Theorie zu Grunde, die Zustandsvektoren sind Elemente des symmetrischen Fockraums $\mathfrak{H}^+$. Gegeben ist der zeitabhängige Hamiltonoperator $H(t) = H_0 + \varphi(\hat{\rho}_t)$, der auf $D(H_0)$ selbstadjungiert ist.

In Howlands Formalismus wird das zeitabhängige Problem auf ein stationäres zurückgeführt, indem die Dynamik über dem direkten Integral des zu Grunde liegenden Hilbertraums konstruiert wird. Hier handelt es sich um $\mathcal{K} = L^2(\mathbb{R}, \mathfrak{H}^+)$, der Operator K ist durch

$$K = H_0 + \varphi(\hat{\rho}) - i\frac{d}{dt} = H - i\frac{d}{dt} \tag{4.56}$$

auf dem dichten Definitionskern $D = C_0^\infty(\mathbb{R}, D(H_0)) \subset \mathcal{K}$ gegeben[5]. Um den Satz von Howland (Satz 3.1.4) anzuwenden, muss gezeigt werden, dass K selbstadjungiert ist und eine Zeitentwicklungsgruppe im Sinne von Howland erzeugt.

[5] $\varphi(\hat{\rho})$ bezeichnet im Kontext des Raums $\mathcal{K}$ den Multiplikationsoperator, der zu der Schar $\varphi(\hat{\rho}_t), t \in \mathbb{R}\}$ gehört. Für andere zeitabhängige Operatoren gilt die gleiche Schreibweise.

Selbstadjungiertheit kann mit Hilfe des Kommutatortheorems [RS75], A.1.5 erhalten werden. Dabei tritt der Kommutator $[H, -i\frac{d}{dt}]$ auf, er ergibt sich zu

$$[H, -i\frac{d}{dt}] = [\varphi(\hat{\rho}), -i\frac{d}{dt}] = i\varphi(\dot{\hat{\rho}}), \quad \text{mit } \dot{\hat{\rho}}(t) = \frac{d}{dt}\hat{\rho}_t(t). \tag{4.57}$$

Aus der H_0-Beschränktheit von $\varphi(\hat{\rho}_t)$ auf $D(H_0)$, Gleichung (4.9), folgt auch die relative Formbeschränktheit von $\varphi(\hat{\rho}_t)$ zur selben Schranke [RS75]. Damit lässt sich eine Ungleichung über D gewinnen

$$\begin{aligned}(\psi, \varphi(\dot{\hat{\rho}})\psi)_{\mathcal{K}} &= \int dt \ \Big(\psi(t), \varphi(\dot{\hat{\rho}}_t)\psi(t)\Big) \\ &\leq \int dt \ (A(\psi(t), H\psi(t)) + B(\psi(t), \psi(t)))\end{aligned} \tag{4.58}$$

mit

$$A = \frac{\sup_{t\in\mathbb{R}}\|\dot{\hat{\rho}}_t\|}{\lambda m}, \quad B > \sup_{t\in\mathbb{R}}\|\dot{\hat{\rho}}_t\|(\lambda+1) \quad \text{mit } \lambda > \frac{\sup_{t\in\mathbb{R}}\|\dot{\hat{\rho}}_t\|}{m}. \tag{4.59}$$

A ist kleiner Eins. Durch eventuelle Modifikation von B kann erreicht werden, dass $B > 1$ gilt. Im Sinne von quadratischen Formen auf $D \subset \mathcal{K}$ kann also

$$\varphi(\dot{\hat{\rho}}) \leq AH_0 + B \tag{4.60}$$

abgeschätzt werden. Im Hinblick auf spätere Anwendung sollte bemerkt werden, dass diese Abschätzung mit veränderten Konstanten auch für $\pi(f)$ sowie für höhere Ableitungen nach t erreicht werden kann.

Das Kommutator-Theorem vergleicht den unbeschränkten Operator K in verschiedener Weise mit einem halbbeschränkten, wesentlich selbstadjungierten Operator N. Wähle

$$N = (AH_0 + B)^2 + \varphi(\hat{\rho}) - \frac{d^2}{dt^2} \quad \text{auf } D. \tag{4.61}$$

Es folgt mit Hilfe der obigen Ungleichung (4.60) auf D

$$\begin{aligned}\pm[K, N] &= \pm\left([\varphi(\hat{\rho}), -\frac{d^2}{dt^2}] + [-i\frac{d}{dt}, \varphi(\hat{\rho})]\right) \\ &= \pm\left([\varphi(\hat{\rho}), -i\frac{d}{dt}](-i\frac{d}{dt}) + (-i\frac{d}{dt})[\varphi(\hat{\rho}), -i\frac{d}{dt}] + [-i\frac{d}{dt}, \varphi(\hat{\rho})]\right) \\ &\leq \left([\varphi(\hat{\rho}), -i\frac{d}{dt}]\right)^2 - \frac{d^2}{dt^2} + |[-i\frac{d}{dt}, \varphi(\hat{\rho})]| \\ &\leq 2\left((AH_0 + B)^2 - \frac{d^2}{dt^2}\right) \leq 2N,\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}K^2 = \left(H - i\frac{d}{dt}\right)^2 &\leq \left(H_0 + \varphi(\hat{\rho}) - \frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2} + \frac{1}{2}\right)^2 \\ &\leq \frac{1}{A^2}\left((AH_0 + B)^2 + \varphi(\hat{\rho}) - \frac{d^2}{dt^2}\right)^2 = \frac{1}{A^2}N^2.\end{aligned}$$

und damit die wesentliche Selbstadjungiertheit von K auf D. Aus der Form des Operators K als Differenz des Hamiltonoperators mit der Ableitung nach der Zeit ist unmittelbar klar, dass die Bedingung aus Satz 3.1.5 erfüllt ist. Die Multiplikation mit einer differenzierbaren Funktion $\phi \in C_0^1(\mathbb{R}$ lässt D invariant und vertauscht mit K in der richtigen Weise

$$[K, M(\phi)] = -iM(\dot{\phi}). \tag{4.62}$$

Der Satz von Howland garantiert nun die Existenz eines messbaren unitären Propagators $U(t,s)$ in der Weise, dass

$$e^{-i\sigma K}\varphi(t) = U(t, t-\sigma)\varphi(t-\sigma) \tag{4.63}$$

erfüllt ist. Da die Quelldichte nur in einem endlichen Zeitintervall vorhanden ist, ergibt sich die S-Matrix aus diesem Propagator nach dem Übergang ins Wechselwirkungsbild, betrachtet von einem Zeitpunkt vor dem Einschalten bis nach dem Ausschalten der Wechselwirkung. Es ist auch möglich, wie in Abschnitt 3.2.4, die Zeitentwicklungsgruppe $e^{-i\sigma K}$ im Grenzwert $\sigma \to \infty$ mit $e^{i\sigma K_0}, K_0 = H_0 - i\frac{d}{dt}$ zu vergleichen, das heißt schon auf der Ebene des Funktionenraums $\mathcal{K}$ ins Wechselwirkungsbild überzugehen.

Damit ist die Existenz eines Propagators in Howlands Sinn für den einfachsten Fall im van-Hove-Modell gezeigt. Interessanter ist der Übergang zu punktförmiger Quelldichte, da hier die erwähnten QFT-Divergenzen auftreten.

Diese Divergenzen sind von verschiedener Stärke. Werden die Raumdimensionen reduziert, verringert sich der Grad der Divergenzen[6]. In drei Raumzeitdimensionen steht die Transformation, die den freien Hamiltonoperator auf den wechselwirkenden abbildet, noch zur Verfügung. Deshalb soll das van-Hove-Modell zuerst über $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ betrachtet werden.

4.2.2 Punktförmige Quelle – Regularisierung

Drei Raum-Zeit-Dimensionen

Wird der Übergang zu einer punktförmigen Quelldichte vollzogen, bleibt die in drei Dimensionen logarithmisch divergente Transformation V_t als Operator erhalten

$$\|\pi(\omega^{-2}c(t))\Omega\|^2 = \int \frac{d^2p}{2\omega_p}\frac{|c(t)|^2}{\omega_p^2} \propto \int\limits_{\omega \geq m} \frac{d\omega}{\omega^2} < \infty. \tag{4.64}$$

Der wechselwirkende Hamiltonoperator „$H_0 + c(t)\varphi(0,0)$“ ist nicht definiert. Mit V_t kann allerdings noch immer der renormierte Hamiltonoperator angegeben werden: $H_{\text{ren}}(t) = V_t H_0 V^*$ auf $D(H_{\text{ren}}(t)) = V_t D(H_0) \subset \mathfrak{H}^+$. Im renormierten Hamiltonoperator ist die – hier divergente – Konstante W (4.15) subtrahiert, dadurch bleibt der Operator definiert. Allerdings hat das Auftreten dieser divergenten c-Zahl Auswirkungen auf die Definitionsbereiche der Operatoren zu verschiedenen Zeiten t, t' falls $c(t) \neq c(t')$: sie haben trivialen Schnitt! Sei zum Beispiel $\psi \in D(H_0) \cap D(H_{\text{ren}}(t))$ mit $t \in \operatorname{supp} c$ fest. Da ψ ein Element aus $D(H_0)$

[6] Abzählen der Massedimension bzw. power counting

ist, ist es ein Vektor mit finiter Teilchenzahl und Schwartz-Wellenfunktionen. Wenn ψ auch in $D(H_{\text{ren}}(t))$ ist, bedeutet das insbesondere, dass $\|H_0 V_t^* \psi\|^2 < \infty$ gilt. Die Norm majorisiert die Ein-Teilchen-Norm $\|H_0 V_t^* \psi\|^2 > \|(H_0 V_t^* \psi)^{(1)}\|^2$, welche durch die Transformation V_t^* aber schon Anteile der Form

$$\|H_0 a^*(c(t)\omega^{-1})\Omega\|^2 \propto [a(\omega), a^*(\omega^{-1})] \propto \int \frac{d^2p}{2\omega_p} \tag{4.65}$$

enthält, die offensichtlich divergieren. Damit ist nur $\psi = 0$ im Schnitt der Definitionsbereiche.

Wie im vorigen Beispiel soll die Dynamik in Howlands Formalismus konstruiert werden. Dazu ist über dem Hilbertraum $\mathcal{K} = L^2(\mathbb{R}, \mathfrak{H}^+)$ der potenzielle Zeitentwicklungsgenerator $K = H_{\text{ren}} - i\frac{d}{dt}$ zu erklären. H_{ren} ist mit Hilfe von V_t erklärt - deshalb ist es naheliegend, auch über $\mathcal{K}$ den Operator $V : \mathcal{K} \to \mathcal{K}, (V\phi)(t) := V_t \phi(t)$ zu verwenden.

$$K = H_{\text{ren}} - i\frac{d}{dt} = V(H_0 - iV^* \frac{d}{dt} V)V^* \tag{4.66}$$

K ist also äquivalent zu einem Operator K_1, der wieder die ursprüngliche Form des Hamiltonians im van-Hove-Modell hat, wobei die Wechselwirkung durch die Transformation der Ableitung $iV^* \frac{d}{dt} V$ gegeben ist. K_1 lässt sich leicht berechnen

$$K_1 = V^* K V = H_0 - i\frac{d}{dt} + \pi(\dot{c}\omega^{-2}) - \text{Im} \underbrace{\int \frac{d^2p}{2\omega_p} \frac{\overline{c(t)}\dot{c}(t)}{\omega_p^2}}_{=\tilde{W}} \tag{4.67}$$

und verhält sich auch gut: Durch den zusätzlichen Faktor ω^{-2} im Argument ist $\pi(\dot{c}\omega_p^{-2})$ ein Operator, was sich wie in Gleichung (4.64) ergibt. Auch die Konstante $\tilde{W}$ ist in zwei Dimensionen endlich, sie kann in der Definition von K_1 absorbiert werden.

Der durch Anwendung der Transformation V auf K erhaltene Howland-Hamiltonoperator K_1 ist also regulärer als der ursprüngliche. Die Wechselwirkung ist nur eine endliche Zeit eingeschaltet, denn c und damit auch Ableitungen von c haben kompakten Träger. Damit gilt $\lim_{t\to\pm\infty} V_t = \mathbb{1}$. Das bedeutet, das die durch K_1 definierte Dynamik dieselbe S-Matrix definiert, die sich auch für K ergeben würde!

Auf K_1 kann nun analog zum letzten Abschnitt Howlands Formalismus angewendet werden: Selbstadjungiertheit ergibt sich mit dem Kommutator-Theorem wie in Gleichung (4.2.1) und (4.2.1) mit

$$N = (AH_0 + B)^2 + \pi(\dot{c}\omega^{-2}) - \frac{d^2}{dt^2} \tag{4.68}$$

wobei die Konstanten A, B zu

$$A = \frac{\sup_{t\in\mathbb{R}} |\dot{c}(t)| \, \|\omega^{-1}\|}{\lambda m}, \quad B > \sup_{t\in\mathbb{R}} |\dot{c}(t)| \, \|\omega^{-1}\| (\lambda + 1) \tag{4.69}$$

mit $\lambda > (\sup_{t\in\mathbb{R}} |\dot{c}(t)|\|\omega^{-1}\|)/m$ gewählt werden können. Darüber hinaus gehört K_1 in die Klasse selbstadjungierter Operatoren in $\mathcal{K}$, die mit der Multiplikation mit differenzierbaren skalaren Funktionen f vertauschen wie die Ableitung nach t:

$$[K_1, M(f)] = -iM(\dot{f}) \tag{4.70}$$

Gemäß Satz 3.1.4 existiert ein messbarer Propagator $U(t,s) = U(t)U^*(s)$, der über die Multiplikation U unitäre Äquivalenz zwischen der von K_1 generierten Gruppe und den Translationen in $\mathcal{K}$ herstellt:

$$e^{-i\sigma K_1} = UT_\sigma U^*. \tag{4.71}$$

Durch Übergang in das Wechselwirkungsbild ergibt sich damit der Propagator, der als Grenzwert die lokale S-Matrix für das van-Hove-Modell in drei Raum-Zeit-Dimensionen liefert.

Funktionalgleichung. Für lokale S-Matrizen gilt die kausale Funktionalgleichung. Da in Howlands Formalismus die messbaren Propagatoren als Werkzeug zur Verfügung stehen, kann die kausale Faktorisierung leicht gezeigt werden. Sie reduziert sich auf die Funktionalgleichung der Propagatoren (2.3), die auch für Howlands Propagatoren gilt.

Seien Testfunktionen $c_i \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $i = 1,2$ vorgegeben. Dabei sei c_1 früher als c_2: $\operatorname{supp} c_1 < \operatorname{supp} c_2$. Für beide Testfunktionen kann die oben beschriebene Regularisierung durchgeführt werden. Sie liefert Zeitentwicklungsgeneratoren $K_1^{c_i}$ und, wie in (4.71), messbare Propagatoren $U^{c_i}(t,s)$. Die freie Dynamik sei durch $K_0 = H_0 - i\frac{d}{dt}$ und $U_0(t,s)$ beschrieben.

Zu zeigen ist

$$S(c_1 + c_2) = S(c_2)S(c_1). \tag{4.72}$$

Wie in Satz 3.2.1 gehört zu $S(c_i)$ ein konstanter Multiplikationsoperator $M(S(c_i))$ über $\mathcal{K}$. Er ist durch $M(S(c_i)) = U_0^{-1}\mathcal{S}(c_i)U_0$ geben, wobei U_0 die Multiplikation mit $U_0(0,t)$ und

$$\begin{aligned}\mathcal{S}(c_i) &= \mathcal{W}_+(c_i)\mathcal{W}_-^{-1}(c_i) \\ &= \lim_{\sigma_\pm\to\pm\infty} e^{i\sigma_+ K_0} e^{-i(\sigma_+ - \sigma_-)K_1^{c_i}} e^{-i\sigma_- K_0}\end{aligned} \tag{4.73}$$

als Operator über $\mathcal{K}$ bezeichnet. Damit gilt (4.72), wenn $M(S(c_1+c_2)) = M(S(c_2)S(c_1))$ und gleichbedeutend $\mathcal{S}(c_1+c_2) = \mathcal{S}(c_2)\mathcal{S}(c_1)$ erfüllt ist. Berechnung der Wellenoperatoren ergibt $\mathcal{W}_+(c_i)\psi(t) = \lim_{\sigma_+\to\infty} U_0(t, t+\sigma_+)U^{c_i}(t+\sigma_+, t)\psi(t)$ für $\psi \in \mathcal{K}$ und $\mathcal{W}_-$ entsprechend. In diesem Sinne gilt mit einem s

zwischen den Trägern der Testfunktionen $\operatorname{supp} c_1 < s < \operatorname{supp} c_2$:

$$\begin{aligned}
&\overbrace{U_0(t,t+\sigma_+)U^{c_1+c_2}(t+\sigma_+,t+\sigma_-)U_0(t+\sigma_-,t)}^{\xrightarrow[\sigma_-\to-\infty]{\sigma_+\to\infty}\mathfrak{S}(c_1+c_2)} \\
=&U_0(t,t+\sigma_+)U^{c_1+c_2}(t+\sigma_+,s)U^{c_1+c_2}(s,t+\sigma_-)U_0(t+\sigma_-,t) \\
=&U_0(t,t+\sigma_+)U^{c_2}(t+\sigma_+,s)U^{c_1}(s,t+\sigma_-)U_0(t+\sigma_-,t) \\
=&\underbrace{U_0(t,t+\sigma_+)U^{c_2}(t+\sigma_+,s)U_0(s,t)}_{\xrightarrow[\sigma_+\to\infty,\ \tau_-\to-\infty]{s=:t+\tau_-}\mathfrak{S}(c_2)}\underbrace{U_0(t,s)U^{c_1}(s,t+\sigma_-)U_0(t+\sigma_-,t)}_{\xrightarrow[\tau_+\to\infty,\ \sigma_-\to-\infty]{s=:t+\tau_+}\mathfrak{S}(c_1)}.
\end{aligned} \tag{4.74}$$

Die Gleichung (4.74) gilt, wenn σ_+ und σ_- hinreichend groß bzw. klein sind. Damit folgt die kausale Faktorisierung $S(c_1+c_2) = S(c_2)S(c_1)$ der S-Matrix auch über $\mathfrak{H}^+$.

Vier Raum-Zeit-Dimensionen

In drei Raum-Zeit-Dimensionen gelingt es, die Existenz des S-Operators bei punktförmiger Quelldichte zu zeigen, indem das Problem regularisiert wird. Die Regularisierung basiert darauf, dass eine Familie zeitabhängiger unitärer Operatoren zur Verfügung steht, die den Zeitentwicklungsoperator im Howland-Formalismus in einen Operator transformiert, der sich besser verhält.

Wie könnte eine Verallgemeinerung des Regularisierungsschemas aussehen, das auch in vier Raum-Zeit-Dimensionen auf das van-Hove-Modell mit singulärer Quelle anwendbar ist?

Die Idee. Im Folgenden soll die Idee für ein Regularisierungsverfahren für das van-Hove-Modell angegeben werden.

Gegeben sei die Theorie skalarer massiver Bosonen. Der Hamiltonoperator sei von der Form $H(t) = H_0 + \chi_t^k(f)$. Dabei sei der Wechselwirkungsanteil als formaler Ausdruck gegeben, dessen Ein-Teilchen-Norm schwächer als $\omega_{\mathbf{p}}^k$ divergiert und der zeitlich glatt mit kompaktem Träger ist

$$\chi^k \in \Omega^k := \left\{ \chi^k \,\middle|\, \|\chi^k(\omega^{-k}f)\Omega\|^2 < \infty,\ „t \mapsto \chi_t^k(f)“ \ \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \right\}. \tag{4.75}$$

Für die Dauer der Rechnung sei f durch eine Testfunktion $\tilde{f}$ mit kompaktem Träger ersetzt. Wenn es gelingt, zu diesem Wechselwirkungsterm eine operatorwertige Funktion $A_1 = A_1(t,\chi^k)$ zu finden, so dass

i) $V_{t,1} = e^{A_1(t)}$ unitärer Operator in $\mathfrak{H}^+ \forall t$

ii) $[A_1, H_0] = -\chi^k$

iii) $[A_1, \left(\frac{d^j}{dt^j}\chi^k\right)] = c\cdot\mathbb{1},\ c\in\mathbb{C},\ j = 0,1,\ldots$

iv) $[A_1, \frac{d}{dt}] \in \Omega^{k-1}$

gilt, dann kann das Problem mit Hilfe der Transformationen V_t schrittweise regularisiert werden.

Zur Regularisierung des Problems betrachte anstatt $K = H_0 + \chi^k(\tilde{f}) - i\frac{d}{dt}$ über $\mathcal{K}$ den Operator

$$\begin{aligned} K_1 = V_1 K V_1^* &= \sum_{n=0}^{\infty} [A_1, \ldots [A_1, (H_0 + \chi^k(\tilde{f}) - i\frac{d}{dt})] \ldots] \\ &= H_0 - \underbrace{i[A_1, \frac{d}{dt}]}_{=:-\chi^{k-1}} - i\frac{d}{dt} + C_1. \end{aligned} \tag{4.76}$$

Der neue Wechselwirkungsterm $\chi^{k-1} = i[A_1, \frac{d}{dt}]$ ist nach Konstruktion ein Element aus Ω^{k-1}, wenn $\tilde{f}$ wieder durch f ersetzt wird. Damit ist χ^{k-1} maximal wie ω^{k-1} divergent. Nach k Transformationen der Art (4.76) mit den jeweils passenden A_k ergibt sich eine Wechselwirkung $\chi^0(f) \in \Omega^0$ mit endlicher Ein-Teilchen-Norm. Der Operator

$$\begin{aligned} K_k :&= V_k \ldots V_1 K V_1^* \ldots V_k^* \\ &= H_0 + \chi^0(f) - i\frac{d}{dt} + C_k + \cdots + C_1 \end{aligned} \tag{4.77}$$

kann nun mit Hilfe von Howlands Formalismus behandelt werden.

Dazu muss bemerkt werden, dass Bedingung iii) gerade kanonische Vertauschungsrelationen zwischen dem Operator A und der Wechselwirkung χ fordert. Damit sind beide im Wesentlichen durch Linearkombinationen der Felder φ bzw. π gegeben. Genau wie in Abschnitt 4.2.1 kann dann die Selbstadjungiertheit von K_k gezeigt werden. Auch liefert die gleiche Argumentation wie im genannten Abschnitt, dass K_k eine Zeitentwicklungsgruppe im Sinne von Howland erzeugt.

Weiterhin ergibt sich, dass zu K_k ein S-Operator existiert. Da χ^k in t kompakten Träger hat, gilt dies auch für alle $A_i, 1 \leq i \leq k$ als Funktion von t. Alle verwendeten Transformationen V_i werden also für genügend große Zeiten zum Einheitsoperator - das ursprüngliche Problem besitzt den selben S-Operator.

Nun kann durch die Rücksubstitution $\tilde{f} \to f$ wieder zum ursprünglichen, singulären Problem übergegangen werden. Dabei werden die numerischen Konstanten C_i (bis auf die letzte, C_k) singulär. Also wird der renormierte Howland-Hamiltonian $K_{k,\text{ren}}$ definiert, indem in K_k die konstanten C_k gestrichen werden.

Für eine Anwendung des hier beschriebenen Verfahrens muss natürlich die operatorwertige Funktion A_i noch passend bestimmt und die Existenz der Transformationen V_i gezeigt werden. Hier tritt ein Problem auf: im Allgemeinen werden die Transformationen V_i bei der Rücksubstitution $\tilde{f} \to f$ nicht mehr sinnvoll definiert sein. Zwar kann der renormierte Howland-Hamiltonoperator $K_{k,\text{ren}}$ unabhängig davon definiert werden, aber es ist nicht klar, in welchem Zusammenhang das durch ihn gegebene Problem mit der ursprünglichen Fragestellung steht.

Zumindest für den Fall einer punktförmigen Quelle in vier Raum-Zeit-Dimensionen kann plausibel erklärt werden, warum die Annahme begründet ist, dass $K_{k,\text{ren}}$ die richtige lokale S-Matrix liefert. Ein Beweis wird im Rahmen dieser Arbeit nicht gegeben.

Das hier vorgestellte Regularisierungsschema hat gewisse Ähnlichkeiten mit dem von Mickelsson und Langmann in [LM96] entwickelten Verfahren. Dort geht es um die Existenz der S-Matrix für Fermionen in einem äußeren Feld. Die Ein-Teilchen-S-Matrix ist quantisierbar, wenn ihr Kommutator mit dem „Signum“ des Ein-Teilchen-Hamiltonoperators $[H_0/|H_0|, S]$ ein Hilbert-Schmidt-Operator ist (Satz von Shale). Diese Bedingung lässt sich zeigen, nachdem ein zeitabhängiges, äußeres Potential auf Ein-Teilchen-Niveau iterativ regularisiert wurde. Auf der Ebene der Ein-Teilchen-Quantenmechanik treten auch keine Probleme mit nicht definierten Transformationen auf.

Im übrigen soll bemerkt werden, dass die Anwendung von Abbildungen, die die Singularität von höchstem Grad absorbieren, schon auf Friedrichs zurück geht. Dort werden sie als „Dressing-Transformationen“ bezeichnet.

Punktförmige Quelldichte, vier Raum-Zeit-Dimensionen. Tritt im van-Hove-Modell eine punktförmige Quelldichte auf, ist ihre Fouriertransformierte im Impulsraum keine schnell abfallende Funktion mehr: $\hat{\rho}_t(\mathbf{p}) = c(t) \otimes 1, c \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Der Hamiltonoperator wird formal $H(t) = H_0 + c(t)\varphi(1)$, der Wechselwirkungsanteil hat keine endliche Ein-Teilchen-Norm $\|\varphi(1)\Omega\|^2 = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2\omega_\mathbf{p}}$. Auch $\|\varphi(\omega^{-1})\Omega\|^2$ ist (logarithmisch) divergent. Erst $\|\varphi(\omega^{-2})\Omega\|^2$ ist endlich, und $\varphi(c \cdot 1)$ damit ein Element aus Ω^2. Durch zweimalige Anwendung des obigen Regularisierungsverfahrens sollte nach „Streichung“ der divergenten Konstanten eine definierte, lösbare Aufgabe zu erhalten sein. Für die Dauer der Regularisierung sei die Quelldichte durch eine Funktion $c \cdot \tilde{f}$ ersetzt, die sowohl im zeitlichen als auch im räumlichen Anteil Testfunktion ist.

Wie kann die Regularisierungsfunktion A_1 gewählt werden? Es bezeiche $\mathrm{ad}_{H_0}(\cdot) = [H_0, \cdot]$ die adjungierte Wirkung von H_0. Es ist leicht zu sehen, dass der mit Hilfe der inversen adjungierten Wirkung definierte Operator $A_1 := \mathrm{ad}_{H_0}^{-1} \varphi(c\tilde{f}) = a^*(\omega^{-1}c\tilde{f}) - a(\omega^{-1}c\tilde{f})$ die Anforderungen erfüllt:

i) A_1 ist selbstadjungiert

ii) $[A_1, H_0] = -a^*(c\tilde{f}) - a(c\tilde{f}) = -\varphi(c\tilde{f})$

iii) $[A_1, \varphi(c\tilde{f})] = 2i|c|^2(\tilde{f}, \omega^{-1}\tilde{f})$ ist eine c-Zahl; damit auch der Kommutator mit Zeitableitungen

iv) Als Operator auf $\mathcal{K}$: $[A_1, \frac{d}{dt}] = a^*(\omega^{-1}\dot{c}\tilde{f}) - a(\omega^{-1}\dot{c}\tilde{f}) \in \Omega^1$ für $\tilde{f} \to 1$

Damit ergibt sich im ersten Regularisierungsschritt mit $V_{1,t} = e^{A_1(t)}$

$$K_1 = V_1 K V_1^* = H_0 + i\left(a(\omega^{-1}\dot{c}\tilde{f}) - a^*(\omega^{-1}\dot{c}\tilde{f})\right) - i\frac{d}{dt} + C_1. \tag{4.78}$$

Im zweiten Schritt dient die inverse adjungierte Wirkung des freien Hamiltonoperators, angewendet auf die neue Wechselwirkung, als Regularisator: $A_2 = [H_0^{-1}, a(\omega^{-1}\dot{c}\tilde{f}) - a^*(\omega^{-1}\dot{c}\tilde{f})]$. A_2 zeigt wie oben A_1 das richtige Verhalten. Mit $V_{2,t} = e^{A_2(t)}$ ergibt

$$K_2 = V_2 K_1 V_2^* = H_0 + \varphi(\omega^{-2}\ddot{c}\tilde{f}) - i\frac{d}{dt} + C_1 + C_2 \tag{4.79}$$

Beim Übergang $f \to 1$ entsteht nach Streichung von C_1 und C_2 der neue Howland-Hamiltonian

$$K_{2,\mathrm{ren}} = H_0 + \ddot{c}\varphi(\omega^{-2}) - i\frac{d}{dt} \tag{4.80}$$

Nun kann wie in den vorherigen Beispielen mit Howlands Formalismus ein messbarer Propagator berechnet werden. Selbstadjungiertheit von $K_{2,\mathrm{ren}}$ ergibt sich mit dem Kommutatortheorem. Des Weiteren genügt $K_{2,\mathrm{ren}}$ der Bedingung des Satzes 3.1.5. Damit existiert ein messbarer Propagator $U(t,s)$ über $\mathfrak{H}^+$, so dass

$$\left(e^{-iK_{2,\mathrm{ren}}\sigma}\psi\right)(t) = U(t,t-\sigma)\psi(t-\sigma) \qquad \forall\psi \in \mathcal{K} \tag{4.81}$$

gilt. Im Wechselwirkungsbild existiert die S-Matrix als Operator über $\mathfrak{H}^+$, da die Wechselwirkung zeitlich lokalisiert ist.

S-Matrix. Um das Regularisierungsschema sinnvoll anwenden zu können, sollte begründet werden können, warum das regularisierte System die richtige S-Matrix liefert. Im Fall des van-Hove-Modells in zwei Raum-Zeit-Dimensionen konnte argumentiert werden, dass die Regularisierungstransformationen für frühe und späte Zeiten zur Identität werden. In diesem Sinn stimmen die Dynamik des regularisierten und des ursprünglichen Systems asymptotisch überein.

Im Fall der punktförmigen Quelldichte in vier Raum-Zeit-Dimensionen kann so nicht argumentiert werden, da die Regularisierung durch die Substitution $f \to \tilde{f}$ am Modell mit endlich ausgedehnter Quelldichte durchgeführt wird. Erst am Ende geschieht die Rücksubstitution zu punktförmiger Quelle, die verwendeten Transformationen V_1 und V_2 verlieren dann ihren Sinn.

Trotzdem ist es sinnvoll, die durch $K_{2,\mathrm{ren}}$ erhaltene S-Matrix als Streuoperator für das System mit singulärer Quelldichte anzusehen.

Zum einen erfüllt sie die kausale Funktionalgleichung der lokalen S-Matrizen. Die Argumentation verläuft genau wie im Fall dreier Raum-Zeit-Dimensionen.

Zum anderen stimmt die Transformation $V_{1,t}$ mit V_t überein. V_t implementiert für reguläre Quelle den Automorphismus

$$\beta_{\hat{\rho}_t}(\cdot) = V_t \cdot V_t^*, \tag{4.82}$$

der auch für singuläre Quelle $\hat{\rho}_t \to c(t)\cdot 1$ auf den Generatoren der Observablenalgebra $\mathfrak{A}_0$ durch

$$\beta_{c(t)}(\varphi(\tilde{f})) = \varphi(\tilde{f}) + 2\,\mathrm{Re}(\tilde{f}, \omega^{-1}c(t)) \tag{4.83}$$

gegeben ist. Das bedeutet: für singuläre Quelldichte kann der Automorphismus $\beta_{c(t)}$ nicht mehr implementiert werden, seine Anwendung auf der Ebene der Observablenalgebra bleibt jedoch wohldefiniert. Die Singularität der verwendeten Transformation ist also ein Problem der Darstellung, nicht der zu Grunde liegenden algebraischen Relationen.

Deshalb sollte es gerechtfertigt sein, die Transformation V_t als Rechenhilfsmittel zu verwenden – die Zusammenhänge zwischen den Observablen werden beim nachträglichen Übergang zur singulären Quelle nicht verändert. Für die Transformation $V_{t,2}$ gilt diese Überlegung erst recht, hier liegen schwächere Divergenzen vor.

Bündel. Der Fockraum der freien Felder ist mit Hilfe der GNS-Konstruktion durch den Vakuumzustand ω_0 festgelegt. ω_0 ist in Gleichung (1.15) erklärt als der Zustand mit dem positiven Frequenzanteil der Kommutatorfunktion als Zweipunktfunktion. Die Darstellung ist durch

$$\omega_0(A) = (\Omega_0, \pi_0(A)\Omega_0), \quad A \in \mathfrak{A}_0 \tag{4.84}$$

bestimmt.

Nun kann aber auch der zeitabhängige Zustand betrachtet werden, der sich durch Hintereinanderausführung von $\beta_{c(t)}$ und ω_0 ergibt: $\omega_t = \omega_0 \circ \beta_{c(t)}$. Auch ω_t fixiert eine GNS-Darstellung

$$\omega_t(A) = (\Omega_t, \pi_t(A)\Omega_t). \tag{4.85}$$

Wegen der Gleichung

$$(\Omega_t, \pi_t(A)\Omega_t) = (\Omega_0, \pi_0(\beta_{c(t)}(A))\Omega_0) \tag{4.86}$$

und der Eindeutigkeit der GNS-Konstruktion bis auf unitäre Äquivalenz existiert eine unitäre Abbildung $T_t : \mathfrak{H}^+_{\omega_t} \to \mathfrak{H}^+$ mit

$$T_t \pi_t(A) T_t^* = \pi_0(\beta_{c(t)}(A)) \tag{4.87}$$

wobei $\mathfrak{H}^+_{\omega_t}$ der zu ω_t konstruierte GNS-Hilbertraum mit Vakuum Ω_t ist. Diese Abbildung ist nicht mit V_t identisch. Damit T_t den Automorphismus $\beta_{c(t)}$ implementiert, müsste auf beiden Seiten der Gleichung π_0 auftauchen.

Aber die Existenz dieser Abbildung rechtfertigt es, anstatt in dem zu ω_t gehörenden GNS-Hilbertraum $\mathfrak{H}^+_{\omega_t}$ mit dem entsprechenden zeitabhängigen Vakuum, im Fockraum der freien Felder mit einer zeitabhängigen Darstellung zu rechnen. Damit sind die Hilberträume zu verschiedenen Zeiten zwar weiterhin isomorph, können aber nicht mehr natürlich identifiziert werden, da sie unterschiedliche Darstellungen der kanonischen Vertauschungsrelationen tragen. Wie schon in Abschnitt 3.1.4 bemerkt, erscheint eine Formulierung als Bündel

$$\bigcup_{t \in \mathbb{R}} \{t\} \times (\mathfrak{H}^+, \pi_0 \circ \beta_{c(t)}) \tag{4.88}$$

hier angemessen. Für Zeiten t, die außerhalb des Trägers von c liegen, trägt der Fockraum der freien Felder die übliche Vakuumdarstellung. Deshalb ist es nicht überraschend, dass der Streuoperator als Operator im Fockraum der freien Felder existiert.

Für eine rigorose Formulierung dieser und der vorangegangenen Aussagen sowie mögliche Verallgemeinerungen oder Anwendungen auf kompliziertere Modelle sollte Howlands Formalismus in die Sprache von Paralleltransport und Zusammenhang übersetzt werden. Die Wirkung des Howland-Hamiltonians K in Satz 3.1.5 suggeriert eine Interpretation als kovariante Ableitung.

Dieser Schritt wird in der vorliegenden Diplomarbeit leider nicht mehr durchgeführt.

Zusammenfassung und Ausblick

Die vorliegende Diplomarbeit greift das Konzept der lokalen S-Matrizen aus der Störungstheorie auf. Mit ihrer Hilfe ist ein Schritt in Richtung Konstruktion einer wechselwirkenden Quantenfeldtheorie möglich. Wenn es gelingt, eine Familie lokaler S-Matrizen rigoros zu berechnen, kann auch das Netz lokaler Observablenalgebren erhalten werden. Die lokalen S-Matrizen ergeben sich aus Propagatoren im Wechselwirkungsbild. Um sie zu konstruieren, können wie in [Wre72] Methoden zur Lösung der zeitabhängigen Schrödingergleichung verwendet werden.

Ein Überblick über die gängigsten Sätze aus der zeitabhängigen Quantenmechanik wird gegeben. Es zeigt sich, dass die nötigen Voraussetzungen an Glattheit der Wechselwirkung und zeitliche Konstanz der Definitionsbereiche in Hinblick auf quantenfeldtheoretische Anwendungen recht einschränkend sind.

Howlands Formalismus wird beschrieben. Die zur Verfügung stehenden Hilfsmittel werden zusammengestellt, um Selbstadjungiertheit der Zeitentwicklungsgeneratoren zu zeigen. Der zu Grunde liegende Funktionenraum wird betrachtet. Er weist als direktes Integral eine „faserige“ Struktur auf. Auch die Wirkung des Zeitentwicklungsgenerators – ähnlich einer kovarianten Ableitung – gibt einen Hinweis, dass Howlands Formalismus in eine Faserbündel-Formulierung übertragen werden kann. Dies wird in der vorliegenden Arbeit nicht geleistet.

Statt dessen zeigen Beispiele, das auch der bestehende Rahmen von Howlands Formalismus zur Konstruktion von lokalen S-Matrizen hilfreich ist. Sowohl zeitlich veränderliche Definitionsbereiche als auch fehlende Stetigkeit der Wechselwirkung in der Zeit stellen kein Hindernis dar. Allerdings werden auch keine stetigen Propagatoren erhalten. Da auch die messbaren Propagatoren die kausale Funktionalgleichung erfüllen, pflanzt sich diese Eigenschaft auf die lokalen S-Matrizen fort.

Das van-Hove-Modell dient als erster Testfall aus der Quantenfeldtheorie. Auch hier kann Howlands Formalismus angewendet werden. Für punktförmige Quelldichte treten inäquivalente Darstellungen der kanonischen Vertauschungsrelationen auf. Ein Regularisierungsverfahren wird vorgeschlagen und in drei und vier Raum-Zeit-Dimensionen angewendet. Nach der Regularisierung garantiert Howlands Formalismus die Existenz messbarer Propagatoren und damit auch der lokalen S-Matrizen.

Gegenstand zukünftiger Untersuchungen könnten folgende Punkte sein:

- Anwendung von Howlands Formalismus auf die $(: \varphi^4 :)_2$-Theorie und Vergleich mit [Wre72].
- Anwendung auf Quantenfeldtheorie mit äußeren Feldern und Präzisierung des Regularisierungsverfahrens.
- Anwendung auf weitere Modelle aus der konstruktiven Quantenfeldtheorie.
- Kann ein direkter Zusammenhang zwischen der kausalen Funktionalgleichung der lokalen S-Matrizen und der Charakterisierung der Zeitentwicklung in Howlands Formalismus hergestellt werden?
- Kann der Formalismus im Rahmen einer Bündelformulierung verallgemeinert werden?

Anhang A

Sätze

A.1 Selbstadjungiertheit

Die folgenden Tatsachen über selbstadjungierte Operatoren finden im Hauptteil der Diplomarbeit Anwendung. Bewiesen sind sie z.B. in [RS80], [RS75]. Einen kurzen Überblick gibt [Sim72].

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. Ein *Operator* A ist eine lineare Abbildung von einem Unterraum $D(A) \subset \mathcal{H}$ nach $\mathcal{H}$. Der Definitionsbereich $D(A)$ muss nicht abgeschlossen sein, wird aber als dicht in $\mathcal{H}$ angenommen.

Der *Graph* $\Gamma(A)$ eines Operators A ist eine Teilmenge von $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ und gegeben durch $\Gamma(A) = \{\langle \phi, A\phi \rangle | \phi \in D(A)\}$.

Der Operator A heißt *abgeschlossen*, wenn $\Gamma(A)$ abgeschlossen ist in $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$. A ist abschließbar, wenn $\overline{\Gamma(A)}$ Graph eines Operators ist. Der Abschluss von A ist der Operator $\overline{A}$ mit $\Gamma(\overline{A}) = \overline{\Gamma(A)}$.

Definition A.1.1 *Sei A ein Operator mit Definitionsbereich $D(A)$. $D(A^*)$ ist die Menge der Vektoren $\psi \in \mathcal{H}$, für die es eine Konstante C gibt mit $\|(\psi, A\phi)\| \leq C\|\phi\|$ für alle $\phi \in D(A)$. Nach dem Satz von Riesz gibt es zu jedem $\psi \in D(A^*)$ einen eindeutig bestimmten Vektor $A^*\psi \in \mathcal{H}$ mit $(A^*\psi, \phi) = (\psi, A\phi) \forall \phi \in D(A)$. Der durch $D(A^*) \ni \psi \mapsto A^*\psi$ bestimmte Operator A^* ist der zu A* adjungierte *Operator.*

A^* ist nicht notwendig dicht definiert. Es gilt: A^* ist genau dann dicht definiert, wenn A abschließbar ist. In diesem Fall ist $\overline{A} = A^{**}$.

Definition A.1.2 *Ein Operator A heißt*

1. symmetrisch, *falls* $A \subset A^*$
2. selbstadjungiert, *falls* $A = A^*$
3. wesentlich selbstadjungiert, *falls* $A^* = A^{**}$.

Wesentlich selbstadjungierte Operatoren haben genau eine selbstadjungierte Fortsetzung.

Satz A.1.1 *Ein Operator A ist genau dann wesentlich selbstadjungiert, wenn A symmetrisch ist und nur $\psi = 0$ die Gleichung $A^*\psi = \pm i\psi$ löst.*

Eine Erweiterung dieses grundlegenden Kriteriums ergibt sich mit dem *Defekträumen* $\mathcal{N}_\pm = \ker(A^* \pm i)$. Die *Defektindizes* $n_\pm$ sind gegeben durch $n_\pm = \dim \mathcal{N}_\pm$. Es gilt:

Satz A.1.2 *Sei A ein symmetrischer Operator mit Defektindizes $n_\pm$. Dann*

1. *ist A wesentlich selbstadjungiert $\Longleftrightarrow n_+ = n_- = 0$*
2. *hat A selbstadjungierte Fortsetzungen $\Longleftrightarrow n_+ = n_- > 0$. Es besteht eine eineindeutige Beziehung zwischen den selbstadjungierten Fortsetzungen von A und den unitären Abbildungen $V : \mathcal{N}_+ \to \mathcal{N}_-$.*

Im zweiten Fall ist eine selbstadjungierte Fortsetzung $\tilde{A}$ von A auf $D(\tilde{A}) = \{\phi + \psi + V\psi | \phi \in D(A), \psi \in \mathcal{N}_+\}$ durch $\tilde{A}(\phi + \psi + V\psi) = A\phi - i\psi + iV\psi$ gegeben.

Ein *Definitionskern* (core) D eines Operators A ist ein Unterraum $D \subset D(A)$ so, dass $\overline{A|_D} = \overline{D}$ gilt. Ist A selbstadjungiert, so ist D genau dann ein Definitionskern, wenn $A|_D$ wesentlich selbstadjungiert ist.

Ein Operator ist *halbbeschränkt* falls eine Konstante M mit $(\phi, A\phi) \geq -M\|\phi\|^2$ existiert.

Selbstadjungiertheit einer Operatorsumme liefert der folgende Satz:

Satz A.1.3 (Kato-Rellich-Theorem) *Sei A ein selbstadjungierter Operator. B sei symmetrisch und genüge den Annahmen*

1. *$D(B) \supset D(A)$*
2. *Für ein $a < 1$ und ein $b > 0$ und alle $\phi \in D(A)$ gelte*

$$\|B\phi\| \leq a\|A\phi\| + b\|\phi\|. \tag{A.1}$$

Dann ist $A + B$ selbstadjungiert auf $D(A)$ und jeder Definitionskern von A ist auch ein Definitionskern von $A + B$. Wenn A halbbeschränkt ist, dann gilt dies auch für $A + B$.

Der Operator B heißt dann auch A-beschränkt mit relativer Schranke a. Es genügt, (A.1) auf einem Definitionskern von A zu prüfen.

Eine *quadratische Form* ist eine Abbildung $q : Q(q) \times Q(q) \to \mathbb{C}$ mit $q(\cdot, \phi)$ antilinear, $q(\phi, \cdot)$ linear, wobei $Q(q) \subset \mathcal{H}$ ein dichter Unterraum ist. q ist symmetrisch falls $q(\phi, \psi) = \overline{q(\psi, \phi)}$ und halbbeschränkt, falls $q(\phi, \phi) \geq -M\|\phi\|^2$. Mit Hilfe der Spektraldarstellung ergibt sich zu jedem selbstadjungierten Operator A eine quadratische Form q_A auf $Q(q_A) = Q(A) = D(\sqrt{|A|})$, die symbolisch als $q_A(\phi, \psi) = (\phi, A\psi)$ geschrieben wird. $Q(A)$ ist der Form-Definitionsbereich des Operators A.

Eine ähnliche Aussage wie das Kato-Rellich-Theorem macht das KLMN-Theorem für quadratische Formen:

Satz A.1.4 (KLMN-Theorem) *Sei A ein positiver, selbstadjungierter Operator und sei $\beta(\cdot,\cdot)$ eine symmetrische, quadratische Form auf $Q(A)$. Mit Konstanten $a < 1$ und $b \in \mathbb{R}$ gelte*

$$|\beta(\phi,\phi)| \leq a(\phi, A\phi) + b(\phi,\phi) \tag{A.2}$$

für alle $\phi \in D(A)$. Dann existiert ein eindeutig bestimmter, selbstadjungierter Operator C mit $Q(C) = Q(A)$ und

$$(\phi, C\psi) = (\phi, A\psi) + \beta(\phi,\psi) \quad \forall \phi,\psi \in Q(C). \tag{A.3}$$

C ist nach unten durch $-b$ beschränkt.

Eine andere Art der Abschätzung verwendet das Kommutator-Theorem.

Satz A.1.5 (Kommutatortheorem) *Sei N ein selbstadjungierter Operator mit $N \geq \mathbb{1}$ im Sinne von quadratischen Formen. Sei A ein symmetrischer Operator mit einem Definitionsbereich D, der auch einen Definitionskern für N darstellt. Ausserdem gelte*

1. *$\|A\phi\| \leq c\|N\phi\|$ für eine Konstante c und alle $\phi \in D$*
2. *$|(A\phi, N\phi) - (N\phi, A\phi)| \leq d(\phi, N\phi)$ für eine Konstante d und alle $\phi \in D$.*

Dann ist A wesentlich selbstadjungiert auf D und der Abschluss von A ist wesentlich selbstadjungiert auf jedem anderen Definitionskern von N.

A.2 Stationäre Streutheorie

Hier soll nur ein Beispiel Techniken aus der stationären Streutheorie gegeben werden. Für ausführliche Darstellungen siehe [RS79] oder [BW83].

Gegeben seien zwei unitäre Gruppen e^{-iHt} und e^{-iH_0t}, die die wechselwirkende bzw. freie Dynamik eines quantenmechanischen Systems beschreiben. Damit $e^{-iHt}\psi$ als „asymptotisch frei“ im Grenzwert $t \to \pm\infty$ bezeichnet werden kann, soll ein $\psi_\pm$ mit

$$\lim_{t\to\pm\infty} \|e^{-iH_0t}\psi_\pm - e^{-iHt}\psi\| = 0 \tag{A.4}$$

existieren. Als Streuzustand soll $\psi_\pm$ aus dem Unterraum zu absolut stetigen Spektrum von H_0 stammen. Das ist in den meisten Anwendungen der Fall. Im Allgemeinen muss dies durch den Projektor $P_{\mathrm{ac}}(H_0)$ in der Definition der verallgemeinerten Wellenoperatoren

$$V^{\mathrm{out}}_{\mathrm{in}} = \lim_{t\to\pm\infty} e^{iHt}e^{-iH_0t}P_{\mathrm{ac}}(H_0) \tag{A.5}$$

sichergestellt werden. Die Existenz der verallgemeinerten Wellenoperatoren ist äquivalent zur Bedingung (A.4), wenn der Grenzwert in der starken Operatortopologie ausgeführt wird. Ihr Zusammenhang mit den Wellenoperatoren im Wechselwirkungsbild $W_\pm$ ist in Abschnitt 1.3.1 beschrieben.

Neben der Existenz der verallgemeinerten Wellenoperatoren steht die Frage nach asymptotischer Vollständigkeit – ausreichend viele Streuzustände – im Zentrum der Streutheorie. Sie lässt sich manchmal mit der Existenzfrage verknüpfen, ist aber im Allgemeinen viel schwieriger zu beantworten. Über asymptotische Vollständigkeit ergibt sich ein Anküpfungspunkt zwischen Streu- und Spektraltheorie [RS79].

Ein Standardwerkzeug in der Streutheorie ist Cooks Methode:

Satz A.2.1 (Cooks Methode) *Seien H_0 und H selbstadjungierte Operatoren über einem Hilbertraum $\mathcal{H}$. Es gebe eine Menge $D \subset D(H_0) \cap P_{ac}(H_0)\mathcal{H}$, die dicht ist in $P_{ac}(H_0)\mathcal{H}$. Desweiteren gebe es zu jedem $\psi \in D$ eine Konstante T_0 so, dass*

1. $\exp(-iH_0t)\psi \in D(H)$ *für alle* $|t| > T_0$
2. $\int_{T_0}^{\infty} dt(\|(H - H_0)e^{-iH_0t}\psi\| + \|(H - H_0)e^{+iH_0t}\psi\|) < \infty$

gilt. Dann existieren die verallgemeinerten Wellenoperatoren $V_{\substack{out\\in}}$.

Der Satz hat verschiedene Verallgemeinerungen, z.B. das Kupsch-Sandhas-Theorem.

Einfache Sätze existieren für Spurklasse-Operatoren: Seien H_0, H unbeschränkte Operatoren mit $(H\phi, \psi) = (\phi, H_0\psi) + (\phi, V\psi)$ für ein $V \in \mathcal{T}_1$, der Spurklasse, und $\phi \in D(H), \psi \in D(H_0)$. In diesem Sinn ist „$H - H_0$ Spurklasse“ im folgenden Satz zu verstehen:

Satz A.2.2 (Kato-Rosenblum) *Wenn H_0, H selbstadjungiert sind und $H - H_0 \in \mathcal{T}_1$, dann existieren die verallgemeinerten Wellenoperatoren $V_{\substack{out\\in}}$. Ist das singuläre Spektrum von H leer, so sind sie auch asymptotisch vollständig.*

Wenn $H - H_0$ nicht beschränkt ist:

Satz A.2.3 (Kuroda-Birman) *Seien H_0, H selbstadjungiert und $(H+i)^{-1} - (H_0+i)^{-1} \in \mathcal{T}_1$. Dann existieren die verallgemeinerten Wellenoperatoren $V_{\substack{out\\in}}$. Ist das singuläre Spektrum von H leer, so sind sie auch asymptotisch vollständig.*

Für weitere Sätze sei auf die oben genannte Literatur verwiesen.

Literaturverzeichnis

[ACP82] M. Asorey, J. F. Cariñena, and M. Paramio. Quantum evolution as a parallel transport. *J. Math. Phys.*, 23:1451, 1982.

[BLOT90] N. N. Bogolubov, A. A. Logunov, A. I. Oksak, and I. T. Todorov. *General Principles of Quantum Field Theory.* Kluwer Academic Publishers, 1990.

[BS79] N. N. Bogoliubov and D. V. Shirkov. *Introduction to the Theory of Quantized Fields.* Wiley, 3rd edition, 1979.

[BW83] H. Baumgärtel and M. Wollenberg. *Mathematical Scattering Theory.* Birkhäuser, 1983.

[CFKS87] H. L. Cycon, R.G. Froese, W. Kirsch, and B. Simon. *Schrödinger Operators.* Springer, 1987.

[Coo61] J. M. Cook. Asymptotic properties of a boson field with given source. *Journal of Mathematical Physics*, 2(1):33 – 45, 1961.

[Dys75] Dyson. The radiation theories of Tomonaga, Schwinger and Feynman. *Physical Review*, 1975.

[EG73] H. Epstein and V. Glaser. The role of locality in perturbation theory. *Ann. Inst. Henri Poincaré A*, 19:211, 1973.

[Emc72] G. G. Emch. *Algebraic Methods In Statistical Mechanics And Quantum Field Theory*, volume XXVI of *Monographs And Texts In Physics And Astronomy.* John Wiley Sons, 1972.

[EV83] V. Enss and K. Veselić. Bound states and propagating states for time-dependent hamiltonians. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, 39(2):159–191, 1983.

[FB00] K. Fredenhagen and R. Brunetti. Microlocal analysis and interacting quantum field theories: Renormalization on physical backgrounds. *Commun. Math. Phys.*, 208:623–661, 2000.

[FD01] K. Fredenhagen and M. Dütsch. Algebraic quantum field theory, perturbation theory and loop expansion. *Commun. Math. Phys.*, 291:5–30, 2001.

[For84] O. Forster. *Analysis 3*. Vieweg, 1984.

[FR98] K. Fredenhagen and K.-H. Rehren. Algebraische Quantenfeldtheorie. in: Lexikon der Physik, Spektrum Akademischer Verlag, 1998.

[Fre] K. Fredenhagen. Superselection Sectors. Lecture Notes, Hamburg University, Winter Term 1994/95.

[Gli85a] James Glimm. *James Glimm/Arthur Jaffe: Collected Papers*, volume Volume 2. Birkhäuser, 1985.

[Gli85b] James Glimm. *James Glimm/Arthur Jaffe: Collected Papers*, volume Volume 1. Birkhäuser, 1985.

[GW64] L. Gårding and A. S. Wightman. Fields as operator valued distributions in relativistic quantum theory. *Ark. Fys.*, 28:126, 1964.

[Haa96] R. Haag. *Local Quantum Physics*. Springer, 2nd edition, 1996.

[How74] J. S. Howland. Scattering theory for time-dependent hamiltonians. *Math. Ann.*, 207:315–335, 1974.

[How79a] J. S. Howland. Scattering theory for hamiltonians periodic in time. *Indiana. Math. J.*, 1979.

[How79b] J. S. Howland. Two problems with time dependent hamiltonians. In *Mathematiclal Methods And Applications Of Scattering Theory*, pages 163–168, Washington, 1979.

[How89] J. S. Howland. Floquet operators with singular spectrum i. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, 49(3):309–323, 1989.

[Kat53] T. Kato. Integration of equations of evolution in a banach space. *J. Math. Soc. Japan*, 5:208–234, 1953.

[Key] M. Keyl. Algebraische Methoden der Quantentheorie. Lecture Notes, TU Berlin, Summer Term 1997.

[Kis64] J. Kisynski. Sur les opérateurs de green des problèmes de cauchy abstraits. *Studia Mathematica*, 23:285–328, 1964.

[Kü01] M. Küskü. The free Maxwell field in curved spacetime. Master's thesis, Universität Hamburg, 2001.

[Kuc93] P. Kuchment. *Floquet Theory For Partial Differential Equations*, volume 60 of *Operator Theory, Advances And Applications*. Birkhäuser, 1993.

[LM96] E. Langmann and J. Mickelsson. Scattering matrix in external field problems. *J. Math. Phys*, 37:3933–3953, 1996.

[Lüc] W. Lücke. Particles and Fields. Lecture Notes, TU Clausthal, Summer Term 1998.

[MRS93] J. Magnen, V. Rivasseau, and R. Sénéor. Construction of YM_4 with an infrared cutoff. *Commun. Math. Phys.*, 155:325–384, 1993.

[MS00] L. Mangiarotti and G. Sardanashvily. *Connections in Classical and Quantum Field Theory.* World Scientific, 2000.

[NF] M. A. Naimark and S. V. Fomin. Continuous direct sums of hilbert spaces and some of their applications. *Am. Math. Soc. Transl.*, 5:35–66.

[Pra97] D. Prange. Kausale Störungstheorie und differentielle Renormierung. Diplomarbeit, Universität Hamburg, 1997.

[RS75] M. Reed and B. Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics*, volume II: Fourier Analysis, Self-Adjointness. Academic Press, 1975.

[RS79] M. Reed and B. Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics*, volume III: Scattering Theory. Academic Press, 1979.

[RS80] M. Reed and B. Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics*, volume I: Funktional Analysis. Academic Press, 1980.

[Saf01] T. Saffary. Der Hawking-Effekt. Master's thesis, Universität Hamburg, 2001.

[Sak71] S. Sakai. *C^*-Algebras and W^*-Algebras.* Springer, 1971.

[Sch75] G. Schmidt. On scattering by time dependent perturbations. *Indiana Univ. Math. J.*, 24:925–935, 1975.

[Sch95] G. Scharf. *Finite Quantum Elektrodynamics.* Springer, 2nd edition, 1995.

[Sim71] B. Simon. *Quantum Mechanics for Hamiltonians Defined as Quadratic Forms.* Princeton University Press, 1971.

[Sim72] B. Simon. Topics in funktional analysis. In R. F. Streater, editor, *Mathematics of Contemporary Physics*, pages 17–76. London Mathematical Society, Academic Press, 1972.

[Sla77] D. A. Slavnov. Principle of causality in sacttering theory. *Theor. Math. Phys.*, 30(2), 1977.

[Soh78] H. Sohr. Über die Existenz von Wellenoperatoren für zeitabhängige Störungen. *Monatshefte Math.*, 86:63–81, 1978.

[SW89] R. F. Streater and A. S. Wightman. *PCT, Spin and Statistics, and All That.* Addison-Wesley, 1989.

[vH52] L. van Hove. Les difficultés de divergences pour un modèle particulier de champ quantifié. *Physica*, 18:145–159, 1952.

[Wre72] W. F. Wrezinski. Note on the construction of the Bogolyubov scattering operator in the $(: \varphi^4 :)_2$ theory. *Theor. Math. Phys.*, 11:331, 1972.

[Yaj82] K. Yajima. Resonances for the AC-stark effect. *Commun. Math. Phys*, 87:331–352, 1982.

[Yos74] K. Yosida. *Functional Analysis*. Springer, 4rd edition, 1974.

Danksagung

An erster Stelle möchte ich mich sehr herzlich bei Herrn Fredenhagen für die interessante Aufgabenstellung und die immer freundliche und geduldige Betreuung bedanken.

Bedanken möchte ich mich auch bei meinen Mitstreitern aus der Datscha für interessante Diskussionen und die gute Zeit. Dankbar bin ich Nicole für ihr Verständnis und dem FC St. Pauli für die guten Fußballspiele.

Mein Studium wurde mir ermöglicht durch die uneingeschränkte Unterstützung und Ermutigung, die ich durch meine Eltern erfahren habe. Ihnen gilt mein besonderer Dank.