Vorhersagen für die Prozesse $\gamma\gamma \to$ 4Fermionen($+\gamma$) an zukünftigen $\gamma\gamma$-Beschleunigern

Predictions for $\gamma\gamma \to$ 4fermions($+\gamma$) at a future $\gamma\gamma$ collider

Axel Bredenstein

Fachbereich Physik
der Universität Hamburg

Diplomarbeit

Januar 2003

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **3**
- 1.1 Das Standardmodell der Elementarteilchenphysik . . . 3
- 1.2 Quantisierung und Störungstheorie . . . 8
  - 1.2.1 Pfadintegral-Formalismus . . . 8
  - 1.2.2 Faddeev-Popov-Methode . . . 9
  - 1.2.3 Störungstheorie . . . 10
- 1.3 Photon-Photon-Kollider . . . 11
  - 1.3.1 Motivation . . . 11
  - 1.3.2 Funktionsweise . . . 12
- 1.4 Vier-Fermion-Produktion . . . 13

2 Berechnung der Helizitätsamplituden **16**
- 2.1 Weyl-van-der-Waerden-Formalismus . . . 16
  - 2.1.1 Grundlegende Definitionen . . . 16
  - 2.1.2 Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen . . . 19
  - 2.1.3 Spin-1-Teilchen und Eichspinoren . . . 19
  - 2.1.4 Feynmanregeln . . . 20
- 2.2 Klassifizierung der Endzustände . . . 21
- 2.3 NC-Prozesse . . . 22
- 2.4 CC-Prozesse . . . 31
- 2.5 NC/CC-Prozesse . . . 34
- 2.6 Vergleich mit Madgraph . . . 34
- 2.7 Berücksichtigung der Propagatorbreite . . . 35

3 Phasenraumintegration **37**
- 3.1 Monte-Carlo-Integration . . . 37
- 3.2 Multi-Channel-Methode . . . 40

4 Numerische Ergebnisse **44**
- 4.1 Vergleich mit Madgraph/Whizard . . . 45
- 4.2 Abhängigkeit von der Schwerpunktsenergie . . . 46
- 4.3 Breitenschemata . . . 47
- 4.4 Differentielle Wirkungsquerschnitte . . . 49

5 Zusammenfassung und Ausblick **55**

A Schouten-Identität **56**

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Das Standardmodell der Elementarteilchenphysik

Das Ziel der Elementarteilchenphysik ist die konsistente Beschreibung der fundamentalen Bausteine der Materie und der zwischen ihnen wirkenden Kräfte. Einer der Meilensteine auf diesem Weg war die Formulierung und experimentelle Bestätigung des Glashow-Salam-Weinberg-Modells, das die elektromagnetische und die schwache Kraft in einer Theorie vereinigt. Zusammen mit der Theorie der starken Wechselwirkung wird es als das Standardmodell der Elementarteilchenphysik (SM) bezeichnet. Etabliert wurde es durch die Entdeckung der Eichbosonen der starken Wechselwirkung (Gluonen) 1979 am DESY und der Eichbosonen der schwachen Wechselwirkung ($W^{\pm}, Z^0$) 1983 am CERN, und bisher wurde es durch alle experimentellen Tests bestätigt, z.B. durch Präzisionsmessungen an der Z^0-Resonanz in e^+e^--Kollisionen am CERN. Auch konnte 2001 das letzte noch fehlende von der Theorie postulierte Lepton, das Tau-Neutrino (ν_τ), am Fermilab direkt nachgewiesen werden. Trotzdem sind noch viele Fragen offen. Einer der Grundpfeiler der Theorie, der Higgs-Kibble-Mechanismus, der den Eichbosonen und auch den Fermionen Masse verleiht, setzt die Existenz eines skalaren Teilchens, des Higgs-Bosons, voraus, welches bisher experimentell noch nicht nachgewiesen werden konnte. Außerdem kann das SM nicht als eine endgültige Theorie betrachtet werden, weil viele Parameter, wie Massen und Kopplungen, ad hoc eingefügt werden müssen und nicht weiter erklärt werden können. Zudem hat die Theorie der Gravitationskraft eine gänzlich andere Struktur als die Quantenfeldtheorie, die die elektroschwache und die starke Kraft beschreibt.

Im Folgenden soll der Aufbau des SM beschrieben werden. Weitergehende Erklärungen finden sich z.B. in [1].

Das SM ist als nichtabelsche Eichtheorie formuliert. Beschrieben wird es durch eine sogenannte Lagrangedichte, die die kinetischen Energien, die Potentiale und die Wechselwirkungsenergien sämtlicher Felder enthält. Das Grundprinzip be-

steht darin, eine lokale Symmetrie der Theorie, d.h. die Invarianz der Lagrangedichte unter einer Eichtransformation, zu fordern. Beim Übergang von einer globalen Symmetrie zu einer lokalen, also einer Transformation, die an verschiedenen Raum-Zeit-Punkten unterschiedlich sein kann, müssen neue Felder, sogenannte Eichfelder, eingeführt werden, um die Invarianz der Lagrangedichte zu erhalten. Geometrisch ist der Grund darin zu sehen, dass Ableitungen von Feldern nicht mehr sinnvoll definiert werden können, weil sie Differenzen von Feldern an verschiedenen Raum-Zeit-Punkten enthalten, diese aber unterschiedliches Transformationsverhalten haben. Daher muss zunächst eine Beziehung der Felder an verschiedenen Raum-Zeit-Punkten definiert werden, was mathematisch mittels des affinen Zusammenhangs erreicht wird, welcher den Eichfeldern entspricht. Mit ihm kann die kovariante Ableitung definiert werden. Sie bewirkt eine Kopplung der Eichfelder an die Fermionen, so dass jene als Vermittler der Kräfte angesehen werden können.

Die Symmetrie des SM ist durch die Gruppe $SU(3)_c \otimes SU(2)_W \otimes U(1)_Y$ gegeben. Eichfelder transformieren sich in der adjungierten Darstellung, so dass es zu jedem Generator der zugehörigen Lie-Gruppe ein Eichfeld gibt. Die Gruppe $SU(3)_c$ besitzt acht Generatoren, die zu den acht Gluon-Feldern $G^a_\mu (a = 1 \dots 8)$ der Quantenchromodynamik, der Theorie der starken Wechselwirkung, führen. Durch $SU(2)_W$ und die abelsche Gruppe $U(1)_Y$ werden die Felder $W^i_\mu (i = 1, 2, 3)$ und B_μ eingeführt. Die kovariante Ableitung lautet damit:

$$\partial_\mu \to D_\mu = \partial_\mu - ig_s G^a_\mu t^a - ig_W W^i_\mu I^i + ig_Y B_\mu \frac{Y}{2}, \tag{1.1}$$

wobei t_a, I_i (schwacher Isospin) und Y (schwache Hyperladung) die Generatoren der Eichgruppen und g_s, g_W und g_Y die Kopplungen sind. Mit Hilfe der Generatoren können Gruppenelemente geschrieben werden als

$$U(\theta^j) = \exp(igT^j\theta^j), \quad T^j = t^a, I^i, Y \tag{1.2}$$

und die Transformation von Fermionfeldern als

$$\Psi \to \Psi' = U(\theta^j)\Psi. \tag{1.3}$$

Mit der Transformationseigenschaft der Eichfelder

$$V_\mu \to V_\mu{}' = U(\theta^j)V_\mu U(\theta^j)^{-1} + ig^{-1}(\partial_\mu U(\theta^j))U(\theta^j)^{-1}, \quad V_\mu = G^a_\mu, W^i_\mu, B_\mu \tag{1.4}$$

sind die kinetischen Terme der Fermionen $\bar{\Psi} \not{D} \Psi$, die jetzt auch die Kopplungen an die Eichfelder enthalten, eichinvariant. Aus dem Kommutator $[D_\mu, D_\nu]$ ergeben sich die Feldstärketensoren

$$\begin{aligned} G^a_{\mu\nu} &= \partial_\mu G^a_\nu - \partial_\nu G^a_\mu - g_s f^{abc} G^b_\mu G^c_\nu, \\ W^i_{\mu\nu} &= \partial_\mu W^i_\nu - \partial_\nu W^i_\mu - g_W \epsilon^{ijk} W^j_\mu W^k_\nu, \\ B_{\mu\nu} &= \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu, \end{aligned} \tag{1.5}$$

mit denen sich weitere eichinvariante Terme aufbauen lassen:

$$\mathcal{L}_{\text{Eichfelder}} = -\frac{1}{4}G^a_{\mu\nu}G^{a,\mu\nu} - \frac{1}{4}W^i_{\mu\nu}W^{i,\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu}. \tag{1.6}$$

Zusammen mit der Lagrangedichte der Fermionen bilden sie den sogenannten Yang-Mills-Sektor der Theorie.

Fermionen werden bezüglich ihrer Transformationseigenschaften unter $SU(2)_W$ charakterisiert. Der linkshändige Teil Ψ_L bildet ein Dublett und der rechtshändige Ψ_R ein Singlett. Außerdem werden sie durch ihre Quantenzahlen bezüglich der Gruppe $SU(2)_W$, dem schwachen Isospin, und der Gruppe $U(1)_Y$, der schwachen Hyperladung, beschrieben. Eine weitere Unterscheidung ist die in Leptonen, welche Singletts bezüglich $SU(3)$ sind, und Quarks, welche Tripletts sind, sich also in der fundamentalen Darstellung transformieren. Die fermionische Lagrangedichte lautet:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{Fermionen}} &= \sum_{l=1}^{3}\bar{\Psi}^l_L \not{D}\Psi^l_L + \sum_{l=1}^{3}\bar{\Psi}^q_L \not{D}\Psi^q_L \\ &+ \sum_{l=1}^{3}\bar{\Psi}^e_R \not{D}\Psi^e_R + \sum_{l=1}^{3}\bar{\Psi}^u_R \not{D}\Psi^u_R + \sum_{l=1}^{3}\bar{\Psi}^d_R \not{D}\Psi^d_R.\end{aligned} \tag{1.7}$$

Summiert wird über die drei Familien, welche in Tabelle 1.1 zusammen mit ihren Quantenzahlen aufgelistet sind. Dort sind auch rechtshändige Neutrinos aufgeführt, deren Existenz mittlerweile durch den experimentellen Nachweis von Neutrinooszillationen gezeigt wurde. Da die Neutrinomassen jedoch sehr klein sind, können sie in dieser Arbeit vernachlässigt werden, so dass rechtshändige Neutrinos vollständig von den anderen Teilchen entkoppeln, da die Quantenzahlen bezüglich sämtlicher Eichgruppen Null sind.

Neben den bereits genannten Quantenzahlen ist in Tabelle 1.1 auch die elektromagnetische Ladung angegeben. Dass sie in der Theorie bisher nicht aufgetaucht ist, liegt daran, dass die Eichfelder, die sowohl Eigenzustände bezüglich der elektromagnetischen Ladung als auch Masseneigenzustände sind, eine Mischung der Felder W^i_μ und B_μ sind:

$$\begin{gathered}W^\pm_\mu = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(W^1_\mu \mp iW^2_\mu), \\ \begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_W & \sin\theta_W \\ -\sin\theta_W & \cos\theta_W \end{pmatrix}\begin{pmatrix} W^3_\mu \\ B_\mu \end{pmatrix}.\end{gathered} \tag{1.8}$$

Damit das Feld A_μ mit dem Photon identifiziert werden kann, muss der Weinberg-Winkel θ_W so gewählt sein, dass $\cos\theta_W = g_W/\sqrt{g_W^2 + g_Y^2}$. Die Quantenzahl der elektromagnetischen Ladung ist dann (Gell-Mann-Nishijima-Relation):

$$Q = I^3 + \frac{Y}{2}. \tag{1.9}$$

					I	I_3	Y	Q
Leptonen	Ψ_L^l	$\begin{pmatrix} \nu_{\mathrm{e}} \\ \mathrm{e} \end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}_L$	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}$	-1 -1	0 -1
	Ψ_R^{e}	e_R	μ_R	τ_R	0	0	-2	-1
	Ψ_R^{ν}	$\nu_{\mathrm{e}R}$	$\nu_{\mu R}$	$\nu_{\tau R}$	0	0	0	0
Quarks	Ψ_L^q	$\begin{pmatrix} \mathrm{u} \\ \mathrm{d} \end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix} \mathrm{c} \\ \mathrm{s} \end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix} \mathrm{t} \\ \mathrm{b} \end{pmatrix}_L$	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$ $-\frac{1}{3}$
	Ψ_R^u	u_R	c_R	t_R	0	0	$\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$
	Ψ_R^d	d_R	s_R	b_R	0	0	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$

Tabelle 1.1: Fermionen des SM mit den Quantenzahlen schwacher Isospin I,I_3, schwache Hyperladung Y und elektromagnetische Ladung Q

Weder für Fermionen noch für Eichbosonen können in der Lagrange-Dichte explizite Massenterme auftreten, weil diese die Eichinvarianz verletzen würden. Die Lösung im SM bietet der Higgs-Kibble-Mechanismus. In ihm wird die Symmetrie spontan gebrochen, d.h. dass ein Feld einen von Null verschiedenen Vakuumerwartungswert erhält. Die Lagrange-Dichte ist dann weiterhin eichinvariant, der Grundzustand der Theorie jedoch nicht. Im SM wird ein skalares komplexes $SU(2)_W$-Dublett mit Hyperladung $Y = 1$ eingeführt:

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \phi^+(x) \\ \phi^0(x) \end{pmatrix}, \tag{1.10}$$

das ein Potential

$$V(\Phi) = -\mu^2(\Phi^\dagger\Phi) + \frac{\lambda}{4}(\Phi^\dagger\Phi)^2, \quad \mu^2, \lambda > 0 \tag{1.11}$$

besitzt (weitere Terme, wie z.B. $(\Phi^\dagger\Phi)^3$, würden die Renormierbarkeit der Theorie verletzten). Der entsprechende eichinvariante Anteil in der Lagrange-Dichte lautet

$$\mathcal{L}_{\mathrm{H}} = (D_\mu\Phi)^\dagger(D^\mu\Phi) - V(\Phi). \tag{1.12}$$

Das Potential nimmt an der Stelle Φ_0 mit $\Phi_0^\dagger\Phi_0 = \frac{2\mu^2}{\lambda} \equiv \frac{v^2}{2}$ ein Minimum an, welches zwar nicht eindeutig ist, aber gewählt werden kann als:

$$\Phi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \tag{1.13}$$

Wenn eine kontinuierliche Symmetrie gebrochen ist, treten laut Goldstones Theorem zusätzliche masselose Teilchen auf, die Goldstone-Bosonen genannt werden.

In diesem Fall sind die Symmetrien, die den Generatoren von $SU(2)_W \otimes U(1)_Y$ entsprechen, gebrochen, jedoch bleibt die Symmetrie der elektromagnetischen Ladung $Q = I_3 + \frac{Y}{2}$ erhalten. Aus diesem Grund treten drei masselose Goldstone-Bosonen auf, die allerdings keinen physikalischen Teilchen entsprechen, weil massive Eichbosonen einen zusätzlichen Freiheitsgrad, den der longitudinalen Polarisation, besitzen. Die Goldstone-Bosonen liefern diesen Freiheitsgrad und werden daher auch pseudo-Goldstone-Bosonen genannt. Das bedeutet weiterhin, dass ein Eichboson, nämlich das Photon, masselos bleibt, wie es vom Experiment verlangt wird. Die neuen Felder lassen sich mittels einer Entwicklung um den Grundzustand Φ_0 von Φ schreiben:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \frac{v+\eta+i\chi}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \phi^- = (\phi^+)^\dagger. \tag{1.14}$$

Einsetzen dieses Ausdrucks in $\mathcal{L}_\mathrm{H}$ liefert die Massen der Eichbosonen:

$$M_W = \frac{ev}{2s_W}, \quad M_Z = \frac{ev}{2s_W c_W}. \tag{1.15}$$

Dabei wurde $c_W = \cos\theta_W$ und $s_W = \sin\theta_W$ definiert. Außerdem folgt daraus die Relation $c_W = \frac{M_W}{M_Z}$. Dass die Felder ϕ^+, ϕ^- und χ in der sogenannten unitären Eichung verschwinden, zeigt, dass sie keinen physikalischen Zuständen entsprechen. Dies gilt jedoch nicht für das Feld η, das dem bisher nicht experimentell nachgewiesenen Higgs-Teilchen entspricht, dessen Masse $M_H = \sqrt{2}\mu$ ein freier Parameter der Theorie ist.

Auf Grund der unterschiedlichen Quantenzahlen von links- und rechtshändigen Feldern verletzen Massenterme für Fermionen ebenfalls die Symmetrie der Theorie. So wäre z.B. ein Term $-m(\bar{\mathrm{e}}_L \mathrm{e}_R + \bar{\mathrm{e}}_R \mathrm{e}_L)$ nicht eichinvariant, weil e_L und e_R verschiedenen Darstellungen von $SU(2)_W$ angehören und unterschiedliche Hyperladung besitzen. Daher wird angenommen, dass sie über eine sogenannte Yukawa-Kopplung an das Feld Φ koppeln:

$$\mathcal{L}_\mathrm{Yukawa} = -\sum_{l,\mathrm{e}} \bar{\Psi}^l_L G_{l\mathrm{e}} \Psi^\mathrm{e}_R \Phi - \sum_{q,d} \bar{\Psi}^q_L G_{qd} \Psi^d_R \Phi - \sum_{q,u} \bar{\Psi}^q_L G_{qu} \Psi^u_R \tilde{\Phi} + h.c., \tag{1.16}$$

dabei ist $\tilde{\Phi} = i\sigma_2 \Phi^*$ das ladungskonjugierte Higgs-Feld, und $h.c.$ steht für den hermitesch konjugierten Ausdruck. Nimmt Φ nun den Vakuumerwartungswert an, so ergeben sich Massenterme für die Fermionen. Die Masseneigenzustände fallen allerdings nicht notwendigerweise mit den Flavoureigenzuständen zusammen. Sie ergeben sich vielmehr durch Diagonalisieren der Matrizen $G_{l\mathrm{e}}, G_{qd}$ und G_{qu}. Bei Vernachlässigung der Neutrinomassen lassen sich die Matrizen, die diese unitäre Transformation für Leptonen beschreiben, in eine Umdefinition der Felder absorbieren. Im Quark-Sektor gibt es jedoch keine Basis, die sowohl die Yukawa- als auch die Eichkopplungen diagonalisiert. Der Übergang von Flavour- zu Masseneigenzuständen wird durch die Cabibbo-Kobayashi-Maskawa-Matrix (CKM-Matrix) beschrieben.

1.2 Quantisierung und Störungstheorie

1.2.1 Pfadintegral-Formalismus

Der klassische Weg der Quantisierung ist der kanonische Formalismus. In ihm werden für die Felder, welche operatorwertig sind, die kanonischen Kommutator-Relationen aufgestellt. Zusammen mit den Euler-Lagrangeschen Bewegungsgleichungen lassen sich dann n-Punkt-Funktionen (Greensche Funktionen) berechnen, welche als der Vakuumerwartungswert des zeitgeordneten Produkts von Feldoperatoren definiert sind (der Index H steht für das Heisenberg-Bild):

$$G^{\phi\ldots\phi}(x_1,\ldots,x_n) = \langle 0|T\phi_H(x_1)\ldots\phi_H(x_n)|0\rangle. \tag{1.17}$$

Die 2-Punkt-Funktion $G^{\phi\phi}(x_1,x_2)$ kann z.B. als Übergangsamplitude für die Erzeugung eines Teilchens am Punkt x_1 und der Vernichtung an Punkt x_2 interpretiert werden. Der kanonische Formalismus erweist sich jedoch als sehr umständlich, insbesondere in nicht-abelschen Eichtheorien. Daher wird üblicherweise ein anderer Zugang, der Pfadintegral-Formalismus, gewählt. Dieser ist bereits aus der Quantenmechanik bekannt, wo er eine zum kanonischen Formalismus äquivalente Darstellung liefert. Er beruht darauf, dass Übergangsamplituden als Integral über alle möglichen Wege, gewichtet mit dem Exponential der Wirkung, geschrieben werden können. In der Quantenfeldtheorie wird analog vorgegangen, nur dass nicht mehr über Wege, sondern über Feldkonfigurationen integriert wird. So werden n-Punkt-Funktionen definiert als:

$$G^{\phi\ldots\phi}(x_1,\ldots,x_n) = N\int D\phi\ \phi(x_1)\ldots\phi(x_n)\exp\left\{i\int d^4x\ \mathcal{L}(x)\right\} \tag{1.18}$$

mit der Normierung

$$N^{-1} = \int D\phi\ \exp\left\{i\int d^4x\ \mathcal{L}(x)\right\}, \tag{1.19}$$

wobei ϕ stellvertretend für alle Felder inklusive Eichfeldern stehen soll. Die Integration über $D\phi$ ist formal als Grenzwert der Integration über $d\phi(x)$ an allen Raum-Zeit-Punkten x definiert:

$$D\phi = \prod_x d\phi(x). \tag{1.20}$$

Eine mathematisch exakte Definition ist nicht bekannt. Allerdings wird die Anwendung dieser Methode dadurch gerechtfertigt, dass sie die kanonische Störungstheorie reproduziert.

Eine elegante Formulierung der Theorie ist mit Hilfe sogenannter Erzeugender Funkionale möglich, welche definiert sind als

$$Z[J] = N\int D\phi\ \exp\left\{i\int d^4x\ \left(\mathcal{L}(x)+J(x)\phi(x)\right)\right\},\quad Z[0]=1, \tag{1.21}$$

wobei $J(x)$ als Quelle bezeichnet wird. Durch Funktionalableitung nach den Quellfeldern ergeben sich die n-Punkt-Funktionen:

$$G^{\phi\dots\phi}(x_1,\dots,x_n) = \frac{\delta^n}{i\delta J(x_1)\dots i\delta J(x_n)} Z[J]\Big|_{J\equiv 0}. \tag{1.22}$$

Bei mehreren Feldern wird entsprechend für jedes Feld eine Quelle eingeführt.

Im Gegensatz zu bosonischen Feldoperatoren, die im kanonischen Formalismus bestimmten Kommutator-Relationen gehorchen, gelten für fermionische Feldoperatoren Antikommutator-Relationen. Daher müssen auch die Feldfunktionen im Funktionalintegral antikommutieren. Dies wird dadurch erreicht, dass die Funtionen und auch die Quellen Grassmann-wertig sind.

Weitergehende Erläuterungen hierzu und zu den folgenden beiden Abschnitten finden sich z.B. wieder in [1].

1.2.2 Faddeev-Popov-Methode

Bei der Integration über Eichfelder tritt in der Definition des Funktionalintegrals ein Problem auf, das mit der Eichfreiheit der Lagrange-Dichte zusammenhängt. Da diese sich bei einer Eichtransformation nicht ändert, ist auch der Integrand in (1.19) konstant für diejenigen Feldkonfigurationen, die durch eine Eichtransformation auseinander hervorgehen. Diese Feldkonfigurationen bilden eine nichtkompakte Menge, so dass das Integral divergiert. Eine Lösung bietet das von Faddeev und Popov vorgeschlagene Verfahren, in dem lediglich über jeweils einen „Vertreter“ physikalisch äquivalenter Feldkonfigurationen integriert wird. Mathematisch wird dies durch die Einführung von Eichfixierungsfunktionen f_a erreicht, so dass die Bedingung $f_a[{}^\theta\mathcal{A}_\mu(x)] = 0$ für die $a = 1,\dots,n$ Eichfelder genau einer Eichung entspricht. Das heißt, es gibt genau eine Lösung $\theta^a(x)$ der Eichtransformation

$$U(\theta^a) = \exp\{-igT^a\theta^a(x)\}, \tag{1.23}$$

die die Felder $\mathcal{A}_\mu(x)(\mathcal{A}_\mu = A^a_\mu T^a)$ in ${}^\theta\mathcal{A}_\mu(x)$ überführt (T^a sind die Gruppengeneratoren). In die Funktionalintegration wird dann ein Faktor

$$\int DU \ \det\left(\frac{\delta f^a}{\delta\theta^b}\right)\prod_{a,x}\delta(f_a[{}^\theta\mathcal{A}_\mu(x)]) = \text{const} \tag{1.24}$$

aufgenommen. Auf diese Weise lässt sich die Integration über äquivalente Eichkonfigurationen dU abspalten und in die Normierung (1.19) aufnehmen. Die Determinante aus Gleichung (1.24) ist jedoch im Allgemeinen nicht unabhängig von A_μ, kann also nicht ebenfalls in die Normierung aufgenommen werden. Sie wird stattdessen als ein Funktionalintegral über Grassmann-wertige Felder $u^a(x)$,$\bar{u}^a(x)$ (Faddeev-Popov-Geister) geschrieben, welche allerdings nicht als physikalisch interpretiert werden können. Ein Grund hierfür ist, dass sie, obwohl Grassmann-wertig, Skalarfelder sind und somit nicht das richtige Verhältnis zwischen Spin

und Statistik haben. Die Delta-Funktion aus Gleichung (1.24) lässt sich so umschreiben, dass lediglich ein sogenannter Eichfixierungsterm in der Lagrangedichte auftritt. Das Ergebnis dieses Verfahrens ist also, dass die Änderung im Funktionalintegral lediglich in einer Integration über Faddeev-Popov-Geister, einem entsprechenden Zusatzterm in der Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_{FP} = -\bar{u}^a(x) M^{ab}(x) u^b(x), \quad M^{ab}\delta(x-y) \equiv \frac{\delta f_a(x)}{\delta \theta^b(y)}, \tag{1.25}$$

den zugehörigen Quellfeldern j^a und einem Eichfixierungsterm in der Lagrangedichte besteht. Für letztere ist

$$\mathcal{L}_{fix} = \left(\frac{1}{\sqrt{\xi_A}}\partial^\mu A_\mu\right)^2 + \left|\frac{1}{\sqrt{\xi_Z}}\partial^\mu Z_\mu - iM_Z\sqrt{\xi_\chi}\chi\right|^2 + \left|\frac{1}{\sqrt{\xi_W}}\partial^\mu W_\mu^+ - iM_Z\sqrt{\xi_\phi}\phi^+\right|^2 \tag{1.26}$$

eine bequeme Wahl. Die Konstanten ξ sind frei wählbar. Die Wahl $\xi_A = \xi_Z = \xi_\chi = \xi_W = \xi_\phi = 1$ wird als 't Hooft-Feynman-Eichung bezeichnet.

1.2.3 Störungstheorie

Die Störungstheorie beruht auf der Annahme, dass die Wechselwirkung zwischen Feldern als kleine Abweichung von der freien Bewegung interpretiert werden kann. Ausgehend davon wird die Lagrangedichte in einen Teil $\mathcal{L}_0$, der eben diese freie Bewegung beschreibt, und einen Teil $\mathcal{L}_I$, der die Wechselwirkung beschreibt, unterteilt. In der Sprache der Funktionalintegrale lässt sich diese Unterteilung schreiben als

$$\begin{aligned} Z[J] &= N \exp\left\{ i \int d^4y \; \mathcal{L}_I\left(\frac{\delta}{i\delta J(y)}\right)\right\} \\ &\quad \times \int D\phi \; \exp\left\{ i \int d^4x \; \left(\mathcal{L}_0(x) + J(x)\phi(x)\right)\right\}. \end{aligned} \tag{1.27}$$

Die erste Exponentialfunktion kann nun in eine Reihe entwickelt werden, was einer Entwicklung in den Kopplungskonstanten entspricht, die als klein gegenüber 1 angenommen werden. Das Ergebnis für n-Punkt-Funktionen (1.18) besteht aus 2-Punkt-Funktionen (Propagatoren) und (im Ortsraum) Integrationen $ig\int d^4y$ und kann graphisch durch Feynmandiagramme veranschaulicht werden, in denen Propagatoren als Linien und $ig\int d^4y$ (bzw. ig im Impulsraum) als Punkte (Vertizes) dargestellt werden.

Der Weg zu physikalischen Observablen in Streuexperimenten führt über die S-Matrix. Sie entspricht der Wahrscheinlichkeitsamplitude dafür, dass ein bestimmter Anfangszustand i in einen bestimmten Endzustand f übergeht: $S_{fi} = \langle f|S|i\rangle$, wobei $|i\rangle$ und $|f\rangle$ im Allgemeinen Impulseigenzustände sind. Definiert ist sie als Grenzwert des unitären Operators $U(t,t_0)$, der die Zeitentwicklung des

Systems beschreibt, für $t \to \infty$ und $t_0 \to -\infty$. Da es möglich ist, dass die Teilchen in einem Streuexperiment überhaupt nicht miteinander wechselwirken, die S-Matrix also dem Einheitsoperator entspricht, wird ein weiterer Operator als $S = \mathbb{1} + iT$ definiert, durch den das Matrixelement $\mathcal{M}$ definiert ist als:

$$\langle p_1 \dots p_n | iT | p_a p_b \rangle = (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(p_a + p_b - \sum_{i=1}^{n} p_i \right) i\mathcal{M}(p_a, p_b \to p_i), \qquad (1.28)$$

für die Reaktion der Teilchen $a + b \to 1 + \dots + n$.

Das Matrixelement $\mathcal{M}$ kann schließlich aus einer n-Punkt-Funktion hergeleitet werden. Das Verfahren, mit dem dies geschieht, ist nach Lehmann, Symanzik und Zimmermann (LSZ-Formel) benannt. Es besteht im Wesentlichen darin, alle amputierten (d.h. ohne äußere Propagatoren), zusammenhängenden Feynmangraphen, die die entsprechende n-Punkt-Funktion symbolisieren, aufzusummieren, die äußeren Impulse auf die Massenschale zu setzen ($p^2 = m^2$) und mit Spinoren bzw. Polarisationsvektoren der äußeren Felder zu multiplizieren.

Zuletzt verbleibt es noch, den differentiellen Wirkungsquerschnitt durch das Matrixelement auszudrücken. Kinematische Überlegungen liefern:

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{1}{4E_a E_b |v_a - v_b|} \left(\prod_i \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3 2E_i} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(p_a + p_b - \sum_i^n p_i \right) \\ &\quad \times |\mathcal{M}(p_a, p_b, p_1, \dots, p_n)|^2, \end{aligned} \qquad (1.29)$$

wobei $v_{a,b} = \frac{p^z_{a,b}}{E_{a,b}}$, sofern die Strahlrichtung als z-Achse definiert wird.

1.3 Photon-Photon-Kollider

1.3.1 Motivation

Eine mögliche Ausbaustufe des am DESY geplanten e^+e^--Linearbeschleunigers TESLA ist ein Photon-Photon-Kollider [2]. In vielerlei Hinsicht verhält sich die Physik einer Photon-Photon-Kollision komplementär zur Physik einer entsprechenden e^+e^--Kollision. So lassen sich einige Kopplungen genauer untersuchen, weil z.B. die Messung der γWW-Kopplung am Photon-Photon-Kollider nicht beeinflusst wird durch die Art der ZWW-Kopplung, die in der e^+e^--Kollision zusätzlich auftritt. Weiterhin erhöht der $\gamma\gamma$-Modus die Reichweite eines Linearbeschleunigers für die Entdeckung einiger neuer Teilchen und anderer Effekte „neuer Physik“. Zum Beispiel lässt sich das Higgs-Boson im Standardmodell in höherer Ordnung der Störungstheorie in einer s-Kanal Resonanz erzeugen und so direkt dessen Zerfallbreite bzgl. des Zerfalls in zwei Photonen messen. Diese gibt Aufschluss über die am Zerfallsprozess beteiligten virtuellen Teilchen und kann so erste Anzeichen für bisher unbekannte Teilchen liefern, die durch den

Higgs-Mechanismus ihre Masse bekommen. Auf diese Weise kann nicht nur das Higgs-Boson im Standardmodell, sondern können auch die drei vom minimalen supersymmetrischen Modell (MSSM) vorhergesagten neutralen Higgs-Bosonen erzeugt werden. Die wichtigsten Prozesse am e^+e^--Kollider, bei denen diese entstehen, sind Higgs-Strahlung und WW-Fusion ($e^+e^- \to ZH$, $e^+e^- \to \nu_e\bar{\nu}_e H$). Im Gegensatz dazu ensteht das Higgs-Boson beim $\gamma\gamma$-Kollider in einer s-Kanal-Resonanz ($\gamma\gamma \to H \to WW, b\bar{b}, \dots$), so dass die gesamte Schwerpunktsenergie zur Verfügung steht und daher die maximale Masse, bis zu der es entdeckt werden kann, etwa 1.5 mal höher ist [2]. Zusätzlich sind viele Wirkungsquerschnitte der $\gamma\gamma$-Kollision größer als in der entsprechenden e^+e^--Kollision. In Abbildung 1.1 sind einige davon als Funktion der Schwerpunktsenergie miteinander verglichen. Man sieht z.B., dass der Wirkungsquerschnitt für W-Paar-Produktion um etwa eine Größenordnung höher liegt. Dies spielt für die Messung anomaler Kopplungen der W-Bosonen eine wichtige Rolle. Außerdem sind die Wirkungsquerschnitte für die Produktion zweier geladener Teilchen, wie z.B. Top-Quarks ($t\bar{t}$) oder geladener Higgs-Bosonen (H^+H^-), ebenfalls sehr viel größer.

1.3.2 Funktionsweise

Die hochenergetischen Photonen werden mittels Compton-Rückstreuung erzeugt, indem zwei Laser-Strahlen auf die beiden einlaufenden Elektronstrahlen fokussiert werden. Bei der Kollision der Photonen mit den Elektronen wird nahezu die gesamte Energie der Elektronen auf die Photonen übertragen. Da diese Energie vom Streuwinkel abhängt und mehrfache Comptonstreuung auftreten kann, ist die Energie der Photonen nicht fest, sondern weist ein Spektrum auf, welches ein scharfes Maximum bei hoher Energie besitzt und dann zu niedrigen Energien abfällt. Die maximale Energie hängt von der Frequenz des Lasers ab. Wird sie zu hoch gewählt, entstehen bei der Reaktion der Laserphotonen mit den hochenergetischen Photonen e^+e^--Paare, was zu einer Reduktion der Luminosität führt. Der optimale Wert liegt bei ca. 1 eV, so dass die Energie beim Maximum des Spektrums etwa 80% der Elektronenergie beträgt. Die Photonpakete lässt man wenige Millimeter vom primären Kollisionspunkt enfernt miteinander kollidieren, wobei ihre Größe etwa der der Elektronpakete entspricht. Ausserdem kann die Energie der Laser groß genug gewählt werden, um praktisch alle Elektronen zu streuen, so dass die geometrische Luminosität höher ist als die der e^+e^--Kollision, da die Photonen nicht geladen sind, sich also nicht gegenseitig abstoßen. Da die Energie der Photonen jedoch die oben erwähnte Verteilung besitzt und nur die hochenergetischen wichtig sind, ist die effektive Luminosität geringer. Für Ereignisse mit Energien oberhalb 80% der Maximalenergie beträgt sie etwa ein Drittel der Luminosität der e^+e^--Kollision. Es gibt allerdings noch die Möglichkeit, zirkular polarisierte Laser-Photonen und longitudinal polarisierte Elektronen zu verwenden. Dadurch erhöht sich der Anteil der Photonen oberhalb von 80% der Maximalenergie um etwa einen Faktor drei. Dies bietet auch physikalisch neue

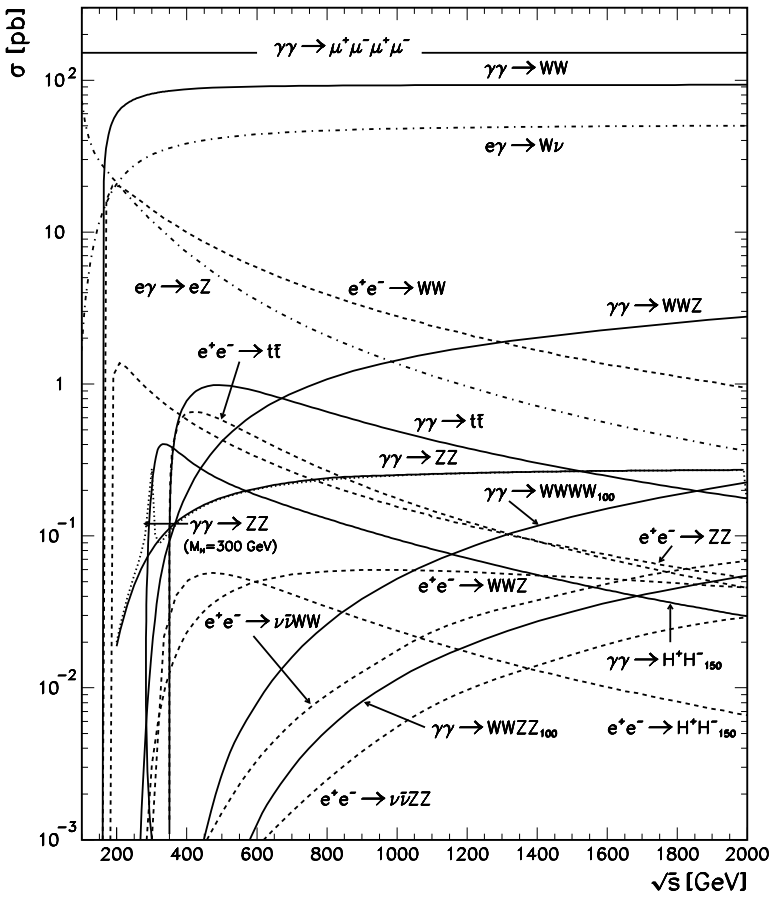


Abbildung 1.1: Totale Wirkungsquerschnitte als Funktion der Schwerpunktsenergie für einige ausgewählte Reaktionen am $\gamma\gamma$-,$e\gamma$- und e^+e^--Kollider[2]

Möglichkeiten, da viele Messgrößen (z.B. in der Reaktion $\gamma\gamma \to WW$) von der Polarisation der Photonen abhängen.

1.4 Vier-Fermion-Produktion

Eine der wichtigsten Prozessklassen an einem Photon-Photon-Kollider ist die Vier-Fermion-Produktion. Zum einen stellt sie einen Untergrund bei der Suche nach Effekten „neuer Physik“ dar. So tritt für $M_H \gtrsim 140\,\mathrm{GeV}$ die Reaktion $\gamma\gamma \to H \to WW \to 4f$ auf, die vom kontinuierlichen Untergrundprozess $\gamma\gamma \to 4f$ getrennt werden muss. Meist sind diese gesuchten Signale sehr viel seltener als die Untergrundprozesse, so dass für beide genaue theoretische Vorhersagen erforderlich sind. Zum anderen spielt die Vier-Fermion-Produktion auch für die W-Paar-Produktion eine wichtige Rolle. Diese besitzt oberhalb von rund 200 GeV mit etwa 80 pb einen der größten Wirkungsquerschnitte und eignet sich

zur Bestimmung der Kopplungen $\gamma\gamma WW$ und γWW, was zum Verständnis des Yang-Mills-Sektors des Standardmodells beiträgt. Auch können die Schranken an anomale Kopplungen verbessert werden [3], d.h. Kopplungen, die von der Vorhersage des Standardmodells abweichen. Sie haben ihren Ursprung in höherdimensionalen Operatoren (deren Einheiten eine höhere Dimension als vier besitzen) in der Lagrangedichte, die zwar die Renormierbarkeit der Theorie zerstören, aber als der niederenergetische Grenzwert einer allgemeineren Theorie interpretiert werden können (ähnlich dem Standardmodell der elektroschwachen Wechselwirkung, dessen niederenergetischer Grenzwert das Fermimodell ist, welches ebenfalls nicht renormierbar ist). Außerdem wird überlegt, diese Reaktion zusätzlich zu den Prozessen $\gamma\gamma \to e^+e^-(\mu^+\mu^-)$ und $\gamma\gamma \to \mu^+\mu^-\mu^+\mu^-$ als Luminositätsmonitor zu verwenden, also mittels der Messung der entsprechenden Wirkungsquerschnitte die Luminosität des Beschleunigers zu bestimmen. Auch hierfür ist eine genaue theoretische Vorhersage für den Prozess $\gamma\gamma \to WW$ notwendig.

Da W-Bosonen allerdings nicht stabil sind, sondern in Fermion-Paare zerfallen, sollte der Gesamtprozess $\gamma\gamma \to WW \to 4f$ betrachtet werden, bei dem die W-Bosonen virtuell sind, sich also nicht auf ihrer Massenschale befinden. Auf Grund der Komplexität der Rechnung können für diesen Prozess in absehbarer Zeit nicht die Strahlungskorrekturen erster Ordnung berechnet werden. Möglich ist jedoch eine sogenannte „Doppelpolnäherung“. Hierbei nimmt man an, dass die W-Bosonen „quasi on-shell“ sind, was eine gute Näherung ist, da der Wirkungsquerschnitt in diesem Bereich des Phasenraums durch die resonanten Propagatoren verstärkt wird. Für den „On-Shell-Prozess“ können die Strahlungskorrekturen berechnet werden. Für den zentralen Baustein $\gamma\gamma \to WW$ sind die Korrekturen bereits bekannt [4]. Um „Off-Shell-Effekte“ der W-Bosonen zu berücksichtigen, muss allerdings der volle Prozess $\gamma\gamma \to 4f$ berechnet werden. Außerdem wird der Prozess $\gamma\gamma \to 4f\gamma$ benötigt, um infrarote Singularitäten, die in den virtuellen Korrekturen mit Photonaustausch zwangsläufig vorkommen, herauszuheben. Die „Doppelpolnäherung“ ist bei e^+e^--Kollisionen bereits diskutiert und ausgearbeitet worden. Vorgeschlagen wurde sie in [6], und eine komplette Rechnung findet sich z.B. in [7].

Die Wirkungsquerschnitte für $\gamma\gamma \to 4f(\gamma)$ in niedrigster Ordnung der Störungstheorie sind also sowohl für sich betrachtet als auch als erster Schritt in einer Präzisionrechnung für $\gamma\gamma \to WW \to 4f$ wichtig. Sie sollen in dieser Arbeit berechnet werden. Dabei werden Fermionmassen vernachlässigt, so dass sich die Rechnung stark vereinfacht, was man in Kap.2.1 sehen wird. Neutrinos und Elektronen haben Massen, die bei den hier relevanten Energien ohne Probleme vernachlässigt werden können. Effekte einer endlichen Myonmasse sind prinzipiell im Experiment messbar, wenn die invariante Masse eines Myonpaares nicht mehr groß gegenüber der Masse eines Myons ist. Diese Bereiche des Phasenraums können aber durch geeignete Schnitte ausgeschlossen werden. Da Quarks nicht frei vorkommen, sind ihre Massen in der Quantenfeldtheorie nicht wohldefiniert. Für die Quarks der ersten beiden Generationen ergibt sich allerdings mit $m_q = 0$

eine konsistente Beschreibung [8]. Eine weitere Vereinfachung bringt die Definition der CKM-Matrix als Einheitsmatrix. Dadurch mischen Quarks verschiedener Generationen nicht miteinander. Gerechtfertigt wird dies dadurch, dass im Experiment über u-,d-,c- und s−Quarks und unter Umständen auch b−Quarks summiert wird, da diese experimentell nicht unterscheidbar sind.

Die Wirkungsquerschnitte werden mittels Helizitätsamplituden berechnet, so dass sich die Ergebnisse leicht auch für beliebige Photonpolarisation angeben lassen. Die Rechnung geschieht allerdings nicht mit der üblichen Dirac-Algrebra, sondern im Weyl-van-der-Waerden-Formalismus.

Kapitel 2

Berechnung der Helizitätsamplituden

2.1 Weyl-van-der-Waerden-Formalismus

Der Vorteil in der Verwendung von Helizitätsamplituden liegt neben der Möglichkeit, die Polarisation der äußeren Teilchen zu spezifizieren, darin, dass die Matrixelemente nicht vor der numerischen Auswertung quadriert werden müssen. Dies ist der Fall, wenn die Wirkungsquerschnitte mittels Vollständigkeitsrelationen für die Wellenfunktionen berechnet werden. Dabei steigt die Anzahl der Terme quadratisch mit der Anzahl der Feynmangraphen. Bei der Verwendung von Helizitätsamplituden hingegen werden die Quadrierung der Matrixelemente und die Summation über die Spins numerisch durchgeführt. Mit steigender Anzahl von externen Teilchen steigt dabei zwar die Anzahl der möglichen Konfigurationen der Helizitäten, die verschiedenen Amplituden sind allerdings durch diskrete Symmetrien miteinander verbunden.

Im Weyl-van-der-Waerden-Formalismus [9] werden alle relevanten Größen des Matrixelementes durch zweikomponentige Spinoren ausgedrückt. Im Gegensatz zu anderen Formalismen, in denen unterschiedliche Objekte wie z.B. Impulse und Dirac-Spinoren vorkommen, ist hier die Amplitude lediglich Funktion eines einzigen mathematischen Objekts, so dass sich weitere analytische Umformungen erleichtern. Außerdem eignet sich diese Form zur Implementierung in Computerprogramme.

2.1.1 Grundlegende Definitionen

Dem Weyl-van-der-Waerden-Formalismus liegt zu Grunde, dass sich alle Größen eines Matrixelementes wie bestimmte Darstellungen der Lorentzgruppe transformieren und sich auf die beiden einfachsten (zweidimensionalen) Darstellungen zurückführen lassen.

Jede Darstellung der Lorentzgruppe lässt sich durch die Eigenwerte der beiden Casimir-Operatoren kennzeichnen, welche die Werte $j_1, j_2 = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2} \ldots$ annehmen können. Die einfachsten nichttrivialen Darstellungen sind somit $D^{(\frac{1}{2},0)}$ und $D^{(0,\frac{1}{2})}$. In infinitesimaler Form sehen sie wie folgt aus:

$$\begin{aligned} D^{(\frac{1}{2},0)} &= \mathbb{1} + \frac{i}{2}\delta\theta\boldsymbol{n}\boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{2}\delta\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\sigma} \\ D^{(0,\frac{1}{2})} &= \mathbb{1} + \frac{i}{2}\delta\theta\boldsymbol{n}\boldsymbol{\sigma} + \frac{1}{2}\delta\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\sigma}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

wobei $\delta\theta$ den Drehwinkel um die Achse, die durch den Einheitsvektor $\boldsymbol{n}$ definiert wird, $\delta\boldsymbol{\alpha}$ einen Lorentzboost um die Geschwindigkeit $\delta v = \tan|\delta\boldsymbol{\alpha}|$ und σ_i die Pauli-Matrizen bezeichnet. Die Multipletts ξ und η dieser Darstellung sind zweidimensional und werden als Spinoren bezeichnet. Unter einer Lorentztransformation geht ξ über in $\xi' = D^{(\frac{1}{2},0)}\xi$ und η in $\eta' = D^{(0,\frac{1}{2})}\eta$. Analog zu $g^{\mu\nu}$ im Tensor-Formalismus wird nun eine Metrik ϵ^{AB} definiert, so dass die quadratische Form $\epsilon^{AB}\psi_A\xi_B$ lorentzinvariant ist. Unter Benutzung der Identitäten

$$(D^{(\frac{1}{2},0)})^\dagger = (D^{(0,\frac{1}{2})})^{-1}, \tag{2.2}$$

$$i\sigma_2 D^{(\frac{1}{2},0)}(i\sigma_2)^{-1} = (D^{(0,\frac{1}{2})})^* \tag{2.3}$$

ergibt sich mit

$$\epsilon \equiv i\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & +1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

die geforderte Lorentzinvarianz, wobei die Phase willkürlich gewählt wurde. Nun lassen sich, wiederum in Analogie zum Tensor-Formalismus, kovariante und kontravariante Spinoren mit unteren bzw. oberen Indizes definieren. Kovariante Spinoren ψ_A transformieren sich mit $D^{(\frac{1}{2},0)}$ und kontravariante Spinoren ψ^A mit $(D^{(0,\frac{1}{2})})^*$. Auf Grund von Gleichung (2.3) sind diese beiden Darstellungen äquivalent. Der Übergang von einer Darstellung zur anderen entspricht einem Basiswechsel, der durch die Matrix ϵ^{AB} vermittelt wird. Anschaulich ist dies ein Herauf- bzw. Herunterziehen der Indizes:

$$\psi_A = \psi^B\epsilon_{BA}, \quad \psi^A = \epsilon^{AB}\psi_B. \tag{2.5}$$

Durch komplexes Konjugieren erhält man Spinoren $\psi^{\dot{A}} = (\psi^A)^*$, die sich unter $D^{(0,\frac{1}{2})}$ transformieren. Wieder lassen sich kovariante und kontravariante Spinoren definieren:

$$\psi_{\dot{A}} = \psi^{\dot{B}}\epsilon_{\dot{B}\dot{A}}, \quad \psi^{\dot{A}} = \epsilon^{\dot{A}\dot{B}}\psi_{\dot{B}}, \tag{2.6}$$

mit

$$\epsilon^{AB} = \epsilon_{AB} = \epsilon^{\dot{A}\dot{B}} = \epsilon_{\dot{A}\dot{B}}. \tag{2.7}$$

Für beide Darstellungen wird mit dieser Metrik nun ein lorentzinvariantes Spinorprodukt definiert:

$$\langle\phi\psi\rangle = \phi_A\psi^A = \phi_1\psi_2 - \phi_2\psi_1, \tag{2.8}$$

$$\langle\phi\psi\rangle^* = \phi_{\dot{A}}\psi^{\dot{A}} = (\phi_1\psi_2 - \phi_2\psi_1)^*. \tag{2.9}$$

Aus der Definition der Metrik ergibt sich die für die Anwendung sehr nützliche Schouten-Identität, die natürlich auch für die komplex konjugierten Spinorprodukte gilt:

$$\langle\phi\psi\rangle\langle\xi\eta\rangle + \langle\phi\xi\rangle\langle\eta\psi\rangle + \langle\phi\eta\rangle\langle\psi\xi\rangle = 0. \tag{2.10}$$

Ein entscheidender Schritt im Weyl-van-der-Waerden-Formalismus besteht in der Verbindung zwischen Vierimpulsen, die sich unter $D^{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}$ transformieren, und Zweier-Spinoren. Mit der Definition von $\sigma^\mu = \left[\sigma^{\mu,\dot{A}B}\right] = (I, \boldsymbol{\sigma})$ lässt sich

$$V^\mu \equiv \xi^\dagger\sigma^\mu\xi = \xi_{\dot{A}}\sigma^{\mu,\dot{A}B}\xi_B \tag{2.11}$$

definieren. Unter $\xi \to D\xi$ ($D = D^{(\frac{1}{2},0)}$) transformiert sich V wie $V \to \Lambda V$, wenn Λ die entsprechende Lorentztransformation ist; V ist also ein Vierervektor. Dies motiviert die Identifikation eines Vierervektors $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ mit einem Spinor $X_{A\dot{B}}$:

$$X_{A\dot{B}} \equiv x_\mu\sigma^\mu_{A\dot{B}} = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix}, \tag{2.12}$$

wobei das (Ent-)Punkten von Indizes wieder einer komplexen Konjugation entspricht ($X_{\dot{A}B} = (X_{A\dot{B}})^*$). Das Lorentzprodukt $k_\mu p^\mu$ in Form von Zweierspinoren lautet dann:

$$2k_\mu p^\mu = K_{A\dot{B}}P^{A\dot{B}}. \tag{2.13}$$

Insbesondere gilt für Impulsvektoren $k^\mu \to K_{A\dot{B}}$ von masselosen Teilchen $k^2 = 0$, so dass $K_{A\dot{B}}$ in ein Produkt von Zweierspinoren faktorisiert:

$$K_{A\dot{B}} = k_A k_{\dot{B}}, \quad \text{mit } k_A = \sqrt{2k^0}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-i\phi}\cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \tag{2.14}$$

wobei k_A auch Impulsspinor genannt wird. Für $k^2 = p^2 = 0$ ist also:

$$2k_\mu p^\mu = \langle kp\rangle\langle kp\rangle^*. \tag{2.15}$$

Um ein- und auslaufende Teilchen eines Prozesses miteinander zu vertauschen, muss deren Impuls umgedreht werden ($k^\mu \to -k^\mu$). Laut Gleichung (2.12) geht damit auch $K_{\dot{A}B} \to -K_{\dot{A}B}$. Aus Gleichung (2.14) folgt jedoch, dass nur die Impulsspinoren der einen Darstellung ihr Vorzeichen wechseln. Das bedeutet, dass für $k^\mu \to -k^\mu$

$$k_{\dot{A}} \to -k_{\dot{A}}, \quad k_A \to +k_A. \tag{2.16}$$

Welcher der beiden Spinoren das Vorzeichen wechselt, ist Konvention.

2.1.2 Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen

Die Wellenfunktionen von Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen transformieren sich unter $D^{(\frac{1}{2},0)} \oplus D^{(0,\frac{1}{2})}$, lassen sich also schreiben als:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \phi_A \\ \psi^{\dot{A}} \end{pmatrix}. \tag{2.17}$$

Außerdem sind sie Lösungen der Dirac-Gleichung, die äquivalent zu den gekoppelten Weyl-Gleichungen ist. Für Lösungen mit festem Impuls k ($k^2 = m^2$) lauten diese

$$K_{A\dot{B}}\psi_k^{\dot{B}} = \pm m\phi_{k,A}, \quad K^{\dot{A}B}\phi_k^B = \pm m\psi_k^{\dot{A}} \tag{2.18}$$

für Teilchen (+) bzw. Antiteilchen (−). Bei masselosen Teilchen entkoppeln sie, und zusammen mit Gleichung (2.14) ergeben sich Lösungen, die Helizitätseigenzustände sind:

$$\begin{aligned} \Psi_k &= \begin{pmatrix} 0 \\ k^{\dot{A}} \end{pmatrix}, \quad \overline{\Psi}_k = \begin{pmatrix} k^A, 0 \end{pmatrix} \\ \Psi_k &= \begin{pmatrix} k_A \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{\Psi}_k = \begin{pmatrix} 0, k_{\dot{A}} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Die ersten beiden Spinoren beschreiben sowohl linkshändige Teilchen als auch rechtshändige Antiteilchen, die letzten beiden beschreiben sowohl rechtshändige Teilchen als auch linkshändige Antiteilchen.

2.1.3 Spin-1-Teilchen und Eichspinoren

Spin-1-Felder transformieren sich wie Vierervektoren. Daher kann der Polarisationsvektor ϵ^μ, wie in Abschnitt 2.1.1 beschrieben, durch Spinoren ausgedrückt werden. Weiterhin hat der Polarisationsvektor (nach Lorentzeichung) drei Freiheitsgrade, so dass es drei Basisvektoren gibt, die so gewählt werden können, dass sie bestimmten Helizitäten der Teilchen entsprechen. Zwei Basisvektoren beschreiben dann transversal polarisierte Teilchen und ein Basisvektor longitudinal polarisierte Teilchen. Letzterer liefert bei verschwindender Masse keinen physikalischen Zustand. Diese Tatsache manifestiert sich in einer zusätzlichen Eichfreiheit des Polarisationsvektors. So lassen sich die rechts- und linkshändigen Polarisationsvektoren für einlaufende Teilchen folgendermaßen schreiben:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{+,\mu}(k) \to \varepsilon_{+,\dot{A}B}(k) &= \frac{\sqrt{2}g_{+,\dot{A}}k_B}{\langle g_+ k\rangle^*}, \\ \varepsilon_{-,\mu}(k) \to \varepsilon_{-,\dot{A}B}(k) &= \frac{\sqrt{2}k_{\dot{A}}g_{-,B}}{\langle g_- k\rangle}, \end{aligned} \tag{2.20}$$

wobei $g_\pm$ die Eichspinoren bezeichnen, die frei wählbar sind mit der Einschränkung $\langle g_\pm k\rangle \neq 0$.

Die Tatsache, dass die Eichspinoren frei wählbar sind, bedeutet, dass die Helizitätsamplitude von ihnen unabhängig sein muß. Dies wird als wichtige Kontrolle der Rechnung benutzt. Auf Grund von elektromagnetischer Stromerhaltung ist sogar nicht nur die gesamte Amplitude, sondern sind bereits Teile von ihr unabhängig vom Eichspinor. Das liegt daran, dass die $U(1)$-Ladung und daher auch die elektromagnetische Ladung der Teilchen freie Parameter der Theorie sind. Summen von Diagrammen, in denen eine bestimmte elektromagnetische Ladung auftritt, müssen daher für sich invariant bzgl. der Eichung des Photonpolarisationsvektors sein. Somit ist die Summe von Diagrammen, bei denen ein Photon an miteinander verbundene, geladene Fermion- und/oder Bosonlinien koppelt, unabhängig vom Eichspinor.

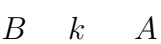
2.1.4 Feynmanregeln

Die Feynmanregeln in der 't Hooft-Feynman-Eichung werden aus Referenz [10] übernommen und in den Spinorformalismus übersetzt. Für die CC-Prozesse wird eine nicht-lineare Eichung verwendet, bei der ein zusätzlicher Term in der Eichfixierungs-Lagrangedichte auftritt, worauf in Abschnitt 2.4 näher eingegangen wird. Für die in dieser Arbeit betrachteten NC-Prozesse sind die 't Hooft-Feynman-Eichung und die nicht-lineare Eichung äquivalent.

Die Regeln für äußere Fermion- und Photonfelder sind bereits in den Gleichungen (2.19) und (2.20) angegeben. Für Dirac-Matrizen ist die chirale Darstellung zu wählen:

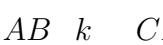
$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu_{A\dot{B}} \\ \sigma^{\mu,\dot{A}B} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} \sigma^0 & 0 \\ 0 & -\sigma^0 \end{pmatrix}. \tag{2.21}$$

Daraus ergibt sich der Propagator für masselose Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen



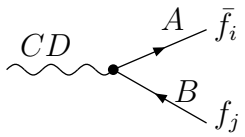
$$\frac{i}{k^2}\begin{pmatrix} 0 & K_{A\dot{B}} \\ K^{\dot{A}B} & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.22}$$

Der Propagator für Spin-1-Teilchen mit Masse M_V^2 ist



$$\frac{-2i\epsilon_{\dot{A}\dot{C}}\epsilon_{BD}}{k^2 - M_V^2}. \tag{2.23}$$

Der Boson-Fermion-Vertex lautet:



$$ie \begin{pmatrix} 0 & C^{-}_{V\bar{f}_i f_j}\delta^{\dot{C}}_{\dot{B}}\delta^{D}_{A} \\ C^{+}_{V\bar{f}_i f_j}\epsilon^{\dot{A}\dot{C}}\epsilon^{BD} & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.24}$$

mit den Kopplungskonstanten:

$$\begin{aligned} C^{\sigma}_{\gamma\bar{f}_i f_i} &= -Q_i, \qquad C^{\sigma}_{W\bar{f}_i f_j} = \frac{1}{\sqrt{2}s_W}\delta_{\sigma-}, \\ C^{\sigma}_{Z\bar{f}_i f_i} &= -\frac{s_W}{c_W}Q_i + \frac{I^3_{W,i}}{c_W s_W}\delta_{\sigma-}, \end{aligned} \tag{2.25}$$

wobei Q_i die relative elektrische Ladung und $I^3_{W,i}$ die dritte Komponente des schwachen Isospins der Fermionen bezeichnet [10].

2.2 Klassifizierung der Endzustände

Zunächst werden Prozesse hinsichtlich der Eichbosonen unterschieden, die in niedrigster Störungsordnung ausgetauscht werden. Dabei treten sogenannte NC-Prozesse (Neutral Current) auf, bei denen lediglich neutrale Eichbosonen, also Photonen, Z-Bosonen oder Gluonen, ausgetauscht werden. Diese Prozesse lassen sich weiter unterteilen in zwei Klassen, die sich bezüglich der Anzahl ihrer Feynmangraphen unterscheiden:

$$\begin{aligned} &(a)\ \ \gamma\gamma \to f\bar{f}F\bar{F} \quad (NC40) \\ &(b)\ \ \gamma\gamma \to f\bar{f}f\bar{f} \quad (NC4\cdot 20), \end{aligned} \tag{2.26}$$

wobei f und F verschiedene Fermionen bezeichnen; $\bar{f}$ und $\bar{F}$ sind deren Antiteilchen. Die Bezeichnungen in Klammern sind analog zu den Bezeichnungen, die in [11] für die Prozesse $e^+e^- \to 4f$ eingeführt wurden. Eine weitere Prozessklasse (CC-Prozesse) ist:

$$(c)\ \ \gamma\gamma \to f\bar{f}'F\bar{F}' \quad F \neq f' \quad (CC31). \tag{2.27}$$

Hier bezeichnen f und f' bzw. F und F' die Fermionen eines Dubletts des elektroschwachen Isospins. In diesem Fall können lediglich geladene Eichbosonen (W-Bosonen) ausgetauscht werden.

Schliesslich gibt es noch Reaktionen des Typs:

$$(d)\ \ \gamma\gamma \to f\bar{f}f'\bar{f}' \quad (mix71), \tag{2.28}$$

in denen sowohl geladene als auch ungeladene Eichbosonen ausgetauscht werden (NC/CC-Prozesse).

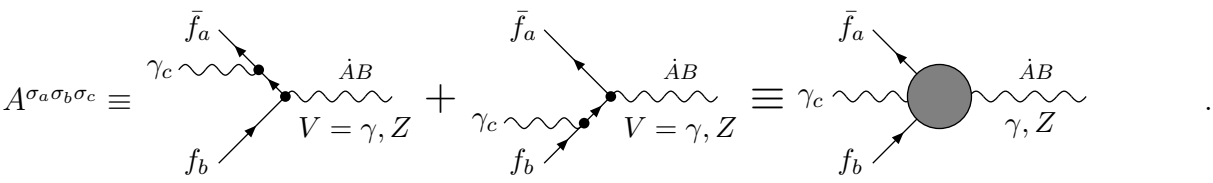
Außerdem können leptonische, semileptonische und hadronische Endzustände unterschieden werden. Bei den leptonischen treten ausschließlich Leptonen auf, bei den hadronischen lediglich Quarks und bei den semileptonischen sowohl Leptonen als auch Quarks. Die Vernachlässigung der Fermionmassen führt dazu, dass Prozesse mit bis auf die Generation gleichen Teilchen im Endzustand den gleichen Wirkungsquerschnitt haben. Eine weitere Einschränkung ergibt sich daraus, dass die CKM-Matrix in dieser Arbeit gleich der Einheitsmatrix gesetzt wird. Außerdem werden Kanäle, die durch CP-Transformation auseinander hervorgehen, nicht unterschieden, weil CP-verletzende Effekte im Standardmodell nur durch eine nichttriviale CKM-Matrix auftreten können. Insgesamt bleiben 17 verschiedene Vier-Teilchen-Endzustände, die in Tabelle 2.1 aufgelistet sind.

leptonisch	CC (c)	$e^-\bar{\nu}_e\nu_\mu\mu_+$
	NC (a)	$e^-e^+\nu_\mu\bar{\nu}_\mu$
		$e^-e^+\mu^-\mu^+$
	NC (b)	$e^-e^+e^-e^+$
	NC/CC (d)	$e^-e^+\nu_e\bar{\nu}_e$
semileptonisch	CC (c)	$e^-e^+u\bar{d}$
	NC(a)	$\nu_e\bar{\nu}_e u\bar{u}$
		$\nu_e\bar{\nu}_e d\bar{d}$
		$e^-e^+u\bar{u}$
		$e^-e^+d\bar{d}$
hadronisch	CC (c)	$ud\bar{s}\bar{c}$
	NC (a)	$u\bar{u}c\bar{c}$
	NC (a)	$u\bar{u}s\bar{s}$
	NC (a)	$d\bar{d}s\bar{s}$
	NC (b)	$u\bar{u}u\bar{u}$
	NC (b)	$d\bar{d}d\bar{d}$
	NC/CC (d)	$u\bar{u}d\bar{d}$

Tabelle 2.1: Endzustände für $\gamma\gamma \to 4f(\gamma)$ bei Vernachlässigung der Fermion-Massen

2.3 NC-Prozesse

Aus den Überlegungen in Kapitel 2.1.3 geht hervor, dass folgende Summe von Diagrammen elektromagnetisch eichinvariant, also unabängig vom Eichspinor des Photons ist:



Die Helizitäten der Teilchen werden mit σ_i bezeichnet, und das Eichboson V wird als off-shell angenommen. Im Weyl-van-der-Waerden-Formalismus kann dies geschrieben werden als:

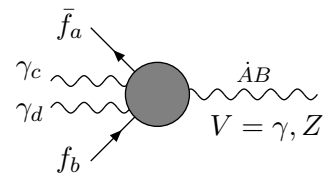
$$\begin{aligned} A_{NC}^{+-+} &= ie^2\sqrt{2}\Bigg[-\frac{\langle gb\rangle^*}{\langle gc\rangle^*\langle cb\rangle^*}p_a^B p_b^{\dot{A}} C^-_{V\bar{f}_a f_b} C^-_{\gamma\bar{f}_b f_b} \\ &\quad + \left(p_a^B p_b^{\dot{A}}\frac{\langle ga\rangle^*}{\langle gc\rangle^*\langle ca\rangle^*} + \frac{p_b^{\dot{A}} p_c^B}{\langle ac\rangle^*}\right) C^-_{V\bar{f}_a f_b} C^-_{\gamma\bar{f}_a f_a}\Bigg] \\ &= -ie^2\sqrt{2}\left(\frac{p_b^{\dot{A}} p_c^B}{\langle ca\rangle^*} + p_a^B p_b^{\dot{A}}\frac{\langle ba\rangle^*}{\langle bc\rangle^*\langle ac\rangle^*}\right) C^-_{V\bar{f}_a f_b} C^-_{\gamma\bar{f}_b f_b}, \end{aligned} \tag{2.29}$$

wobei die Impulse p_a, p_b und p_c der Teilchen $\bar{f}_a$, f_b und γ_c als einlaufend betrachtet werden; g bezeichnet den Eichspinor des Photons. Weiterhin wurde die Abkürzung $\langle ab\rangle \equiv \langle p_a p_b\rangle$ eingeführt. Die letzte Zeile folgt aus der Schouten-Identität (2.10) und daraus, dass $C^-_{\gamma\bar{f}_a f_a} = C^-_{\gamma\bar{f}_b f_b}$. Im Fall von masselosen Fermionen verschwinden Amplituden, bei denen die Fermionen und Antifermionen in einer Linie die gleiche Helizität besitzen (Helizitätserhaltung). Die verbleibenden Helizitätsamplituden sind dann:

$$\begin{aligned} A_{NC}^{+--} &= -ie^2\sqrt{2}\left(\frac{p_c^{\dot{A}} p_a^B}{\langle cb\rangle} + p_a^B p_b^{\dot{A}}\frac{\langle ba\rangle}{\langle bc\rangle\langle ac\rangle}\right) C^-_{V\bar{f}_a f_b} C^-_{\gamma\bar{f}_b f_b}, \\ A_{NC}^{-++} &= -ie^2\sqrt{2}\left(\frac{p_a^{\dot{A}} p_c^B}{\langle cb\rangle^*} + p_a^{\dot{A}} p_b^B\frac{\langle ba\rangle^*}{\langle bc\rangle^*\langle ac\rangle^*}\right) C^+_{V\bar{f}_a f_b} C^+_{\gamma\bar{f}_b f_b}, \\ A_{NC}^{-+-} &= -ie^2\sqrt{2}\left(\frac{p_b^B p_c^{\dot{A}}}{\langle ac\rangle} + p_a^{\dot{A}} p_b^B\frac{\langle ba\rangle}{\langle bc\rangle\langle ac\rangle}\right) C^+_{V\bar{f}_a f_b} C^+_{\gamma\bar{f}_b f_b}. \end{aligned} \tag{2.30}$$

Für zwei Photonen gibt es sechs verschiedene Möglichkeiten, sie zusammen mit einem neutralen Vektorboson V an eine Fermionlinie zu koppeln. Addiert man alle Diagramme auf, so muss das Ergebnis wieder unabhängig von den beiden Eichspinoren sein.

$$A^{\sigma_a\sigma_b\sigma_c\sigma_d} \equiv$$



Nach einigen Umformungen mittels der Schouten-Identität (2.10) läßt sich dieses Teildiagramm schreiben als:

$$A^{+--\,-}_{NC} = 2ie^3 C^{-}_{V\bar{f}_a f_b}\left(C^{-}_{\gamma\bar{f}_b f_b}\right)^2 \frac{\langle ab\rangle\left(\langle ab\rangle p_b^{\dot{A}} + \langle ac\rangle p_c^{\dot{A}} + \langle ad\rangle p_d^{\dot{A}}\right) p_a^B}{\langle ac\rangle\langle ad\rangle\langle bc\rangle\langle bd\rangle},$$

$$\begin{aligned} A^{+-+\,-}_{NC} = {} & 2ie^3 C^{-}_{V\bar{f}_a f_b}\left(C^{-}_{\gamma\bar{f}_b f_b}\right)^2 \\ & \left(\frac{\left(\langle da\rangle^* p_a^B + \langle dc\rangle^* p_c^B\right)\langle ca\rangle p_b^{\dot{A}}}{\langle ad\rangle\langle ac\rangle^*[acd]} + \frac{\left(\langle bc\rangle p_b^{\dot{A}} + \langle dc\rangle p_d^{\dot{A}}\right)\langle bd\rangle^* p_a^B}{\langle db\rangle\langle cb\rangle^*[bcd]}\right. \\ & \left. + \frac{\left(\langle ab\rangle^* p_a^B + \langle cb\rangle^* p_c^B\right)\langle ab\rangle p_b^{\dot{A}} + \langle ad\rangle\langle cb\rangle^* p_c^B p_d^{\dot{A}} + \langle ad\rangle\langle ab\rangle^* p_a^B p_d^{\dot{A}}}{\langle ad\rangle\langle ac\rangle^*\langle db\rangle\langle cb\rangle^*}\right). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Die Abürkzung $[abc]$ steht dabei für $\langle ab\rangle^*\langle ab\rangle + \langle ac\rangle^*\langle ac\rangle + \langle bc\rangle^*\langle bc\rangle = (p_a + p_b + p_c)^2$, für $p_a^2 = p_b^2 = p_c^2 = 0$.

Unter Berücksichtigung von diskreten Symmetrien wie Parität (P) und Ladungskonjugation (C) reichen diese Baublöcke bereits, um alle Prozesse $\gamma\gamma \to 4f$ mit γ- oder Z-Austausch zu berechnen. Mit einer Paritätstransformation erhält man z.B. das Matrixelement, in dem alle Helizitäten das umgekehrte Vorzeichen besitzen. Da physikalische Observable nur vom Betrag des Matrixelementes abhängen, kann sich durch eine Paritätstransformation noch eine zusätzliche Phase ergeben. Diese ergibt sich nach Betrachtung der einzelnen Größen des Matrixelementes [9]. Der Paritätsverletzung im Standardmodell wird durch entsprechendes Vertauschen der Kopplungen Rechnung getragen. Somit gilt für das Matrixelement mit umgekehrten Helizitäten:

$$M(-\sigma_i, -\lambda_j) = (-1)^{\bar{n}}\,\mathrm{sgn}(\sigma_1\cdots\sigma_{n+\bar{n}})M(\sigma_i,\lambda_j)^*|_{C^{\tau}_{V\bar{f}_a f_b}\leftrightarrow(C^{-\tau}_{V\bar{f}_a f_b})^*}, \quad (2.32)$$

wobei n und $\bar{n}$ die Anzahl der Fermionen und Antifermionen, σ_i deren Helizität und λ_j die Helizität der Vektor-Bosonen ist.

Ladungskonjugation vertauscht Teilchen und Antiteilchen. Dies entspricht der Umkehrung der Richtungen der Fermionlinien. Da die beiden Fermionen einer

Linie stets entgegengesetzte Helizität besitzen, bewirkt eine CP-Transformation verbunden mit dem Vertauschen ihrer Impulse und Ladungen lediglich eine Umkehrung der Vektorboson-Helizitäten. Auch unter einer CP-Transformation ergibt sich eine Phase [9]. Somit gilt:

$$M(\sigma_i, -\lambda_j) = (-1)^{n_V+n_{in}+\bar{n}_{in}} \operatorname{sgn}(\sigma_1 \cdots \sigma_{n+\bar{n}}) M(\sigma_i, \lambda_j)^*|_{p\leftrightarrow p', q\leftrightarrow q', C^{\tau}_{V\bar{f}_a f_b} \leftrightarrow (C^{-\tau}_{V\bar{f}_a f_b})^*}, \tag{2.33}$$

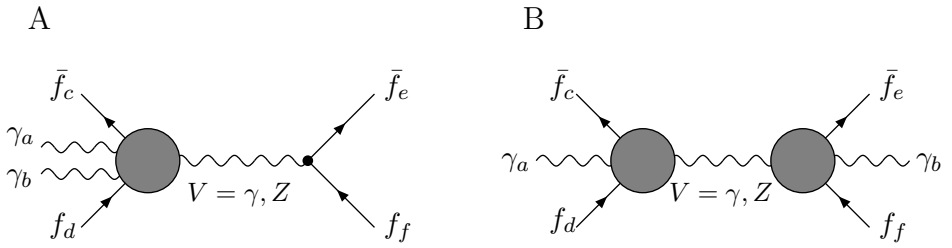
wobei p/q und p'/q' die Impulse bzw. Ladungen der Fermionen und Antifermionen einer Linie, $\bar{n}_{in}$ und n_{in} die Anzahl der einlaufenden Fermionen und n_V die Anzahl der Vektorteilchen bezeichnet. Die Gleichungen (2.32) und (2.33) ergeben zusammen das Matrixelement, bei dem nur die Helizitäten der Fermionen entgegengesetztes Vorzeichen haben:

$$M(-\sigma_i, \lambda_j) = (-1)^{\bar{n}+n_V+n_{in}+\bar{n}_{in}} M(\sigma_i, \lambda_j)|_{p\leftrightarrow p', q\leftrightarrow q', C^{\tau}_{V\bar{f}_a f_b} \leftrightarrow (C^{-\tau}_{V\bar{f}_a f_b})^*}. \tag{2.34}$$

Schließlich verknüpft Bosesymmetrie noch weitere Helizitätsamplituden. Da Boseteilchen wie das Photon ununterscheidbar sind, muss das Matrixelement invariant sein unter einer Vertauschung der Photonimpulse und deren Helizität:

$$M(\sigma_i, \lambda_1 \ldots \lambda_n) = M(\sigma_i, \lambda_{j_1} \ldots \lambda_{j_n})|_{p_1\to p_{j_1} \ldots p_n \to p_{j_n}}. \tag{2.35}$$

Nun können alle Amplituden für die Graphen



berechnet werden:

$$M_A^{\sigma_a\sigma_b\sigma_c\sigma_d\sigma_e\sigma_f} = 4e^4 \delta_{\sigma_c,-\sigma_d} \delta_{\sigma_e,-\sigma_f} \left(C^{\sigma_d}_{\gamma\bar{f}_c f_d}\right)^2 C^{\sigma_d}_{V\bar{f}_c f_d} C^{\sigma_f}_{\gamma\bar{f}_e f_f} P_V(p_e + p_f) A^{\sigma_a\sigma_b\sigma_c\sigma_e}, \tag{2.36}$$

mit

$$A^{--++} = \frac{\langle cd\rangle\langle ec\rangle\langle f[a+b+d]c\rangle}{\langle ac\rangle\langle bc\rangle\langle ad\rangle\langle bd\rangle},$$

$$A^{+-++} = \frac{\langle ac\rangle\langle fd\rangle^*\langle b[a+c]e\rangle}{\langle bc\rangle\langle ac\rangle^*[abc]} + \frac{\langle ce\rangle\langle db\rangle^*\langle f[b+d]a\rangle}{\langle bd\rangle\langle ad\rangle^*[abd]} \\ \frac{\langle cd\rangle\langle df\rangle^*\langle d[a+c]e\rangle + \langle cb\rangle\langle ae\rangle\langle ad\rangle^*\langle bf\rangle^* + \langle cb\rangle\langle ce\rangle\langle cd\rangle^*\langle bf\rangle^*}{\langle bc\rangle\langle bd\rangle\langle ac\rangle^*\langle ad\rangle^*},$$

$$
\begin{aligned}
&A^{++++} = (A^{--++})^* \,|_{p_c\leftrightarrow p_d, p_e\leftrightarrow f}, \quad A^{++--} = (A^{--++})^*, \\
&A^{+---} = (A^{+-++}) \,|_{p_c\leftrightarrow p_d, p_e\leftrightarrow p_f}, \quad A^{-+++} = (A^{+-++})^* \,|_{p_c\leftrightarrow p_d, p_e\leftrightarrow p_f}, \\
&A^{-+--} = (A^{+-++})^*, \quad A^{----} = (A^{--++}) \,|_{p_c\leftrightarrow p_d, p_e\leftrightarrow p_f}, \\
&A^{\sigma_a\sigma_b\sigma_c\sigma_e} = (A^{\sigma_a\sigma_b\sigma_c-\sigma_e}) \,|_{p_e\leftrightarrow p_f}.
\end{aligned} \tag{2.37}
$$

Hierbei steht $a, ..., f$ wieder für $p_a, ..., p_f$ und $P_V(p) = \frac{1}{p^2 - M_V^2}$. Weiterhin wurde die Abkürzung

$$
\langle p_a k p_b\rangle = p_{a,\dot{A}} k^{\dot{A}B} p_{b,B} = \langle ak\rangle^* \langle bk\rangle \tag{2.38}
$$

eingeführt und die Relationen (2.32)-(2.34) benutzt. Außerdem bewirkt eine Vertauschung der Fermionimpulse p_e und p_f lediglich eine Umkehrung ihrer Helizität und ein Vertauschen der links- und rechtshändigen Kopplungen. Letzteres hat keinen Einfluß auf $A^{\sigma_a\sigma_b\sigma_c\sigma_e}$. Daher ist $A^{\sigma_a\sigma_b\sigma_c\sigma_e} = (A^{\sigma_a\sigma_b\sigma_c,-\sigma_e}) \,|_{p_e\leftrightarrow p_f}$, so dass alle Helizitätsamplituden für Graph A bekannt sind.

Für Graph B ist zu bemerken, dass sich bei Vertauschen von $\bar{f}_e$ und f_f das Vorzeichen umkehrt, was man aus (2.29) und (2.30) sieht. Aus diesen Formeln und (2.32)–(2.34) ergibt sich dann die Formel für Graph B:

$$
M_B^{\sigma_a\sigma_b\sigma_c\sigma_d\sigma_e\sigma_f} = 4e^4 \delta_{\sigma_c,-\sigma_d} \delta_{\sigma_e,-\sigma_f} C^{\sigma_d}_{\gamma\bar{f}_c f_d} C^{\sigma_f}_{\gamma\bar{f}_e f_f} C^{\sigma_d}_{V\bar{f}_c f_d} C^{\sigma_f}_{\gamma\bar{f}_e f_f} P_V(p_a{+}p_c{+}p_d) A^{\sigma_a\sigma_b\sigma_c\sigma_e}, \tag{2.39}
$$

mit

$$
A^{++++} = \frac{\langle df\rangle^*}{\langle ac\rangle^*} \left(\frac{\langle ab\rangle}{\langle be\rangle^*} + \frac{\langle ae\rangle\langle ef\rangle^*}{\langle bf\rangle^*\langle be\rangle^*} \right) + \frac{\langle cd\rangle^*\langle df\rangle^*}{\langle ac\rangle^*\langle ad\rangle^*} \left(\frac{\langle bc\rangle}{\langle eb\rangle^*} + \frac{\langle ce\rangle\langle ef\rangle^*}{\langle be\rangle^*\langle bf\rangle^*} \right),
$$

$$
A^{+-++} = \frac{\langle ae\rangle}{\langle bf\rangle\langle ac\rangle^*} \left(\langle bd\rangle^* + \frac{\langle ef\rangle\langle df\rangle^*}{\langle be\rangle} \right) + \frac{\langle ce\rangle\langle cd\rangle^*}{\langle bf\rangle\langle ac\rangle^*\langle ad\rangle^*} \left(\langle bd\rangle^* + \frac{\langle ef\rangle\langle df\rangle^*}{\langle be\rangle} \right),
$$

$$
\begin{aligned}
&A^{++--} = (A^{++++}) \,|_{p_c\leftrightarrow p_d, p_e\leftrightarrow p_f}, \quad A^{+---} = (A^{+-++}) \,|_{p_c\leftrightarrow p_d, p_e\leftrightarrow p_f}, \\
&A^{-+++} = (A^{+-++})^* \,|_{p_c\leftrightarrow p_d, p_e\leftrightarrow p_f}, \quad A^{-+--} = (A^{+-++})^*, \\
&A^{--++} = (A^{++++})^* \,|_{p_c\leftrightarrow p_d, p_e\leftrightarrow p_f}, \quad A^{----} = (A^{++++})^*, \\
&A^{\sigma_a\sigma_b\sigma_c\sigma_e} = -(A^{\sigma_a\sigma_b\sigma_c-\sigma_e}) \,|_{p_e\leftrightarrow p_f}.
\end{aligned} \tag{2.40}
$$

Um die vollständigen Matrixelemente für NC-Prozesse zu erhalten, muss noch zwischen den Prozessklassen (2.26) unterschieden werden. Der Unterschied besteht darin, dass das Matrixelement im Fall (b) auf Grund der Fermistatistik antisymmetrisch unter Vertauschung der Fermionen bzw. Antifermionen sein muss. So tragen im Fall bei (a) 40 und bei (b) 80 Feynmangraphen bei. Graphen mit Pseudo-Goldstone-Bosonen müssen nicht berücksichtig werden, weil die Kopplung von ihnen proportional zur Masse der Teilchen ist, an die sie koppeln. Da in jedem Fall ein Fermion beteiligt ist, dessen Masse aber vernachlässigt wird, verschwinden diese Graphen.

Für einen rein leptonischen Fall gilt somit:

$$
\begin{aligned}
&M_{NC(a)}^{\sigma_a\sigma_b\sigma_c\sigma_d\sigma_e\sigma_f}(p_a,p_b,p_c,p_d,p_e,p_f) = \\
&\quad\sum_{V=\gamma,Z}\Big(M_{A,V}^{\sigma_a\sigma_b-\sigma_c-\sigma_d-\sigma_e-\sigma_f}(p_a,p_b,-p_c,-p_d,-p_e,-p_f) \\
&\qquad +M_{A,V}^{\sigma_a\sigma_b-\sigma_e-\sigma_f-\sigma_c-\sigma_d}(p_a,p_b,-p_e,-p_f,-p_c,-p_d) \\
&\qquad +M_{B,V}^{\sigma_a\sigma_b-\sigma_c-\sigma_d-\sigma_e-\sigma_f}(p_a,p_b,-p_c,-p_d,-p_e,-p_f) \\
&\qquad +M_{B,V}^{\sigma_a\sigma_b-\sigma_e-\sigma_f-\sigma_c-\sigma_d}(p_a,p_b,-p_e,-p_f,-p_c,-p_d)\Big)\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&M_{NC(b)}^{\sigma_a\sigma_b\sigma_c\sigma_d\sigma_e\sigma_f}(p_a,p_b,p_c,p_d,p_e,p_f) = \\
&\quad M_{NC(a)}^{\sigma_a\sigma_b\sigma_c\sigma_d\sigma_e\sigma_f}(p_a,p_b,p_c,p_d,p_e,p_f) - M_{NC(a)}^{\sigma_a\sigma_b\sigma_e\sigma_d\sigma_c\sigma_f}(p_a,p_b,p_e,p_d,p_c,p_f). \quad (2.41)
\end{aligned}
$$

Dabei wurde berücksichtigt, dass M_A und M_B für sechs einlaufende Teilchen gelten. Daher wurden die vier Fermionimpulse und -helizitäten umgekehrt (siehe Gleichung (2.16)).

Bei einem semi-leptonischen Endzustand ist über die Farbe der beiden Quarks zu summieren, was einen Faktor $N_c = 3$ für das Betragsquadrat des Matrixelementes ergibt.

Bei einem rein hadronischen Prozess, d.h. für vier Quarks im Endzustand, ist die Summe über die Quarkfarben auf Grund von Mischungstermen und zusätzlichen Diagrammen mit Gluonaustausch nicht trivial. Das Matrixelement ist die Summe von elektroschwachen (γ-Z- und W-Austausch) und QCD (Gluon-Austausch) Beiträgen:

$$M_{had} = M_{had,ew} + M_{had,qcd}. \quad (2.42)$$

Die elektroschwachen Matrixelemente sind diagonal in der Farbbasis:

$$
\begin{aligned}
&M_{NC(a),had,ew,c_c,c_d,c_e,c_f}^{\sigma_a\sigma_b\sigma_c\sigma_d\sigma_e\sigma_f}(p_a,p_b,p_c,p_d,p_e,p_f) = \\
&\quad M_{NC(a)}^{\sigma_a\sigma_b\sigma_c\sigma_d\sigma_e\sigma_f}(p_a,p_b,p_c,p_d,p_e,p_f)\delta_{c_cc_d}\delta_{c_ec_f}, \\
&M_{NC(b),had,ew,c_c,c_d,c_e,c_f}^{\sigma_a\sigma_b\sigma_c\sigma_d\sigma_e\sigma_f}(p_a,p_b,p_c,p_d,p_e,p_f) = \\
&\quad M_{NC(b)}^{\sigma_a\sigma_b\sigma_c\sigma_d\sigma_e\sigma_f}(p_a,p_b,p_c,p_d,p_e,p_f)\delta_{c_cc_d}\delta c_ec_f \\
&\quad -M_{NC(b)}^{\sigma_a\sigma_b\sigma_e\sigma_d\sigma_c\sigma_f}(p_a,p_b,p_e,p_d,p_c,p_f)\delta_{c_ec_d}\delta c_cc_f, \qquad (2.43)
\end{aligned}
$$

wobei c_i den Farbindex der Quarks bezeichnen.

Da Gluon und Photon beide masselos sind und ähnliche Kopplungen haben, liefern die Graphen mit Photon-Austausch den gleichen Beitrag wie diejenigen mit Gluon-Austausch, sofern man die elektromagnetische Kopplung $Q_cQ_ee^2$ mit

der starken Kopplung g_s^2 ersetzt und die Generatoren der SU(3) (Gell-Mann-Matrizen λ_{ij}^a) einfügt:

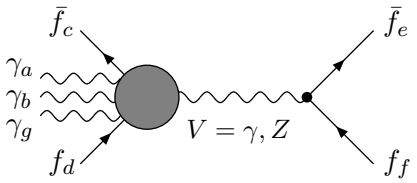
$$
\begin{aligned}
&M^{\sigma_a\sigma_b\sigma_c\sigma_d\sigma_e\sigma_f}_{NC(a),had,qcd,c_c,c_d,c_e,c_f}(p_a,p_b,p_c,p_d,p_e,p_f) = \\
&\quad M_g^{\sigma_a\sigma_b\sigma_c\sigma_d\sigma_e\sigma_f}(p_a,p_b,p_c,p_d,p_e,p_f)\frac{1}{4}\lambda^a_{c_cc_d}\lambda^a_{c_ec_f}, \\
&M^{\sigma_a\sigma_b\sigma_c\sigma_d\sigma_e\sigma_f}_{NC(b),had,qcd,c_c,c_d,c_e,c_f}(p_a,p_b,p_c,p_d,p_e,p_f) = \\
&\quad M_g^{\sigma_a\sigma_b\sigma_c\sigma_d\sigma_e\sigma_f}(p_a,p_b,p_c,p_d,p_e,p_f)\frac{1}{4}\lambda^a_{c_cc_d}\lambda^a_{c_ec_f} \\
&\quad -M_g^{\sigma_a\sigma_b\sigma_e\sigma_d\sigma_c\sigma_f}(p_a,p_b,p_e,p_d,p_c,p_f)\frac{1}{4}\lambda^a_{c_ec_d}\lambda^a_{c_cc_f}, \\
&M_g^{\sigma_a\sigma_b\sigma_c\sigma_d\sigma_e\sigma_f}(p_a,p_b,p_c,p_d,p_e,p_f) = \\
&\quad \frac{g_s^2}{Q_cQ_e e^2}\Big(M_{A,\gamma}^{\sigma_a\sigma_b-\sigma_c-\sigma_d-\sigma_e-\sigma_f}(p_a,p_b,-p_c,-p_d,-p_e,-p_f) \\
&\qquad +M_{A,\gamma}^{\sigma_a\sigma_b-\sigma_e-\sigma_f-\sigma_c-\sigma_d}(p_a,p_b,-p_e,-p_f,-p_c,-p_d) \\
&\qquad +M_{B,\gamma}^{\sigma_a\sigma_b-\sigma_c-\sigma_d-\sigma_e-\sigma_f}(p_a,p_b,-p_c,-p_d,-p_e,-p_f) \\
&\qquad +M_{B,\gamma}^{\sigma_a\sigma_b-\sigma_e-\sigma_f-\sigma_c-\sigma_d}(p_a,p_b,-p_e,-p_f,-p_c,-p_d)\Big). \qquad (2.44)
\end{aligned}
$$

Summiert man nun über die vier Farbindizes ergibt sich unter Verwendung der Vollständigkeitsrelation für die Gell-Mann-Matrizen $\lambda^a_{ij}\lambda^a_{kl} = -\frac{2}{3}\delta_{ij}\delta_{kl} + 2\delta_{il}\delta_{jk}$:

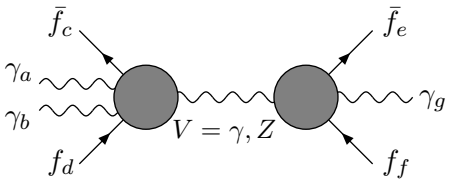
$$
\begin{aligned}
\sum_{c_c,c_d,c_e,c_f} |M_{NC(a),had}|^2 &= 9|M_{NC(a)}|^2 + 2|M_g|^2, \\
\sum_{c_c,c_d,c_e,c_f} |M_{NC(b),had}|^2 &= 9|M_{NC(a)}|^2 + 9|M_{NC(a),p_c\leftrightarrow p_e}|^2 \\
&\quad -6\,\mathrm{Re}(M_{NC(a)}M^*_{NC(a),p_c\leftrightarrow p_e}) \\
&\quad +2|M_g|^2 + 2|M_{g,p_c\leftrightarrow p_e}|^2 + \frac{4}{3}\,\mathrm{Re}(M_g^*M_{g,p_c\leftrightarrow p_e}) \\
&\quad -8\,\mathrm{Re}(M_{NC}M^*_{g,p_c\leftrightarrow p_e}) - 8\,\mathrm{Re}(M_gM^*_{NC,p_c\leftrightarrow p_e}). \qquad (2.45)
\end{aligned}
$$

Die NC-Prozesse $\gamma\gamma \to 4f\gamma$ können analog berechnet werden. Hierzu fehlt nur noch die Summe aller Teilgraphen, bei denen drei Photonen an eine Fermionlinie koppeln. Bei gleichen Photonhelizitäten kann auch hier gezeigt werden, dass das Ergebnis manifest unabhängig von den Eichspinoren der drei Photonen ist. Bei ungleichen Helizitäten ist die Rechnung deutlich aufwändiger. Daher wurden hier die Eichspinoren der Photonen mit negativer Heliziät gleich dem Impuls des Fermions mit positiver Helizität gesetzt und umgekehrt. Das hat zur Folge, dass Graphen, bei denen ein Photon außen an die entsprechende Fermionlinie koppelt, Terme $\langle kk\rangle$ bzw. $\langle kk\rangle^*$ enthalten, wenn k der Fermionimpuls ist, so dass dieser Beitrag Null ist. Auf diese Weise liefern 14 von 24 Graphen keinen Beitrag. Die expliziten Formeln für die generischen Graphen

C



D



sind:

$$M_C^{\sigma_a\sigma_b\sigma_c\sigma_d\sigma_e\sigma_f\sigma_g} = 2^{\frac{5}{2}} e^5 \delta_{\sigma_c,-\sigma_d}\delta_{\sigma_e,-\sigma_f}\left(C^{\sigma_d}_{\gamma\bar{f}_c f_d}\right)^3 C^{\sigma_d}_{V\bar{f}_c f_d} C^{\sigma_f}_{\gamma\bar{f}_e f_f} P_V(p_e+p_f) A^{\sigma_a\sigma_b\sigma_c\sigma_e\sigma_g}, \tag{2.46}$$

mit

$$A_1 \equiv A^{--++-} = \frac{\langle ce\rangle(\langle cd\rangle)^2\langle f[a+b+d+g]c\rangle}{\langle ad\rangle\langle bd\rangle\langle gd\rangle\langle ca\rangle\langle cb\rangle\langle cg\rangle},$$

$$\begin{aligned} A_2 \equiv A^{+-++-} = & \\ & \left\{ \frac{\langle ce\rangle\langle cd\rangle\langle f[b+d+g]a\rangle\langle d[b+g]c\rangle}{[abdg]\langle gd\rangle\langle bd\rangle} + \frac{\langle cd\rangle\langle d[a+c]e\rangle\langle f[b+d+g]c\rangle}{\langle ac\rangle^*\langle gd\rangle\langle bd\rangle} \right. \\ & + \frac{\langle ce\rangle\langle cg\rangle\langle dg\rangle^*\langle f[a+b+d+g]c\rangle\langle b[d+g]a\rangle}{[abgd][agd]\langle gd\rangle} + [\dots]_{b\leftrightarrow g} \\ & + \frac{\langle ca\rangle\langle ad\rangle^*\langle b[a+c]e\rangle\langle f[d+g]c\rangle}{[abc]\langle gd\rangle\langle ac\rangle^*} + [\dots]_{b\leftrightarrow g} \\ & \left. + \frac{\langle ac\rangle\langle ad\rangle^*\langle ac\rangle\langle ab\rangle^*\langle fd\rangle^*\langle g[a+b+c]e\rangle}{[abc][abgc]\langle ac\rangle^*} + [\dots]_{b\leftrightarrow g} \right\} [\langle da\rangle^*\langle cb\rangle\langle cg\rangle]^{-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^{+++++} &= -\left(A_1\right)^* |_{p_c\leftrightarrow p_d, p_e\leftrightarrow f}, & A^{++++-} &= -\left(A_2\right)^* |_{p_c\leftrightarrow p_d, p_e\leftrightarrow p_f, p_a\leftrightarrow p_g}, \\ A^{++--+} &= +\left(A_1\right)^*, & A^{++---} &= +\left(A_2\right)^* |_{p_a\leftrightarrow p_g}, \\ A^{+-+++} &= -\left(A_2\right)^* |_{p_c\leftrightarrow p_d, p_e\leftrightarrow p_f, p_a\leftrightarrow p_b}, & A^{+---+} &= +\left(A_2\right)^* |_{p_a\leftrightarrow p_b}, \\ A^{+----} &= -\left(A_2\right) |_{p_c\leftrightarrow p_d, p_e\leftrightarrow p_f}, & A^{-++++} &= -\left(A_2\right)^* |_{p_c\leftrightarrow p_d, p_e\leftrightarrow p_f}, \\ A^{-+++-} &= +\left(A_2\right) |_{p_a\leftrightarrow p_b}, & A^{-+--+} &= +\left(A_2\right)^*, \\ A^{-+---} &= -\left(A_2\right) |_{p_c\leftrightarrow p_d, p_e\leftrightarrow p_f, p_a\leftrightarrow p_b}, & A^{--+++} &= +\left(A_2\right) |_{p_a\leftrightarrow p_g}, \\ A^{----+} &= -\left(A_2\right) |_{p_c\leftrightarrow p_d, p_e\leftrightarrow p_f, p_a\leftrightarrow p_g}, & A^{-----} &= -\left(A_1\right) |_{p_c\leftrightarrow p_d, p_e\leftrightarrow p_f}, \\ A^{\sigma_a\sigma_b\sigma_c\sigma_e\sigma_g} &= \left(A^{\sigma_a\sigma_b\sigma_c-\sigma_e\sigma_g}\right) |_{p_e\leftrightarrow p_f}, \end{aligned} \tag{2.47}$$

wobei $[\dots]$ für den direkt vorangehenden Ausdruck mit der angegebenen Ersetzung steht, und

$$M_D^{\sigma_a\sigma_b\sigma_c\sigma_d\sigma_e\sigma_f\sigma_g} = 2^{\frac{5}{2}} e^5 \delta_{\sigma_c,-\sigma_d}\delta_{\sigma_e,-\sigma_f}\left(C^{\sigma_d}_{\gamma\bar{f}_c f_d}\right)^3 C^{\sigma_d}_{V\bar{f}_c f_d} C^{\sigma_f}_{\gamma\bar{f}_e f_f} P_V(p_e+p_f+p_g) A^{\sigma_a\sigma_b\sigma_c\sigma_e\sigma_g}, \tag{2.48}$$

mit

$$A_1 \equiv A^{--++-} = \frac{\langle cd\rangle\langle ec\rangle}{\langle ac\rangle\langle bc\rangle\langle ad\rangle\langle bd\rangle\langle fg\rangle}\left(\langle g[a+b+d]c\rangle + \frac{\langle ef\rangle}{\langle eg\rangle}\langle f[a+d+b]c\rangle\right),$$

$$\begin{aligned}
A_2 \equiv A^{+-++-} = \\
&\frac{1}{\langle fg\rangle}\Bigg\{\frac{\langle ca\rangle\langle b[a+c]e\rangle}{\langle bc\rangle\langle ac\rangle^*[abc]}\Big[\langle dg\rangle^* + \langle df\rangle^*\frac{\langle ef\rangle}{\langle eg\rangle}\Big] \\
&+\frac{\langle ce\rangle\langle db\rangle^*}{\langle bd\rangle\langle ad\rangle^*[abd]}\left[\langle da\rangle\Big(\langle dg\rangle^* + \langle df\rangle^*\frac{\langle ef\rangle}{\langle eg\rangle}\Big) + \langle ba\rangle\Big(\langle bg\rangle^* + \langle bf\rangle^*\frac{\langle ef\rangle}{\langle eg\rangle}\Big)\right] \\
&+\frac{\langle d[a+c]e\rangle}{\langle bc\rangle\langle ac\rangle^*\langle bd\rangle\langle ad\rangle^*}\left[\langle g[b+d]c\rangle + \frac{\langle ef\rangle}{\langle eg\rangle}\langle f[b+d]c\rangle\right]\Bigg\},
\end{aligned}$$

$$A_3 \equiv A^{--++-} = \frac{\langle cd\rangle}{\langle ac\rangle\langle bc\rangle\langle ad\rangle\langle bd\rangle\langle eg\rangle^*}\langle f[a+b+d]c\rangle\left[\langle cg\rangle + \langle ce\rangle\frac{\langle fe\rangle^*}{\langle fg\rangle^*}\right],$$

$$\begin{aligned}
A^{+++++} &= -\left(A_1\right)^*|_{p_c\leftrightarrow p_d, p_e\leftrightarrow f}, & A^{++++-} &= -\left(A_3\right)^*|_{p_c\leftrightarrow p_d, p_e\leftrightarrow p_f}, \\
A^{++--+} &= +\left(A_1\right)^*, & A^{++---} &= +\left(A_3\right)^*, \\
A^{+-+++} &= -\left(A_2\right)^*|_{p_c\leftrightarrow p_d, p_e\leftrightarrow p_f, p_a\leftrightarrow p_b}, & A^{+---+} &= +\left(A_2\right)^*|_{p_a\leftrightarrow p_b}, \\
A^{+----} &= -\left(A_2\right)|_{p_c\leftrightarrow p_d, p_e\leftrightarrow p_f}, & A^{-++++} &= -\left(A_2\right)^*|_{p_c\leftrightarrow p_d, p_e\leftrightarrow p_f}, \\
A^{-+++-} &= +\left(A_2\right)|_{p_a\leftrightarrow p_b}, & A^{-+--+} &= +\left(A_2\right)^*, \\
A^{-+---} &= -\left(A_2\right)|_{p_c\leftrightarrow p_d, p_e\leftrightarrow p_f, p_a\leftrightarrow p_b}, & A^{----+} &= -\left(A_3\right)|_{p_c\leftrightarrow p_d, p_e\leftrightarrow p_f}, \\
A^{-----} &= -\left(A_1\right)|_{p_c\leftrightarrow p_d, p_e\leftrightarrow p_f}, & & \\
A^{\sigma_a\sigma_b\sigma_c\sigma_e\sigma_g} &= \left(A^{\sigma_a\sigma_b\sigma_c-\sigma_e\sigma_g}\right)|_{p_e\leftrightarrow p_f}. & & \qquad (2.49)
\end{aligned}$$

Die nicht direkt berechneten Amplituden ergeben sich mittels CP-Transformation und Bose-Symmetrie. Da in Graph B nur die Amplituden, in denen die Helizitäten der Photonen γ_a und γ_b vertauscht sind, durch Bose-Symmetrie miteinander verbunden sind, liefern erst drei berechnete Amplituden sämtliche anderen.

Die Einteilung (2.26) bleibt bei zusätzlicher Photonabstrahlung weiter gültig. Für (a) gibt es 240 und für (b) 480 Feynmangraphen, sofern keines der Fermionen

ungeladen ist, so dass analog zu Formel (2.41) gilt:

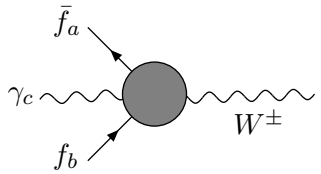
$$
\begin{aligned}
&M_{NC(a)}^{\sigma_a\sigma_b\sigma_c\sigma_d\sigma_e\sigma_f\sigma_g}(p_a,p_b,p_c,p_d,p_e,p_f,p_g) = \\
&\quad\sum_{V=\gamma,Z}\Big(M_{C,V}^{\sigma_a\sigma_b-\sigma_c-\sigma_d-\sigma_e-\sigma_f-\sigma_g}(p_a,p_b,-p_c,-p_d,-p_e,-p_f,-p_g) \\
&\qquad+M_{C,V}^{\sigma_a\sigma_b-\sigma_e-\sigma_f-\sigma_c-\sigma_d-\sigma_g}(p_a,p_b,-p_e,-p_f,-p_c,-p_d,-p_g) \\
&\qquad+M_{D,V}^{\sigma_a\sigma_b-\sigma_c-\sigma_d-\sigma_e-\sigma_f-\sigma_g}(p_a,p_b,-p_c,-p_d,-p_e,-p_f,-p_g) \\
&\qquad+M_{D,V}^{\sigma_a\sigma_b-\sigma_e-\sigma_f-\sigma_c-\sigma_d-\sigma_g}(p_a,p_b,-p_e,-p_f,-p_c,-p_d,-p_g) \\
&\qquad+M_{D,V}^{\sigma_a\sigma_g-\sigma_c-\sigma_d-\sigma_e-\sigma_f-\sigma_b}(p_a,p_g,-p_c,-p_d,-p_e,-p_f,-p_b) \\
&\qquad+M_{D,V}^{\sigma_a\sigma_g-\sigma_e-\sigma_f-\sigma_c-\sigma_d-\sigma_b}(p_a,p_g,-p_e,-p_f,-p_c,-p_d,-p_b) \\
&\qquad+M_{D,V}^{\sigma_g\sigma_b-\sigma_c-\sigma_d-\sigma_e-\sigma_f-\sigma_a}(p_g,p_b,-p_c,-p_d,-p_e,-p_f,-p_a) \\
&\qquad+M_{D,V}^{\sigma_g\sigma_b-\sigma_e-\sigma_f-\sigma_c-\sigma_d-\sigma_a}(p_g,p_b,-p_e,-p_f,-p_c,-p_d,-p_a)\Big)\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&M_{NC(b)}^{\sigma_a\sigma_b\sigma_c\sigma_d\sigma_e\sigma_f\sigma_g}(p_a,p_b,p_c,p_d,p_e,p_f,p_g) = \\
&\quad M_{NC(a)}^{\sigma_a\sigma_b\sigma_c\sigma_d\sigma_e\sigma_f\sigma_g}(p_a,p_b,p_c,p_d,p_e,p_f,p_g) - M_{NC(a)}^{\sigma_a\sigma_b\sigma_e\sigma_d\sigma_c\sigma_f\sigma_g}(p_a,p_b,p_e,p_d,p_c,p_f,p_g). \quad (2.50)
\end{aligned}
$$

Auch die Überlegungen, die für semileptonische und hadronische Prozesse angestellt wurden, sind weiterhin gültig, so dass (2.45) ebenso für $\gamma\gamma \to 4f\gamma$ gilt.

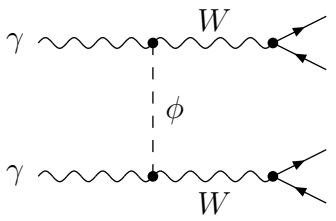
2.4 CC-Prozesse

Bei CC-Prozessen koppeln die Photonen nicht nur an Fermionen, sondern auch an die W-Bosonen, so dass Untergruppen von Graphen, wie z.B.



nicht mehr notwendig vom Eichspinor unabhängig sind. Zumindest ist aber die Summe aller Graphen, bei denen ein Photon an alle geladenen Linien des Graphen koppelt, unabhängig von dessen Eichspinor.

Außerdem tritt in der 't Hooft-Feynman-Eichung jetzt folgender Graph mit einem Pseudo-Goldstone-Boson auf:

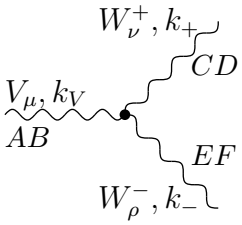


An Stelle der 't Hooft-Feynman-Eichung kann man allerdings auch einen nichtlinearen Term in die Eichfixierungs-Lagrangedichte einbeziehen [13] (siehe auch Referenzen darin):

$$\mathcal{L}_{fix} = -\left|\partial^\mu W_\mu^+ + ie\left(A^\mu - \frac{c_W}{s_W}Z^\mu\right)W_\mu^+ - iM_W\phi^+\right|^2 \tag{2.51}$$

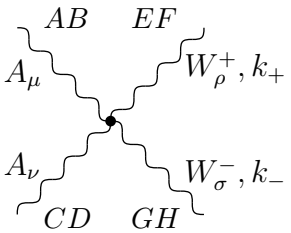
$$-\frac{1}{2}\left(\partial^\mu Z_\mu - M_Z\chi\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\partial^\mu A_\mu\right)^2, \tag{2.52}$$

wobei $\phi^\pm$ und χ die Pseudo-Goldstone-Bosonen der $W^\pm$- bzw. Z-Felder bezeichnen. Zum einen heben sich so gerade die Terme, die einen $\phi^\pm W^\mp A$-Vertex erzeugen, gegeneinander auf. Zum anderen gibt es Zusatzbeiträge zu den in dieser Arbeit relevanten Vertizes AW^+W^-, ZW^+W^- und AAW^+W^-, die dann wie folgt lauten:



$$= -ieg_{VWW}\left[g_{\nu\rho}\left(k_- - k_+\right)_\mu - 2g_{\mu\nu}k_{V,\rho} + 2g_{\mu\rho}k_{V,\nu}\right]$$

$$\to -\tfrac{ie}{4}g_{VWW}\left[\epsilon_{\dot{C}\dot{E}}\epsilon_{DF}\epsilon_{\dot{C}\dot{A}}\,\epsilon_{DB}(K_- - K_+)_{\dot{A}B}\right.$$
$$\left.-2\epsilon_{\dot{A}\dot{C}}\epsilon_{BD}K_{V,\dot{E}F} + 2\epsilon_{\dot{A}\dot{E}}\epsilon_{BF}K_{V,\dot{C}D}\right],$$



$$= -2ig_{VWW}g_{\mu\nu}g_{\rho\sigma}$$

$$\to -\tfrac{i}{2}g_{VWW}\epsilon_{\dot{A}\dot{C}}\epsilon_{BD}\epsilon_{\dot{E}\dot{F}}\epsilon_{GH}\ . \tag{2.53}$$

Die Umsetzung der Feynman-Regeln in den Spinor-Formalismus erfolgt wie in [9] angegeben. Alle Felder werden als einlaufend betrachtet und

$$g_{AWW} = 1, \quad g_{ZWW} = -\frac{c_W}{s_W}. \tag{2.54}$$

In dieser Eichung tragen damit 31 Diagramme zum Matrixelement bei (falls keine Neutrinos beteiligt sind). Auch hier kann gezeigt werden, dass das Ergebnis unabhängig von den Eichspinoren der beiden Photonen ist. Dabei wird ausgenutzt, dass Terme mit einem Spinorprodukt zwischen dem Eichspinor des einen Photons und dem Impuls des anderen verschwinden müssen, sofern $g_a = p_b$ und $g_b = p_a$ gesetzt wird. Mittels der Schouten-Identität (2.10) kann das Matrixelement auf eine Form gebracht werden, die nur manifest Eichspinor-unabhängige Terme enthält und Terme der erwähnten Form, die z.B. $\langle g_a p_b \rangle$ enthalten. Diese müssen bei der obigen Festlegung der Eichspinoren verschwinden, was auch explizit, d.h. mit allgemeinem Eichspinor, nachgerechnnet werden kann. Einige für die Umformungen relevante Relationen, die aus der Schouten-Identität folgen, sind in Anhang A angegeben.

Da das W-Boson nur an linkshändige Teilchen koppelt, treten beim geladenen Strom nur vier von Null verschiedene Helizitätsamplituden auf (für $\gamma\gamma \to 4f$). Aus zwei berechneten Amplituden erhält man mittels der Formeln (2.32) und (2.33) die zwei verbleibenden. Da die Ergebnisse relativ umfangreich sind, wird davon abgesehen, sie hier zu zeigen.

Die Summe über Farben von Quarks ist trivial, weil alle Quarks unterschiedlichen Flavor haben müssen, so dass sich für zwei Quarks ein Faktor $N_c = 3$ und für vier Quarks ein Faktor $N_c^2 = 9$ in $|\mathcal{M}|^2$ ergibt.

Betrachtet man nun die Reaktionen mit Bremsstrahlung, $\gamma\gamma \to 4f\gamma$, so ergibt sich eine wesentlich höhere Anzahl von Feynmandiagrammen, deren Ausdruck bei drei an ein W-Boson koppelnden Photonen auch sehr lang sein kann. Somit ist der Rechenaufwand, um eine analytische Form ohne Eichspinor zu finden, sehr groß. Daher wurden die generischen Graphen, bei denen eine verschiedene Anzahl von Photonen an ein Fermion bzw. Antifermion koppelt, mit dem Programm Mathematica erstellt. Die Helizität der Fermionen ist durch die Art der Kopplung von W-Bosonen festgelegt, so dass es acht Helizitätsamplituden gibt. Aus den Fomeln für den Photon-Polarisationvektor (2.20) sieht man, welche Änderungen bei umgekehrter Photonpolarisation vorzunehmen sind. Das heißt es reicht, eine analytische Form für einen bestimmten Wert der drei Photonpolarisationen zu berechnen.

Alle Graphen erhält man aus den generischen Graphen durch Vertauschen von Photon- bzw. Fermionimpulsen. Daher dürfen die Eichspinoren auch noch nicht von vornherein auf den Impuls eines Fermions oder den eines anderen Photons gesetzt werden. Dies geschieht erst nach Aufaddieren aller Diagramme. An dieser Stelle ergibt sich wieder eine Kontrollmöglichkeit, da die Wahl des Eichspinors keinen Einfluss auf das Ergebnis haben darf.

2.5 NC/CC-Prozesse

Bei Prozessen mit γ/Z- und W-Austausch müssen lediglich die Ergebnisse aus den beiden vorigen Abschnitten addiert werden. Bei leptonischen Prozessen ist:

$$M_{NC/CC}^{\sigma_a\sigma_b\sigma_c\sigma_d\sigma_e\sigma_f}(p_a,p_b,p_c,p_d,p_e,p_f) = \\ M_{NC}^{\sigma_a\sigma_b\sigma_c\sigma_d\sigma_e\sigma_f}(p_a,p_b,p_c,p_d,p_e,p_f) - M_{CC}^{\sigma_a\sigma_b\sigma_e\sigma_d\sigma_c\sigma_f}(p_a,p_b,p_e,p_d,p_c,p_f). \quad (2.55)$$

Der Grund für das relative Minuszeichen ist die Grassmann-Wertigkeit der Fermionfelder. Für die Vertauschung von $\bar{f}_c$ und $\bar{f}_e$ ist eine ungerade Permutation notwendig.

Ein semileptonischer Prozess existiert bei NC/CC-Prozessen nicht. Im hadronischen Fall treten zusätzlich Gluonaustauschdiagramme auf:

$$\begin{aligned} M_{NC/CC,c_c,c_d,c_e,c_f}^{\sigma_a\sigma_b\sigma_c\sigma_d\sigma_e\sigma_f}(p_a,p_b,p_c,p_d,p_e,p_f) = \\ M_{NC}^{\sigma_a\sigma_b\sigma_c\sigma_d\sigma_e\sigma_f}(p_a,p_b,p_c,p_d,p_e,p_f)\delta_{c_cc_d}\delta^a_{c_ec_f} \\ -M_{CC}^{\sigma_a\sigma_b\sigma_e\sigma_d\sigma_c\sigma_f}(p_a,p_b,p_e,p_f,p_c,p_f)\delta^a_{c_ec_d}\delta^a_{c_cc_f} \\ +M_{g}^{\sigma_a\sigma_b\sigma_c\sigma_d\sigma_e\sigma_f}(p_a,p_b,p_c,p_d,p_e,p_f)\frac{1}{4}\lambda^a_{c_cc_d}\lambda^a_{c_ec_f}, \end{aligned} \quad (2.56)$$

und es muss über die Farben der Quarks summiert werden:

$$\begin{aligned} \sum_{c_cc_dc_ec_f}|M_{NC/CC,had}|^2 &= 9|M_{NC}|^2 + 9|M_{CC,p_c\leftrightarrow p_e}|^2 - 6\,\mathrm{Re}(M_{NC}M^*_{CC,p_c\leftrightarrow p_e}) \\ &\quad +2|M_g|^2 - 8\,\mathrm{Re}(M_{CC,g,p_c\leftrightarrow p_e}M_g^*). \end{aligned} \quad (2.57)$$

Für den Fünf-Teilchen-Endzustand ändern sich diese Formeln nicht.

2.6 Vergleich mit Madgraph

Da die Unabhängigkeit vom Eichspinor zwar eine Kontrolle der Rechnung bietet, aber natürlich nicht garantiert, dass das Ergebnis richtig ist, und außerdem diese Eichunabhängigkeit nicht bei allen Ergebnissen explizit gezeigt wurde, ist ein Vergleich mit einer unabhängigen Rechnung notwendig. Dazu wird das Programmpaket Madgraph [12] herangezogen. Verglichen werden die Betragsquadrate der Matrixelemente für einige Phasenraumpunkte. In sämtlichen Prozessen ergibt sich eine Übereinstimmung in den ersten sieben Dezimalstellen (Madgraph rechnet mit acht Stellen, der für diese Arbeit erstellte Fortran-Code mit 16 Stellen. Durch Rundungsfehler treten daher Abweichungen in der achten Stelle auf). Weiterhin ist zu bemerken, dass der Vergleich nur mit verschwindender Breite der Propagatoren ($\Gamma_W = \Gamma_Z = 0$, siehe nächster Abschnitt) durchgeführt wurde, weil in Madgraph die Stufenbreite verwendet wird und diese nicht eichunabhängig

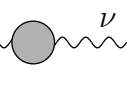
bzgl. U(1) und SU(2) ist. Da Madgraph im Gegensatz zu dieser Arbeit die unitäre Eichung verwendet, wäre für nicht verschwindende Breiten keine volle Übereinstimmung zu erwarten.

Ein Grund, warum die Matrixelemente nicht gleich mit Madgraph generiert wurden, ist der größere Einfluß, den man auf die Rechnung nehmen kann. Im nächsten Abschnitt werden z.B. verschiedene Möglichkeiten diskutiert, die Propagatorbreite einzuführen. Außerdem ist die Geschwindigkeit eines speziell für einen Zweck geschriebenen Computerprogrammes auf Grund der kompakteren Formeln im Allgemeinen größer.

2.7 Berücksichtigung der Propagatorbreite

Bisher wurde angenommen, dass die propagierenden Teilchen stabil sind und die Propagator-Nenner die Form $(p^2 - M^2)^{-1}$ haben. Dies ist zwar für die Fermionen eine gute Näherung, W- und Z-Bosonen jedoch müssen als Resonanzen beschrieben werden, d.h. dass Propagatoren eine endliche Breite erhalten. In der Feldtheorie ergibt sich diese auf natürliche Weise durch den Beitrag von Diagrammen höherer Ordnung, die die Selbstenergie der Bosonen beschreiben, welche definiert ist als:

$$i\Sigma^{\mu\nu}(p) = \quad , \tag{2.58}$$



wobei der schraffierte Kreis für die Summe aller 1-Teilchen-irreduzibler Graphen steht. Die komplette 2-Punkt-Funktion ergibt sich durch Aufsummieren aller Graphen mit beliebig vielen 1-Teilchen-irreduziblen Teilgraphen („Dyson-Reihe“). Der Propagator-Nenner des Transversalteils (der die physikalische Freiheit beschreibt) hat dann die Form:

$$\left[p^2 - M^2 + \Sigma_T(p^2)\right]^{-1} \widetilde{}_{p^2 \to M^2} \left[p^2 - M^2 + iM\Gamma\frac{p^2}{M^2}\theta(p^2)\right]^{-1}. \tag{2.59}$$

Die Zerfallsbreiten der W- und Z-Bosonen, die unter anderem am LEP gemessen wurden, werden mit Γ bezeichnet. Die Proportionalität zu $\frac{p^2}{M^2}\theta(p^2)$ entspricht dem exakten Verhalten eines Teilchens, das in zwei masselose Teilchen zerfällt.

Bei diesem Ansatz tritt jedoch ein wesentliches Problem auf, weil nur eine ganz bestimmte Klasse von Diagrammen höherer Ordnung ausgewählt wird. Dies führt zur Verletzung der Eichinvarianz, weil die Slavnov-Taylor-Identitäten (verallgemeinerte Ward-Identitäten) nicht mehr erfüllt sind [13]–[16]. Die Effekte dieser Brechung der Eichinvarianz sind von der Größenordnung $O(\frac{\Gamma}{M}) \sim O(\alpha)$.

Die vom Standpunkt der Theorie her beste Lösung wäre es, weitere Diagramme höherer Ordnung zu bestimmen, die die Eichinvarianz verletzenden Effekte

kompensieren [16]. Dies erfordert jedoch einen erheblichen Aufwand und verlangsamt die numerischen Rechnungen.

Im folgenden werden daher Schemata beschrieben, die das Problem der Eichinvarianz auf einfache Weise zumindest teilweise umgehen.

- **Feste Breite:**
  $P_V(p^2) = \frac{1}{(p^2 - M^2 + iM\Gamma)}$
  Die Breite wird als konstant angesehen, und Propagatoren mit raumartigem Impuls, die auf Grund des verschwindenden Imaginärteils der Selbstenergie eigentlich keine Breite haben, erhalten dennoch eine. Dies hat zwar keine physikalische Grundlage, allerdings wird so die U(1)-Eichinvarianz gewahrt. Die SU(2)-Ward-Identitäten, und damit die SU(2)-Eichinvarianz, sind jedoch verletzt.

- **Stufenbreite:**
  $P_V(p^2) = \frac{1}{(p^2 - M^2 + iM\Gamma\theta(p^2))}$
  In diesem Schema erhalten raumartige Propagatoren keine Breite. Sowohl U(1)- als auch SU(2)-Eichinvarianz sind verletzt.

- **Laufende Breite:**
  $P_V(p^2) = \frac{1}{(p^2 - M^2 + iM\Gamma\frac{p^2}{M^2}\theta(p^2))}$
  Dieses Schema spiegelt am ehesten das Verhalten der Selbstenergie wieder, verletzt allerdings wie auch die Stufenbreite die Ward-Identitäten der elektroschwachen Theorie. In der Untersuchung der Prozesse $e^+e^- \to 4f, 4f + \gamma, 6f$ ([13], [14]) hat sich jedoch gezeigt, dass in diesem Schema starke Eichinvarianz verletzende Effekte auftreten. Der Grund ist darin zu sehen, dass Brechungseffekte der Größenordnung $\frac{\Gamma}{M}$ durch den Faktor $\frac{p^2}{M^2}$ verstärkt werden.

- **Komplexe Massen:**
  In der Lagrange-Funktion werden die Massen ersetzt durch $\sqrt{M^2 - iM\Gamma}$. Daher sieht der Propagator genauso aus wie bei der festen Breite. Allerdings muß die Masse auch in allen anderen Feynmanregeln, wie z.B. den Kopplungen, ersetzt werden. Der Vorteil ist jedoch, dass jetzt alle Ward-Identitäten erfüllt sind. Dies liegt daran, dass die Ward-Identitäten algebraische Relationen sind und weiter gelten, wenn überall die Ersetzung $M \to \sqrt{M^2 - iM\Gamma}$ durchgeführt wird.

  In dieser Arbeit treten auf Grund der nichtlinearen Eichung (2.51) und der Vernachlässigung von Fermionmassen keine Massenterme in den Kopplungen auf. Daher hat die Ersetzung außer auf den Propagator nur Auswirkung auf den schwachen Mischungswinkel θ_W:

$$\cos^2\theta_W = c_W^2 = 1 - s_W^2 = \frac{M_W^2 - iM_W\Gamma_W}{M_Z^2 - iM_Z\Gamma_Z}. \tag{2.60}$$

Kapitel 3

Phasenraumintegration

3.1 Monte-Carlo-Integration

Im vorigen Kapitel wurden Matrixelemente, d.h. Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen Anfangs- und Endzuständen mit definiertem Impuls berechnet. Messbar sind allerdings erst Wirkungsquerschnitte σ, bei denen die quadrierten Matrixelemente über den Phasenraum integriert werden. Bei Vernachlässigung der Fermionmassen lautet die Formel (1.29):

$$\begin{aligned}\sigma = \int d\sigma &= \frac{(2\pi)^{4-3n}}{2s} \int \left[\prod_{i=1}^{n} d^4p_i\, \delta(p_i^2)\theta(p_i^0)\right] \delta^{(4)}\left(p_a + p_b - \sum_{i=1}^{n} p_i\right) \\ &\quad \times |\mathcal{M}(p_a, p_b, p_1, ..., p_n)|^2. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Die Schwerpunktsenergie wird mit $\sqrt{s}$ bezeichnet; $n = 4, 5$ ist die Anzahl der auslaufenden Teilchen. Die Integration über den Phasenraum V lässt sich dann folgendermaßen schreiben:

$$\begin{aligned} I &= \int d\sigma = \int_V d\mathbf{\Phi}\, \rho(p_i(\mathbf{\Phi}))f(p_i(\mathbf{\Phi})), \\ f(p_i(\mathbf{\Phi})) &= \frac{(2\pi)^{4-3n}}{2s} |\mathcal{M}(p_a, p_b, p_1(\mathbf{\Phi}), ..., p_n(\mathbf{\Phi}))|^2, \end{aligned} \tag{3.2}$$

wobei ρ die Phasenraumdichte ist und $\mathbf{\Phi}$ für die $3n-4$ Phasenraumvariablen steht. Zur Berechnung wird eine Monte-Carlo-Methode angewendet. Dabei werden zufällig Phasenraumpunkte $\mathbf{\Phi}_l$ ausgewählt und der Integrand an dieser Stelle ausgewertet, bis der statistische Fehler hinreichend klein ist. Ein Problem, das dabei auftreten kann, hängt mit den Polstellen bzw. Resonanzen der Propagatoren zusammen. In diesen Bereichen des Phasenraums variiert der Integrand stark, was zu numerischer Ineffizienz führt. Eine mögliche Lösung dieses Problems besteht darin, Phasenraumpunkte in den kritischen Bereichen häufiger auszuwählen. In anderen Bereichen, in denen der Integrand einen flachen Verlauf zeigt, reichen

dagegen wenige Phasenraumpunkte für einen kleinen statistischen Fehler aus. Dieses Verfahren nennt man auch „Importance Sampling“. Praktisch wird dies mit einer Variablentransformation erreicht:

$$\mathbf{\Phi} = \mathbf{h}(\mathbf{r}), \quad 0 \leq r_i \leq 1. \tag{3.3}$$

Das Integral sieht dann folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 d\mathbf{r}\, \frac{f(k_i(\mathbf{h}(\mathbf{r})))}{g(k_i(\mathbf{h}(\mathbf{r})))}, \\ \frac{1}{g(k_i(\mathbf{\Phi}))} &= \rho(k_i(\mathbf{\Phi})) \left| \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} \right|_{\mathbf{r}=\mathbf{h}^{-1}(\mathbf{\Phi})}, \end{aligned} \tag{3.4}$$

g ist die Wahrscheinlichkeitsdichte der Phasenraumpunkte. Wählt man h so, dass der Verlauf der Funktionaldeterminante dem Verlauf von f ähnelt, wird der Integrand gewissermaßen geglättet. Die Abbildung $\mathbf{\Phi}$ wird auch „Mapping“ genannt.

Als Integrationsvariablen bieten sich die Impulsquadrate in den Propagatornennern an. Für jede dieser Variablen wird eine Variablentransformation $h_i(r_i)$ gewählt, die den entsprechenden Propagator des quadrierten Feynmangraphen glättet. Für einen Breit-Wigner-Propagator ($\sigma \propto \frac{1}{(p^2-M_V^2)^2+M_V^2\Gamma^2}$) erreicht man dies mit:

$$h_i(r_i) = M_V\Gamma \tan y_1 + (y_2 - y_1)r_i + M_V^2, \tag{3.5}$$

$$y_{1/2} = \arctan\left(\frac{(p^2)_{min/max} - M_V^2}{M_V\Gamma_V}\right), \tag{3.6}$$

so dass

$$g(p^2) = \frac{M_V\Gamma_V}{(y_2 - y_1)[(p^2 - M_V^2)^2 + M_V^2\Gamma_V^2]}. \tag{3.7}$$

Man sieht, dass in der Ableitung der quadrierte Propagator wieder auftaucht, und dieser sich daher im Integranden wegkürzt.

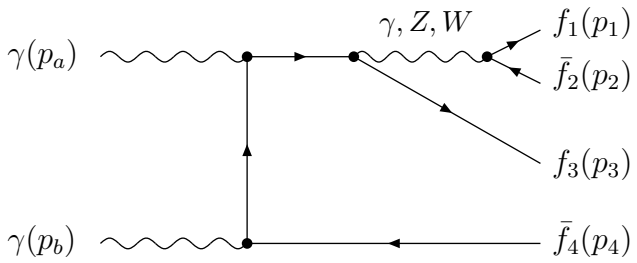
Neben Propagatoren der Breit-Wigner-Form treten auch Photon- und Fermionpropagatoren mit der Form $\sigma \propto \frac{1}{(p^2)^2}$ auf, die weder eine Breite noch Masse enthalten (da Fermionmassen vernachlässigt werden). Sie können mit folgender Abbildung geglättet werden:

$$\begin{aligned} p^2 = h_i(r_i) &= \left[(p^2)_{max}^{1-\nu} r_i + (p^2)_{min}^{1-\nu}(1-r_i)\right]^{\frac{1}{1-\nu}}, \\ g(p^2) &= \frac{1-\nu}{\left[(p^2)_{max}^{1-\nu} - (p^2)_{min}^{1-\nu}\right](p^2)^\nu}, \quad \nu \neq 1, \\ p^2 = h_i(r_i) &= \exp\left[\ln(p^2)_{max} r_i + \ln(p^2)_{min}(1-r_i)\right], \\ g(p^2) &= \frac{1}{[\ln(p^2)_{max} - \ln(p^2)_{min}](p^2)}, \quad \nu = 1. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Für $\nu = 2$ wird der Propagatornenner gekürzt. Dies ist allerdings nicht unbedingt die beste Wahl, weil sich die Pole durch andere Effekte bereits teilweise wegheben. Ein Wert in der Nähe 1 erweist sich als zweckmäßiger.

In beiden Fällen kann p^2 sowohl raumartig als auch zeitartig sein. Somit können alle Propagatoren eines Feynmangraphen geglättet werden.

Alle anderen Integrationsvariablen werden durch Winkel beschrieben. Für sie wird keine starke Variation des Integranden erwartet, und insofern wird für sie kein „Importance Sampling“ durchgeführt, sondern einfach eine lineare Abbildung gewählt. Aufgebaut wird der Phasenraum aus einer Zerlegung des Feynmangraphen in Streuprozesse zweier Teilchen und Zerfälle von Teilchen. Am Beispiel des folgenden Graphen soll dies illustriert werden. Für eine genauere Beschreibung wird auf die Referenzen [18] und [19] verwiesen.



Die lorentzinvarianten Größen, die in den Propagatoren auftreten, sind:

$$p_{12}^2 \equiv (p_1 + p_2)^2, \quad p_{123}^2 \equiv (p_1 + p_2 + p_3)^2, \quad t \equiv (p_b - p_4)^2. \tag{3.9}$$

Der erste Unterprozess ist die Streuung $p_a + p_b \rightarrow p_{123} + p_4$. Dann wird eine Lorentztransformation in das Ruhesystems des propagierenden Fermions ($\mathbf{p}'_{123} = \mathbf{0}$) durchgeführt und der Zerfall $p'_{123} \rightarrow p'_{12} + p'_3$ betrachtet. Schließlich geht man über ins Ruhesystem des Vektorbosons ($\mathbf{p}''_{12} = \mathbf{0}$) und betrachtet den Zerfall $p''_{12} \rightarrow p''_1 + p''_2$. So läßt sich das Phasenraumvolumen schreiben als:

$$\begin{aligned} \int d\mathbf{\Phi} &= \int_0^s dp_{12}^2 \int_{p_{12}^2}^s dp_{123}^2 \int d\phi_p(p_a, p_b, p_{123}^2, 0) \\ &\quad \times \int d\phi_d(p_{123}, p_{12}^2, 0) \int d\phi_d(p_{12}, 0, 0). \end{aligned} \tag{3.10}$$

Für p_{123} wird die Abbildung (3.8) gewählt und für p_{12}, je nachdem, ob es sich um ein γ oder um W/Z handelt, Abbildung (3.8) bzw. (3.5). Die beiden Zerfälle werden durch $d\phi_d$ parammetrisiert und der Streuprozess durch $d\phi_p$:

$$\int d\phi_d(p, m_1^2, m_2^2) = \frac{\lambda(p^2, m_1^2, m_2^2)^{\frac{1}{2}}}{8p^2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^{1} d\cos\theta, \tag{3.11}$$

$$\int d\phi_p(p_a, p_b, m_1^2, m_2^2) = \frac{1}{4\lambda((p_a + p_b)^2, p_a^2, p_b^2)^{\frac{1}{2}}} \int_0^{2\pi} \int_{t_{min}}^{t_{max}} dt, \tag{3.12}$$

wobei m_1 und m_2 die invarianten Massen der auslaufenden Teilchen eines Unterprozesses bezeichnen; λ ist die Funktion

$$\lambda(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2zx. \tag{3.13}$$

Die Winkel sind in den entsprechenden Ruhesystemen definiert. Über sie wird linear integriert, also mit $\phi = 2\pi r_1$ und $\cos\theta = 2r_2 - 1$. Um aus ihnen die Impulse im Laborsystem zu gewinnen, müssen gegeignete Rotationen und Lorentzboosts angewendet werden. Für t wird wie oben beschrieben ein „Importance Sampling“ durchgeführt. Die Grenzen sind bei diesem Prozess $t_{min} = (p_a + p_b)^2 - p_{123}^2$ und $t_{max} = 0$, die sich daraus ergeben, dass sich der Streuwinkel des Prozesses zwischen 0 und 180° bewegt.

Will man Schnitte anbringen, also bestimmte Bereiche des Phasenraums ausschließen, so ist dies besonders einfach für die Impulsquadrate, die in den Propagatornennern auftreten. Da sie lorentzinvariant sind, sind Schnitte an sie in allen Systemen gültig. Winkel müssen jedoch noch in das Laborsystem transformiert werden. Praktisch werden die Schnitte realisiert, indem zunächst ein Ereignis, also ein Phasenraumpunkt, generiert wird und dann, je nachdem, ob er unter den Schnitt fällt, verworfen wird.

3.2 Multi-Channel-Methode

Im vorigen Abschnitt wurde beschrieben, wie man für einen bestimmten Feynmangraphen, also einen einzelnen sogenannten Kanal, ein „Importance Sampling“ durchführt. Da der Wirkungsquerschnitt allerdings auf Grund einer Vielzahl von Graphen mit unterschiedlicher Topologie eine sehr komplexe Resonanzstruktur aufweist, können die Resonanzen im Integranden $f(k_i(\mathbf{\Phi}))$ von Gleichung (3.4) nicht durch ein einziges „Mapping“ $\mathbf{\Phi}$ beschrieben werden. Daher wird für jeden Feynmangraphen, also jede Resonanzstruktur, ein „Mapping“ $\mathbf{\Phi}_l$ mit zugehöriger Dichte $g_l(k_i(\mathbf{\Phi}_l))$ definiert. Ein naives Vorgehen wäre jetzt, beim Generieren der Zufallszahlen jeweils ein „Mapping“ g_l zufällig auszuwählen. Hinreichend ist dies jedoch nicht, weil damit immer noch nicht alle Resonanzen mittels einer einzigen Dichte im Nenner von Gleichung (3.4) geglättet werden.

Die Multi-Channel-Methode löst dieses Problem, indem sie alle Dichten g_l zu einer Gesamtdichte kombiniert:

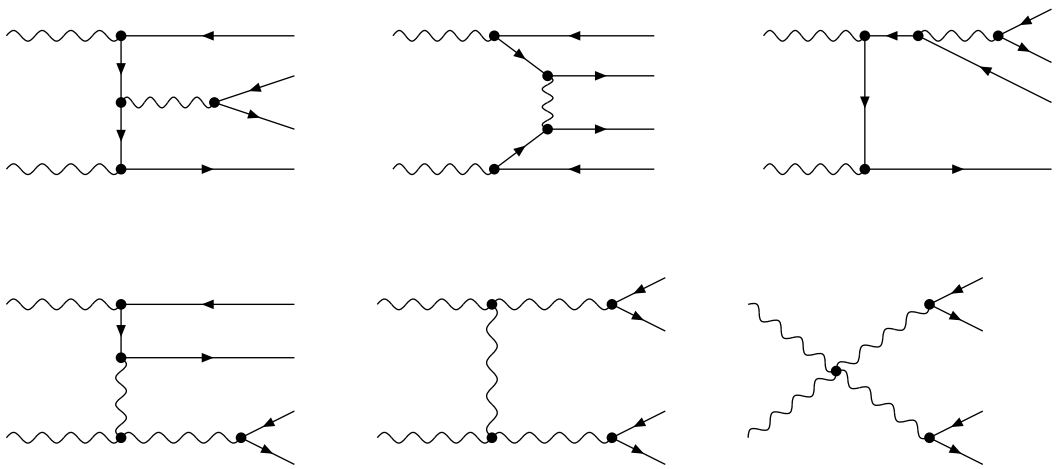
$$\begin{aligned} g_{tot} &\equiv \sum_{l=1}^{M} g_l(k_i(\mathbf{\Phi}_l)), \\ \frac{1}{g_l(k_i(\mathbf{\Phi}_l))} &= \rho_l(k_i(\mathbf{\Phi}_l)) \left| \frac{\partial \mathbf{h}_l(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} \right|_{\mathbf{r}=\mathbf{h}_l^{-1}(\mathbf{\Phi}_l)}, \end{aligned} \tag{3.14}$$

wobei M die Anzahl der Abbildungen h_l ist, die auch Kanäle genannt werden. Setzt man dies nun in das Integral aus Gleichung (3.2) ein und führt für jeden

Kanal die Variablentransformation durch, so erhält man:

$$\begin{aligned} I &= \sum_{l=1}^{M} \int_V d\mathbf{\Phi}_l \, \rho_l(k_i(\mathbf{\Phi}_l)) g_l(k_i(\mathbf{\Phi}_l)) \frac{f(k_i(\mathbf{\Phi}_l))}{g_{tot}} \\ &= \sum_{l=1}^{M} \int_0^1 d\mathbf{r} \, \frac{f(k_i(\mathbf{\Phi}_l))}{g_{tot}}. \end{aligned} \tag{3.15}$$

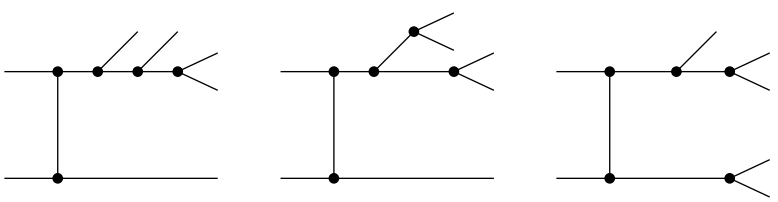
Auf diese Weise werden alle Kanäle l gleich häufig ausgewählt. Allerdings müssen für jeden Phasenraumpunkt alle Gewichte berechnet werden. Dafür steht g_{tot} im Nenner, so dass alle möglichen Resonanzen und Polstellen geglättet werden. Bei den Prozessen ohne Bremststrahlung können z.B. folgende Topologien auftreten:

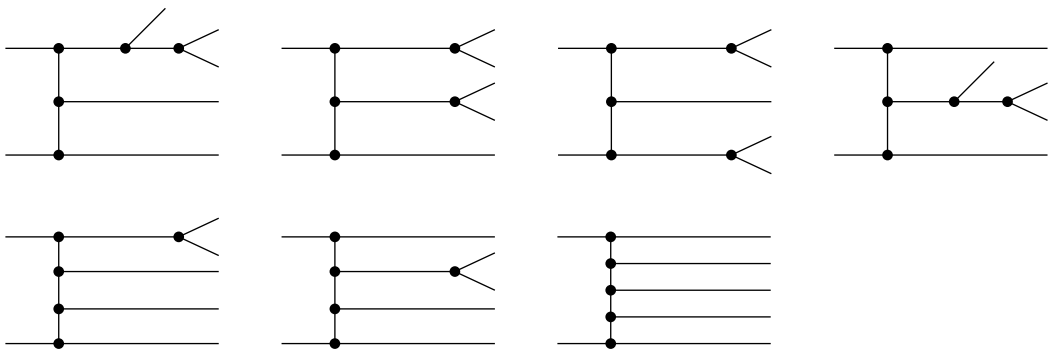


Das letzte Diagramm, das einen Vierer-Vertex entält, hat einen Propagator weniger als die anderen Graphen. Das „Mapping“ ergibt sich aus dem vorletzten Graphen dadurch, dass man den t-Kanal-Propagator wegläßt und für die zugehörige Invariante eine flache Abbildung wählt, also

$$\begin{aligned} h(r) &= r(p^2)_{min} + (1-r)(p^2)_{max}, \\ g(p^2) &= (p^2)_{max} - (p^2)_{min}. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Bei Berücksichtigung der Bremsstrahlungsdiagramme kommen noch weitere zehn Topologien hinzu:





Da es bei den Bremsstrahlungsprozessen Feynmangraphen gibt, die zwar die gleiche Topologie aufweisen aber unterschiedliche Propagatoren besitzen, wurden die Topologien mit allgemeinen Linien dargestellt. Entsprechend dem jeweiligen Graphen wird dann ein passendes „Mapping“ ausgewählt. Auch hier treten Graphen mit Vierer-Vertizes auf. Sie werden wiederum aus anderen Topologien durch Weglassen des entsprechenden t-Kanal-Propagators und Abbilden der Invariante mittels Gleichung (3.16) gewonnen. Aus den insgesamt 15 Topologien werden schließlich durch Vertauschen äußerer Beine und geeigneter Wahl der Abbildungen (3.5) und (3.8) sämtliche Kanäle erstellt.

Da diese Abbildungen bereits die quadrierten Propagatoren enthalten, werden mit dieser Methode Interferenzterme nicht berücksichtigt. Hier können Produkte verschiedener Propagatoren auftreten. Deren Pole bzw. Resonanzen liegen allerdings an verschiedenen Stellen im Phasenraum. Daher kann nur einer der Propagatoren verstärkt sein, so dass die Interferenzterme nicht den dominanten Anteil ausmachen.

Nach der Auswertung des Integranden $\omega_j = \sum_{l=1}^{M} \frac{f_j}{g_{tot}}$ an N Phasenraumpunkten liefert die Monte-Carlo-Methode als Ergebnis für das Integral (3.2) bzw. (3.15):

$$\bar{I} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \omega_j. \tag{3.17}$$

Der erwartete Fehler ist:

$$\delta \bar{I} = \sqrt{\frac{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \omega_j^2 - \bar{I}^2}{N}}. \tag{3.18}$$

Um die Integration noch effizienter zu gestalten, wird eine Methode verwendet, die in Referenz [20] beschrieben ist. Bisher wurden alle Kanäle mit der gleichen Häufigkeit ausgewählt (siehe Gleichung (3.14)). Man kann jedoch für jeden Kanal ein bestimmtes Gewicht $\alpha_l \geq 0$ („a priori weight“) festlegen, das der Wahrschein-

lichkeit entspricht, mit dem dieser Kanal ausgewählt wird:

$$g_{tot} \equiv \sum_{l=1}^{M} \alpha_l g_l(k_i(\mathbf{\Phi}_l)), \quad \sum_{l=1}^{M} \alpha_l = 1. \tag{3.19}$$

Da zunächst keine besonders günstigen Werte dieser Gewichte bekannt sind, wird die „adaptive optimization“ Methode angewendet, in der die anfänglichen Gewichte im Laufe der Integration optimiert werden. Nach der Berechnung für einige Phasenraumpunkte wird die Größe $\sum_{j=1}^{N} \left(\frac{f_j}{g_{tot}}\right)^2$ durch die Wahl neuer Gewichte α_l minimiert. Dadurch wird auch der Monte-Carlo-Fehler (3.18) geringer.

Die Umsetzung der Integration in ein Fortran-Programm wurde bereits in „RacoonWW“ [7] durchgeführt. Dessen Integrationsteil konnte daher weitgehend übernommen und entsprechend modifiziert werden.

Kapitel 4

Numerische Ergebnisse

Die Wirkungsquerschnitte werden mit folgenden Standardmodell-Parametern berechnet [21]:

$$\begin{aligned} M_W &= 80.419\,\text{GeV}, & \Gamma_W &= 2.12\,\text{GeV}, \\ M_Z &= 91.1882\,\text{GeV}, & \Gamma_Z &= 2.4952\,\text{GeV}, \\ G_\mu &= 1.16639 \times 10^{-5}\,\text{GeV}^{-2}, & \alpha_s &= 1.1181. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Γ_W und Γ_Z bezeichnen die Zerfallsbreiten der W- und Z-Bosonen. Die elektromagnetische Kopplungskonstante $\alpha = e^2/(4\pi)$ wird aus der Fermikonstante gewonnen,

$$\alpha_{G_\mu} = \frac{\sqrt{2} G_\mu M_W^2 s_W^2}{\pi}. \tag{4.2}$$

Damit ist eine einfache Wahl getroffen, um die Reproduzierbarkeit durch andere Rechnungen wie z.B. mit Madgraph zu erleichtern. Um dem Laufen der Kopplung durch Renormierungseffekte Rechnung zu tragen, wäre der korrekte Weg bei CC-Prozessen eine Skalierung des Wirkungsquerschnittes mit $\alpha(0)^2\alpha_{G_\mu}^2$ für $\gamma\gamma \to 4f\gamma$ bzw. $\alpha(0)^3\alpha_{G_\mu}^2$ für $\gamma\gamma \to 4f$, weil die Kopplungen von zwei bzw. drei reellen Photonen und zwei Kopplungen von virtuellen W-Bosonen an Fermionen vorkommen. Für NC Prozesse ist die Wahl hingegen nicht so eindeutig, da sowohl ein virtuelles Photon als auch ein virtuelles Z-Boson beteiligt ist.

Zunächst werden gewisse Schnitte an Fermion- und Photonenergien und an Winkel definiert. Dies ist zum einen notwendig, um mit dem Experiment vergleichen zu können, da Teilchenspuren erst ab einer gewissen Mindestenergie der Teilchen rekonstruiert werden können und da die Detektoren auch nur eine begrenzte Winkelauflösung besitzen. Zum anderen sind die Prozesse mit Photonabstrahlung auf Grund von infraroten und kollinearen Divergenzen nicht endlich, wenn über den gesamten Phasenraum integriert wird. Nur wenn man Bereiche, in denen das Photon eine Mindestenergie unterschreitet oder in einem zu kleinen Winkel von einem Fermion abgestrahlt wird, ausschließt, erhält man ein physikalisch sinnvolles Ergebnis. Die gleiche Überlegung gilt auch für den Prozess ohne

Photonabstrahlung, weil Fermionmassen aus den in der Einleitung genannten Gründen vernachlässigt werden und daher ebenso kollineare Divergenzen auftreten. Für alle numerischen Ergebnisse dieser Arbeit werden folgende Schnitte verwendet (l=Lepton, q=Quark):

$$\begin{array}{lll} E_l > 10GeV, & E_q > 10GeV, & E_\gamma > 10GeV, \\ m(q,q') > 10GeV, & \theta(l,l') > 5°, & \theta(l,q) > 5°, \\ \theta(l,\gamma) > 5°, & \theta(q,\gamma) > 5°, & \theta(l,\text{Strahl}) > 5°, \\ \theta(q,\text{Strahl}) > 5°, & \theta(\gamma,\text{Strahl}) > 5°. & \end{array} \tag{4.3}$$

Als Breitenschema wird außer in Abschnitt 4.3 die feste Breite verwendet.

4.1 Vergleich mit Madgraph/Whizard

Der totale Wirkungsquerschnitt wird mit Formel (3.15) und den entsprechenden Matrixelementen aus Kapitel 2 berechnet und der statistische Fehler der Integration aus Gleichung (3.18). Umgesetzt sind die Formeln in ein Fortran-Programm mit dem Namen „DoubleGam“. Die Ergebnisse sind in den Tabellen 4.1 und 4.2 bei Schwerpunktsenergien von 500 GeV bzw. 1000 GeV und für die in Tabelle 2.1 klassifizierten Endzustände zu sehen. Die Monte-Carlo-Integration wurde durchgehend mit 10^7 Ereignissen durchgeführt. Der statistische Fehler ist jeweils in Klammern angegeben und bezieht sich auf die letzten beiden Ziffern. Wie zu erwarten, sind die Wirkungsquerschnitte der Prozesse mit geladenem Strom sehr viel größer als diejenigen, in denen lediglich Photonen und Z-Bosonen ausgetauscht werden. Die Schwelle für die Produktion zweier resonanter W-Bosonen liegt zwar bei etwa 161 GeV.

Zur Kontrolle der Rechnung wurde das Programm Madgraph in Kombination mit den Monte-Carlo-Integrations-Programm Whizard [22] (in der Version 1.21) herangezogen. Deren Resultate sind ebenfalls in Tabelle 4.1 und 4.2 dargestellt. Wie man sieht, ist die Übereinstimmung in allen Fällen innerhalb $1-2\sigma$. Weiterhin sollte erwähnt werden, dass der statistische Fehler der Kombination Whizard/Madgraph, deren Berechnung ebenfalls mit 10^7 Ereignissen durchgeführt wurde, für die Prozesse mit vier Teilchen im Endzustand kleiner ist, bei fünf Teilchen jedoch meistens größer. Letzteres zeigt sich insbesondere bei den NC-Prozessen. Aus Referenz [14] geht hervor, dass Photon-Propagatoren, die in dem Zerfall $\gamma \to f\bar{f}$ vorkommen, in Whizard (Version 1.21) nicht durch ein Mapping geglättet werden. Da Diagramme mit Photon-Propagatoren in NC-Prozessen einen größeren Anteil am Wirkungsquerschnitt ausmachen als in CC- bzw. NC/CC-Prozessen, in denen sie entweder nicht vorkommen oder Diagramme mit W-Propagatoren dominieren, erklärt sich, dass der statistische Fehler bei Whizard in diesem Fall größer ist.

Beim Vergleich der Geschwindigkeit der numerischen Integration zeigt sich, dass das Programm „DoubleGam“ im Allgemeinen um einen Faktor zwei bis

zehn schneller ist. Insbesondere bei Prozessen mit vier Teilchen gleichen Flavors, die eine Vielzahl von Diagrammen beeinhalten, ist „DoubleGam“ um mehr als eine Größenordnung schneller. Dies lässt sich zum großen Teil auf die kompakteren Formeln der Helizitätsamplituden zurückführen. Lediglich bei den CC- und NC/CC-Prozessen ist „DoubleGam“ langsamer, weil hier die Formeln direkt mit Mathematica generiert und nicht mehr wesentlich vereinfacht wurden.

Da die Kombination Whizard/Madgraph in der hier benutzten Version keine Gluonaustauschdiagramme berücksichtigen kann, wird der Wirkungsquerschnitt nur ohne diese Diagramme verglichen. Es zeigt sich jedoch, dass diese Diagramme auf Grund der Größe der starken Kopplung bei Prozessen mit neutralem Strom den größten Teil des Wirkungsquerschnittes ausmachen und auch bei NC/CC-Prozessen einen signifikanten Beitrag liefern.

4.2 Abhängigkeit von der Schwerpunktsenergie

In den Abbildungen 4.1, 4.2 und 4.3 ist der Wirkungsquerschnitt als Funktion der Schwerpunktsenergie für jeweils einen NC-, einen CC- und einen NC/CC-Prozess ohne bzw. mit Bremsstrahlung dargestellt. Die Wirkungsquerschnitte der NC-Prozesse sind deutlicher kleiner als die der CC- und NC/CC-Prozesse, da bei ihnen lediglich ein resonanter Propagator (des Z-Bosons) auftritt, und nicht zwei (W-Propagatoren), wie bei den anderen Prozessen. Der Unterschied in der Größenordnung bei den CC-Prozessen $\gamma\gamma \to e^+\nu_e u\bar{d}(\gamma)$ im Vergleich zu den NC/CC-Prozessen $\gamma\gamma \to u\bar{u}d\bar{d}(\gamma)$ lässt sich durch den Farbfaktor der Quarks erklären, der im ersten Fall $N_c = 3$ und im zweiten $N_c = 9$ beträgt.

Der unterschiedliche Anstieg des Wirkungsquerschnittes für $2 \to 4$-Prozesse im Vergleich zu $2 \to 5$-Prozessen im Fall von CC und NC/CC hat im Wesentlichen kinematische Ursachen. Oberhalb von etwa 161 GeV ist die Produktion zweier W-Bosonen möglich. Aus deren Zwei-Teilchen-Phasenraum ergibt sich ein Faktor $\beta = \sqrt{1 - \frac{4M_W^2}{s}}$. Bei den $2 \to 5$-Prozessen hingegen machen sich Effekte eines Drei-Teilchen-Phasenraums bemerkbar, so dass der Anstieg langsamer erfolgt. Der Abfall oberhalb des Maximums zeigt beim $2 \to 4$-NC-Prozessen ein $\frac{1}{s}$-Verhalten, was aus der Kinematik zu erwarten ist. Bei den CC- und NC/CC-Prozessen hingegen verhält sich der Wirkungsquerschnitt wie $\frac{\ln s}{s}$. Dies hat seinen Grund in der γWW-Kopplung, die proportional zum Impuls ist, so dass der Wirkungsquerschnitt der Reaktion $\gamma\gamma \to WW$ oberhalb der Schwelle für W-Paar-Produktion nahezu konstant ist [4]. Allerdings ist der differentielle Wirkungsquerschnitt auf Grund der t-Kanals insbesondere in Vorwärts- und Rückwärts-Richtung sehr groß. Durch Schnitte an den Winkel relativ zur Strahlachse wird daher der Wirkungsquerschnitt verkleinert. Je höher die Energie der W-Bosonen, um so größer ist auch ihr Lorentzboost und um so größer die Tendenz, dass die Fermionen, in die sie zerfallen, auch in Strahlrichtung emittiert werden. Somit erklärt sich, dass der totale Wirkungsquerschnitt oberhalb der Schwelle nicht

konstant ist, sondern auf Grund der Schnitte abfällt.

Dass die Wahl der Schnitte einen Einfluss auf den Wirkungsquerschnitt hat, sieht man z.B. am $2 \to 4$-NC-Prozess. In Abbildung 4.1 sind sowohl der volle Wirkungsquerschnitt als auch derjenige, bei dem nur die Diagramme mit Photon-Austausch berücksichtigt wurden, dargestellt. Unterhalb des Maximums des vollen Wirkungsquerschnitts verläuft dieser nicht glatt, was durch die Überlagerung der Photon- und Z-Beiträge zu erklären ist. An welcher Stelle das Maximum des Wirkungsquerschnittes dieser Diagramme liegt, hängt davon ab, welche Mindestenergie für die Fermionen verlangt wird. In diesem Fall beträgt sie 10 GeV, so dass der Wirkungsquerschnitt unterhalb von 40 GeV auf Null abfällt. Wären keine Mindestenergien für Fermionen spezifiziert, so stiege er hingegen für kleine Energien immer weiter an. Die Schwelle für Z-Diagramme hängt ebenfalls von den Schnitten ab, weil zu deren Produktion sowohl die Energie M_Z als auch noch die Energie für zwei weitere Fermionen, also 20 GeV, notwendig ist, so dass die Schwelle bei etwa 110 GeV liegt. In Abbildung 4.3 ist auch der Einfluss der Diagramme mit Gluon-Austausch zu sehen. Unterhalb der Schwelle für W-Paar-Produktion dominieren sie, oberhalb liefern die Diagramme mit W-Austausch den größten Beitrag zum Wirkungsquerschnitt.

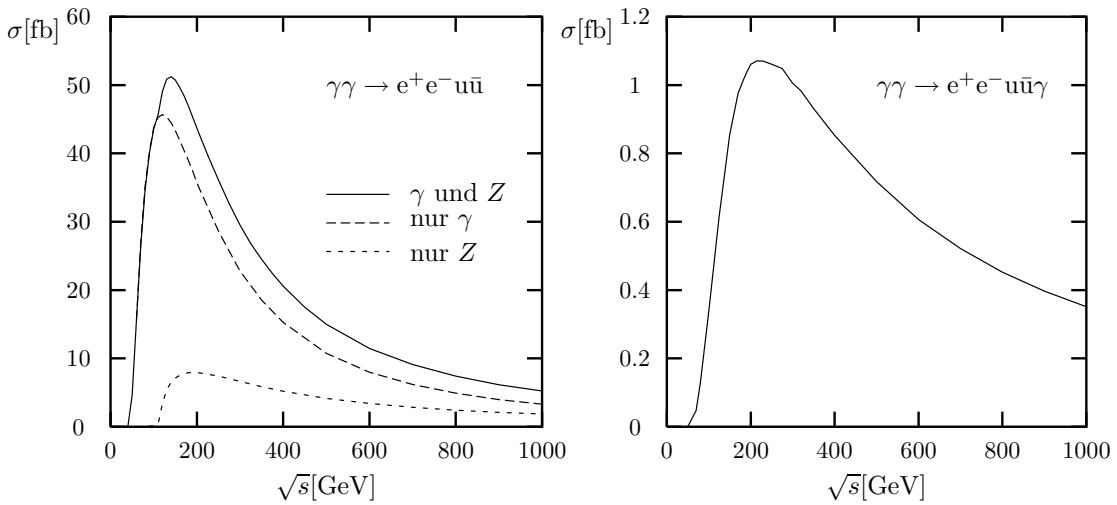


Abbildung 4.1: Totaler Wirkungsquerschnitt der Prozesse $\gamma\gamma \to e^+e^-u\bar{u}(\gamma)$ als Funktion der Schwerpunktsenergie

4.3 Breitenschemata

In den Tabellen 4.3, 4.4 und 4.5 werden für einen NC-, einen CC- und einen NC/CC-Prozess Wirkungsquerschnitte, die mit den in Abschnitt 2.7 definierten

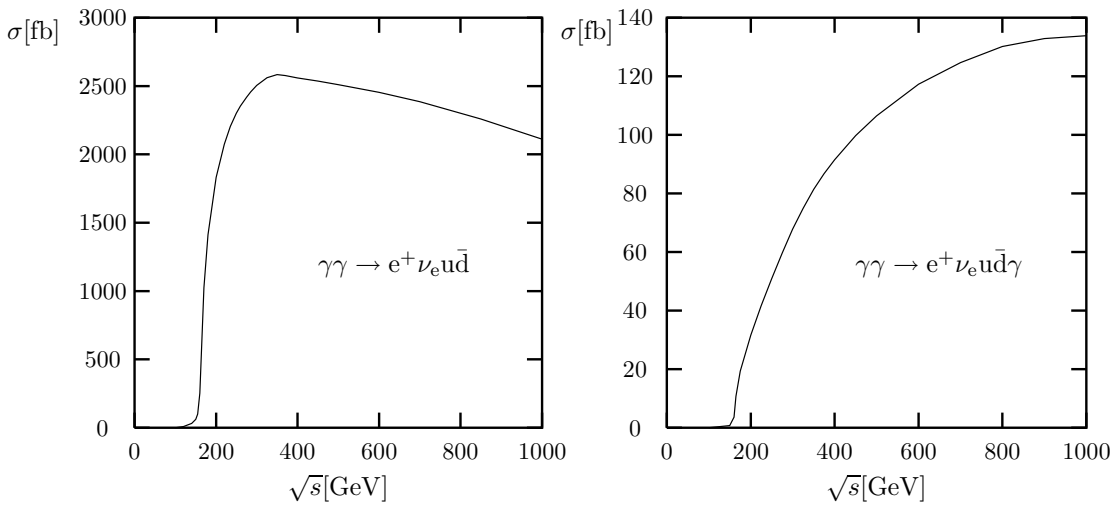


Abbildung 4.2: Totaler Wirkungsquerschnitt der Prozesse $\gamma\gamma \to \mathrm{e}^+\nu_\mathrm{e}\mathrm{u}\bar{\mathrm{d}}(\gamma)$ als Funktion der Schwerpunktsenergie

Breitenschemata berechnet wurden, miteinander verglichen. Insbesondere ist der Vergleich mit dem Schema komlexer Massen interessant, weil dies als einziges eichinvariant ist. Es stellt sich heraus, dass die Ergebnisse bei den $2 \to 4$-Prozessen für die verwendeten Energien von 500 GeV bis 1000 GeV innerhalb des statistischen Fehlers übereinstimmen. Die Untersuchung entsprechender Reaktionen in e^+e^--Kollisionen hatte gezeigt, dass bei einer laufenden Breite erhebliche Abweichungen, also Eichinvarianz verletzende Effekte, auftreten können [13]. In den $2 \to 5$-Prozessen tritt jedoch genau dieser Effekt auf. Bei hohen Energien liefert das Schema mit laufender Breite in den CC- und NC/CC- Prozessen falsche Ergebnisse; in den NC-Prozessen ist die Abweichung nicht signifikant, da hier nur ein massiver Propagator und nicht drei, wie bei Reaktionen mit W-Bosonen, auftritt.

Im Allgemeinen ist die Frage der Eichverletzung durch Propagatorbreiten sehr komplex. Dass es in diesem Fall keine signifikante Abweichung zwischen der festen Breite und dem Schema mit komplexen Massen gibt, kann jedoch wie folgt verstanden werden: Der einzige Unterschied besteht im Sinus (s_W) und Cosinus (c_W) des schwachen Mischungswinkels. CC-Prozesse enthalten zwei bzw. drei Kopplungen von Photonen, die proportional zu e sind, und zwei Kopplungen von W-Bosonen, die proportional zu $\frac{e}{s_W}$ sind. Somit ist

$$|\mathcal{M}_{\mathrm{CC},2\to4(5)}|^2 \propto \frac{e^{8(10)}}{s_W^4}, \tag{4.4}$$

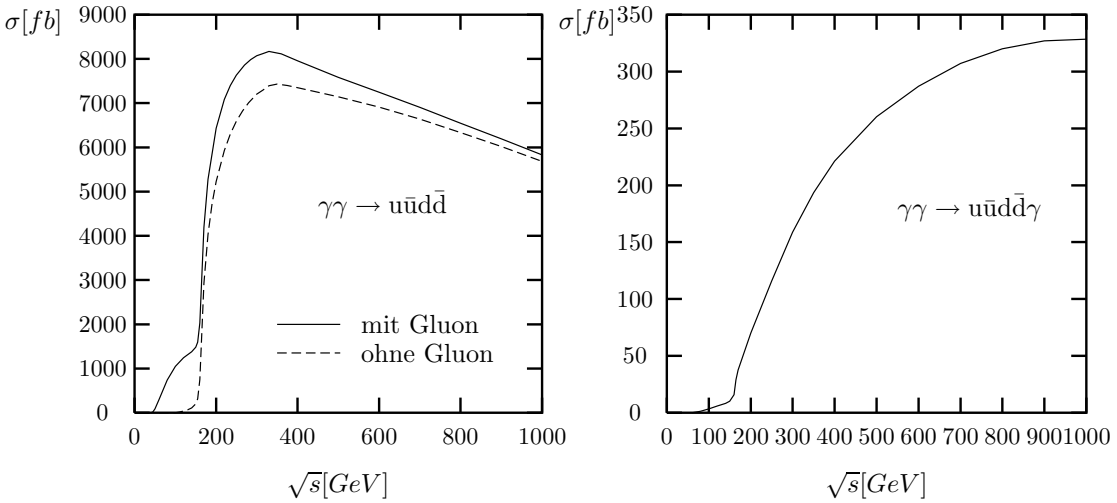


Abbildung 4.3: Totaler Wirkungsquerschnitt der Prozesse $\gamma\gamma \to \mathrm{u\bar{u}d\bar{d}}(\gamma)$ als Funktion der Schwerpunktsenergie (inklusive Gluon-Austausch-Diagrammen)

und damit

$$|\mathcal{M}_{\mathrm{CC,kompl}}|^2 = |\mathcal{M}_{\mathrm{CC,reell}}|^2 \left| \frac{(s_W)_{\mathrm{reell}}}{(s_W)_{\mathrm{kompl}}} \right|^4 . \tag{4.5}$$

Der Unterschied lässt sich abschätzen durch

$$s_W^2 = 1 - c_W^2, \quad (c_W^2)_{\mathrm{kompl}} = \frac{M_W^2 - iM_W\Gamma_W}{M_Z - iM_Z\Gamma_Z} = (c_W^2)_{\mathrm{reell}}(1 + \mathcal{O}(\frac{\Gamma_W^2}{M_W^2})). \tag{4.6}$$

Der Unterschied liegt also höchstens im Promille-Bereich. Bei NC-Prozessen treten vor den verschiedenen Graphen unterschiedliche Funktionen von s_W und c_W auf. Das Verhältnis der Wirkungsquerschnitte muss allerdings wieder eine Summe von Termen sein, die $\frac{(s_W)_{\mathrm{reell}}}{(s_W)_{\mathrm{kompl}}}$ enthalten, so dass die Abweichung wieder von der Größenordnung $\frac{\Gamma_W^2}{M_W^2}$ ist. Im Gegensatz hierzu unterscheiden sich in den anderen beiden Schemata auch die Propagatornenner. Bei der laufenden Breite führt dies dazu, dass die Abweichungen von der Größenordnung $\mathcal{O}(f(q^2)\frac{\Gamma_W^2}{M_W^2})$ sein können. Daraus fogen die bei hohen Energien auftretenden Fehler dieses Schemas.

4.4 Differentielle Wirkungsquerschnitte

Neben totalen Wirkungsquerschnitten sind differentielle Wirkungsquerschnitte weitere interessante physikalische Observable. In Abbildung 4.4 ist deren Abhängigkeit von der invarianten Masse des ud-Paares in der Reaktion $\gamma\gamma \to \mathrm{e^+\nu_e u\bar{d}}$ gezeigt. Sie entspricht der Masse des W-Bosons, aus dessen Zerfall die beiden

Quarks stammen. Die Reaktion $\gamma\gamma \to e^+\nu_e u\bar{d}$, die in dieser Arbeit äquivalente Reaktion $\gamma\gamma \to \mu^+\nu_\mu u\bar{d}$ und die CP-transformierten Reaktionen erlauben also im Prinzip eine Bestimmung der Masse und der Zerfallsbreite des W-Bosons, zumal sie ein klares Signal im Detektor hinterlassen (fehlende Energie und fehlender Impuls vom Neutrino, ein Elektron oder Myon und zwei hadronische Schauer). Außerdem ist in Abbildung 4.4 die Abhängigkeit des Wirkungsquerschnittes vom Winkel zwischen Strahlachse und der durch das ud-Paar definierten Richtung gezeigt. Es zeigt sich, dass das W-Boson vorzugsweise in Strahlrichtung emittiert wird, was, wie bereits in Abschnitt 4.2 erwähnt, am t-Kanal-Propagator liegt.

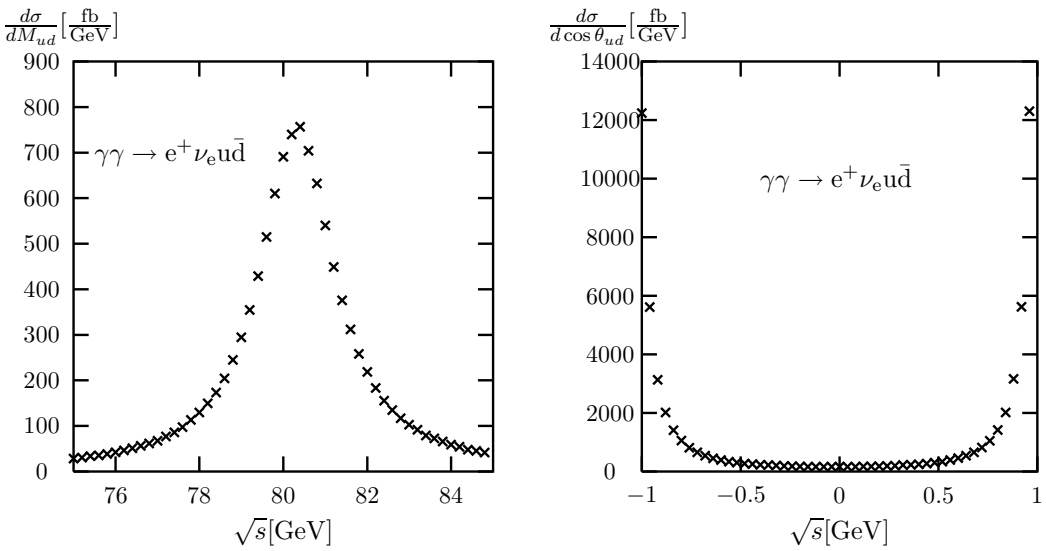


Abbildung 4.4: Verteilung der invarianten Masse und des Winkels zur Strahlachse des ud-Paares in der Reaktion $\gamma\gamma \to e^+\nu_e u\bar{d}$

	DoubleGam		Whizard + Madgraph	
$\gamma\gamma \to$	$\sigma_{4f}[fb]$	$\sigma_{4f+\gamma}[fb]$	$\sigma_{4f}[fb]$	$\sigma_{4f+\gamma}[fb]$
$e^-\bar{\nu}_e\nu_\mu\mu^+$	882.40(62)	43.409(44)	882.52(24)	43.317(33)
$e^-e^+\nu_\mu\bar{\nu_\mu}$	1.87625(93)	0.11262(12)	1.87681(67)	0.11251(17)
$e^-e^+\mu^-\mu^+$	20.610(47)	1.1662(32)	20.717(27)	1.1814(83)
$e^-e^+e^-e^+$	10.093(23)	0.5647(17)	10.103(13)	0.5663(41)
$e^-e^+\nu_e\bar{\nu_e}$	883.73(81)	43.449(45)	884.35(25)	43.417(34)
$e^-\bar{\nu}_e u\bar{d}$	2511.2(2.2)	106.53(12)	2510.09(81)	106.488(87)
$\nu_e\bar{\nu_e}u\bar{u}$	1.28049(72)	0.034153(40)	1.28075(48)	0.034090(55)
$\nu_e\bar{\nu_e}d\bar{d}$	0.102626(63)	0.00068453(86)	0.102643(41)	0.0006820(11)
$e^-e^+u\bar{u}$	14.958(27)	0.7157(17)	15.010(13)	0.7075(53)
$e^-e^+d\bar{d}$	5.0681(50)	0.29576(44)	5.0740(28)	0.2952(10)
$u\bar{d}s\bar{c}$	7116.3(7.5)	253.26(30)	7105.8(2.7)	253.93(21)
$u\bar{u}c\bar{c}$	11.162(17)	0.33991(77)	11.1742(87)	0.3388(41)
mit Gluon	1665.4(4.3)	38.88(12)	-	-
$u\bar{u}s\bar{s}$	3.5558(37)	0.09780(16)	3.5560(21)	0.09742(46)
mit Gluon	446.1(1.1)	7.129(22)	-	-
$d\bar{d}s\bar{s}$	0.53246(43)	0.0051126(78)	0.53232(26)	0.005075(64)
mit Gluon	103.93(27)	0.6080(20)	-	-
$u\bar{u}u\bar{u}$	5.5301(80)	0.16763(38)	5.5373(47)	0.1653(20)
mit Gluon	834.5(2.1)	19.433(67)	-	-
$d\bar{d}d\bar{d}$	0.26372(20)	0.0025335(40)	0.26391(14)	0.002529(27)
mit Gluon	52.12(13)	0.3050(10)	-	-
$u\bar{u}d\bar{d}$	7119(12)	253.48(32)	7119.0(2.8)	254.04(21)
mit Gluon	7563(12)	260.49(34)	-	-

Tabelle 4.1: Bornsche Wirkungsquerschnitte für $\gamma\gamma \to 4f(\gamma)$ bei $\sqrt{s} = 500\,\mathrm{GeV}$ ohne bzw. mit Gluonaustauschdiagrammen

	DoubleGam		Whizard + Madgraph	
$\gamma\gamma \rightarrow$	$\sigma_{4f}[fb]$	$\sigma_{4f+\gamma}[fb]$	$\sigma_{4f}[fb]$	$\sigma_{4f+\gamma}[fb]$
$e^-\bar{\nu}_e\nu_\mu\mu^+$	797.24(67)	55.065(85)	797.25(29)	55.084(49)
$e^-e^+\nu_\mu\bar{\nu_\mu}$	0.79218(41)	0.067009(97)	0.79216(28)	0.066917(95)
$e^-e^+\mu^-\mu^+$	6.352(10)	0.4994(13)	6.3729(91)	0.4886(40)
$e^-e^+e^-e^+$	3.1072(51)	0.24008(67)	3.1090(40)	0.2391(20)
$e^-e^+\nu_e\bar{\nu_e}$	797.82(86)	55.193(87)	797.78(29)	55.036(49)
$e^-\bar{\nu}_e u\bar{d}$	2113.1(2.3)	133.87(23)	2111.98(98)	133.86(13)
$\nu_e\bar{\nu_e}u\bar{u}$	0.54071(31)	0.020282(31)	0.54045(20)	0.020296(30)
$\nu_e\bar{\nu_e}d\bar{d}$	0.043337(26)	0.00040641(67)	0.043322(17)	0.00040779(67)
$e^-e^+u\bar{u}$	5.2020(67)	0.35093(84)	5.2146(50)	0.3508(29)
$e^-e^+d\bar{d}$	2.0702(21)	0.16787(29)	2.0704(12)	0.16814(49)
$u\bar{d}s\bar{c}$	5659.2(7.5)	325.49(64)	5658.4(2.9)	325.31(31)
$u\bar{u}c\bar{c}$	4.3465(47)	0.17626(39)	4.3610(35)	0.1759(12)
mit Gluon	531.2(1.0)	16.745(47)	-	-
$u\bar{u}s\bar{s}$	1.5375(15)	0.05645(10)	1.53999(95)	0.05599(25)
mit Gluon	145.84(26)	3.2588(89)	-	-
$d\bar{d}s\bar{s}$	0.24530(19)	0.0029508(56)	0.24550(14)	0.002864(39)
mit Gluon	33.171(64)	0.26219(73)	-	-
$u\bar{u}u\bar{u}$	2.1555(23)	0.08714(20)	2.1576(17)	0.08753(85)
mit Gluon	266.28(51)	8.415(26)	-	-
$d\bar{d}d\bar{d}$	0.121742(92)	0.0014574(28)	0.121812(67)	0.001450(15)
mit Gluon	16.643(31)	0.13157(39)	-	-
$u\bar{u}d\bar{d}$	5653(12)	324.83(67)	5662.7(3.0)	325.24(32)
mit Gluon	5798(12)	328.31(68)	-	-

Tabelle 4.2: Bornsche Wirkungsquerschnitte für $\gamma\gamma \rightarrow 4f(\gamma)$ bei $\sqrt{s} = 1000\,\mathrm{GeV}$ ohne bzw. mit Gluonaustauschdiagrammen

$\sigma(\gamma\gamma \to e^- e^+ \mu^- \mu^+)$					
$\sqrt{s}[GeV]$	500	800	1000	2000	10000
Feste Br.	20.610(47)	9.352(17)	6.352(10)	0.7005(17)	0.001698(29)
Stufenbr.	20.610(47)	9.352(17)	6.352(10)	0.7005(17)	0.001698(29)
Laufende Br.	20.609(47)	9.351(17)	6.352(10)	0.7004(17)	0.001698(29)
Kompl. M.	20.609(47)	9.352(17)	6.352(10)	0.7005(17)	0.001698(29)

$\sigma(\gamma\gamma \to e^- e^+ \mu^- \mu^+ \gamma)$					
$\sqrt{s}[GeV]$	500	800	1000	2000	10000
Feste Br.	1.1662(32)	0.6670(17)	0.4994(13)	0.04474(30)	0.0000282(19)
Stufenbr.	1.1665(32)	0.6666(17)	0.4993(13)	0.04484(29)	0.0000282(19)
Laufende Br.	1.1697(32)	0.6661(17)	0.5001(13)	0.04425(27)	0.0000237(17)
Kompl. M.	1.1676(32)	0.6664(17)	0.4994(13)	0.04439(28)	0.0000282(19)

Tabelle 4.3: Bornsche Wirkungsquerschnitte für verschiedene Schwerpunktsenergien und verschiedene Schemata der Propagatorbreite (NC-Prozess)

$\sigma(\gamma\gamma \to e^- \bar{\nu_e} \nu_\mu \mu^+)$					
$\sqrt{s}[GeV]$	500	800	1000	2000	10000
Feste Breite	882.40(62)	841.87(66)	797.24(67)	407.87(52)	9.086(75)
Stufenbreite	882.57(62)	842.04(66)	797.38(67)	407.92(52)	9.086(75)
Laufende Breite	882.47(62)	841.95(66)	797.30(67)	407.84(52)	9.082(75)
Kompl. Massen	882.22(62)	841.70(66)	797.07(67)	407.79(52)	9.084(75)

$\sigma(\gamma\gamma \to e^- \bar{\nu_e} \nu_\mu \mu^+ \gamma)$					
$\sqrt{s}[GeV]$	500	800	1000	2000	10000
Feste Breite	43.409(44)	52.760(70)	55.065(85)	37.68(14)	1.524(64)
Stufenbreite	43.423(44)	52.848(70)	55.30(15)	37.73(14)	1.524(64)
Laufende Breite	43.457(45)	52.886(71)	55.42(15)	38.83(56)	4.41(16)
Kompl. Massen	43.400(44)	52.749(70)	55.053(85)	37.67(14)	1.523(64)

Tabelle 4.4: Bornsche Wirkungsquerschnitte für verschiedene Schwerpunktsenergien und verschiedene Schemata der Propagatorbreite (CC-Prozess)

$\sigma(\gamma\gamma \to u\bar{u}d\bar{d})$					
$\sqrt{s}[GeV]$	500	800	1000	2000	10000
Feste Br.	7563(12)	6518(12)	5798(12)	1040.7(5.2)	5.30(34)
Stufenbr.	7564(12)	6519(12)	5799(12)	1040.8(5.2)	5.30(34)
Laufende Br.	7563(12)	6518(12)	5797(12)	1040.3(5.2)	5.29(34)
Kompl. M.	7561(12)	6517(12)	5797(12)	1040.5(5.2)	5.30(34)

$\sigma(\gamma\gamma \to u\bar{u}d\bar{d}\gamma)$					
$\sqrt{s}[GeV]$	500	800	1000	2000	10000
Feste Br.	260.49(34)	320.17(54)	328.31(68)	52.98(47)	0.077(15)
Stufenbr.	260.52(34)	320.26(54)	328.40(68)	52.86(46)	0.077(15)
Laufende Br.	260.37(34)	320.07(55)	328.28(68)	54.49(47)	0.363(13)
Kompl. M.	260.57(34)	320.01(54)	328.23(68)	52.99(47)	0.077(15)

Tabelle 4.5: Bornsche Wirkungsquerschnitte für verschiedene Schwerpunktsenergien und verschiedene Schemata der Propagatorbreite (CC/NC-Prozess)

Kapitel 5

Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurden alle Prozesse $\gamma\gamma \to 4f$ und $\gamma\gamma \to 4f\gamma$ auf Born-Niveau berechnet. Fermionmassen wurden dabei vernachlässigt. Es zeigte sich, dass der Weyl-van-der-Waerden-Spinor-Formalismus für diesen Zweck besonders gut geeignet ist, da in ihm alle Größen eines Matrixelementes durch ein einziges mathematisches Objekt ausgedrückt werden, was analytische Umformungen erleichtert. So konnten die Formeln für NC-Prozesse in kompakter Form angegeben werden, und auch die CC-Prozesse $\gamma\gamma \to 4f$ waren noch analytisch behandelbar. Die Matrixelemente wurden numerisch mit denjenigen des Programmpaketes Madgraph verglichen und volle Übereinstimmung gefunden.

Weiterhin wurde für die Phasenraumintegration ein Monte-Carlo-Programm geschrieben, das mit Hilfe der Multi-Channel-Methode den numerischen Fehler der Integration verkleinert. Hierbei konnten wesentliche Teile aus „RacoonWW“ [7] übernommen werden. Die Wirkungsquerschnitte stimmen mit denjenigen, die mit den Programmen Whizard und Madgraph berechnet wurden, innerhalb des statistischen Fehlers überein.

Diskutiert wurden schließlich verschiedene Möglichkeiten, die Propagatorbreite einzubeziehen. Dabei zeigte sich, dass ähnlich wie bei den Reaktionen $e^+e^- \to 4f(\gamma)$ eine laufende Breite zu falschen Ergebnissen bei den Prozessen $\gamma\gamma \to 4f\gamma$ führt. Für eine konstante Breite stimmen die Wirkungsquerschnitte jedoch mit dem Schema der komplexen Breite, das die Eichinvarianz erhält, praktisch überein.

Im Prozess $\gamma\gamma \to 4f\gamma$ wurden weiche und kollineare Photonen durch entsprechende Schnitte ausgeschlossen, das abgestrahlte Photon also als ein detektierbares Teilchen angesehen. Die Berücksichtigung der weichen und kollinearen Photonen liefert hingegen die reellen Korrekturen zum Prozess $\gamma\gamma \to 4f$, so dass die Ergebnisse dieser Arbeit auch als ein Bestandteil der Berechnungen der $\mathcal{O}(\alpha)$-Korrekturen zum Prozess $\gamma\gamma \to 4f$ angesehen werden können.

Anhang A

Schouten-Identität

In zwei Dimensionen gibt es keinen antisymmetrischen Tensor mit größerem Rang als 2. Wird aus dem Tensor ϵ aus Gleichung (2.4), der das Spinorprodukt definiert, ein Tensor mit Rang 3 oder höher gebildet, der antisymmetrisch in den Indizes B, C und D ist, so muss dieser verschwinden:

$$\epsilon^{A[B}\epsilon^{CD]} = \epsilon^{AB}\epsilon^{CD} + \epsilon^{AC}\epsilon^{DB} + \epsilon^{AD}\epsilon^{BC} = 0, \tag{A.1}$$

was man auch leicht explizit nachrechnen kann und eine sogenannte Schouten-Identität ist. Durch Multiplikation mit $\phi_A\psi_B\xi_C\eta_D$ ergibt sich Gleichung (2.10):

$$\langle\phi\psi\rangle\langle\xi\eta\rangle + \langle\phi\xi\rangle\langle\eta\psi\rangle + \langle\phi\eta\rangle\langle\psi\xi\rangle = 0. \tag{A.2}$$

Für analytische Umformungen der Helizitätsamplituden ist diese Identität sehr nützlich. In der Praxis erweist es sich als hilfreich, die Schouten-Identität auch in anderen Schreibweisen zu benutzen, die aus der ursprünglichen Form durch einfache Umformung hervorgehen:

$$\phi^A\psi^B - \phi^B\psi^A = \epsilon^{AB}\langle\phi\psi\rangle, \quad \phi_A\psi^B - \phi^B\psi_A = \delta_A^B\langle\phi\psi\rangle \tag{A.3}$$

$$\frac{\langle\phi\psi\rangle}{\langle\phi\xi\rangle\langle\xi\psi\rangle} = \frac{\langle\phi\eta\rangle}{\langle\phi\xi\rangle\langle\xi\eta\rangle} + \frac{\langle\eta\psi\rangle}{\langle\eta\xi\rangle\langle\xi\psi\rangle} \tag{A.4}$$

$$\frac{\langle p_a k p_b\rangle}{\langle p_a p_b\rangle} = \frac{\langle p_a k p_c\rangle}{\langle p_a p_c\rangle} + \frac{2p_a k\langle p_b p_c\rangle}{\langle p_a p_c\rangle\langle p_a p_b\rangle}, \tag{A.5}$$

wobei $p_a k$ für das Lorentz-Produkt steht und wieder die Abkürzung (2.38) benutzt wurde. Der Impuls k tritt oft als Summe verschiedener Impulse auf. Diese Formeln gelten natürlich auch für die komplex konjugierte Darstellung.

Literaturverzeichnis

[1] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, "An Introduction To Quantum Field Theory,"
M. Böhm, A. Denner and H. Joos, "Gauge Theories of the Strong and Electroweak Interaction".

[2] B. Badelek *et al.* [ECFA/DESY Photon Collider Working Group Collaboration], "TESLA Technical Design Report, Part VI, Chapter 1: Photon collider at TESLA," arXiv:hep-ex/0108012.
I. F. Ginzburg, G. L. Kotkin, V. G. Serbo and V. I. Telnov, "Colliding γ e And $\gamma\gamma$ Beams Based On The Single Pass Accelerators (Of Vlepp Type)," Nucl. Instrum. Meth. **205** (1983) 47.

[3] E. Yehudai, "Probing W γ couplings using $\gamma\gamma \to W^+W^-$," Phys. Rev. D **44** (1991) 3434.
I. Watanabe *et al.*, "$\gamma\gamma$ collider as an option of JLC," KEK-REPORT-97-17
T. Abe *et al.* [American Linear Collider Working Group Collaboration], "Linear collider physics resource book for Snowmass 2001," in *Proc. of the APS/DPF/DPB Summer Study on the Future of Particle Physics (Snowmass 2001)* ed. N. Graf, SLAC-R-570 *Resource book for Snowmass 2001, 30 Jun - 21 Jul 2001, Snowmass, Colorado*

[4] A. Denner, S. Dittmaier and R. Schuster, "Radiative corrections to gamma gamma $\to$ W+ W- in the electroweak standard model," Nucl. Phys. B **452** (1995) 80 [arXiv:hep-ph/9503442].
G. Jikia, "Electroweak $O(\alpha)$ corrections to W^+W^- pair production in polarized $\gamma\gamma$ collisions," Nucl. Phys. B **494** (1997) 19 [arXiv:hep-ph/9612380].

[5] A. Denner, S. Dittmaier and M. Roth, "Non-factorizable photonic corrections to $e^+e^- \to WW \to$ 4fermions," Nucl. Phys. B **519** (1998) 39 [arXiv:hep-ph/9710521].
K. Melnikov and O. I. Yakovlev, "Final state interaction in the production of heavy unstable particles," Nucl. Phys. B **471** (1996) 90 [arXiv:hep-ph/9501358].
W. Beenakker, A. P. Chapovsky and F. A. Berends, "Non-factorizable corrections to W pair production," Phys. Lett. B **411** (1997) 203 [arXiv:hep-

ph/9706339].
W. Beenakker, A. P. Chapovsky and F. A. Berends, "Non-factorizable corrections to W-pair production: Methods and analytic results," Nucl. Phys. B **508** (1997) 17 [arXiv:hep-ph/9707326].

[6] A. Aeppli, G. J. van Oldenborgh and D. Wyler, "Unstable particles in one loop calculations," Nucl. Phys. B **428** (1994) 126 [arXiv:hep-ph/9312212].

[7] A. Denner, S. Dittmaier, M. Roth and D. Wackeroth, "Electroweak radiative corrections to $e^+e^- \to WW \to 4$fermions in double-pole approximation: The RACOONWW approach," Nucl. Phys. B **587** (2000) 67 [arXiv:hep-ph/0006307].

[8] R. K. Ellis, W. J. Stirling and B. R. Webber, "QCD And Collider Physics," Cambridge Monogr. Part. Phys. Nucl. Phys. Cosmol. **8** (1996) 1.

[9] S. Dittmaier, "Weyl-van-der-Waerden formalism for helicity amplitudes of massive particles," Phys. Rev. D **59**, 016007 (1999) [arXiv:hep-ph/9805445].
P.A. Carruthers, *Spin and Isospin in Particle Physics* (Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1971).

[10] A. Denner, "Techniques For Calculation Of Electroweak Radiative Corrections At The One Loop Level And Results For W Physics At Lep-200," Fortsch. Phys. **41** (1993) 307.

[11] D. Y. Bardin *et al.*, "Event generators for WW physics," arXiv:hep-ph/9709270.

[12] T. Stelzer and W. F. Long, "Automatic generation of tree level helicity amplitudes," Comput. Phys. Commun. **81** (1994) 357 [arXiv:hep-ph/9401258].
H. Murayama, I. Watanabe and K. Hagiwara, "HELAS: HELicity amplitude subroutines for Feynman diagram evaluations," KEK-91-11

[13] A. Denner, S. Dittmaier, M. Roth and D. Wackeroth, "Predictions for all processes $e^+e^- \to 4$fermions $+ \gamma$," Nucl. Phys. B **560** (1999) 33 [arXiv:hep-ph/9904472].

[14] S. Dittmaier and M. Roth, "LUSIFER: A lucid approach to six fermion production," Nucl. Phys. B **642** (2002) 307 [arXiv:hep-ph/0206070].

[15] W. Beenakker *et al.*, "WW Cross-sections and Distributions," arXiv:hep-ph/9602351.

[16] E. N. Argyres *et al.*, "Stable calculations for unstable particles: Restoring gauge invariance," Phys. Lett. B **358** (1995) 339 [arXiv:hep-ph/9507216].
W. Beenakker *et al.*, "The fermion-loop scheme for finite-width effects

in e^+e^- annihilation into four fermions," Nucl. Phys. B **500** (1997) 255 [arXiv:hep-ph/9612260].

[17] F. A. Berends, R. Pittau and R. Kleiss, "All electroweak four fermion processes in electron - positron collisions," Nucl. Phys. B **424** (1994) 308 [arXiv:hep-ph/9404313].
F. A. Berends, P. H. Daverveldt and R. Kleiss, "Complete Lowest Order Calculations For Four Lepton Final States In Electron - Positron Collisions," Nucl. Phys. B **253** (1985) 441.
J. Hilgart, R. Kleiss and F. Le Diberder, "An Electroweak Monte Carlo for four fermion production," Comput. Phys. Commun. **75** (1993) 191.

[18] E. Byckling and K. Kajantie, *Particle Kinematics* (John Wiley & Sons, London, 1973), p. 158ff.

[19] M. Roth, "Precise Predictions For Four-Fermion Production In Electron Positron Annihilation," Dissertation, arXiv:hep-ph/0008033.

[20] R. Kleiss and R. Pittau, "Weight Optimization In Multichannel Monte Carlo," Comput. Phys. Commun. **83** (1994) 141 [arXiv:hep-ph/9405257].

[21] D. E. Groom *et al.* [Particle Data Group Collaboration], "Review Of Particle Physics," Eur. Phys. J. C **15** (2000) 1.

[22] W. Kilian, "WHIZARD 1.0: A generic Monte-Carlo integration and event generation package for multi-particle processes. Manual," LC-TOOL-2001-039

[23] E. Boos and T. Ohl, "Towards a complete calculation of $\gamma\gamma \to 4$f," arXiv:hep-ph/9711242.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich dem Betreuer meiner Diplomarbeit, PD Dr. Stefan Dittmaier, danken, der stets Zeit für mich hatte und mir weitergeholfen hat, wenn Fragen und Probleme auftauchten. Ein Dankeschön auch an Prof. Dr. Bartels für das Korreferat.

Bei meinen Kollegen und Freunden am DESY möchte ich mich für die vielen heiteren Momente bedanken. Insbesondere die Atmosphäre in unserem Büro hat mir sehr geholfen.

Nicht zuletzt möchte ich meinen Eltern danken, die mich während meines Studiums in jeder erdenklichen Weise unterstützt haben.

Erklärung gemäß Diplomprüfungsordnung

Hiermit versichere ich, die vorliegende Arbeit selbständig verfaßt und nur die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet zu haben.

Ich bin damit einverstanden, dass diese Arbeit veröffentlicht wird.

Axel Bredenstein
Hamburg, den 22. Januar 2003