# Wirkungs- und Lokalitätsprinzip für nichtkommutative skalare Feldtheorien

Jochen Zahn
II. Institut für Theoretische Physik
Universität Hamburg

Diplomarbeit

8. Dezember 2003

**Gutachter der Diplomarbeit:**
Prof. Dr. K. Fredenhagen
Prof. Dr. G. Mack

**Action and locality principle for noncommutative scalar field theories**

by Jochen Zahn

**Abstract**

We develop a general framework for the formulation of the action principle and the Noether theorem for classical noncommutative field theories. We give a concrete example of an algebra that fits into this framework. It describes a scalar field theory on noncommutative Minkowski space. We develop a notion of locality for this algebra and investigate the locality properties of localised interaction terms. This leads us to the definition of local functionals on the field algebra. We propose a scheme for the quantisation of these functionals.

**Zusammenfassung**

Wir entwickeln eine allgemeinen Rahmen, der es erlaubt, das Wirkungsprinzip und das Noether-Theorem für klassische nichtkommutative Feldtheorien zu formulieren. Als ein konkretes Beispiel betrachten wir eine Algebra, die sich in diesem Rahmen einfügt, und die eine skalare Feldtheorie auf dem nichtkommutativen Minkowski-Raum beschreibt. Für diese Algebra wird ein Lokalitätsbegriff entwickelt und untersucht, welche Wechselwirkungsterme in diesem Sinne lokal sind. Das führt zur Definition von lokalen Funktionalen auf der Feldalgebra. Es werden erste Schritte zur Quantisierung dieser Funktionale unternommen.

# Inhaltsverzeichnis


**1 Einführung** **1**

**2 Der nichtkommutative Minkowski-Raum** **5**
2.1 Die Algebren $\mathcal{E}$ und $\mathcal{E}_\sigma$ . . . . . 6
2.2 Die Zustände auf $\mathcal{E}_\sigma$ . . . . . 9
2.3 Die Weyl-Symbole und das Moyal-Produkt . . . . . 11

**3 Feldtheorie auf dem nichtkommutativen Minkowski-Raum** **15**
3.1 Die modifizierten Feynman-Regeln . . . . . 15
3.2 Der Hamiltonformalismus . . . . . 18
3.3 Der Yang-Feldman-Formalismus . . . . . 20
3.4 Nichtkommutative klassische Feldtheorie . . . . . 23
3.5 Phänomenologie . . . . . 26

**4 Wirkungsprinzip für nichtkommutative Feldtheorien** **27**
4.1 Herleitung der Bewegungsgleichungen für $\phi^4$-Theorie . . . . . 28
4.2 Abstrakte Formulierung des Wirkungsprinzips . . . . . 29
4.3 Das Noether-Theorem . . . . . 32
4.4 Die nichtkommutative Feldalgebra $\mathcal{M}$ . . . . . 34

**5 Das Lokalitätsprinzip** **37**
5.1 Mathematische Hilfsmittel . . . . . 37
5.2 Die Feldgleichung und das Cauchy-Problem . . . . . 39
5.3 Lokalität . . . . . 40
5.4 Lokale Wechselwirkungsterme . . . . . 43
5.5 Die lokalen Funktionale und ihre Peierls-Klammer . . . . . 48
5.6 Quantisierung . . . . . 53

**6 Zusammenfassung und Ausblick** **59**

**A Die Topologie der Feldalgebren** **61**
A.1 Lokal konvexe Räume . . . . . 61
A.2 Die Räume $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ und $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ . . . . . 63
A.3 Die Topologie von $\mathcal{M}$ . . . . . 64

**B Die normalgeordneten Symbole** **71**
B.1 Die Bargmann-Fock-Darstellung . . . . . 71
B.2 Die kohärenten Zustände . . . . . 73
B.3 Die normalgeordneten Symbole . . . . . 74
B.4 Anwendung auf die Feldtheorie . . . . . 76

# Kapitel 1

# Einführung

Obwohl nichtkommutative Feldtheorien erst in den letzten Jahren größere Popularität erlangt haben, ist die zugrunde liegende Idee schon recht alt. Bereits 1947 hat Snyder ein Modell vorgeschlagen, in dem die vier Koordinaten des Minkowski-Raums durch selbstadjungierte, nichtkommutierende Operatoren ersetzt werden [1]. Die von ihm angenommenen Vertauschungsrelationen führen, analog zur Drehimpuls-Quantisierung in der Quantenmechanik, zu einem diskreten Spektrum der räumlichen Koordinaten. Die zeitliche Koordinate hat ein kontinuierliches Spektrum. Es bleibt aber die komplette Lorentzsymmetrie erhalten. In einer darauf aufbauenden Arbeit [2] wurde die klassische Elektrodynamik auf dieser nichtkommutativen Raumzeit entwickelt.

Snyders Motivation war die Hoffnung, dass durch die so eingeführte kleinste Längeneinheit die in der Quantenfeldtheorie auftretenden Divergenzprobleme behoben werden könnten. Durch die kurze Zeit später entwickelte Renormierungstheorie verlor diese Motivation ihre Dringlichkeit, weshalb sein Modell keine große Popularität erreicht hat.

Vor einigen Jahren wurde aus einer anderen Motivation ein Modell einer nichtkommutativen Raumzeit vorgeschlagen [3]: Ein großes Hindernis bei der Vereinigung von Allgemeiner Relativitätstheorie und Quantentheorie besteht darin, dass die Raumzeit in beiden Theorien verschiedene Rollen spielt. Während sie in der Quantenfeldtheorie den Hintergrund darstellt, vor dem sich die Dynamik der Materiefelder abspielt, ist sie in der Allgemeinen Relativitätstheorie eng mit der Materie verwoben, die Geometrie der Raumzeit und die Materie wechselwirken miteinander. Das manifestiert sich zum Beispiel im folgenden Paradoxon: Nach dem Formalismus der Quantenfeldtheorie lassen sich Punkte der Raumzeit (Ereignisse) beliebig genau auflösen. Dazu muss nach der Heisenbergschen Unschärferelation in dem betreffenden Raumzeitgebiet Energie der Größenordnung $\epsilon \sim c\hbar a^{-1}$ konzentriert werden, wobei $a$ der minimale Durchmesser des Raumzeitgebietes ist. Die Allgemeine Relativitätstheorie setzt der Auflösung hier aber eine Schranke. Denn wenn die Energiedichte im betreffenden Raumzeitgebiet zu groß wird, entsteht ein Horizont, zum Beispiel ein schwarzes Loch, und es können keine Informationen aus dem Gebiet nach außen gelangen. Das Phänomen tritt auf, wenn $a$ kleiner als die Planck-Länge $\lambda_P \simeq 1,6 \times 10^{-35}\text{m}$ wird. Die Quantenfeldtheorie beinhaltet also in gewisser Weise zu viele Möglichkeiten, das heißt ihr Formalismus erlaubt Messungen, die im Experiment prinzipiell nicht möglich sind.

In [3] wurden die minimal möglichen Unschärfen folgendermaßen abgeschätzt:

$$\Delta x^0 \sum_i \Delta x^i \geq \lambda_P^2 \tag{1.1}$$

$$\sum_{i<j} \Delta x^i \Delta x^j \geq \lambda_P^2 \tag{1.2}$$

Um diese Unschärferelationen zu implementieren, wurde vorgeschlagen, die Koordinatenfunktionen $x^\mu$ durch nichtkommutierende, selbstadjungierte Operatoren $q^\mu$ zu ersetzen, deren Vertauschungsrelationen

$$[q^\mu, q^\nu] = iQ^{\mu\nu} \tag{1.3}$$

die Raumzeit-Unschärferelationen implizieren, wie ja auch die kanonischen Vertauschungsrelationen in der Quantenmechanik zur Heisenbergschen Unschärferelation führen. Die $Q^{\mu\nu}$ sind selbstadjungierte Operatoren, die sich unter Lorentztransformationen wie ein Tensor zweiter Stufe verhalten. Somit haben beide Seiten von Gleichung (1.3) dasselbe Transformationsverhalten, das Modell respektiert also die Lorentz-Symmetrie. Auch bei der Formulierung dieses Modells wurde die Hoffnung geäußert, dass die Unschärfe oder Verschmierung der Raumzeit auf der Skala der Planck-Länge den singulären Charakter der Wechselwirkungen in der Quantenfeldtheorie verwischen könnte.

Eine weitere Motivation für die Beschäftigung mit Quantenfeldtheorien auf nichtkommutativen Raumzeiten kommt aus der Stringtheorie. In manchen Modellen beschreibt man dort die Raumzeit als eine vierdimensionale Untermannigfaltigkeit, eine sogenannte D-Brane, eines höherdimensonalen Raumes. Die fundamentalen Objekte der Theorie, die Strings, sind Fäden, deren Dynamik sich im höherdimensionalen Raum abspielt, deren Enden aber auf der D-Brane liegen. Bei der Quantisierung des Systems in einem Hintergrundmagnetfeld werden die Raumzeitkoordinaten der Endpunkte des Strings nichtkommutativ [4]:

$$[q^\mu, q^\nu] = i\sigma^{\mu\nu}. \tag{1.4}$$

Das erinnert an das Auftreten nichtkommutativer Koordinaten bei der Quantisierung der Dynamik im unterstem Landau-Niveau eines zweidimensionalen Elektronensystems bei starkem senkrechten Magnetfeld, zum Beispiel beim Quanten-Hall-Effekt [5]. In (1.4) ist $\sigma$ eine feste, antisymmetrische Matrix, deshalb ist hier die Lorentzinvarianz gebrochen. Im Limes niedriger Energien spielt nur noch die Dynamik der Endpunkte des Strings eine Rolle, so dass man effektiv eine vierdimensionale Raumzeit mit nichtkommutierenden Koordinaten erhält [6].

Der Zusammenhang mit der Stringtheorie hat eine intensive Beschäftigung mit nichtkommutativen Feldtheorien ausgelöst. Dabei wurde die Hoffnung auf eine Glättung der UV-Divergenzen nicht erfüllt. Im Gegenteil, zu den üblichen Divergenzen [7] trat eine neue Art von Divergenzen hinzu, die sogenannten gemischten UV/IR-Divergenzen [8], für deren Renormierung es noch keine viel versprechenden Ansätze gibt. Sie stellen das Haupthindernis für die Formulierung einer befriedigenden nichtkommutativen Quantenfeldtheorie dar. Es treten jedoch auch einige andere, in der üblichen Quantenfeldtheorie unbekannte, Probleme auf. So hatte man in Theorien mit Raum/Zeit-Nichtkommutativität ($\sigma^{0i} \neq 0$), die für die Unschärferelation (1.1) nötig ist, mit nicht unitären $S$-Matrizen zu kämpfen [9]. Dieses Problem wurde

in [10] gelöst: Es stellte sich heraus, dass die bis dahin verwendeten Feynman-Regeln die Ursache waren, da Hamilton- und Yang-Feldman-Formalismus zu unitären $S$-Matrizen führen. In der üblichen Quantenfeldtheorie sind diese Zugänge äquivalent. Ein anderes Problem ist zum Beispiel, dass in wechselwirkenden nichtkommutativen Theorien die Divergenz des Energie-Impuls-Tensors im Allgemeinen nicht verschwindet [11].

In dieser Arbeit wollen wir uns mit klassischer nichtkommutativer Feldtheorie beschäftigen. Auf den ersten Blick scheint das keine besonders sinnvolle Beschäftigung zu sein, da man davon ausgeht, dass nichtkommutative Effekte erst in der Nähe der Planck-Skala auftreten, wo man nicht erwarten kann, dass die klassische Feldtheorie eine sinnvolle Beschreibung liefert. Andererseits deuten die diversen Probleme, mit denen man in der nichtkommutativen Quantenfeldtheorie zu kämpfen hat, darauf hin, dass diese Theorien noch nicht wirklich verstanden sind. Man kann also hoffen, über das Studium der klassischen Theorie ein besseres Verständnis der Quantentheorie zu erreichen. Ganz konkret würde man die UV/IR-Divergenzen gerne, wie bei IR-divergenten Quantenfeldtheorien üblich, durch eine Beschränkung der Wechselwirkung auf ein endliches Gebiet der Raumzeit regularisieren, um dann einen adiabatischen Limes durchzuführen. Es ist aber unklar, was in einer nichtkommutativen Raumzeit überhaupt ein Gebiet ist. Hier könnte die Formulierung einer klassischen Feldtheorie samt einem Wirkungsprinzip hilfreich sein. Denn in der kommutativen Feldtheorie beinhaltet bereits das Wirkungsprinzip das Konzept des raumzeitlichen Beschränkens, so dass man so Hinweise auf das nichtkommutative Analogon finden könnte.

Darüber hinaus kann man nichtkommutative Feldtheorien als Verallgemeinerung der üblichen kommutativen Feldtheorien ansehen. In diesem Sinne ist es interessant zu sehen, wie der allgemeine Rahmen aussieht, in dem kommutative Theorien einen Spezialfall darstellen. So könnte das Studium der nichtkommutativen klassischen Feldtheorie zu einem tieferen Verständnis der kommutativen Theorie beitragen.

Der Einfachheit halber beschränken wir uns in dieser Arbeit auf die skalare Feldtheorie. Auf die interessanten Effekte, die in nichtkommutativen Eichtheorien auftreten, wird daher nicht eingangen.

Die Arbeit ist wie folgt gegliedert:

In Kapitel 2 wird eine Einführung in die mathematische Beschreibung nichtkommutativer Raumzeiten gegeben. Der Schwerpunkt liegt dabei auf dem in [3] eingeführten Modell des nichtkommutativen Minkowski-Raumes. Auf mathematische Details wird nur in dem Maße eingegangen, wie es für das Verständnis der Arbeit nötig ist.

Kapitel 3 dient der Darstellung der Feldtheorie auf dem nichtkommutativen Minkowski-Raum. Insbesondere werden die drei Formalismen zur störungstheoretischen Behandlung der nichtkommutativen Quantenfeldtheorie vorgestellt. Auch auf die bereits existierenden Ansätze zur Formulierung nichtkommutativer klassischer Feldtheorien wird eingegangen.

In Kapitel 4 wird die algebraische Struktur des Wirkungsprinzips in der klassischen kommutativen Feldtheorie untersucht und so verallgemeinert, dass sie auch auf nichtkommutative Feldtheorien angewendet werden kann. Auch das Noether-Theorem wird in diesem Rahmen formuliert. Es stellt sich heraus, dass die Algebra der Felder bestimmte Anforderungen erfüllen muss, damit sich ein Wirkungsprinzip formulieren und Bewegungsgleichungen daraus ableiten lassen. Wir geben auch explizit eine nichtkommutative Algebra $\mathcal{M}$ an, die diese Anforderungen erfüllt, und die eine skalare Feldtheorie auf dem nichtkommutativen Minkowski-Raum

beschreibt.

In Kapitel 5 beschäftigen wir uns zunächst mit der Lösung der Bewegungsgleichung in $\mathcal{M}$, und zwar sowohl mit der Formulierung und Lösung des Cauchy-Problems für das freie Feld, als auch mit der pertubativen Berechnung des wechselwirkenden Feldes mit dem Yang-Feldman-Formalismus. Wir definieren einen Lokalitätsbegriff für die Felder aus $\mathcal{M}$ und untersuchen, wann Störterme ein in diesem Sinne kausales Ausbreitungsverhalten haben. Dies führt zur Definition von lokalen Funktionalen. Es werden dann einige erste Schritte zur Untersuchung ihrer Eigenschaften, auch im Hinblick auf die Quantisierung, unternommen. Insbesondere berechnen wir mit Peierls Methode ihre Poisson-Klammer.

In Kapitel 6 werden die Ergebnisse der Arbeit zusammengefasst und ein Ausblick gegeben.

Eine wichtige Rolle spielen in dieser Arbeit Algebren mit lokal konvexer Topologie. In Anhang A werden die wichtigsten Eigenschaften lokal konvexer Räume zusammengefasst und die topologischen Eigenschaften der Algebra $\mathcal{M}$ untersucht.

Ein anderes wichtiges mathematisches Hilfsmittel in dieser Arbeit sind die so genannten kohärenten Zustände und die mit ihrer Hilfe definierten normalgeordneten Symbole. Sie werden in Anhang B eingeführt.

# Kapitel 2

# Der nichtkommutative Minkowski-Raum

In diesem Kapitel soll die mathematische Beschreibung nichtkommutativer Raumzeiten, insbesondere des nichtkommutativen Minkowski-Raumes, besprochen werden.

Betrachten wir zunächst den kommutativen Fall, das heißt wir beschreiben die Raumzeit durch eine Mannigfaltigkeit $M$. Die Menge $C_0(M)$ der stetigen, im Unendlichen verschwindenden, komplexwertigen Funktionen auf $M$ bildet mit der punktweisen Multiplikation und der komplexen Konjugation eine kommutative $*$-Algebra. Versehen mit der Norm $\|f\| := \sup_{x\in M} |f(x)|$ erhalten wir eine kommutative $C^*$-Algebra. Umgekehrt besagt der Satz von Gelfand ([12], Theorem 2.1.11A), dass man jeder kommutativen $C^*$-Algebra $\mathcal{A}$ einen lokal kompakten Hausdorff-Raum $X_\mathcal{A}$ zuordnen kann, so dass $\mathcal{A}$ isomorph zu $C_0(X_\mathcal{A})$ ist. In Analogie dazu beschreiben wir eine nichtkommutative Raumzeit durch eine nichtkommutative $C^*$-Algebra, deren Elemente man sich als die "Funktionen" auf der Raumzeit vorstellen kann.

Lokalisierungen von Experimenten lassen sich im kommutativen Fall durch ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf der Mannigfaltigkeit $M$ beschreiben. Der für lokal kompakte Räume angepasste Maßbegriff ist der des Borelmaßes. Solch ein Maß $\mu$ induziert durch $f \mapsto \int f \mathrm{d}\mu$ einen Zustand, das heißt ein positives, normiertes Funktional, auf $C_0(M)$. Umgekehrt kann man über den Darstellungssatz von Riesz ([13], Theorem 56.D) jedem Zustand auf $C_0(M)$ ein Borel-Maß auf $M$ zuordnen. In Analogie zum kommutativen Fall beschreiben wir somit Lokalisierungen auf nichtkommutativen Raumzeiten durch Zustände auf der entsprechenden $C^*$-Algebra.

Im ersten Abschnitt wird die nichtkommutative $C^*$-Algebra $\mathcal{E}$ vorgestellt, auf der die in der Einleitung genannten Unschärferelationen erfüllt sind. $\mathcal{E}_\sigma$, eine Quotientenalgebra von $\mathcal{E}$, beschreibt die durch die Stringtheorie motivierte nichtkommutative Raumzeit. Sie ist auch deshalb von Interesse, weil sich in ihr die Dynamik der Felder abspielt, wenn man gravitative Effekte außer Acht lässt. Eine daran angelehnte Algebra wird deshalb in den Kapiteln 4 und 5 zur Beschreibung der nichtkommutativen Feldtheorie verwendet. In Abschnitt 2.2 untersuchen wir die Zustände auf $\mathcal{E}_\sigma$ und in Abschnitt 2.3 führen wir die Weyl-Symbole ein, eine in der nichtkommutativen Feldtheorie häufig verwendete Darstellungsform für die Elemente von $\mathcal{E}_\sigma$.

## 2.1 Die Algebren $\mathcal{E}$ und $\mathcal{E}_\sigma$

In diesem Abschnitt soll die von den Operatoren $q^\mu, Q^{\mu\nu}$ aus (1.3) erzeugte $C^*$-Algebra $\mathcal{E}$ eingeführt werden. Die Darstellung ist dabei stark vereinfacht und zielt vor allem auf die im weiteren Verlauf der Arbeit benötigten Strukturen. Für eine genaue Darstellung sei auf [14] verwiesen.

Wir erinnern daran, dass die $Q^{\mu\nu}$ selbstadjungierte Operatoren sein sollen, deren Gesamtheit sich unter Lorentztransformationen wie ein Tensor zweiter Stufe transformiert. Offensichtlich ist der Tensor antisymmetrisch: $Q^{\mu\nu} = -Q^{\nu\mu}$.

In [3] wurden die sogenannten *Quantenbedingungen*

$$Q_{\mu\nu}Q^{\mu\nu} = 0 \tag{2.1}$$

$$\left(\frac{1}{2}\left(*Q\right)_{\mu\nu} Q^{\mu\nu}\right)^2 = \left(\frac{1}{4}\epsilon_{\mu\nu\rho\lambda}Q^{\rho\lambda}Q^{\mu\nu}\right)^2 = 1 \tag{2.2}$$

$$[q^\mu, Q^{\nu\lambda}] = 0. \tag{2.3}$$

an die $q^\mu, Q^{\mu\nu}$ gestellt. Mit Einheiten versehen steht auf der rechten Seite von (2.2) $\lambda_P^8$. Diese Bedingungen implizieren die Unschärferelationen (1.1) und (1.2) ([14], Theorem 3.1).

Eine wichtige Rolle spielt das gemeinsame Spektrum der $Q^{\mu\nu}$. Um es zu bestimmen, zerlegt man $Q^{\mu\nu}$ in den "elektrischen" und den "magnetischen" Anteil

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & -e^1 & -e^2 & -e^3 \\ e^1 & 0 & m^3 & -m^2 \\ e^2 & -m^3 & 0 & m^1 \\ e^3 & m^2 & -m^1 & 0 \end{pmatrix} = (\mathbf{e}, \mathbf{m}).$$

Aus den Bedingungen (2.1) und (2.2) erhält man somit

$$\mathbf{e}^2 - \mathbf{m}^2 = 0; \qquad \mathbf{e} \cdot \mathbf{m} = \pm 1.$$

Für das gemeinsame Spektrum $\Sigma$ ergibt sich also $\Sigma = \Sigma_+ \cup \Sigma_-$ mit

$$\Sigma_\pm = \left\{\sigma = (\tilde{\mathbf{e}}, \tilde{\mathbf{m}}) | \tilde{\mathbf{e}}, \tilde{\mathbf{m}} \in \mathbb{R}^3, \tilde{\mathbf{e}}^2 = \tilde{\mathbf{m}}^2, \tilde{\mathbf{e}} \cdot \tilde{\mathbf{m}} = \pm 1\right\}.$$

$\Sigma_+$ und $\Sigma_-$ sind zusammenhängende Mannigfaltigkeiten, auf denen die eigentliche orthochrone Lorentzgruppe durch $\sigma^{\mu\nu} \mapsto \Lambda^\mu_\lambda \Lambda^\nu_\rho \sigma^{\lambda\rho}$ transitiv wirkt. Man kann zeigen [14], dass $\Sigma_+$ und $\Sigma_-$ jeweils homöomorph zu $TS^2$, dem Tangentialbündel der 2-Sphäre, sind. Eine besondere Rolle spielen die $\sigma \in \Sigma_\pm$, für die $|\tilde{\mathbf{e}}| = 1$ gilt. Sie bilden eine Untermannigfaltigkeit $\Sigma_\pm^{(1)} \subset \Sigma_\pm$, die der Untermannigfaltigkeit $S^2 \subset TS^2$ entspricht. Auf ihr sind die Zustände $\omega$ mit minimaler Unschärfe lokalisiert, denn es gilt ([14], Proposition 3.4)

$$\sum_\mu (\Delta_\omega q^\mu)^2 \geq \sqrt{2} \int \mathrm{d}\mu_\omega(\sigma)\ \sqrt{1 + |\tilde{\mathbf{e}}|^2}.$$

Hier bezeichnet $\mu_\omega$ das Spektralmaß des Zustands $\omega$.

Wir wollen nun Funktionen der $q^\mu$, anschaulich ausgedrückt also Funktionen auf dem nichtkommutativen Minkowski-Raum, konstruieren. Hier stellt sich das Problem, dass die $q^\mu$, da sie die Rolle der Koordinatenfuntionen übernehmen sollen, unbeschränkte Operatoren sind, so dass man die Vertauschungsrelation (1.3) nicht diskutieren kann, ohne sich Gedanken über Definitionsbereiche zu machen (siehe zum Beispiel [15], Abschnitt VIII.5). Um diese Schwierigkeiten zu umgehen, fordern wir, dass sie sich in die stärkere Weyl-Form

$$e^{ik_\mu q^\mu} e^{ik'_\nu q^\nu} = e^{-\frac{i}{2}k_\mu Q^{\mu\nu} k'_\nu} e^{i(k+k')_\mu q^\mu} \tag{2.4}$$

integrieren lässt. Einen Faktor der Form $e^{-\frac{i}{2}kQk'}$ nennen wir im Folgenden einen *Twisting-Faktor*. Die $e^{ikq}$ sind unitäre Operatoren, also von Norm Eins, so dass wir für $f \in \mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}^4))$, (hier bezeichnet $\mathcal{F}$ die Fouriertransformation)

$$f(q) := (2\pi)^{-2} \int \mathrm{d}^4k \ \check{f}(k) e^{ik_\mu q^\mu} \tag{2.5}$$

definieren können. Hier ist $\check{f}(k) = (2\pi)^{-2} \int \mathrm{d}^4x \ f(x) e^{-ikx}$ die inverse Fouriertransformierte von $f$. Aus (2.4) folgt dann für das Produkt zweier Funktionen

$$\begin{aligned} f(q)g(q) &= (2\pi)^{-4} \int \mathrm{d}^4k \mathrm{d}^4k' \ \check{f}(k)\check{g}(k') e^{ik_\mu q^\mu} e^{ik'_\nu q^\nu} \\ &= (2\pi)^{-2} \int \mathrm{d}^4k \ \left( (2\pi)^{-2} \int \mathrm{d}^4k' \ \check{f}(k-k')\check{g}(k') e^{-\frac{i}{2}k_\mu Q^{\mu\nu} k'_\nu} \right) e^{ik_\mu q^\mu} \\ &= \widehat{\left(\check{f} \times \check{g}\right)}(q). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Hier bezeichnet $\hat{f}$ die Fouriertransformierte von $f$ und $\times$ die von $Q$ abhängige *getwistete Faltung*

$$(\check{f} \times \check{g})(k) = (2\pi)^{-2} \int \mathrm{d}^4k' \ \check{f}(k-k')\check{g}(k') e^{-\frac{i}{2}k_\mu Q^{\mu\nu} k'_\nu}.$$

Nun sollen Funktionen definiert werden, die auch von $Q$ abhängig sind. Hier können wir etwas sorgloser vorgehen, da nach der Quantenbedingung (2.3) die $Q^{\mu\nu}$ mit den $q^\mu$ und somit auch untereinander kommutieren. Nach dem Spektralsatz lassen sich Funktionen von selbstadjungierten Operatoren aus Funktionen auf ihrem Spektrum konstruieren. Sei also $f$ eine stetige Abbildung $\Sigma \to \mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}^4))$. Dann definieren wir

$$f(Q,q) := (2\pi)^{-2} \int \mathrm{d}^4k \ \check{f}(Q,k) e^{ik_\mu q^\mu}. \tag{2.7}$$

Hier bezieht sich die inverse Fouriertransformation auf den $\mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}^4))$-Teil. Die Multiplikation zweier solcher Funktionen ist dann punktweise in $\Sigma$, das heißt es gilt

$$f(Q,q)g(Q,q) = \widehat{\left(\check{f} \times \check{g}\right)}(Q,q) \tag{2.8}$$

mit

$$(f \times g)(Q,k) = (2\pi)^{-2} \int \mathrm{d}^4k' \ f(Q,k-k')g(Q,k') e^{-\frac{i}{2}k_\mu Q^{\mu\nu} k'_\nu}.$$

Die Funktionen der Form (2.7), wobei $f$ im Unendlichen (von $\Sigma$) verschwindet, bilden mit der Multipliktion (2.8) und der Involution

$$f(Q,q)^* = (2\pi)^{-2} \int \mathrm{d}^4k \; \overline{\check{f}(Q,k)} e^{-ik_\mu q^\mu} = (2\pi)^{-2} \int \mathrm{d}^4k \; \overline{\check{f}(Q,-k)} e^{ik_\mu q^\mu}$$

die $*$-Algebra $\mathcal{E}_0$. Sie besitzt einen $C^*$-Abschluss $\mathcal{E}$ ([14], Theorem 4.1), der die nichtkommutative Minkowski-Raumzeit beschreibt. Sie ist das Analogon der $C^*$-Algebra $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^4)$ zur Beschreibung der kommutativen Minkowski-Raumzeit. Wegen der in $\Sigma$ punktweisen Multiplikation bildet die Menge $\mathcal{I}_\sigma := \{f \in \mathcal{E} | f(\sigma) = 0\}$ ein abgeschlossenes, beidseitiges $*$-Ideal. Nach ([12], Proposition 2.2.19.) ist dann die Quotientenalgebra $\mathcal{E}_\sigma := \mathcal{E}/\mathcal{I}_\sigma$ wiederum eine $C^*$-Algebra. Offenbar ist $\mathcal{E}_\sigma$ die $C^*$-Algebra, die die aus der Stringtheorie motivierten Vertauschungsrelationen (1.4) implementiert. Hier ist allerdings zu beachten, dass dort $\sigma$ eine beliebige antisymmetrische Matrix sein kann, während wir hier $\sigma \in \Sigma$ fordern.

Wir wollen nun für eine konkrete Wahl von $\sigma \in \Sigma_+^{(1)}$ eine irreduzible Darstellung von $\mathcal{E}_\sigma$ angeben. Wir wählen $\sigma = (\tilde{\mathbf{e}}, \tilde{\mathbf{m}})$ mit $\tilde{\mathbf{e}} = \tilde{\mathbf{m}} = (0,1,0)$, das heißt

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dies ist offenbar die symplektische Matrix des vierdimensionalen Phasenraums, wir können die $q^\mu$ also durch die üblichen quantenmechanischen Orts- und Impulsoperatoren auf $\mathcal{H}_\sigma := L^2(\mathbb{R}^2)$ darstellen:

$$q^0 = P_1; \quad q^1 = P_2; \quad q^2 = Q_1; \quad q^3 = Q_2. \tag{2.9}$$

Man erhält so eine treue, irreduzible Darstellung $\mathcal{E}_\sigma \to \mathcal{K}(\mathcal{H}_\sigma)$ ([14], Theorem 4.1). Hier bezeichnet $\mathcal{K}(\mathcal{H}_\sigma)$ die $C^*$-Algebra der kompakten Operatoren auf $\mathcal{H}_\sigma$.

*Bemerkung* 2.1. Es sei hier auf eine Doppelrolle der $e^{ikq}$ hingewiesen. Zum einen spielen sie in der Fourierentwicklung (2.5) die Rolle der ebenen Wellen. Zum anderen gilt wegen (1.3)

$$[q^\mu, e^{ik_\nu q^\nu}] = -k_\lambda Q^{\mu\lambda} e^{ik_\nu q^\nu}$$

Man sieht also, dass $e^{ikq}$ der Operator der raumzeitlichen Verschiebung um $-Qk$ ist. Wir können also als Verschiebungsoperator

$$D(Q,x) := e^{iQ^{-1}_{\mu\nu} x^\mu q^\nu} = e^{ixQ^{-1}q}$$

definieren. Hier ist $Q^{-1}$ so definiert, dass $Q^{-1}_{\mu\nu} Q^{\nu\lambda} = Q^{\lambda\nu} Q^{-1}_{\nu\mu} = \delta^\lambda_\mu$ gilt. Dann gilt

$$D(Q,x)^* q^\mu D(Q,x) = q^\mu + D(Q,x)^* \left[q^\mu, e^{ixQ^{-1}q}\right] = q^\mu - Q^{\mu\nu} x^\lambda Q^{-1}_{\lambda\nu} = q^\mu + x^\mu \tag{2.10}$$

wobei die Antisymmetrie von $Q$ benutzt wurde. Wenn wir nur in $\mathcal{E}_\sigma$ arbeiten, so setzen wir

$$D(x) := D(\sigma, x). \tag{2.11}$$

An der Doppelrolle der $e^{ikq}$ sieht man, dass großen Impulsen Verschiebungen über große Distanzen entsprechen, es besteht also ein tief liegender Zusammenhang zwischen dem UV- (grosse Impulse) und dem IR- (grosse Distanzen) Regime.

Für stetige Funktionen $f : \Sigma \to \mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}^4))$ definiert man die Wirkung der Poincaré-Gruppe durch

$$\left(\tau_{(a,\Lambda)} f\right)(\sigma, x) := f(\Lambda^{-1}\sigma\Lambda^{T^{-1}}, \Lambda^{-1}(x-a)).$$

Analog wirkt die Poincaré-Gruppe auf $\mathcal{E}$ durch

$$\left(\tau_{(a,\Lambda)} f\right)(Q, q) := f(\Lambda^{-1}Q\Lambda^{T^{-1}}, \Lambda^{-1}(q-a\mathbb{1})).$$

Dementsprechend definiert man die Ableitungen durch

$$\begin{aligned}\partial_\mu f(Q,q) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|_{t=0}\left(\tau_{(-te^\mu,\mathbb{1})} f(Q,q)\right) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|_{t=0}\left(D(Q,te^\mu)^* f(Q,q) D(Q,te^\mu)\right) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|_{t=0} f(Q, q+te^\mu).\end{aligned} \tag{2.12}$$

Man rechnet leicht nach, dass die Definition konsistent ist in dem Sinne, dass $\partial_\mu f(Q,q) = (\partial_\mu f)(Q,q)$ gilt. Hier ist zu beachten, dass die Ableitung eines Elementes von $\mathcal{E}$ im Allgemeinen nicht wieder ein Element von $\mathcal{E}$ ist.

## 2.2 Die Zustände auf $\mathcal{E}_\sigma$

Wie in der Einleitung zu diesem Kapitel dargestellt, beschreiben wir die Lokalisation von Experimenten durch Zustände auf $\mathcal{E}$. Wir wollen uns im Folgenden auf Zustände beschränken, die ihren Träger in $\mathcal{E}_\sigma$ haben, die also durch

$$\omega(f) = \omega_\sigma(f(\sigma, \cdot))$$

gegeben sind. Hier ist $\omega_\sigma$ ein Zustand auf $\mathcal{E}_\sigma$. Das ist für unsere Betrachtung deshalb keine große Einschränkung, weil wir uns vor allem für die Dynamik der Felder auf der nichtkommutativen Raumzeit interessieren, die sich, solange man gravitative Effekte vernachlässigt, nicht in $\Sigma$ abspielt (vergleiche Kapitel 3). Wir betrachten also effektiv nur die Quotientenalgebra $\mathcal{E}_\sigma$, können also in allen Formeln $Q$ durch $\sigma$ ersetzen. Dadurch wird natürlich die Lorentz-Invarianz gebrochen.

Auf einem dichten Teilraum von $\mathcal{E}_\sigma$ kann man das Analogon des Integrals über die gesamte Raumzeit und über den räumlichen Teil bei festgehaltener Zeit definieren. Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^4) \cap \mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}^4))$. Dann setze

$$\int \mathrm{d}^4q\ f(q) = \int \mathrm{d}^4x\ f(x) = (2\pi)^2 \check{f}(0) = \mathrm{Tr} f(q), \tag{2.13}$$

$$\int_{q^0=t} \mathrm{d}^3q\ f(q) = \int_{x^0=t} \mathrm{d}^3x\ f(x) = (2\pi)^1 \int \mathrm{d}k_0\ \check{f}(k_0, \mathbf{0}) e^{ik_0 t}. \tag{2.14}$$

Dies sind positive Abbildungen, die konsistent in dem Sinne sind, dass die $t$-Integration über (2.14) gerade (2.13) ergibt [14].

Eine besondere Klasse von Zuständen sind die reinen Zustände, das sind die Zustände, die sich nicht durch konvexe Kombination anderer Zustände darstellen lassen. Für die $C^*$-Algebra $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^4)$, die die kommutative Minkowski-Raumzeit beschreibt, sind dies die Funktionale

$$f \mapsto \delta_x(f) = \int \mathrm{d}^4y \; \delta_x(y) f(y) = f(x).$$

Man kann also jedem Raumzeitpunkt einen reinen Zustand zuordnen. Diese haben verschwindende Unschärfe. Darüber hinaus sind für $x \neq y$ die Zustände $\delta_x$ und $\delta_y$ disjunkt, das heißt die Träger der zugehörigen Maße auf $\mathbb{R}^4$ sind disjunkt. In diesem Sinne kann man im kommutativen Fall von verschiedenen Raumzeitpunkten sprechen.

Wir wollen nun sehen, welches die reinen Zustände mit optimaler Lokalisierung auf $\mathcal{E}_\sigma$ sind. In der durch (2.9) gegebenen treuen, irreduziblen Darstellung ergibt sich für die Summe der quadratischen Varianzen der Koordinaten

$$\sum_\mu (\Delta x^\mu)^2 = (\Delta P_1)^2 + (\Delta P_2)^2 + (\Delta Q_1)^2 + (\Delta Q_2)^2.$$

Aus der Quantenmechanik ist bekannt, dass das Minimum dieser Grösse 2 ist, und dass dieses Minimum erreicht wird für den Grundzustand $|0\rangle$ des harmonischen Oszillators in zwei Dimensionen. Bei ihm sind alle Koordinatenunschärfen gleich,

$$\Delta x^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \forall \mu,$$

und es gilt

$$\langle 0|x^\mu|0\rangle = 0 \qquad \forall \mu,$$

er ist also um den Nullpunkt lokalisiert. Mit den Verschiebungsoperatoren können wir ihn aber an einen anderen Raumzeitpunkt bringen:

$$|x) := D(x)|0\rangle.$$

Wegen (2.10) gilt offensichtlich

$$(x|\, q^\mu \,|x) = x^\mu \qquad \forall \mu$$

und die Unschärfen bleiben erhalten:

$$\begin{aligned}(x|\, (q^\mu)^2 \,|x) - (x|\, q^\mu \,|x)^2 &= \langle 0|D(x)^*[(q^\mu)^2, D(x)]|0\rangle + \langle 0|(q^\mu)^2|0\rangle - (x^\mu)^2 \\ &= x^\mu \,(x|\, q^\mu \,|x) + x^\mu \langle 0|q^\mu|0\rangle + \langle 0|(q^\mu)^2|0\rangle - (x^\mu)^2 \\ &= \langle 0|(q^\mu)^2|0\rangle.\end{aligned}$$

Wir können also jedem Raumzeitpunkt einen um ihn lokalisierten Zustand

$$\omega_x : f(q) \mapsto (x|\, f(q) \,|x) \tag{2.15}$$

mit minimaler Unschärfe zuordnen. Nach ([16], Korollar 10.2.5.) ist für eine irreduzible Darstellung $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ einer $C^*$-Algebra $\mathcal{A}$ und einen beliebigen Einheitsvektor $x \in \mathcal{H}$ der

Zustand $A \mapsto \langle x|\pi(A)|x\rangle$ auf $\mathcal{A}$ rein. Somit handelt es sich bei den Zuständen (2.15) um reine Zustände.

Auch für Zustände auf $C^*$-Algebren ist der Begriff "disjunkt" definiert: Man nennt $\omega_1$ und $\omega_2$ disjunkt, wenn die zugehörigen GNS-Darstellungen disjunkt sind, das heißt wenn sie keine äquivalenten Unterdarstellungen besitzen. Auf einer kommutativen $C^*$-Algebra $\mathcal{A}$ sind zwei Zustände genau dann disjunkt, wenn die (nach dem Darstellungssatz von Riesz) entsprechenden Borel-Maße auf $X_{\mathcal{A}}$ disjunkt sind ([12], Abschnitt 4.2.2). Der Begriff der Disjunktheit von Zuständen ist also eine Verallgemeinerung des Begriffs der Disjunktheit von Borel-Maßen. Aus der Disjunktheit von $\omega_1$ und $\omega_2$ folgt unter anderem, dass der Normabstand maximal ist, das heißt $\|\omega_1 - \omega_2\| = 2$ ([16], Korollar 10.3.6). Nun gilt ([16], 10.5.48):

$$\|\omega_x - \omega_y\| = 2\sqrt{1 - |(x|y)|}.$$

In Anhang B wird das Skalarprodukt $(x|y)$ berechnet (B.18): Es gibt keine $x, y$ so dass es verschwindet. Daraus folgt, dass die Zustände $\omega_x$ und $\omega_y$ nicht disjunkt sind. Insofern kann man, anders als im kommutativen Fall, nicht von "Punkten" der nichtkommutativen Raumzeit sprechen. Somit ist auch nicht klar, inwiefern man das Konzept der Lokalität, das in der üblichen Feldtheorie eine wichtige Rolle spielt, auf nichtkommutative Raumzeiten übertragen kann.

Man nennt die Zustände $|x)$ auch *kohärente Zustände*. Wir werden in Kapitel 5 häufig Gebrauch von ihnen machen. In Anhang B werden wir ihre Eigenschaften genauer untersucht.

## 2.3 Die Weyl-Symbole und das Moyal-Produkt

Im Prinzip kennen wir die Weyl-Symbole bereits. Sei $f(q)$ durch (2.5) gegeben. Dann ist $f$ das Weyl-Symbol von $f(q)$. Um auch anderen Elementen von $\mathcal{E}_\sigma \cong \mathcal{K}(\mathcal{H}_\sigma)$ eine Funktion auf dem $\mathbb{R}^4$ zuzuordnen, kehren wir die Abbildung (2.5) um. Wir definieren für Spurklasse-Operatoren $f \in \mathcal{K}(\mathcal{H}_\sigma)$:

$$\check{f}_W(k) := (2\pi)^{-2}\mathrm{Tr}(fe^{-ikq}).$$

Dann heißt

$$f_W(x) = \mathcal{F}(\check{f}_W)(x)$$

das *Weyl-Symbol* von $f$. Die Zuordnung (2.5) hat die Eigenschaft, dass ein Polynom $x^\alpha$ in den Koordinatenfunktionen (hier ist $\alpha$ ein 4-Multiindex) auf den Operator $\{q^\alpha\}_{sym}$, das symmetrisierte oder auch Weylgeordnete Produkt der zugehörigen Koordinatenoperatoren, abgebildet wird. Formal gilt offenbar

$$\int \mathrm{d}^4x \; f_W(x) = (2\pi)^{-2}\check{f}_W(0) = \mathrm{Tr}f. \tag{2.16}$$

Man kann das Produkt (2.6) nun auch in Weyl-Symbole ausgedrücken:

$$\begin{aligned}(f_W * g_W)(x) :&= \widehat{\check{f}_W \times \check{g}_W}(x) \\ &= (2\pi)^{-4} \int \mathrm{d}^4k\mathrm{d}^4k' \; e^{ikx} \check{f}_W(k-k')\check{g}_W(k') e^{-\frac{i}{2}k\sigma k'} \\ &= (2\pi)^{-8} \int \mathrm{d}^4k\mathrm{d}^4k'\mathrm{d}^4y\mathrm{d}^4y' \; e^{ikx} e^{-i(k-k')y} e^{-ik'y'} e^{-\frac{i}{2}k\sigma k'} f_W(y) g_W(y') \\ &= (2\pi)^{-4} \int \mathrm{d}^4y\mathrm{d}^4k \; f_W(x - \frac{1}{2}\sigma k) g_W(x+y) e^{-iky}\end{aligned} \tag{2.17}$$

Dies wird üblicherweise das *Moyal-* oder $*$*-Produkt* genannt. Da es nichts anderes ist als das Operatorprodukt auf der Symbolebene ist es natürlich auch assoziativ, aber nicht kommutativ. Man sieht diesem Produkt direkt an, dass es nichtlokal ist, das heißt zu $f_W * g_W(x)$ tragen die die Werte von $f_W(y)$ und $g_W(z)$ auch für weit von $x$ entfernte $y$ und $z$ bei. Man muss mit solchen Aussagen allerdings vorsichtig sein, schließlich sind die Funktionale $f \mapsto f_W(x)$ nicht positiv, so dass die Interpretation von $f_W(x)$ als so etwas wie der "Funktionswert" von $f$ an der Stelle $x$ problematisch ist.

Welche Klassen von Funktionen unter der Weyl-Abbildung mit welchen Klassen von Operatoren korrespondieren, ist nicht vollständig geklärt [17]. Auf jeden Fall entsprechen die Symbole $f_W \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$ den Operatoren auf $L^2(\mathbb{R}^2)$, deren Integralkern in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$ liegt. Diese Menge wird in den Kapiteln 4 und 5 eine wichtige Rolle spielen, wir werden sie dort $\mathcal{S}_2$ nennen. Offenbar sind für $f \in \mathcal{S}_2$ in Gleichung (2.16) sowohl die rechte als auch die linke Seite wohldefiniert. Aus der Zyklizität der Spur folgt dann auch

$$\int \mathrm{d}^4x \; f * g(x) = \int \mathrm{d}^4x \; g * f(x) \qquad \forall f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4). \tag{2.18}$$

Für den Fall $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$ lässt sich auch eine andere häufig verwendete Identität herleiten:

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}^4x \; (f*g)(x) &= (2\pi)^{-4} \int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4y\mathrm{d}^4k \; f(x - \frac{1}{2}\sigma k) g(x+y) e^{-iky} \\ &= (2\pi)^{-2} \int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4k \; f(x - \frac{1}{2}\sigma k) \check{g}(k) e^{ikx} \\ &= \int \mathrm{d}^4k \; \hat{f}(k)\check{g}(k) e^{\frac{i}{2}k\sigma k} \\ &= \int \mathrm{d}^4k \; \hat{f}(k)\hat{g}(-k) \\ &= \int \mathrm{d}^4x \; f(x)g(x).\end{aligned} \tag{2.19}$$

Das erlaubt es zum Beispiel partiell zu integrieren:

$$\int \mathrm{d}^4x \; \partial_\mu f * g(x) = -\int \mathrm{d}^4x \; f * \partial_\mu g(x) \qquad \forall f, g \in \mathcal{S}(R^4). \tag{2.20}$$

Das Moyal-Produkt wird häufig auch in der Form

$$(f \star g)(x) = e^{\frac{i}{2}\partial_\mu^{(y)} \sigma^{\mu\nu} \partial_\nu^{(z)}} f(x+y) g(x+z)|_{y=z=0}. \tag{2.21}$$

angegeben. Sie ist formal äquivalent zu (2.17). Echt gleich ist sie natürlich nur für analytische $f$ und $g$. In der nichtkommuativen Feldtheorie wird (2.21) meistens als formale Potenzreihe in $\sigma$ interpretiert. Auf dieser Basis funktioniert zum Beispiel die in der nichtkommutativen Eichtheorie häufig benutzte Seiberg-Witten-Abbildung [6]. Es ist hier jedoch Vorsicht geboten, da das Produkt dann für alle endlichen Ordnungen lokal ist.

# Kapitel 3

# Feldtheorie auf dem nichtkommutativen Minkowski-Raum

Bereits in [3] wurde eine Quantenfeldteorie (QFT) auf dem nichtkommutativen Minkowski-Raum definiert. In Analogie zur QFT auf dem kommutativen Minkowski-Raum und in Anlehnung an (2.5) wurde

$$\phi(q) := (2\pi)^{-2} \int \mathrm{d}^4k \; \check{\phi}(k) \otimes e^{ikq} \tag{3.1}$$

mit

$$\check{\phi}(k) = \sqrt{2\pi} \left(\theta(k_0) a(\mathbf{k})^* + \theta(-k_0) a(-\mathbf{k})\right) \delta(k^2 - m^2) \tag{3.2}$$

als freies, skalares Feld definiert. Das Tensorprodukt soll hier verdeutlichen, dass die Operatoren $a, a^*$ und $q$ in verschiedenen Räumen wirken. Offensichtlich erfüllt dieses Feld die Klein-Gordon-Gleichung

$$\left(\Box + m^2\right) \phi(q) = 0. \tag{3.3}$$

Das Feld wurde hier so definiert, dass es nicht von $\sigma$ abhängt. Das Produkt zweier Felder ist zwar $\sigma$-abhängig (2.6) aber punktweise in $\Sigma$ (2.8). Auch durch die Bewegungsgleichung (3.3) kommt keine Dynamik in $\Sigma$ zustande, da sie keine Ableitungen nach $\sigma$ enthält. Das begründet die in Abschnitt 2.2 vorgenommenen Beschränkung auf $\mathcal{E}_\sigma$.

Zur störungstheoretischen Behandlung der nichtkommutativen Quantenfeldtheorie (NC-QFT) wurden im wesentlichen drei verschiedene Formalismen vorgeschlagen, die wir im folgenden vorstellen wollen.

## 3.1 Die modifizierten Feynman-Regeln

Man geht hier aus von der Wirkung, das heißt der Spur über die Lagrangedichte, für das Beispiel einer skalaren $\phi^3$-Theorie also

$$S[\phi] = \mathrm{Tr}\left(\frac{1}{2}\partial_\mu\phi(q)\partial^\mu\phi(q) - \frac{m^2}{2}\phi(q)\phi(q) - \frac{\lambda}{3!}\phi(q)\phi(q)\phi(q)\right).$$

Man kann das natürlich auch durch Weyl-Symbole ausdrücken:

$$S[\phi] = \int \mathrm{d}^4x \, \frac{1}{2}\partial_\mu\phi_W(x)\partial^\mu\phi_W(x) - \frac{m^2}{2}\phi_W(x)\phi_W(x) - \frac{\lambda}{3!}\phi_W * \phi_W * \phi_W(x).$$

Hier wurde Gleichung (2.19) benutzt. Man sieht, dass der freie Teil genau so aussieht wie im kommutativen Fall, hier ändert sich somit nichts, insbesondere bleiben die Propagatoren die gleichen. Für den Wechselwirkungsteil erhält man mit (2.4) und $\mathrm{Tr}(e^{ikq}) = (2\pi)^2\delta(k)$

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\left(\phi(q)\phi(q)\phi(q)\right) =& \int \prod_{i=1}^{3} \mathrm{d}^4k_i \;\check{\phi}(k_1)\check{\phi}(k_2)\check{\phi}(k_3)\mathrm{Tr}\left(e^{ik_1q}e^{ik_2q}e^{ik_3q}\right) \\ =&(2\pi)^2 \int \prod_{i=1}^{3} \mathrm{d}^4k_i \;\check{\phi}(k_1)\check{\phi}(k_2)\check{\phi}(k_3)\delta(k_1+k_2+k_3)e^{-\frac{i}{2}\sum_{i<j} k_i\sigma k_j}.\end{aligned}$$

Es ist also nahe liegend, die üblichen Feynman-Regeln zu benutzen und für jeden Vertex den Phasenfaktor $e^{-\frac{i}{2}\sum_{i<j} k_i\sigma k_j}$ zu multiplizieren. Das sind die sogenannten modifizierten Feynman-Regeln, die zuerst in [7] formuliert wurden. Zu beachten ist dabei, dass der Phasenfaktor von der Reihenfolge abhängt, in der die Impulse an den Vertizes ein- beziehungsweise auslaufen. Der Phasenfaktor ist aber wegen der Zyklizität der Spur invariant unter zyklischen Vertauschungen der Impulse.

Als Beispiel wollen wir die Selbstenergie in erster Schleifenordnung berechnen. Wir nennen den einlaufenden Impuls $p$ und den umlaufenden $k$. An den beiden Vertizes gilt offensichtlich Impulserhaltung. Zunächst betrachten wir folgende Reihenfolge der auslaufenden Impulse: $k_1 = -p$, $k_2 = k$, $k_3 = p - k$ am ersten und $k_1 = p$, $k_2 = k - p$, $k_3 = -k$ am zweiten Vertex. Dies ist im Graphen in Abbildung 3.1 dargestellt. Dabei wird die Reihenfolge der auslaufenden Impulse an den beiden Vertizes jeweils im Gegenuhrzeigersinn gezählt. Der Anfangspunkt der Zählung ist dabei wegen der zyklischen Invarianz des Phasenfaktors egal.

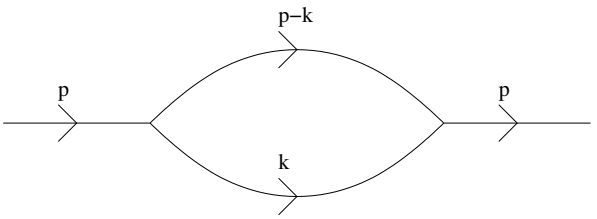


Abbildung 3.1: Ein planarer Graph

Man rechnet nun leicht nach, dass sich die Phasenfaktoren gerade wegheben. Man spricht dann von einem *planaren* Graphen. Er entspricht genau dem aus der kommutativen Theorie bekannten Graphen, weist also insbesondere die gleichen UV-Divergenzen auf [7].

Bei der Zuordnung $k_1 = -p$, $k_2 = k$, $k_3 = p - k$ am ersten und $k_1 = p$, $k_2 = -k$, $k_3 = k - p$ am zweiten Vertex, dargestellt in Abbildung 3.2, bleibt jedoch ein Phasenfaktor

$$e^{-\frac{i}{2}(-p\sigma k - p\sigma(p-k) + k\sigma(p-k))}e^{-\frac{i}{2}(-p\sigma k - p\sigma(p-k) + k\sigma(p-k))} = e^{-ik\sigma p}$$

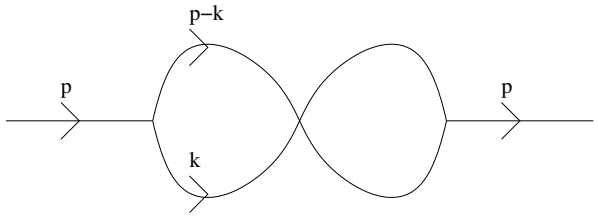


Abbildung 3.2: Ein nichtplanarer Graph

übrig. Hier spricht man von einem *nichtplanaren* Graphen. Er liefert einen Beitrag proportional zu

$$\int \mathrm{d}^4k \, \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{1}{(p-k)^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ik\sigma p} = \left(\check{\Delta}_F \times_2 \check{\Delta}_F\right)(p). \tag{3.4}$$

Hier bezeichnet $\times_2$ die getwistete Faltung bezüglich $2\sigma$. Der oszillierende Phasenfaktor macht das Integral konvergent [8], es ist also keine Renormierung erforderlich. Das gilt jedoch nur für endliche Impulse $p$. Im Limes $p \to 0$ erhält man wieder die üblichen UV-Divergenzen. Es besteht hier also in gewisser Weise eine Mischung des UV- und des IR-Bereichs. Für einen einfachen Selbstenergie-Graphen stellt das kein Problem dar, da ein einlaufender Impuls $p = 0$ physikalisch keinen Sinn macht. Ist der nichtplanare Selbstenergie-Graph allerdings in einen Graphen eingebettet, wie etwa in Abbildung 3.3 dargestellt, so wird über alle $p$ integriert, insbesondere auch über $p = 0$. Es gibt noch keine befriedigenden Ansätze zur Lösung dieses sogenannten UV/IR-Mischungs-Problems.

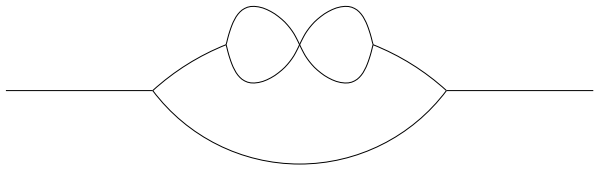

Abbildung 3.3: Ein UV/IR-divergenter Untergraph

Ein noch schwerer wiegendes Problem der modifizierten Feynman-Regeln ist, dass sie für Theorien mit Raum-Zeit-Nichtkommutativität ($\sigma^{0i} \neq 0$), die für die Unschärferelation (1.1) nötig ist, zu einer Verletzung der Unitarität führen. Denn für die nichtplanaren Graphen ist das optische Theorem bereits in erster Schleifenordnung nicht mehr erfüllt [9]. In [10] wurde jedoch gezeigt, dass dieses Problem in den beiden im Folgenden vorgestellten Ansätzen nicht auftritt. Die modifizierten Feynman-Regeln sind also offenbar ein schlechter Ansatz zur störungstheoretischen Definition einer QFT auf dem nichtkommutativen Minkowski-Raum. Insbesondere lassen sie sich, anders als die Feynman-Regeln der kommutativen Feldtheorie, nicht aus dem Hamilton-Ansatz herleiten, wie wir im folgenden Abschnitt sehen werden.

## 3.2 Der Hamiltonformalismus

Mit Hilfe des Zeit-$t$-Integrals (2.14) lässt sich ein Wechselwirkungs-Hamiltonoperator zum Beispiel für die $\phi^3$-Theorie definieren:

$$H_I(t) := \int_{q^0=t} \mathrm{d}^3q \ :\phi^3(q): \ .$$

Die $S$-Matrix ergibt sich wie üblich durch die Dyson-Reihe

$$S = T e^{i \int \mathrm{d}t \ H_I(t)}.$$

Die Unitarität folgt dann aus der formalen Selbstadjungiertheit des Hamiltonoperators. Zu beachten ist hier, dass sich die Zeitordnung $T$ nur auf die Wechselwirkungszeiten auswirkt. Wir wollen auch in diesem Rahmen die Berechnung der $\phi^3$-Selbstenergie in erster Schleifenordnung skizzieren. Das Weyl-Symbol des Wechselwirkungsterms ist durch

$$\begin{aligned} :\phi^3_W: (x) &= \int \mathrm{d}^4k \prod_{i=1}^{3} \mathrm{d}^4k_i \ e^{ikx} :\check{\phi}(k_1)\check{\phi}(k_2)\check{\phi}(k_3): \ \mathrm{Tr}\left(e^{-ikq}e^{ik_1q}e^{ik_2q}e^{ik_3q}\right) \\ &= \int \prod_{i=1}^{3} \mathrm{d}^4k_i \ e^{i(k_1+k_2+k_3)x} :\check{\phi}(k_1)\check{\phi}(k_2)\check{\phi}(k_3): \ e^{-\frac{i}{2}\sum_{i<j} k_i\sigma k_j} \end{aligned}$$

gegeben. Aus der Definition (2.14) des Zeit-$t$-Integrals folgt

$$\int_{q^0=t} \mathrm{d}^3q \ :\phi(q)^3: \ = \int_{x^0=t} \mathrm{d}^3x \ :\phi^3_W: (x)$$

und somit für das zeitgeordnete Produkt zweier Integrale

$$\begin{aligned} & T \int \mathrm{d}t \ H_I(t) \int \mathrm{d}t' \ H_I(t') \\ &= \int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4y \ \left(\theta(x^0-y^0) :\phi^3_W: (x) :\phi^3_W: (y) + \theta(y^0-x^0) :\phi^3_W: (y) :\phi^3_W: (x)\right). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Wir betrachten nun die zwei in Abbildung 3.4 dargestellten Kontraktionen des Produkts $:\phi^3_W: (x) :\phi^3_W: (y)$:

$$\begin{aligned} & \int \prod_{i=1}^{3} \mathrm{d}^4k_i\mathrm{d}^4p_i \ e^{i(k_1+k_2+k_3)x} e^{i(p_1+p_2+p_3)y} e^{-\frac{i}{2}\sum_{i<j}(k_i\sigma k_j + p_i\sigma p_j)} \\ & \quad \cdot \check{\Delta}_+(k_2)\check{\Delta}_+(k_3)\delta(k_2+p_{2/1})\delta(k_3+p_{1/2})\check{\phi}(k_1)\check{\phi}(p_3) \\ &= \int \mathrm{d}^4p_3 \prod_{i=1}^{3} \mathrm{d}^4k_i \ e^{i(k_1+k_2+k_3)x} e^{i(-k_2-k_3+p_3)y} e^{-\frac{i}{2}(k_1+p_3)\sigma(k_2+k_3)} e^{-\frac{i}{2}k_2\sigma k_3} e^{\pm\frac{i}{2}k_2\sigma k_3} \\ & \quad \cdot \check{\Delta}_+(k_2)\check{\Delta}_+(k_3)\check{\phi}(k_1)\check{\phi}(p_3) \\ &= \int \mathrm{d}^4k_1\mathrm{d}^4p_3\mathrm{d}^4k \ e^{i(k_1+k)x} e^{i(p_3-k)y} e^{-\frac{i}{2}(k_1+p_3)\sigma k} \left(\check{\Delta}_+ \times_{0/2} \check{\Delta}_+\right)(k) \ \check{\phi}(k_1)\check{\phi}(p_3). \end{aligned} \tag{3.6}$$

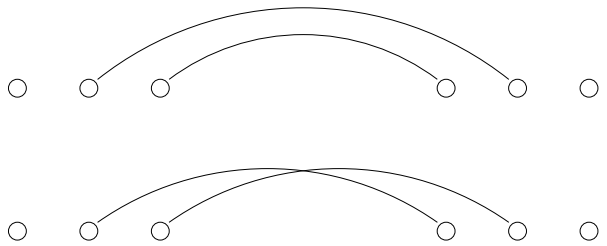

Abbildung 3.4: Die beiden in (3.6) betrachteten Kontraktionen

Hier bezeichnet $\times_0$ die übliche Faltung. Durch sandwichen in $\langle p| \dots |p\rangle$ setzt man $p_3 = -k_1 = p$ und erhält

$$\int \mathrm{d}^4k \; e^{i(k-p)(x-y)} \left(\check{\Delta}_+ \times_{0/2} \check{\Delta}_+\right)(k) = e^{-ip(x-y)} \left(\Delta_+ *_{0/2} \Delta_+\right)(x-y).$$

Hier bezeichnet $*_0$ das punktweise Produkt und $*_2$ das Moyal-Produkt bezüglich $2\sigma$. Einsetzen in (3.5) ergibt

$$\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4y \; e^{-ip(x-y)} \left(\theta(x^0-y^0)\left(\Delta_+ *_{0/2} \Delta_+\right)(x-y) + \theta(y^0-x^0)\left(\Delta_+ *_{0/2} \Delta_+\right)(y-x)\right).$$

Man kann hier also wieder einen planaren (mit $*_0$-Produkt) und einen nichtplanaren (mit $*_2$-Produkt) Anteil unterscheiden. Beim planaren Term lässt sich die Heaviside-Funktion auf die einzelnen $\Delta_+$-Funktionen ziehen, so dass man mit $\theta(x^0)\Delta_+(x)+\theta(-x^0)\Delta_+(-x) = i\Delta_F(x)$ das punktweise Produkt zweier Feynman-Propagatoren erhält. Das ist wiederum der aus der kommutativen Theorie bekannte Term. Im Fall des Moyal-Produkts kann man die Heaviside-Funktion wegen der Nichtlokalität des Moyal-Produkts nicht auf die einzelnen Zwei-Punkt-Funktionen ziehen. Der nichtplanare Graph ist in diesem Formalismus also nicht proportional zu (3.4).

Natürlich treten auch noch andere Terme auf, bei der Kontraktion von $k_2$ mit $p_2$ und $k_3$ mit $p_3$ erhält man zum Beispiel einen Beitrag proportional zu

$$\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4y \; \left(\theta(x^0-y^0)\left(e^{-i(x-y)\cdot} \times_2 \check{\Delta}_+ \times_2 \check{\Delta}_+\right)(p) + \theta(y^0-x^0)\left(e^{i(x-y)\cdot} \times_2 \check{\Delta}_+ \times_2 \check{\Delta}_+\right)(-p)\right).$$

Ausführliche Rechnungen in diesem Formalismus finden sich in [18] und [19], wo er Wechselwirkungspunktzeitgeordnete Störungstheorie genannt wird.

Ein Nachteil dieses Formalismus ist, dass sich das wechselwirkende Feld nicht wie üblich durch die gleichzeitigen Vertauschungsrelationen

$$\dot{\phi}(t,\mathbf{x}) = i[H(t), \phi(t,\mathbf{x})]$$

berechnen lässt. Denn zunächst ist nicht einmal klar, wie der Kommutator überhaupt definiert ist, nur bezüglich des Feldes oder auch bezüglich des Ortsanteils? Ein weiteres Problem ist die Nichtlokalität des Produktes, die es schwer macht, dem Konzept der Gleichzeitigkeit einen Sinn zu geben. Man hat also nicht unter Kontrolle, wie sich das wechselwirkende Feld für $t \to \infty$ verhält, insbesondere, ob es dort frei wird. In nichtlokalen Theorien traten an dieser Stelle in der Tat Probleme auf [20], so dass man diese Fragen sorgfältig untersuchen sollte.

## 3.3 Der Yang-Feldman-Formalismus

In [10] wurden die wechselwirkenden Felder pertubativ mit dem Yang-Feldman-Ansatz [21] bestimmt. Dies soll hier anhand der $\phi^3$-Theorie dargestellt werden, die Bewegungsgleichung sei also durch

$$(\Box + m^2)\phi(q) = \lambda\phi(q)\phi(q)$$

gegeben. Die Idee ist nun, das wechselwirkende Feld als formale Potenzreihe

$$\phi(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \phi_n(q)$$

in der Kopplungskonstenten $\lambda$ zu berechnen. Offensichtlich löst $\phi_0(q)$ die freie Wellengleichung, man setzt es gleich dem einlaufenden Feld. Die höheren Ordnungen erfüllen dann

$$(\Box + m^2)\phi_n(q) = \sum_{k=0}^{n-1} \phi_k(q)\phi_{n-1-k}(q),$$

so dass sie sich rekursiv bestimmen lassen. Man erhält für die ersten beiden Ordnungen

$$\phi_1(q) = \int \mathrm{d}^4x \ \Delta_{ret}(x)\phi_0(q-x)\phi_0(q-x)$$

und

$$\begin{aligned}\phi_2(q) = \int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4y \ \Delta_{ret}(x)\Delta_{ret}(y) \\ \cdot (\phi_0(q-y-x)\phi_0(q-y-x)\phi_0(q-x) + \phi_0(q-x)\phi_0(q-y-x)\phi_0(q-y-x))\,.\end{aligned}$$

Dies ist in Abbildung 3.5 durch Graphen dargestellt.

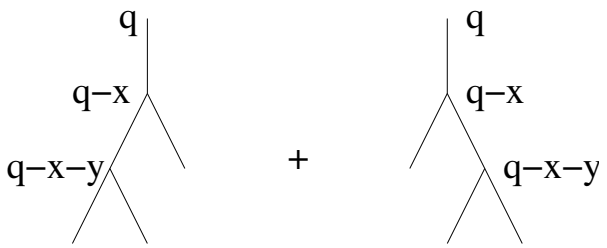


Abbildung 3.5: Die beiden Beiträge zu $\phi_2$ im Yang-Feldman-Formalismus

Die Selbstenergie in erster Schleifenordnung ergibt sich nun durch Berechnung von

$$\int \mathrm{d}^4z\mathrm{d}^4z' \ e^{-ikz}e^{ipz'}\langle\Omega|\phi_2(q-z)\phi_0(q-z')|\Omega\rangle.$$

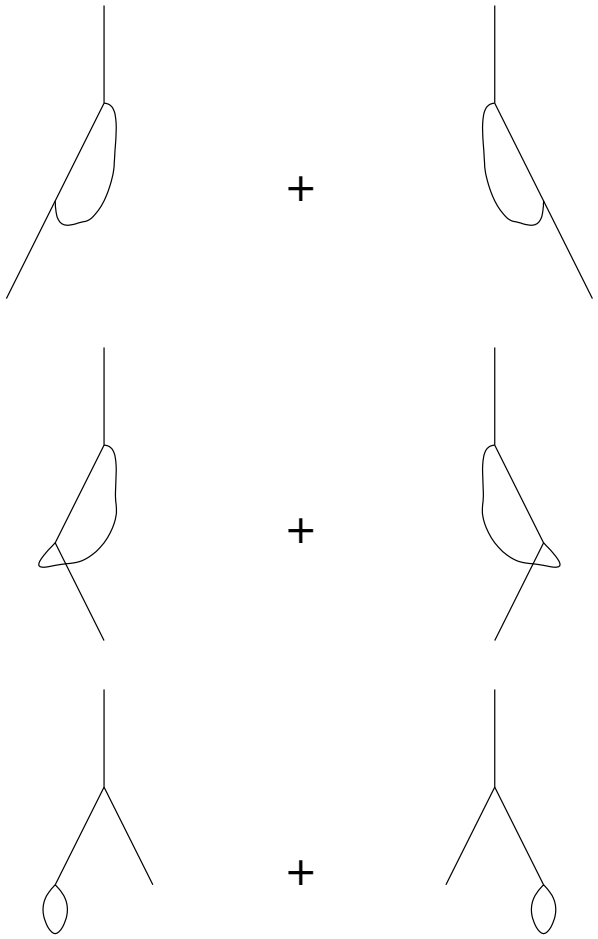

Abbildung 3.6: Die drei verschiedenen Kontraktionen für die $\phi^3$-Selbstenergie.

Bei der Berechnung des Vakuumerwartungswertes wird eines der $\phi_0$ aus $\phi_2$ mit dem einlaufenden $\phi_0$ kontrahiert, die beiden übrigen kontrahieren miteinander. Die drei Kontraktionsmöglichkeiten sind in Abbildung 3.6 dargestellt. Die erste Kontraktionsmöglichkeit liefert

einen Beitrag proportional zu

$$\begin{aligned}
&\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4y\mathrm{d}^4z\mathrm{d}^4z'\ \Delta_{ret}(x)\Delta_{ret}(y)e^{-ikz}e^{ipz'}\int\prod_{i=1}^{4}\frac{\mathrm{d}^3k_i}{2\omega(\mathbf{k}_i)}\\
&\quad\Big(e^{-i(q-x-y-z)k_1}e^{-i(q-x-y-z)k_2}e^{i(q-x-z)k_3}e^{i(q-z')k_4}[a(k_2),a(k_3)^*][a(k_1),a(k_4)^*]\\
&\quad+e^{-i(q-x-z)k_1}e^{i(q-x-y-z)k_2}e^{-i(q-x-y-z)k_3}e^{i(q-z')k_4}[a(k_1),a(k_2)^*][a(k_3),a(k_4)^*]\Big)\\
=&\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4y\mathrm{d}^4z\mathrm{d}^4z'\ \frac{\mathrm{d}^3k_1}{2\omega(\mathbf{k}_1)}\frac{\mathrm{d}^3k_2}{2\omega(\mathbf{k}_2)}\ \Delta_{ret}(x)\Delta_{ret}(y)e^{-ikz}e^{ipz'}e^{-ik_1(z'-x-y-z)}\left(e^{ik_2y}+e^{-ik_2y}\right)\\
=&\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4y\mathrm{d}^4z\mathrm{d}^4z'\ \Delta_{ret}(x)\Delta_{ret}(y)e^{-ikz}e^{ipz'}\Delta_+(z'-x-y-z)\left(\Delta_-(y)+\Delta_+(y)\right)\\
=&\delta(k-p)\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4y\mathrm{d}^4z'\ \Delta_{ret}(x)\Delta_{ret}(y)e^{ipz'}\Delta_+(z'-x-y)\left(\Delta_-(y)+\Delta_+(y)\right)\\
=&\delta(k-p)\hat{\Delta}_{ret}(p)\hat{\Delta}_+(p)\int \mathrm{d}^4y\ \Delta_{ret}(y)\left(\Delta_-(y)+\Delta_+(y)\right)e^{ipy}\\
=&\delta(k-p)\hat{\Delta}_{ret}(p)\hat{\Delta}_+(p)\left(\widehat{\Delta_{ret}*_0\Delta_+}(p)+\widehat{\Delta_{ret}*_0\Delta_-}(p)\right)
\end{aligned}$$

Hier taucht, wie im Yang-Feldman-Formalismus üblich, das punktweise Produkt des retardierten Propagators mit $\Delta_+ + \Delta_-$ auf. Da kein Twisting-Faktor enthalten ist, nennen wir den Graphen planar.

Bei der zweiten Kontraktion erhält man stattdessen

$$\begin{aligned}
&\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4y\mathrm{d}^4z\mathrm{d}^4z'\ \Delta_{ret}(x)\Delta_{ret}(y)e^{-ikz}e^{ipz'}\int\prod_{i=1}^{4}\frac{\mathrm{d}^3k_i}{2\omega(\mathbf{k}_i)}\\
&\quad\Big(e^{-i(q-x-y-z)k_1}e^{-i(q-x-y-z)k_2}e^{i(q-x-z)k_3}e^{i(q-z')k_4}[a(k_1),a(k_3)^*][a(k_2),a(k_4)^*]\\
&\quad+e^{-i(q-x-z)k_1}e^{-i(q-x-y-z)k_2}e^{i(q-x-y-z)k_3}e^{i(q-z')k_4}[a(k_1),a(k_3)^*][a(k_2),a(k_4)^*]\Big)\\
=&\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4y\mathrm{d}^4z\mathrm{d}^4z'\ \frac{\mathrm{d}^3k_1}{2\omega(\mathbf{k}_1)}\frac{\mathrm{d}^3k_2}{2\omega(\mathbf{k}_2)}\\
&\quad\Delta_{ret}(x)\Delta_{ret}(y)e^{-ikz}e^{ipz'}e^{-ik_2(z'-x-y-z)}e^{ik_2\sigma k_1}\left(e^{ik_1y}+e^{-ik_1y}\right)\\
=&\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4z\mathrm{d}^4z'\mathrm{d}^4k_1\mathrm{d}^4k_2\\
&\quad\check{\Delta}_-(k_1)\hat{\Delta}_+(k_2)\Delta_{ret}(x)e^{-ikz}e^{ipz'}e^{-ik_2(z'-x-z)}e^{ik_2\sigma k_1}\left(\check{\Delta}_{ret}(-k_2-k_1)+\check{\Delta}_{ret}(-k_2+k_1)\right)\\
=&\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4z\mathrm{d}^4z'\mathrm{d}^4k_2\\
&\quad\hat{\Delta}_+(k_2)\Delta_{ret}(x)e^{-ikz}e^{ipz'}e^{-ik_2(z'-x-z)}\left(\check{\Delta}_{ret}\times_2\check{\Delta}_-(-k_2)+\check{\Delta}_+\times_2\check{\Delta}_{ret}(-k_2)\right)\\
=&\delta(k-p)\hat{\Delta}_{ret}(p)\hat{\Delta}_+(p)\left(\widehat{\Delta_{ret}*_2\Delta_-}(p)+\widehat{\Delta_+*_2\Delta_{ret}}(p)\right)
\end{aligned}$$

Hier wird nun das Moyal-Produkt bezüglich $2\sigma$ von retardiertem Propagator und $\Delta_+$ beziehungsweise $\Delta_-$ gebildet. Wir sprechen von einem nicht-planaren Graphen.

Die dritte mögliche Kontraktion entspricht einem tadpole-Graphen aus der üblichen Quantenfeldtheorie. Ihren Beitrag eliminieren wir durch Renormierung.

Dass in der eben berechneten Ordnung die Unitarität erfüllt ist, wurde in [10] explizit nachgerechnet.

Dieser Formalismus hat den Vorteil, dass das wechselwirkende Feld direkt aus der Bewegungsgleichung gewonnen wird. Außerdem ist er explizit kovariant. Aber auch in diesem Formalismus taucht das UV/IR-Mischungsproblem auf, wenn auch in einer anderen Form. Es manifestiert sich hier dadurch, dass bei der Renormierung der Theorie die Dispersionsrelation bereits bei kleinen Energien sehr stark modifiziert wird. Nur für Massen in der Größenordnung der Planck-Masse ergeben sich halbwegs normale Dispersionsrelationen [22]. Das ist physikalisch natürlich unbefriedigend.

## 3.4 Nichtkommutative klassische Feldtheorie

In [11] wurde eine klassische nichtkommutative skalare Feldtheorie über das Moyal-Produkt definiert. Die Wirkung der wechselwirkenden $\phi^4$-Theorie ist so durch

$$S[\phi] := \int \mathrm{d}^4x \; \frac{1}{2}\partial_\mu\phi * \partial^\mu\phi(x) - \frac{m^2}{2}\phi * \phi(x) - \frac{\lambda}{4!}\phi * \phi * \phi * \phi(x) \tag{3.7}$$

gegeben. Die Bewegungsgleichungen sollen sich nun aus der Forderung der Invarianz unter Transformationen $\phi \to \phi + \delta\phi$ ergeben:

$$S[\phi + \delta\phi] - S[\phi] = -\int \mathrm{d}^4x \; \delta\phi * \left(\Box\phi(x) + m^2\phi(x) + \frac{\lambda}{3!}\phi * \phi * \phi(x)\right).$$

Dabei wurde partiell integriert (2.20) und die Zyklizität der Spur (2.18) benutzt. Aus der Beliebigkeit von $\delta\phi$ folgt dann die Bewegungsgleichung

$$\Box\phi(x) + m^2\phi(x) + \frac{\lambda}{3!}\phi * \phi * \phi(x) = 0. \tag{3.8}$$

Dieser Ansatz lässt jedoch viele Fragen offen. So wird nirgends präzisiert, welche Funktionen eigentlich zugelassen sind. Die Definition (3.7) der Wirkung macht nur Sinn für Funktionen, die im Unendlichen schnell abfallen. Lösungen der Feldgleichung (zum Beispiel ebene Wellen als Lösung der freien Feldgleichung) tun dies im Allgemeinen aber nicht. Ein einfaches Abschneiden durch punktweise Multiplikation des Integranden mit einer Testfunktion liefert wegen der Nichtpositivität der Abbildung $\phi \mapsto \phi_W(x)$ kein positives Funktional.

Ebenfalls in [11] wurde das Noether-Theorem für nichtkommutative skalare Feldtheorien diskutiert und gezeigt, dass die Divergenz des Energie-Impuls-Tensors im Allgemeinen nicht verschwindet. Die Herleitung ist jedoch zweifelhaft: Es wird angenommen, dass

$$S[\phi + \epsilon F[\phi]] - S[\phi] = -\int \mathrm{d}^4x \; J^\mu[\phi](x)\partial_\mu\epsilon(x) = \int \mathrm{d}^4x \; \partial_\mu J^\mu[\phi](x)\epsilon(x) \tag{3.9}$$

gilt. Dabei ist $F$ eine Transformation des Feldes. Normalerweise kann man aus der Möglichkeit, $\epsilon$ beliebig wählen zu können, folgern, dass $\partial_\mu J^\mu[\phi] = 0$ gilt. Dies sei jedoch hier nicht der Fall, da wegen der Zyklizität der Spur

$$\int \mathrm{d}^4x \; f * g(x) - g * f(x) = \int \mathrm{d}^4x \; [f, g]_* = 0$$

gilt. Deshalb würde man aus (3.9) lediglich

$$\partial_\mu J^\mu[\phi](x) = [f[\phi], g[\phi]]_*(x)$$

folgern können. Mit dem selben Argument könnte man auch folgern, dass die Bewegungsgleichung um einen Term $[f[\phi], g[\phi]]$ ergänzt werden muss. Oder man könnte ein beliebiges $f[\phi]$ wählen, für das $\int \mathrm{d}^4x \; f[\phi](x) = 0$ gilt. Das Argument ist also offenbar unsinnig.

Auch die in [23] gegebene Version des Noether-Theorems ist unbefriedigend. Dort wird die Wirkung (3.7) auf der algebraischen Ebene geschrieben, das heißt das Integral wird durch die Spur und das Moyal-Produkt wird durch das Algebraprodukt ersetzt. Dann wird der Energie-Impuls-Tensor folgendermaßen konstruiert: Man betrachtet die Variation $\phi \mapsto \phi + \epsilon\partial_\mu\phi$ des Feldes und berechnet die zugehörige Variation der Wirkung auf zwei Arten. Zunächst gilt offenbar

$$\delta_\mu S[\phi] = \mathrm{Tr}\left(\partial_\mu L[\phi]\right).$$

Unter Verwendung der Bewegungsgleichung (3.8) erhält man andererseits

$$\delta_\mu S[\phi] = \mathrm{Tr}\left(\partial_\nu\left(\partial_\mu\phi\partial^\nu\phi\right) + \partial_\mu\phi\left(-\Box\phi + m^2\phi + \frac{\lambda}{3}\phi^3\right)\right) = \mathrm{Tr}\left(\partial_\nu\left(\partial_\mu\phi\partial^\nu\phi\right)\right).$$

Aus der Forderung, dass die Differenz der beiden Variationen verschwindet, ergibt sich

$$\mathrm{Tr}\left(\partial_\nu\left(\frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi\partial^\nu\phi + \partial^\nu\phi\partial_\mu\phi\right) - \delta^\nu_\mu L[\phi]\right)\right) = \mathrm{Tr}\left(\partial_\nu T^\nu_\mu\right) = 0. \tag{3.10}$$

Problematisch an dieser Argumentation ist natürlich, dass man es in keinem Schritt mit wohldefinierten Größen zu tun hat.

Die Divergenz des so definierten Energie-Impuls-Tensors lässt sich nun explizit ausrechnen:

$$\begin{aligned}\partial_\mu T^{\mu\nu} =& \frac{1}{2}\partial^\nu\phi\left(\Box\phi + m^2\phi\right) + \frac{1}{2}\left(\Box\phi + m^2\phi\right)\partial^\nu\phi \\ &+ \frac{\lambda}{4!}\left(\partial^\nu\phi\phi^3 + \phi\partial^\nu\phi\phi^2 + \phi^2\partial^\nu\phi\phi + \phi^3\partial^\nu\phi\right).\end{aligned}$$

Den dritten Term auf der rechten Seite kann man wegen der Nichtkommutativität des Produkts nun nicht in die Form

$$\frac{1}{2}\frac{\lambda}{3!}\partial^\nu\phi\phi^3 + \frac{1}{2}\frac{\lambda}{3!}\phi^3\partial^\nu\phi$$

bringen, um mit der Bewegungsgleichung (3.8) die Divergenzfreiheit des Energie-Impuls-Tensors zu erhalten. Explizit ergibt sich

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = \frac{\lambda}{4!}\left(-\partial^\nu\phi\phi^3 + \phi\partial^\nu\phi\phi^2 + \phi^2\partial^\nu\phi\phi - \phi^3\partial^\nu\phi\right) = \frac{\lambda}{4!}[[\phi, \partial^\nu\phi], \phi^2]. \tag{3.11}$$

Diese Formel wurde das erste Mal in [11] in der $*$-Produkt-Form angegeben. In Abschnitt 4.3 werden wir eine allgemeine Formel herleiten, die zu jeder Symmetrietransformation die "Erhaltungsgröße" und gegebenfalls den Quellterm liefert. Dann ist auch klar zu erkennen, welche Symmetrietransformationen zu "Erhaltungsgrößen" mit Quellterm führen.

Dass die Divergenz des Energie-Impuls-Tensors nicht verschwindet, ist ein Phänomen, das bereits aus quantisierten nichtlokalen Feldtheorien bekannt ist [24]. Der Grund ist dort, dass wegen der Nichtlokalität der Wechselwirkung die wechselwirkenden Felder nicht die kanonischen Vertauschungsrelationen erfüllen, was sich in der quantisierten Theorie ähnlich wie in (3.11) bemerkbar macht.

In [25] wird der Term auf der rechten Seite von (3.11) als Divergenz geschrieben. Dort wird mit Weyl-Symbolen und in der Ableitungsform (2.21) des $\star$-Produkts gearbeitet, in der offenbar

$$[f,g]_\star(x) = \sin\left(\frac{1}{2}\partial_\mu^{(y)}\sigma^{\mu\nu}\partial_\nu^{(z)}\right) f(x+y)g(x+z)|_{y=z=0}$$

gilt. Das lässt sich formal natürlich auch als

$$[f,g]_\star = \frac{\sin\left(\frac{1}{2}\partial_\mu^{(y)}\sigma^{\mu\nu}\partial_\nu^{(z)}\right)}{\frac{1}{2}\partial_\mu^{(y)}\sigma^{\mu\nu}\partial_\nu^{(z)}}\frac{1}{2}\sigma^{\mu\nu}\partial_\mu f(x+y)\partial_\nu g(x+z)|_{y=z=0} =: \frac{1}{2}\sigma^{\mu\nu}\partial_\mu f \star' \partial_\nu g(x) \tag{3.12}$$

schreiben. Wegen der Antisymmetrie von $\sigma$ gilt dann

$$\frac{1}{2}\sigma^{\mu\nu}\partial_\mu\left(f\star'\partial_\nu g\right) = \frac{1}{2}\sigma^{\mu\nu}\partial_\nu\left(\partial_\mu f\star' g\right) = [f,g]_\star.$$

Somit lässt sich die rechte Seite von (3.11) zum Beispiel auch folgendermaßen ausdrücken:

$$\partial_\mu t^{\mu\nu} := \partial_\mu\frac{\lambda}{4!}\frac{1}{2}\sigma^{\mu\rho}\left([\phi,\partial^\nu\phi]_\star\star'\partial_\rho(\phi\star\phi)\right). \tag{3.13}$$

Man erhält so einen erhaltenen Energie-Impuls-Tensor

$$T'^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} - t^{\mu\nu}. \tag{3.14}$$

Nun ist es nicht weiter erstaunlich, dass es möglich ist, einen erhaltenen Energie-Impuls-Tensor zu konstruieren. Man muss lediglich die rechte Seite von (3.11) auf geeignete Weise integrieren. So scheint auch die eben vorgestellte Konstruktion zu funktionieren (man beachte die inverse Ableitung in der Definition (3.12) des $\star'$-Produkts). Ähnlich wurde in nichtlokalen Theorien vorgegangen (vergleiche (4.10) in [24]). Nun ist Integration eine nichtlokale Operation. Es stellt sich also die Frage, ob der so konstruierte Energie-Impuls-Tensor noch eine lokale Funktion des Feldes ist. In Kapitel 5 wird ein Lokalitätsbegriff für nichtkommutative Feldtheorien entwickelt, so dass es im Prinzip möglich ist, diese Frage zu beantworten. Leider erweist sich die konkrete Überprüfung der Lokalität in diesem Fall als recht kompliziert. Ich bin in dieser Frage zu keiner abschließenden Antwort gelangt.

## 3.5 Phänomenologie

In den letzten Abschnitten sollte deutlich geworden sein, dass nichtkommutative Feldtheorien noch nicht wirklich verstanden sind. Dennoch wurden bereits viele Möglichkeiten diskutiert, eine mögliche Nichtkommutativität der Raumzeit experimentell nachzuweisen oder auszuschließen. Meistens wird dabei, motiviert von der Stringtheorie, von Vertauschungsrelationen der Form (1.4) mit $\sigma^{\mu\nu} = \lambda_{NC}\theta^{\mu\nu}$ ausgegangen und nach Effekten der Brechung der Lorentzinvarianz gesucht. Hier hat $\theta$ Einträge der Größenordnung 1 und $\lambda_{NC}$ ist die Längenskala der Nichtkommutativität. Nach der Motivation der Nichtkommutativität über die Raumzeit-Unschärfen wäre zu erwarten, dass $\lambda_{NC}$ von der Größenordnung der Plancklänge ist. Falls die Nichtkommutativität jedoch durch die Stringtheorie induziert wird, könnte $\lambda_{NC}$ auch viel größer sein.

Ein möglicher Effekt der Brechung der Lorentz-Invarianz wären zum Beispiel Tag-Nacht-Asymmetrien in Beschleunigerexperimenten. In $e^+e^-$-Experimenten sollten diese zu sehen sein, wenn die Schwerpunktsenergie von der Größenordnung der Nichtkommutativitätsskala $\Lambda_{NC} = \lambda_{NC}^{-1}$ ist. So versucht man, untere Schranken für $\Lambda_{NC}$ zu finden. Die entsprechenden phänomenologischen Rechnungen wurden üblicherweise mit den modifizierten Feynman-Regeln und nur in führender Ordnung durchgeführt. Man findet eine azimutale Abhängigkeit des differentiellen Wirkungsquerschnitts. Der totale Wirkungsquerschnitt oszilliert leicht in Abhängigkeit von der Schwerpunktsenergie $\sqrt{s}$, verhält sich aber im Wesentlichen wie üblich proportional zu $s^{-\frac{1}{2}}$. Einen Überblick über diese Arbeiten bietet zum Beispiel [27].

Wie wir im vorigen Kapitel gesehen haben, führt eine Nichtkommutativität der Raumzeit nicht zwangsläufig zu einer Brechung der Lorentzinvarianz. Es ist deshalb interessant, nach Effekten der nichtkommutativen Feldtheorie zu suchen, die davon unabhängig sind. Das auffälligste Phänomen ist hier die Modifizierung der Eichtheorien [28]. So wird etwa die nichtkommutative Elektrodynamik eine nichtabelsche, also selbstwechselwirkende, Theorie. Außerdem können dann auch neutrale Teilchen an das Photon koppeln. Somit sind Prozesse möglich, die nach dem Standardmodell nicht erlaubt wären. Zum Beispiel könnte in einem dichten Medium ein Photon in zwei Neutrinos zerfallen, was sich in der Energiebilanz von Sternen bemerkbar machen sollte. Aus der Forderung, dass dieser Verlustmechanismus nicht stärker ist als der Standard-Verlustmechanismus durch Neutrinos, wird in [29] eine untere Schranke $\Lambda_{NC} > 81\text{GeV}$ hergeleitet.

Eine phänomenologische Rechnung, die nicht auf den modifizierten Feynman-Regeln, sondern auf dem Hamilton-Formalismus beruht, wurde in [30] vorgestellt. Es wurden $e^+e^- \to \mu^+\mu^-, H^+H^-, H^0H^0$- Wirkungsquerschnitte in unterster Ordnung berechnet. Die Ergebnisse weichen stark von denen ab, die man mit den modifizierten Feynman-Regeln erhält. So steigt zum Beispiel der totale $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$-Wirkungsquerschnitt für Schwerpunktsenergien $\sqrt{s} \geq \Lambda_{NC}$ linear in $\sqrt{s}$ an, statt, wie üblich, proportional zu $s^{-\frac{1}{2}}$ abzufallen.

# Kapitel 4

# Wirkungsprinzip für nichtkommutative Feldtheorien

Die Möglichkeit, Bewegungsgleichungen aus einem Wirkungsprinzip abzuleiten, ist fundamental für die moderne Physik. Deshalb ist es wünschenswert, auch für nichtkommutative Feldtheorien ein Wirkungsprinzip zu formulieren. Die größte Schwierigkeit besteht darin, dass zur Formulierung des Wirkungsprinzips für kommutative Feldtheorien das Konzept von "Abschneidefunktionen" mit kompaktem Träger eine wesentliche Rolle spielt. Es ist nicht klar, was das nichtkommutative Analogon dazu sein soll. Eine naive Definition des Abschneidens über die Weyl-Symbole führt zu einem Integral, das nicht positiv ist. Wir gehen deshalb in diesem Kapitel so vor, dass wir das Konzept von Abschneidefunktionen algebraisch charakterisieren, und zwar als ein Ideal der Feldalgebra, auf dem die Spur definiert ist. Wir erhalten Bedingungen an die topologische Struktur der Feldalgebra und des Ideals der Abschneidefunktionen, die hinreichend sind, um ein Wirkungsprinzip zu formulieren und daraus Bewegungsgleichungen herzuleiten.

In Abschnitt 4.1 wird als Beispiel die Bewegungsgleichung für ein wechselwirkendes skalares Feld hergeleitet. In Abschnitt 4.2 wird untersucht, welche algebraischen und topologischen Eigenschaften bei dieser Herleitung benutzt werden. Dies führt zu einer abstrakten Definition des Wirkungsprinzips. In Abschnitt 4.3 wird das Noether-Theorem in diesem abstrakten Rahmen formuliert. Schließlich wird in Abschnitt 4.4 eine konkrete nichtkommutative Feldalgebra vorgestellt, die die in Abschnitt 4.2 formulierten Anforderungen erfüllt und eine skalare Feldtheorie auf dem nichtkommutativen Minkowski-Raum beschreibt.

In diesem Kapitel spielen Algebren mit lokal konvexer Topologie eine große Rolle. Eine Zusammenfassung der wichtigsten Definitionen und Sätze aus der Theorie lokal konvexer Räume findet sich in Anhang A.

## 4.1 Herleitung der Bewegungsgleichungen für $\phi^4$-Theorie

Wir betrachten als Beispiel eine komplexe, skalare $\phi^4$-Theorie, das heißt die Lagrangedichte sei gegeben durch

$$L[\phi^*, \phi](x) := \frac{1}{2}\partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi(x) - \frac{m^2}{2}\phi^*\phi(x) - \frac{\lambda}{4!}(\phi^*\phi)^2(x).$$

Die Wirkung ist das Integral über die Lagrangedichte. Da unsere Felder aber beliebige glatte Funktionen sein können ist das Integral über die gesamte Raumzeit im Allgemeinen nicht definiert. Wir verwenden deshalb eine glatte, reelle Funktion $g$ mit kompaktem Träger ("Abschneidefunktion") und setzen

$$S_g[\phi^*, \phi] := \int \mathrm{d}x\ g(x)L[\phi^*, \phi](x).$$

Ausserdem definieren wir die Funktionalableitung

$$\langle\frac{\delta S_g}{\delta\phi}[\phi^*, \phi], \phi'\rangle := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}S_g[\phi^*, \phi + \epsilon\phi']|_{\epsilon=0}$$

für alle glatten $\phi'$ mit kompaktem Träger. In unserem Fall ergibt sich

$$\begin{aligned}\langle\frac{\delta S_g}{\delta\phi}[\phi^*, \phi], \phi'\rangle &= \frac{1}{2}\int \mathrm{d}x\ g(x)\left(\partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi'(x) - m^2\phi^*\phi'(x) - \frac{\lambda}{3!}\phi^{*2}\phi\phi'(x)\right)\\ &= -\frac{1}{2}\int \mathrm{d}x\ \phi'(x)\left(\partial^\mu(g\partial_\mu\phi^*)(x) + m^2g\phi^*(x) + \frac{\lambda}{2}g\phi^{*2}\phi(x)\right).\end{aligned}$$

Die bei der partiellen Integration auftretende Divergenz verschwindet, da das Integral über die Ableitung einer glatten Funktion mit kompaktem Träger verschwindet.

Wir wählen nun eine Folge $g_n$ von glatten Funktionen mit kompaktem Träger, die, mitsamt allen Ableitungen, auf jedem Kompaktum gleichmäßig gegen die Einsfunktion konvergiert. Da $\phi'$ kompakten Träger hat, gilt somit

$$\lim_{n\to\infty}\langle\frac{\delta S_{g_n}}{\delta\phi}[\phi^*, \phi], \phi'\rangle = -\frac{1}{2}\int \mathrm{d}x\ \phi'(x)\left(\Box\phi^*(x) + m^2\phi^*(x) + \frac{\lambda}{3!}\phi^{*2}\phi(x)\right). \tag{4.1}$$

Für Lösungen der Bewegungsgleichung soll die Wirkung extremal sein. Präziser formuliert soll sie stationär sein unter Feldvariationen $\phi'$ mit kompaktem Träger. Wir fordern also, dass (4.1) für alle $\phi'$ verschwindet. Aus der Tatsache dass für glatte $\phi$

$$\left(\int \mathrm{d}x\ \phi(x)\psi(x) = 0 \quad \forall\psi \text{ glatt, mit kompaktem Träger}\right) \Rightarrow \phi = 0 \tag{4.2}$$

gilt, folgt die Bewegungsgleichung

$$\Box\phi^*(x) + m^2\phi^*(x) + \frac{\lambda}{3!}\phi^{*2}\phi(x) = 0. \tag{4.3}$$

Analog erhält man mit der Funktionalableitung nach $\phi^*$ die Bewegungsgleichung für $\phi$. Da die Wirkung reell ist, ist sie gerade das konjugierte von (4.3).

## 4.2 Abstrakte Formulierung des Wirkungsprinzips

In diesem Abschnitt soll anhand des Beispiels im vorigen Abschnitt versucht werden, die wesentlichen Voraussetzungen zur Definition eines Wirkungsprinzips und der Ableitung der Bewegungsgleichung möglichst abstrakt zu formulieren.

Eine wesentliche Voraussetzung ist natürlich, dass wir die Menge der Objekte der Theorie, in unserem Fall die Felder, kennen. Es sollte sich dabei um eine Algebra $\mathcal{A}$ handeln, damit man durch Multiplikation und Addition eine Lagrangedichte bilden kann. In unserem Beispiel ist das die $*$-Algebra $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ der glatten, komplexwertigen Funktionen auf der Raumzeit mit punktweisem Produkt als Algebraprodukt. Sie trägt eine lokal konvexe Topologie, die der gleichmäßigen Konvergenz aller Ableitungen auf allen Kompakta, und ist in dieser vollständig (siehe Anhang A). Die Multiplikation ist in dieser Topologie stetig (Anhang A). Für unsere Zwecke (in (4.1)) benötigen wir aber nur die separate Stetigkeit der Multiplikation. Wichtig ist auch, dass $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ die Einsfunktion enthält. Wir fordern also, dass die Felder eine unitale $*$-Algebra $\mathcal{A}$ mit lokal konvexer Topologie bilden, in der $\mathcal{A}$ vollständig und die Multiplikation separat stetig ist.

In unserem Beispiel benötigten wir zur Definition der Wirkung das Integral. Dessen Verallgemeinerung ist die Spur, das heißt ein positives, zyklisches Funktional auf der Algebra. In unserem Fall ist die Spur nicht beschränkt, allerdings existiert ein $*$-Ideal $\mathcal{I}$, in unserem Beispiel der Raum $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ der Testfunktionen, auf dem sie definiert ist. $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ selbst trägt auch eine lokal konvexe Topologie und ist in dieser vollständig. Das Integral ist stetig in der Topologie von $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Darüber hinaus liegt $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ dicht in $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ und die Inklusion $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ ist stetig (siehe Anhang A). Für festes $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ist auch die Multiplikation $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n) \ni \phi \mapsto \phi g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ stetig. Wir fordern also die Existenz eines dichten Ideals $\mathcal{I}$, auf dem die Spur als positives, stetiges Funktional definiert ist. Aus der Dichtheit folgt die Existenz einer Folge von $g_n \in \mathcal{I}$, die in $\mathcal{A}$ gegen die Eins konvergiert[1]. Ausserdem fordern wir, dass analog zu (4.2) für $\phi \in \mathcal{A}$

$$(\mathrm{Tr}(\phi\psi) = 0 \quad \forall \psi \in \mathcal{I}) \Rightarrow \phi = 0 \tag{4.4}$$

gilt. Wir fordern darüber hinaus die Existenz einer lokal konvexen Topologie auf $\mathcal{I}$, in der $\mathcal{I}$ vollständig und die Inklusion $\mathcal{I} \to \mathcal{A}$ und die Abbildung $\mathcal{A} \ni \phi \mapsto \phi\phi' \in \mathcal{I}$ für alle $\phi' \in \mathcal{I}$ stetig sind. Der Sinn dieser Forderungen wird im Folgenden klar werden.

Wichtig für die Herleitung der Bewegungsgleichungen war ja auch, dass man partiell integrieren kann und dabei die Randterme wegfallen. Das liegt daran, dass die Ableitungen über die Ableitung der Translationen $(\tau_\mu(s)\phi)(x) := \phi(x - se^\mu)$ definiert sind,

$$\partial_\mu \phi := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\tau_\mu(-s)\phi|_{s=0} = \lim_{s\to 0}\frac{\tau_\mu(-s)\phi - \phi}{s},$$

und die Translationen das Integral invariant lassen,

$$\int \mathrm{d}^n x\ (\tau_\mu(s)\phi)(x) = \int \mathrm{d}^n x\ \phi(x) \qquad \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), s \in \mathbb{R}^n$$

[1]Da wir es hier mit lokal konvexen Räumen zu tun haben, wäre es natürlicher, die Dichtheit lediglich über die Existenz eines konvergenten Netzes zu definieren (vgl. Anhang A). Im konkreten Beispiel aus dem vorangegangenen Abschnitt, und auch bei der in Abschnitt 4.4 eingeführten nichtkommutativen Feldalgebra, liegt $\mathcal{I}$ aber sogar im Sinne der Folgenkonvergenz dicht in $\mathcal{A}$.

und

$$\tau_\mu(s)(\phi\psi)(x) = ((\tau_\mu(s)\phi)(\tau_\mu(s)\psi))\,(x).$$

erfüllen. Wir fordern also die Existenz von Ein-Parameter-Gruppen $\tau_\mu$ von Automorphismen von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{I}$, das heißt

$$\tau_\mu(s) : \mathcal{A} \to \mathcal{A} \qquad \text{und} \qquad \tau_\mu(s) : \mathcal{I} \to \mathcal{I}$$

sind in der jeweiligen Topologie stetig für alle $s$. Sie sollen

$$\mathrm{Tr}(\tau_\mu(s)\phi) = \mathrm{Tr}(\phi) \qquad \forall\phi \in \mathcal{I} \tag{4.5}$$

$$\tau_\mu(s)(\phi\psi) = (\tau_\mu(s)\phi)(\tau_\mu(s)\psi) \qquad \forall\phi,\psi \in \mathcal{A} \tag{4.6}$$

$$\tau_\mu(s)(\phi^*) = (\tau_\mu(s)\phi)^* \qquad \forall\phi \in \mathcal{A} \tag{4.7}$$

erfüllen. Ausserdem sollen sie differenzierbar sein, das heißt die Abbildung

$$\phi \mapsto \partial_\mu\phi := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\tau_\mu(-s)\phi|_{s=0} = \lim_{s\to 0}\frac{\tau_\mu(-s)\phi - \phi}{s} \tag{4.8}$$

soll sowohl in $\mathcal{A}$ als auch in $\mathcal{I}$ definiert und stetig sein. Wegen der Vollständigkeit von $\mathcal{I}$ gilt dann

$$\partial_\mu\phi \in \mathcal{I} \qquad \forall\phi \in \mathcal{I}.$$

Aus (4.5) – (4.7) folgt dann

$$\mathrm{Tr}(\partial_\mu\phi) = 0 \qquad \forall\phi \in \mathcal{I} \tag{4.9}$$

$$\partial_\mu(\phi\psi) = \partial_\mu\phi\psi + \phi\partial_\mu\psi \qquad \forall\phi,\psi \in \mathcal{A} \tag{4.10}$$

$$\partial_\mu(\phi^*) = (\partial_\mu\phi)^* \qquad \forall\phi \in \mathcal{A}$$

Mit Hilfe der Leibniz-Regel (4.10) kann man nun partiell integrieren, und wenn $\phi$ oder $\psi$ in $\mathcal{I}$ liegt, verschwinden dabei wegen (4.9) die Randterme.

Schließlich stellen wir die Forderung, dass die Lagragedichte durch Polynome von $\phi, \phi^*$ und deren Ableitungen gegeben ist. Darüber hinaus soll sie reell sein, das heißt

$$L[\psi^*, \phi]^* = L[\phi^*, \psi]$$

erfüllen.

Wenn wir nun $\mathcal{A}, \mathcal{I}, \{g_n\}, L$ wie gefordert gegeben haben, sagen wir, dass $\phi \in \mathcal{A}$ die Bewegungsgleichung erfüllt, wenn

$$\lim_n \langle \frac{\delta S_{g_n}}{\delta\phi^*}[\phi^*, \phi], \phi'^* \rangle = 0 \qquad \forall\phi'^* \in \mathcal{I}$$

gilt.

Dass man so die üblichen Bewegungsgleichungen erhält, wollen wir an einem konkreten Beispiel überprüfen. Wir betrachten wiederum eine komplexe $\phi^4$-Theorie, das heißt es sei

$$L[\phi^*, \phi] := \frac{1}{2}\partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi - \frac{m^2}{2}\phi^*\phi - \frac{\lambda}{4!}(\phi^*\phi)^2. \tag{4.11}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}\lim_n \langle \frac{\delta S_{g_n}}{\delta \phi^*}[\phi^*,\phi], \phi'^* \rangle &= \lim_n \mathrm{Tr}\left( g_n \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon} L[\phi^* + \epsilon \phi'^*, \phi] \right) \\ &= \frac{1}{2} \lim_n \mathrm{Tr}\left\{ g_n \left( \partial_\mu \phi'^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi'^* \phi - \frac{2\lambda}{4!}(\phi'^* \phi \phi^* \phi + \phi^* \phi \phi'^* \phi) \right) \right\} \qquad (4.12) \\ &= -\frac{1}{2} \lim_n \mathrm{Tr}\left\{ \phi'^* \left( \partial_\mu (\partial^\mu \phi g_n) + m^2 \phi g_n + \frac{2\lambda}{4!}(\phi \phi^* \phi g_n + \phi g_n \phi^* \phi) \right) \right\} \qquad (4.13) \\ &= -\frac{1}{2} \mathrm{Tr}\left\{ \phi'^* \left( \Box \phi + m^2 \phi + \frac{\lambda}{3!} \phi \phi^* \phi \right) \right\}. \qquad (4.14)\end{aligned}$$

Dabei wurde von (4.12) auf (4.13) partiell integriert ((4.9) und (4.10)) und die Zyklizität der Spur benutzt. Beim Schritt von (4.13) auf (4.14) wurde die separate Stetigkeit der Multiplikation in $\mathcal{A}$, die Stetigkeit der Ableitung auf $\mathcal{A}$, die Stetigkeit von $\mathcal{A} \ni \phi \mapsto \phi' \phi \in \mathcal{I}$ für alle $\phi' \in \mathcal{I}$ und die Stetigkeit der Spur auf $\mathcal{I}$ benutzt. Mit (4.4) ergibt sich die Bewegungsgleichung

$$\Box \phi + m^2 \phi + \frac{\lambda}{3!} \phi \phi^* \phi = 0.$$

Aufgrund der Hermitizität der Lagrangedichte gilt

$$\langle \frac{\delta S_{g_n}}{\delta \phi^*}[\phi^*,\phi], \phi'^* \rangle = \langle \frac{\delta S_{g_n}}{\delta \phi}[\phi^*,\phi], \phi' \rangle^*,$$

somit liefert die Variation von $\phi$ die konjugierte Bewegungsgleichung.

Wenn wir nun eine Algebra $\mathcal{A}$ mit den geforderten Eigenschaften gegeben haben, so kann man die Frage stellen, ob sich auf ihr auch reelle nichtkommutative Feldtheorien definieren lassen. Hier ist zunächst zu beachten, dass für nichtkommutative Algebren die Menge der hermiteschen Elemente im Allgemeinen keine Unteralgebra bildet, denn für hermitesche $\phi, \psi$ gilt

$$(\phi\psi)^* = \psi^* \phi^* = \psi\phi \neq \phi\psi.$$

Auf der Menge der hermiteschen Elemente lassen sich aber problemlos hermitesche Lagrangedichten definieren, zum Beispiel

$$L[\phi] := \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi\phi - \frac{\lambda}{3!} \phi\phi\phi. \qquad (4.15)$$

Das Wirkungsprinzip kann man nun ganz analog formulieren, man beschränkt sich nun natürlich auf hermitesche Variationen $\phi' \in \mathcal{I}$. Zu überprüfen ist dann, ob Bedingung (4.4) auch bei Beschränkung auf hermitesche $\psi \in \mathcal{I}$ gilt. Das ist der Fall, da sich jedes $\psi \in \mathcal{I}$ in Real- und Imaginärteil zerlegen lässt, die beide hermitesch sind und in $\mathcal{I}$ liegen. Wenn wir also $\mathcal{A}, \mathcal{I}, \{g_n\}$ wie gefordert gegeben haben, so lässt sich, analog zur eben durchgeführten Rechnung, aus der Lagrangedichte (4.15) die Bewegungsgleichung

$$\Box \phi + m^2 \phi + \frac{\lambda}{2} \phi^2 = 0$$

ableiten.

## 4.3 Das Noether-Theorem

In dem im vorigen Abschnitt entwickelten Rahmen lässt sich auch das Noether-Theorem formulieren.

**Definition 4.1.** Sei $\alpha_s$ eine differenzierbare Ein-Parameter-Gruppe von Automorphismen von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{I}$. Wir nennen $\alpha$ eine *kontinuierliche Symmetrietransformation*, wenn es eine differenzierbare Ein-Parameter-Gruppe $\beta_s$ von Automorphismen von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{I}$ gibt, die die Eigenschaften (4.5 – 4.8) erfüllt, und für die

$$S_{\beta_s(g)}[\alpha_s(\phi)^*, \alpha_s(\phi)] = S_g[\phi^*, \phi] \qquad \forall g \in \mathcal{I}, \phi \in \mathcal{A}, s \in \mathbb{R}. \tag{4.16}$$

gilt.

**Satz 4.2.** *Sei $\alpha_s$ eine kontinuierliche Symmetrietransformation und $\phi$ eine Lösung der Bewegungsgleichung. Dann ist auch $\alpha_s(\phi)$ für alle $s \in \mathbb{R}$ eine Lösung der Bewegungsgleichung.*

*Beweis.* Aus (4.16) folgt

$$\langle \frac{\delta S_{\beta_s(g_n)}}{\delta \phi^*}[\alpha_s(\phi)^*, \alpha_s(\phi)], \alpha_s(\phi')^* \rangle = \langle \frac{\delta S_{g_n}}{\delta \phi^*}[\phi^*, \phi], \phi'^* \rangle.$$

Da $\beta$ nach Voraussetzung (4.7) erfüllt, gilt $\beta_s(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$, somit ist auch $g'_n := \beta_s(g_n)$ eine gegen $\mathbb{1}$ konvergente Folge. Somit gilt für eine Lösung $\phi$ der Bewegungsgleichung und für alle $\phi' \in \mathcal{I}$

$$\lim_n \langle \frac{\delta S_{g'_n}}{\delta \phi^*}[\alpha_s(\phi)^*, \alpha_s(\phi)], \alpha_s(\phi')^* \rangle = \lim_n \langle \frac{\delta S_{g_n}}{\delta \phi^*}[\phi^*, \phi], \phi'^* \rangle = 0.$$

Nach Voraussetzung gilt $\alpha_s(\mathcal{I}) = \mathcal{I}$. Daraus folgt die Behauptung. □

Nun wollen wir der Frage nachgehen, ob man, wie im kommutativen Fall, jeder kontinuierlichen Symmetrietransformation eine Erhaltungsgrösse zuordnen kann (Noether-Theorem). Sei also $\alpha$ eine kontinuierliche Symmetrietransformation, dann gilt

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} S_{\beta_s(g)}[\alpha_s(\phi)^*, \alpha_s(\phi)]|_{s=0} = S_{\dot{\beta}(g)}[\phi^*, \phi] + \langle \frac{\delta S_g}{\delta \phi^*}[\phi^*, \phi], \dot{\alpha}(\phi)^* \rangle + \langle \frac{\delta S_g}{\delta \phi}[\phi^*, \phi], \dot{\alpha}(\phi) \rangle.$$

Dabei wurde $\dot{\alpha}(\phi) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\alpha_s(\phi)|_{s=0}$ gesetzt.

Wir wählen als Beispiel wiederum die komplexe $\phi^4$-Theorie (4.11). Man erhält

$$\begin{aligned}
0 =&\mathrm{Tr}\left(\dot\beta(g)L[\phi^*,\phi]\right)+\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(g\left(\partial_\mu\dot\alpha(\phi)^*\partial^\mu\phi-m^2\dot\alpha(\phi)^*\phi-\frac{2\lambda}{4!}(\dot\alpha(\phi)^*\phi\phi^*\phi+\phi^*\phi\dot\alpha(\phi)^*\phi)\right)\right)\\
&+\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(g\left(\partial_\mu\phi^*\partial^\mu\dot\alpha(\phi)-m^2\phi^*\dot\alpha(\phi)-\frac{2\lambda}{4!}(\phi^*\dot\alpha(\phi)\phi^*\phi+\phi^*\phi\phi^*\dot\alpha(\phi))\right)\right)\\
=&-\mathrm{Tr}\left(g\dot\beta(L[\phi^*,\phi])\right)-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left((\partial_\mu g)(\dot\alpha(\phi)^*\partial^\mu\phi+\partial^\mu\phi^*\dot\alpha(\phi))\right)\\
&-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(g\dot\alpha(\phi)^*\left((\Box+m^2)\phi+\frac{\lambda}{3!}\phi\phi^*\phi\right)\right)-\frac{\lambda}{4!}\mathrm{Tr}\left(g[\phi^*\phi,\dot\alpha(\phi)^*\phi]\right)\\
&-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(g\left((\Box+m^2)\phi^*+\frac{\lambda}{3!}\phi^*\phi\phi^*\right)\dot\alpha(\phi)\right)-\frac{\lambda}{4!}\mathrm{Tr}\left(g[\phi^*\dot\alpha(\phi),\phi^*\phi]\right)\\
=&\mathrm{Tr}\left(g\left(-\dot\beta(L[\phi^*,\phi])+\frac{1}{2}\partial_\mu(\dot\alpha(\phi)^*\partial^\mu\phi+\partial^\mu\phi^*\dot\alpha(\phi))-\frac{2\lambda}{4!}\Re[\phi^*\dot\alpha(\phi),\phi^*\phi]\right)\right). \qquad (4.17)
\end{aligned}$$

Hier wurde ausgenutzt, dass $\dot\beta$ (4.9) und (4.10) erfüllt, und angenommen, dass $\phi$ eine Lösung der Bewegungsgleichung ist. Die Gleichung soll für alle $g\in\mathcal{I}$ gelten, es folgt somit

$$-\dot\beta(L[\phi^*,\phi])+\frac{1}{2}\partial_\mu(\dot\alpha(\phi)^*\partial^\mu\phi+\partial^\mu\phi^*\dot\alpha(\phi))-\frac{2\lambda}{4!}\Re[\phi^*\dot\alpha(\phi),\phi^*\phi]=0.$$

Die ersten beiden Terme sind aus der kommutativen Feldtheorie bekannt. Der dritte Term aber ist neu. Er tritt offenbar nur in wechelwirkenden Theorien auf und ist nur dann von Null verschieden, wenn $\dot\alpha(\phi)$ kein Vielfaches von $\phi$ ist. Er ist auch nicht in der Form einer Divergenz gegeben, so dass man ihn als Quellterm interpretieren würde. Man sieht also, dass in nichtkommutativen Theorien einer kontinuierlichen Symmetrie im Allgemeinen keine Erhaltungsgröße zugeordnet werden kann.

Nun ist auch klar, wo der Haken an der "Herleitung" des Noether-Theorems in [11] ist. Bereits die Annahme (3.9) ist falsch, wie man durch Vergleich mit (4.17) sieht. Das $g$ dort entspricht dem $\epsilon$ in (3.9).

Wir wollen zwei konkrete Beispiele betrachten. Sei zunächst $\alpha_s(\phi):=e^{is}\phi$. Dann ist für $\beta_s=\mathrm{id}$ die Bedingung (4.16) offenbar erfüllt. Es gilt $\dot\alpha(\phi)=i\phi$ und $\dot\beta(\phi)=0$. Wir erhalten somit

$$\frac{1}{2}\partial_\mu(-i\phi^*\partial^\mu\phi+i\partial^\mu\phi^*\phi)=0,$$

also die übliche Stromerhaltung. Betrachten wir nun Raumzeittranslationen, das heißt $\alpha_s:=\tau_\nu(s)$. Für $\beta_s:=\tau_\nu(s)$ ist Bedingung (4.16) erfüllt. Es gilt $\dot\alpha(\phi)=\dot\beta(\phi)=-\partial_\nu\phi$ und man erhält

$$\partial_\mu\left(\frac{1}{2}(\partial_\nu\phi^*\partial^\mu\phi+\partial^\mu\phi^*\partial_\nu\phi)-\delta^\mu_\nu L[\phi^*,\phi]\right)=\frac{2\lambda}{4!}\Re[\phi^*\partial_\nu\phi,\phi^*\phi]. \qquad (4.18)$$

Auf der rechten Seite steht die Divergenz des üblichen Energie-Impuls-Tensors. Die linke Seite verschwindet im Allgemeinen nicht.

Man kann natürlich auch Erhaltungsgrößen für reelle nichtkommutative Theorien betrachten. Für die reelle $\phi^4$-Theorie ist die Divergenz des Energie-Impuls-Tensors zum Beispiel durch (3.11) gegeben.

## 4.4 Die nichtkommutative Feldalgebra $\mathcal{M}$

In diesem Abschnitt soll eine nichtkommutative Feldalgebra vorgestellt werden, die die in Abschnitt 4.2 formulierten Bedingungen für die Formulierung einer skalaren nichtkommutativen Feldtheorie erfüllt. Zunächst sieht man, dass die Algebra $\mathcal{E}_\sigma$, die die Nichtkommutative Raumzeit beschreibt, nicht in Frage kommt, da sie nicht abgeschlossen unter Ableitungen ist und kein Einselement enthält. Auch sind die einfachsten Lösungen der Feldgleichung, die ebenen Wellen, nicht in $\mathcal{E}_\sigma$ enthalten. Das ist aber auch nicht weiter verwunderlich, da das bereits im kommutativen Fall so ist. Die Algebra der stetigen, im Unendlichen verschwindenden Funktionen auf dem $\mathbb{R}^4$, die den kommutativen Minkowski-Raum beschreibt, ist nicht abgeschlossen unter Ableitungen und enthält weder die Eins noch die ebenen Wellen. Stattdessen wählt man dort, wie in Abschnitt 4.2 besprochen, die Algebra $\mathcal{E}(\mathbb{R}^4)$ als Feldalgebra. In diesem Abschnitt wollen wir ihr nichtkommutatives Analogon vorstellen.

$\mathcal{E}_\sigma$ ist isomorph zu $\mathcal{K}(L^2(\mathbb{R}^2))$. Wir betrachten nun stetige Operatoren auf einem dichten Teilraum von $L^2(\mathbb{R}^2)$, nämlich dem Schwartzraum $\mathcal{S}_1 := \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$. Sie bilden die Algebra $\mathcal{L}(\mathcal{S}_1)$. Wenn man $\mathcal{S}_1$ mit dem $L^2$-Skalarprodukt versieht, gilt $\mathcal{L}(\mathcal{S}_1)^* \subset \mathcal{L}(\mathcal{S}_1')$. Hier bezeichnet $\mathcal{S}_1'$ den Raum der temperierten Distributionen auf $\mathbb{R}^2$. Wir setzen $\mathcal{M} := \mathcal{L}(\mathcal{S}_1) \cap \mathcal{L}(\mathcal{S}_1)^*$, das heißt

$$\mathcal{M} := \{\phi \in \mathcal{L}(\mathcal{S}_1) | \phi^* \in \mathcal{L}(\mathcal{S}_1)\}.$$

$\mathcal{M}$ ist offensichtlich eine $*$-Algebra. $\mathcal{L}(\mathcal{S}_1)$ trägt eine natürliche, lokal konvexe Topologie, die der gleichmäßigen Konvergenz auf beschränkten Teilmengen. In Anhang A wird gezeigt, dass $\mathcal{L}(\mathcal{S}_1)$ in dieser Topologie vollständig und die Multiplikation hypostetig ist, das heißt stetig bei Einschränkung eines der beiden Argumente auf eine beschränkte Teilmenge von $\mathcal{L}(\mathcal{S}_1)$. Auf $\mathcal{L}(\mathcal{S}_1)^*$ wählen wir die Topologie so, dass $* : \mathcal{L}(\mathcal{S}_1) \to \mathcal{L}(\mathcal{S}_1)^*$ ein Homöomorphismus ist. Offensichtlich ist dann auch $\mathcal{L}(\mathcal{S}_1)^*$ vollständig mit hypostetiger Multiplikation. Die Topologie auf $\mathcal{M}$ sei dann die schwächste Topologie, so dass die Inklusionen $\mathcal{M} \to \mathcal{L}(\mathcal{S}_1), \mathcal{L}(\mathcal{S}_1)^*$ stetig sind (projektive Topologie). Es handelt sich wiederum um eine lokal konvexe Topologie, in der $\mathcal{M}$ vollständig und die Multiplikation hypostetig ist. Offensichtlich enthält $\mathcal{M}$ auch ein Einselement.

Um das Ganze etwas anschaulicher zu machen, wollen wir die Koordinatenoperatoren $q^\mu$ wie in (2.9) wählen. Das geht, da die Orts- und Impulsoperatoren $Q_{1,2}$ und $P_{1,2}$ in $\mathcal{M}$ liegen. Wie im kommutativen Fall liegen also auch die Koordinatenfunktionen und Polynome davon in der Feldalgebra. Auch die ebenen Wellen $e^{ikq}$ liegen in $\mathcal{M}$.

In [17] wird eine Charakterisierung des Funktionenraums der Weyl-Symbole von $\mathcal{M}$ versucht, sie gelingt jedoch nicht vollständig.

Die Menge der Elemente von $\mathcal{M}$, deren Integralkern in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$ liegt, nennen wir $\mathcal{S}_2$. Es handelt sich um ein dichtes, beidseitiges $*$-Ideal (Bemerkung A.27). Wir versehen $\mathcal{S}_2$ mit einer lokal konvexen Topologie, und zwar so, dass die Abbildung auf den Integralkern ein Homöomorphismus $\mathcal{S}_2 \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$ ist. In dieser Topologie ist $\mathcal{S}_2$ vollständig und die Inklusion stetig. Auch die Abbildungen $\mathcal{M} \ni \phi \mapsto g\phi, \phi g \in \mathcal{S}_2$ sind für alle $g \in \mathcal{S}_2$ stetig (Bemerkung A.27).

Ein Beispiel für eine Folge von positiven Elementen von $\mathcal{S}_2$, die in $\mathcal{M}$ gegen die Eins

konvergiert, sind die Projektoren

$$P_N := \sum_{|n|=0}^{N} |n\rangle\langle n|.$$

Dabei ist $n$ ein Doppelindex und $|n\rangle$ bezeichnet die Eigenzustände des harmonischen Oszillators. Die Möglichkeit, Abschneidefunktionen durch Integrale über Projektoren auf kohärente Zustände zu definieren, wird im nächsten Kapitel behandelt.

Auf $\mathcal{S}_2$ ist eine Spur definiert durch

$$\mathrm{Tr}\phi := \int \mathrm{d}^2x \; I_\phi(x,x).$$

Hier bezeichnet $I_\phi$ den Integralkern von $\phi$. Sie erfüllt die Bedingung (4.4). Denn angenommen, es existiert ein $\psi \neq 0$, für das $\mathrm{Tr}(\psi\phi) = 0 \; \forall \phi \in \mathcal{S}_2$ gilt. Da $\psi \neq 0$ ist, gibt es ein $f \in \mathcal{S}_1$ mit $\psi(f) = g \neq 0$. Setzen wir nun $\phi := |f\rangle\langle g| \in \mathcal{S}_2$, so gilt $\mathrm{Tr}(\psi\phi) = \|g\|^2 \neq 0$, Widerspruch.

Interessant ist nun die Frage, ob sich kommutierende Translationen finden lassen, die die Bedingungen (4.5 – 4.8) erfüllen. Aus der Zyklizität der Spur folgt, dass man für eine Ein-Parametergruppe $\alpha$ von Elementen von $\mathcal{M}$ durch $\beta(s)(\phi) := \alpha(s)\phi\alpha(-s)$ Translationen erhält, die die Bedingungen (4.5 – 4.8) erfüllen. Insbesondere können wir die Operatoren $D(x)$ aus (2.11) wählen. Die in (2.12) definierte Ableitung $\phi \mapsto \partial_\mu\phi$ erfüllt also alle Anforderungen, die wir an unsere Derivationen gestellt haben.

*Bemerkung* 4.3. In unserer konkreten Zuordnung der Koordinatenoperatoren gilt zum Beispiel

$$\partial_0\phi = -i[Q_1, \phi].$$

Auch die anderen Ableitungen sind durch Kommutatoren mit den Orts- oder Impulsoperatoren gegeben. Es handelt sich also um innere Derivationen. In Anhang A wird gezeigt, dass jede stetige Derivation auf $\mathcal{M}$ eine innere Derivation ist, ein Ergebnis, das für Eichtheorien auf nichtkommutativer Raumzeit interessant sein könnte.

# Kapitel 5

# Das Lokalitätsprinzip

Im vorigen Kapitel wurde die Bewegungsgleichung für nichtkommutative Feldtheorien aus einem Wirkungsprinzip hergeleitet. Wir wollen uns in diesem Kapitel mit der Lösung der Bewegungsgleichung beschäftigen. Unser Hauptaugenmerk liegt dabei auf raumzeitlich beschränkten Wechselwirkungstermen. Wir werden sehen, dass eine naive, durch das Wirkungsprinzip motivierte, Definition des raumzeitlichen Abschneidens zu nichtkausalem Ausbreitungsverhalten führt. Das Problem läßt sich jedoch durch eine leichte Modifikation der Definition beheben. Diese Modifikation ist nicht nur sehr natürlich, sie macht auch die Besonderheiten der nichtkommutativen Feldtheorie deutlich. Sie führt uns zur Definition von *lokalen Funktionalen*, die einige interessante, in der kommutativen Feldtheorie unbekannte, Eigenschaften haben.

In diesem Kapitel werden wir sehr häufig von kohärenten Zuständen und normalgeordneten Symbolen Gebrauch machen. Im ersten Abschnitt werden die dazu benötigten mathematischen Hilfsmittel vorgestellt. In Abschnitt 5.2 besprechen wir die Lösung der Bewegungsgleichung über die Cauchy-Daten. In Abschnitt 5.3 wird ein Lokalitätsbegriff für unsere nichtkommutative Feldalgebra $\mathcal{M}$ eingeführt und seine Eigenschaften untersucht. In Abschnitt 5.4 beschäftigen wir uns mit der Frage, welche Wechselwirkungsterme ein in unserem Sinne kausales Ausbreitungsverhalten haben. In Abschnitt 5.5 definieren wir lokale Funktionale und untersuchen einige ihrer Eigenschaften. Insbesondere berechnen wir mit Peierls Methode ihre Poisson-Klammer. Im letzten Abschnitt werden erste Schritte zur Quantisierung der lokalen Funktionale von freien Feldern unternommen.

## 5.1 Mathematische Hilfsmittel

In diesem Abschnitt sollen die in diesem Kaptitel benötigten mathematischen Hilfsmittel vorgestellt werden. Eine Herleitung der entsprechenden Eigenschaften findet sich in Anhang B.

Eine wichtige Rolle spielen im Folgenden die breits in Abschnitt 2.2 eingeführten kohärenten Zustände $|x)$. Für sie gilt

$$(x|y) = e^{-\frac{i}{2}\langle x,\sigma^{-1}y\rangle} e^{-\frac{1}{4}|x-y|^2},$$

sie bilden also kein Orthonormalsystem. Das Skalarprodukt fällt jedoch im euklidischen Abstand $|x-y|$ gaussförmig ab. Hier bezeichnet $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das euklidische Skalarprodukt. Die kohären-

ten Zustände bilden aber ein übervollständiges System und lassen sich zu einer "Auflösung der Eins" verwenden, das heißt es gilt

$$\int \mathrm{d}^4x \ \ket{x}\bra{x} = (2\pi)^2 \mathbb{1}.$$

Das Integral konvergiert in der Topologie von $\mathcal{M}$. Man kann somit auch die Spur als

$$\mathrm{Tr}\phi = (2\pi)^{-2} \int \mathrm{d}^4x \ \bra{x}\phi\ket{x}$$

schreiben.

Die Größe $\bra{x}\phi\ket{x}$ hat eine Nahe liegende physikalische Interpretation, wir sprechen vom *Erwartungswert* von $\phi$ an der Stelle $x$. Die Funktion

$$\phi_N(x) := \bra{x}\phi\ket{x}$$

heißt das *normalgeordnete Symbol* von $\phi$. Es handelt sich um eine auf ganz $\mathbb{C}^4$ fortsetzbare analytische Funktion. Man rechnet leicht nach, dass wie beim Weyl-Symbol Ableitung mit Symbolbildung vertauscht:

$$(\partial_\mu \phi)_N(x) = \partial_\mu \phi_N(x).$$

Die normalgeordenten Symbole kann man auch durch Faltung mit einer Gaussfunktion aus den Weylsymbolen erhalten:

$$\phi_N(x) = \int \mathrm{d}^4y \ \phi_W(y) e^{-|x-y|^2}.$$

Mit den kohärenten Zuständen läßt sich die Halbnormfamilie $\{|\cdot|_k\}_{k\in\mathbb{R}}$ auf $\mathcal{S}_1$ definieren:

$$|f|_k = \sup_{x\in\mathbb{R}^4} \left\{ \left(1+|x|^2\right)^{\frac{k}{2}} |\bra{x}f\rangle| \right\}.$$

Sie ist äquivalent zur Standard-Halbnormfamilie. Auf $\mathcal{S}_2$ definiert man für $k,l,m,n \in \mathbb{R}$ die Halbnormen

$$|\phi|_{kl} = \sup_{x,y\in\mathbb{R}^4} \left\{ \left(1+|x|^2\right)^{\frac{k}{2}} \left(1+|y|^2\right)^{\frac{l}{2}} |\bra{x}\phi\ket{y}| \right\} \tag{5.1}$$

$$\|\phi\|_{mn}^2 = \int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4y \ \left(1+|x|^2\right)^m \left(1+|y|^2\right)^n |\bra{x}\phi\ket{y}|^2 .$$

Diese Halbnorm-Familien sind wiederum äquivalent zur Standard-Halbnormfamilie auf $\mathcal{S}_2$. Offenbar gilt $g_N \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$ für $g \in \mathcal{S}_2$.

Darüber hinaus kann man zeigen, dass $\phi$ genau dann in $\mathcal{M}$ liegt, wenn es zu jedem $m$ ein $n$ und zu jedem $n$ ein $m$ gibt, so dass $\|\phi\|_{mn} < \infty$ gilt. Die $\|\cdot\|_{mn}$-Norm kann man außerdem auch mit dem normalgeordneten Symbol schreiben:

$$\|\phi\|_{mn}^2 = \int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4y \ \left(1+|x+y|^2\right)^m \left(1+|x-y|^2\right)^n e^{-\frac{1}{4}|y|^2} |\phi_N(x+i\sigma y)|^2 . \tag{5.2}$$

## 5.2 Die Feldgleichung und das Cauchy-Problem

Durch Bildung des Erwartungswertes wird aus der "algebraischen" freien Feldgleichung in $\mathcal{M}$ die übliche freie Bewegungsgleichung auf dem $\mathbb{R}^4$:

$$\Box\phi_N(x) + m^2\phi_N(x) = 0.$$

Lösen kann man sie durch Vorgabe von Cauchy-Daten $\phi_N(0,\cdot)$ und $\partial_0\phi_N(0,\cdot)$, das heißt durch Festlegen der Erwartungswerte von $\phi$ und $\partial_0\phi$ auf der Cauchy-Fläche $x^0 = 0$. Es soll nun untersucht werden, welche Cauchy-Daten man vorgeben kann, so dass die Lösung in der Feldalgebra $\mathcal{M}$ liegt. Das ist dann der Fall, wenn $\phi_N$ eine analytische Fortsetzung auf $\mathbb{C}^4$ besitzt, und es zu jedem $m$ ein $n$ und zu jedem $n$ ein $m$ gibt, so dass $\|\phi\|_{mn} < \infty$ gilt.

Wir entwickeln $\phi_N$ im Fourierraum:

$$\phi_N(x) = \int \mathrm{d}^4k\ \delta(k^2 - m^2)\left(\theta(k_0)a(\mathbf{k}) + \theta(-k_0)a^*(-\mathbf{k})\right)e^{-ikx} = \int \mathrm{d}^4k\ \widehat{\phi_N}(k)e^{-ikx}$$

oder auch

$$\phi_N(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3k}{2\omega(\mathbf{k})}\ \left(a(\mathbf{k})e^{-i(\omega(\mathbf{k})x^0 - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} + a^*(\mathbf{k})e^{i(\omega(\mathbf{k})x^0 - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}\right).$$

Die Funktionen $a, a^*$ und somit auch $\widehat{\phi_N}$ lassen sich aus den Cauchy-Daten bestimmen:

$$\begin{aligned} a(\mathbf{k}) &= \int \mathrm{d}^3x\ \left(\omega(\mathbf{k})\phi_N(0,\mathbf{x}) + i\partial_0\phi_N(0,\mathbf{x})\right)e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \\ a^*(\mathbf{k}) &= \int \mathrm{d}^3x\ \left(\omega(\mathbf{k})\phi_N(0,\mathbf{x}) - i\partial_0\phi_N(0,\mathbf{x})\right)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}. \end{aligned}$$

Nach dem Paley-Wiener-Theorem für temperierte Distributionen (Theorem IX.12 in [15]) hat $\phi_N$ eine analytische Fortsetzung auf ganz $\mathbb{C}^4$, wenn die temperierte Distribution $\widehat{\phi_N}$ kompakten Träger hat. Dann gibt es Konstanten $C, N, R$, so dass

$$|\phi_N(z)| \le C(1+|z|)^N e^{R|\Im z|} \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

gilt. Setzen wir dies in die Halbnorm (5.2) ein, so erhalten wir

$$\|\phi\|^2_{m,-n} \le C\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4y\ \left(1+|x+y|^2\right)^m\left(1+|x-y|^2\right)^{-n}\left(1+\sqrt{|x|^2+|y|^2}\right)^N e^{R|y|}e^{-\frac{1}{4}|y|^2}. \tag{5.3}$$

Wir benutzen nun ein Lemma aus [40].

**Lemma 5.1.** *Es gilt*

$$1+|x+y|^2 \le \frac{4}{3}\left(1+|x|^2\right)\left(1+|y|^2\right) \qquad \forall x,y \in \mathbb{R}^4, \tag{5.4}$$

$$\left(1+|x+y|^2\right)^{-1} \le \frac{4}{3}\left(1+|x|^2\right)\left(1+|y|^2\right)^{-1} \qquad \forall x,y \in \mathbb{R}^4, \tag{5.5}$$

$$1+|x+y|^2 \ge \frac{3}{4}\left(1+|x|^2\right)^{-1}\left(1+|y|^2\right) \qquad \forall x,y \in \mathbb{R}^4. \tag{5.6}$$

*Beweis.* Ungleichung (5.6) folgt aus (5.5), (5.5) folgt aus (5.4) und (5.4) aus

$$4\left(1+|x|^2\right)\left(1+|y|^2\right)-3\left(1+|x+y|^2\right)=|x-y|^2+(2\langle x,y\rangle-1)^2+4\left(|x|^2|y|^2-\langle x,y\rangle^2\right)\geq 0.$$

□

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien $m,n\geq 0$. Dann folgt aus (5.4) und (5.5)

$$\|\phi\|^2_{m,-n}\leq C\left(\frac{4}{3}\right)^{m+n}\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4y\ \left(1+|x|^2\right)^{m-n}(1+|x|+|y|)^N\left(1+|y|^2\right)^{m+n}e^{R|y|}e^{-\frac{1}{4}|y|^2}.$$

Mit der Wahl $n=m+3+N/2$ ist dann offensichtlich $\|\phi\|^2_{m,-n}<\infty$. Analog gehen wir für vorgegebenes $n$ vor. Es gibt also zu jedem $m$ ein $n$ und zu jedem $n$ ein $m$, so dass $\|\phi\|^2_{mn}<\infty$ gilt. Somit haben wir gezeigt, dass für $\widehat{\phi_N}$ mit kompaktem Träger $\phi_N$ in der Feldalgebra liegt. Das Anfangswertproblem ist also sinnvoll gestellt, wenn wir die Anfangsdaten so wählen, dass $\widehat{\phi_N}$ dies erfüllt.

## 5.3 Lokalität

In den folgenden Abschnitten wollen wir die Lokalitätseigenschaften von Wechselwirkungstermen untersuchen. Dazu wollen wir in diesem Abschnitt definieren, was wir unter einem lokalisierten Element der Feldalgebra $\mathcal{M}$ verstehen und die Eigenschaften dieses Lokalitätsbegriffs untersuchen.

Die Elemente von $\mathcal{M}$ sind stetige Operatoren auf dem Schwartzraum $\mathcal{S}_1$. Sei also $\phi\in\mathcal{M}$ und $\{p_k\}$ eine gerichtete Halbnormfamilie von $\mathcal{S}_1$, dann gibt es zu jedem $k$ ein $C$ und ein $k'$, so dass

$$p_k(\phi(f))\leq Cp_{k'}(f)\qquad\forall f\in\mathcal{S}_1$$

gilt. Wir wollen die Lokalität der Operatoren über die Anwendung auf "lokale" Testfunktionen definieren. Die am besten um den Raumzeitpunkt $x$ lokalisierte Testfunktion ist der kohärente Zustand $|x)$. Darüber hinaus wissen wir, dass $|(y|x)|=e^{-\frac{1}{4}|x-y|^2}$ gilt. Das motiviert die folgende

**Definition 5.2.** Sei $g\in\mathcal{M}$ und $\{p_k\}_{k\in I}$ eine gerichtete Halbnormfamilie von $\mathcal{S}_1$. Wir nennen $g$ *rechtslokalisiert im Gebiet* $G$, wenn es zu jedem $k\in I$ und jedem Multiindex $\alpha$ eine Konstante $C$ und ein $k'\in I$ gibt, so dass

$$p_k\left(\left(\partial^\alpha g\right)|x)\right)\leq Cp_{k'}(|x))e^{-\frac{1}{4}d(x,G)^2}\qquad\forall x\in\mathbb{R}^4 \tag{5.7}$$

gilt. Dabei bezeichnet $d(x,G)$ den euklidischen Abstand von $x$ und $G$. Wir nennen $g$ *linkslokalisiert in* $G$, wenn $g^*$ rechtslokalisiert in $G$ ist.

*Bemerkung* 5.3. Die Definition ist konsistent in dem Sinne, dass sie nicht von der Wahl der gerichteten Halbnormfamilie abhängt. Denn sei $\{q_l\}$ eine äquivalente gerichtete Halbnormfamilie. Dann gibt es zu jedem $l$ ein $k$ und eine Konstante $D$, so dass $q_l(f)\leq Dp_k(f)\ \forall f\in\mathcal{S}_1$ gilt, und zu jedem $k'$ ein $l'$ und eine Konstante $E$, so dass $p_{k'}(f)\leq Eq_{l'}(f)\ \forall f\in\mathcal{S}_1$ gilt. Sei nun Bedingung (5.7) erfüllt. Dann gilt

$$q_l\left(\left(\partial^\alpha g\right)|x)\right)\leq Dp_k\left(\left(\partial^\alpha g\right)|x)\right)\leq CDp_{k'}(|x))e^{-\frac{1}{4}d(x,G)^2}\leq CDEq_{l'}(|x))e^{-\frac{1}{4}d(x,G)^2}.$$

Bei der Definition ist zu beachten, dass die Kenntnis von $(\partial^\alpha g)\,|x)$ für alle $x$ nötig ist. Das ist ein Unterschied zum kommutativen Fall, wo man, um zu entscheiden, ob $x$ im Träger von $f$ liegt, $f$ nur in einer Umgebung von $x$ kennen muss. Es handelt sich also, salopp gesagt, um eine nichtlokale Definition von Lokalität. Da wir es aber mit einem nichtlokalen Raum zu tun haben, läßt sich dies wahrscheinlich nicht vermeiden, wir können sogar froh sein, wenn überhaupt eine vernünftige Definition von Lokalität gelingt. Ein weiterer Haken an der Definition ist, dass die Bedingung in nichttrivialen Beispielen schwer zu überprüfen ist, wie sich bei der Untersuchung der Lokalität des modifizierten Energie-Impuls-Tensors gezeigt hat. Für den Moment erfüllt sie jedoch ihren Zweck, da sie, wie wir im Folgenden sehen werden, ähnliche Eigenschaften hat wie der Begriff des Trägers in der kommutativen Theorie.

**Beispiel 5.4.** Ein $\tilde{g}$ der Form

$$\tilde{g} := \int \mathrm{d}^4x\; g(x)\,|x)\,(x| \qquad g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^4) \tag{5.8}$$

ist sowohl rechts- als auch linkslokalisiert im Träger von $g$. Zunächst einmal gilt

$$\partial_\mu(\tilde{g}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int \mathrm{d}^4x\; g(x)\,|x - te^\mu)\,(x - te^\mu| = \int \mathrm{d}^4x\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g(x + te^\mu)\,|x)\,(x| = \widetilde{\partial_\mu g},$$

das heißt $\partial_\mu(\tilde{g})$ ist wieder von der Form (5.8) und der Träger wird dabei höchstens kleiner. Nun gilt

$$\begin{aligned}|\tilde{g}\,|x)\,|_l &= \sup_{y\in\mathbb{R}^4}\left\{\left(1+|y|^2\right)^{\frac{l}{2}}\left|\int \mathrm{d}^4z g(z)\,(y|z)\,(z|x)\right|\right\}\\ &\leq \mathrm{Vol}(\mathrm{supp}g)\sup_z\{|g(z)|\}\sup_y\left\{\left(1+|y|^2\right)^{\frac{l}{2}} e^{-\frac{1}{4}d(y,\mathrm{supp}g)^2}\right\} e^{-\frac{1}{4}d(x,\mathrm{supp}g)^2},\end{aligned}$$

was die Rechtslokalisierung beweist. Linkslokalisierung folgt aus $\tilde{g}^* = \tilde{\tilde{g}}$.

*Bemerkung* 5.5. Sei $G' \supset G$. Dann gilt $d(x,G') \leq d(x,G)$ und somit $e^{-\frac{1}{4}d(x,G)^2} \leq e^{-\frac{1}{4}d(x,G')^2}$. Ist also $g$ rechts- (bzw links-) lokalisiert in $G$, so ist $g$ auch rechts- (links-) lokalisiert in $G'$.

*Bemerkung* 5.6. Seien $g, h$ rechts- (bzw. links-) lokalisiert in $G, H$. Dann gilt

$$\begin{aligned}|(g+h)\,|x)|_k \leq |g\,|x)|_k + |h\,|x)|_k &\leq C_g\,||x)|_{k'}\, e^{-\frac{1}{4}d(x,G)^2} + C_h\,||x)|_{k''}\, e^{-\frac{1}{4}d(x,H)^2}\\ &\leq \max\{C_g, C_h\}\,||x)|_{\max(k',k'')}\, e^{-\frac{1}{4}d(x,G\cup H)^2}.\end{aligned}$$

Somit ist $g + h$ in $G \cup H$ rechts- (links-) lokalisiert.

*Bemerkung* 5.7. Aus der Definition folgt offensichtlich, dass wenn $\phi \in \mathcal{M}$ und $g$ rechtslokalisiert in $G$ ist, dann auch $\phi g$ rechtslokalisiert in $G$ ist. Die in $G$ rechtslokalisierten Elemente bilden also ein Linksideal. Analog bilden die linkslokalisierten ein Rechtsideal.

*Bemerkung* 5.8. Sei $g$ rechtslokalisiert in $G$. Dann ist $gD(x)$ offensichtlich rechtslokalisiert in $G - x$. Mit der vorangegangenen Bemerkung folgt, dass für in $G_{r(l)}$ rechts- (links-)lokalisiertes $g$, $g_x := D(x)gD(-x)$ rechts- (links-) lokalisiert in $G_{r(l)} + x$ ist.

*Bemerkung* 5.9. Sei $g$ rechts- (bzw. links-) lokalisiert in einem kompakten Gebiet $G$. Dann ist $g \in \mathcal{S}_2$, denn für rechtslokalisiertes $g$ gilt für alle $k, l$

$$\sup_{x,y\in\mathbb{R}^4} \left\{ \left(1+|x|^2\right)^{\frac{k}{2}} \left(1+|y|^2\right)^{\frac{l}{2}} |(x|\, g\, |y)| \right\} \leq C \sup_{y\in\mathbb{R}^4} \left\{ \left(1+|y|^2\right)^{\frac{l}{2}} ||y)|_{k'}\, e^{-\frac{1}{4}d(y,G)^2} \right\}.$$

Dies ist endlich, da $||y)|_{k'}$ polynomial beschränkt ist, siehe das nachfolgende Lemma. Für linkslokalisiertes $g$ folgt die Behauptung aus $\mathcal{S}_2^* = \mathcal{S}_2$.

**Lemma 5.10.** *Zu jedem $l \geq 0$ gibt es Konstanten $C, D$, so dass*

$$C\left(1+|x|^2\right)^{\frac{l}{2}} \leq ||x)|_l \leq D\left(1+|x|^2\right)^{\frac{l}{2}} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^4$$

*gilt.*

*Beweis.* Wegen (5.4) und (5.6) gilt

$$||x)|_l = \sup_{y\in\mathbb{R}^4} \left\{ \left(1+|y|^2\right)^{\frac{l}{2}} e^{-\frac{1}{4}|x-y|^2} \right\} \leq \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{l}{2}} \left(1+|x|^2\right)^{\frac{l}{2}} \sup_{y\in\mathbb{R}^4} \left\{ \left(1+|y|^2\right)^{\frac{l}{2}} e^{-\frac{1}{4}|y|^2} \right\},$$

$$||x)|_l = \sup_{y\in\mathbb{R}^4} \left\{ \left(1+|y|^2\right)^{\frac{l}{2}} e^{-\frac{1}{4}|x-y|^2} \right\} \geq \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{l}{2}} \left(1+|x|^2\right)^{\frac{l}{2}} \sup_{y\in\mathbb{R}^4} \left\{ \left(1+|y|^2\right)^{-\frac{l}{2}} e^{-\frac{1}{4}|y|^2} \right\}.$$

□

Die in den vorangegangenen Bemerkungen genannten Eigenschaften hat unser Lokalitätsbegriff mit dem des Trägers gemein. Es stellt sich aber die Frage, wie scharf der Begriff wirklich ist, das heißt, wie wichtig die Angabe des Gebietes ist. Diese Frage ist noch nicht ganz geklärt, man kann jedenfalls zeigen, dass Lokalität in $G$ nicht Lokalität in einem beliebigen $G'$ impliziert. Dazu das folgende

**Beispiel 5.11.** $P_x := |x)\,(x|$ ist in $\{x\}$ rechtslokalisiert. Zunächst gibt es zu jedem $l$ ein $C$, so dass

$$|P_x\, |y)|_k = Ce^{-\frac{1}{4}|x-y|^2} \qquad \forall y \in \mathbb{R}^4$$

gilt. Nach Bemerkung 4.3 sind die Ableitungen durch Kommutatoren mit Orts- oder Impulsoperatoren gegeben. Zum Beispiel gilt

$$(\partial_0 P_x) = iQ_1P_x - iP_xQ_1.$$

Der erste Term ist nach Bemerkung 5.7 wieder in $\{x\}$ rechtslokalisiert. Für den zweiten Term berechnen wir mit Lemma 5.10

$$|P_xQ_1\, |y)|_k = \frac{1}{2}|y^0 + iy^2 + x^0 - ix^2|e^{-\frac{1}{4}|x-y|^2}\, ||x)|_k \leq C'\, ||y)|_1\, e^{-\frac{1}{4}|x-y|^2}.$$

Dabei wurde benutzt, dass die kohärenten Zustände Eigenzustände des Vernichtungsoperators sind (B.9). Die höheren Ableitungen behandelt man analog. Aus der Hermitizität von $P_x$ folgt die Linkslokalisierung in $x$.

Nun ist $P_x$ in keinem abgeschlossenen, konvexen Gebiet $G$ lokalisiert, das $x$ nicht enthält. Denn angenommen, $P_x$ sei in einem solchen $G$ lokalisiert. Dann gilt

$$|P_x\,|y)|_k = Ce^{-\frac{1}{4}|x-y|^2} \leq C'\,||y)|_{k'}\,e^{-\frac{1}{4}d(y,G)^2}$$

beziehungsweise

$$|x-y|^2 \geq d(y,G)^2 - D\ln\left(1+|y|^2\right) - D'.$$

Sei $z \in G$ so gewählt, dass $|x-z|$ minimal wird (nach Voraussetzung ist $|x-z| > 0$). Wir setzen $y(t) := x + t\frac{x-z}{|x-z|}$. Wegen der Konvexität von $G$ gilt

$$d(y(t),G)^2 = (|x-y(t)| + |x-z|)^2 = t^2 + 2t|x-z| + |x-z|^2.$$

Aus der obigen Ungleichung wird somit

$$D' + D\ln\left(1+|y(t)|^2\right) - |x-z|^2 \geq 2t|x-z|.$$

Da $|y(t)|$ als Funktion von $t$ polynomial beschränkt ist, ist die Ungleichung offensichtlich nicht für alle $t$ erfüllt. Das beweist die Behauptung.

Nun wäre es natürlich schön, wenn man zeigen könnte, dass ein $g$, das in konvexen Gebieten $G, G'$ lokalisiert ist, auch in $G \cap G'$ lokalisiert ist, beziehungsweise für $G \cap G' = \emptyset$ die Null ist. Ich vermute, dass das der Fall ist, da wegen $g\,|x) = \int \mathrm{d}^4y\; g\,|y)\,(y|x)$ die Halbnormen in einem geeigneten Mittel nicht schneller als $e^{-\frac{1}{4}|x-y|^2}$ abfallen können. Ein Beweis ist mir bis jetzt aber nicht gelungen. Bereits die genannten Eigenschaften lassen die Definition aber sinnvoll erscheinen.

Wir können nun definieren, was lokale Funktionen auf der Feldalgebra sind. Wir nennen $f : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ *lokal*, wenn $f(\phi)$ die gleichen Lokalisationseigenschaften wie $\phi$ hat. Nach Bemerkung 5.7 sind Potenzen und somit auch die reellen Lagrangedichten lokal. Für komplexe Theorien muss man die Definition modifizieren, zum Beispiel in dem Sinne, dass die Rechtslokalisation erhalten bleibt und sich auch auf die Linkslokalisation überträgt, wie zum Beispiel bei $\phi \mapsto \phi^*\phi$. Die interessante Frage, ob der in Abschnitt 3.4 vorgestellte modifizierte Energie-Impuls-Tensor in diesem Sinne lokal ist, ließ sich bis jetzt allerdings nicht beantworten. Das Hauptproblem ist, dass das bei der Konstruktion des Zusatzterms verwendete $\star'$-Produkt auf der Ebene der Weyl-Symbole definiert ist, während sich die Lokalität am besten auf der Ebene der normalgeordneten Symbole überprüfen läßt.

## 5.4 Lokale Wechselwirkungsterme

In diesem Abschnitt sollen lokal begrenzte Wechselwirkungen in die Theorie eingeführt werden. Wir werden sehen, dass eine naive Definition lokaler Wechselwirkungsterme gerade nicht zu lokalisierten Wechselwirkungen führt. Wir werden dann eine Modifizierung vornehmen und sehen, dass sie die gewünschten Lokalitätseigenschaften besitzt.

Beginnen wollen wir die Untersuchung mit der einfachsten nichttrivialen Modifizierung der freien Wirkung $S_0$, die Einführung eines Quellterms $S_1(\phi) := \lambda \mathrm{Tr} g\phi$. Hier ist $g$ im Allgemeinen ein Element von $\mathcal{S}_2$, kann jedoch, wenn wir die Lokalitätseigenschaften untersuchen, als lokalisiert in einem kompakten Gebiet $G$ angenommen werden.

Die modifizierte Wirkung führt zur Bewegungsgleichung

$$(\Box + m^2)\phi = \lambda g.$$

Sei $\phi_0$ eine Lösung der freien Bewegungsgleichung. Wir suchen nun eine Lösung $\phi$ der modifizierten Bewegungsgleichung, deren Erwartungwerte für $x^0 \to -\infty$ mit denen von $\phi_0$ übereinstimmen. Mit anderen Worten, wir lösen die Wellengleichung

$$(\Box + m^2)\phi_N(x) = \lambda g_N(x)$$

mit der Randbedingung, dass $\phi_N(x) \to (\phi_0)_N(x)$ für $x^0 \to -\infty$ gilt. Die Lösung ist

$$\begin{aligned}\phi_N(x) &= (\phi_0)_N(x) + \lambda \int \mathrm{d}^4y\ \Delta_{ret}(x-y) g_N(y) \\ &= (\phi_0)_N(x) + \lambda \int \mathrm{d}^4y\ \Delta_{ret}(y) g_N(x-y) \\ &= (\phi_0)_N(x) + \lambda \int \mathrm{d}^4y\ \Delta_{ret}(y) (g_y)_N(x)\end{aligned}$$

mit

$$g_y = D(y) g D(-y).$$

Denn $\Delta_{ret}$ ist eine temperierte Distribution mit Träger im Vorwärtslichtkegel, also gibt es nach dem Bros-Epstein-Glaser-Lemma ([15], Theorem IX.15) eine polynomial beschränkte Funktion $F$ mit Träger im Vorwärtslichtkegel und einen Multiindex $\alpha$, so dass $\Delta_{ret} = \partial^\alpha F$ gilt. Und da $g_N$ eine Schwartzfunktion auf dem $\mathbb{R}^4$ ist, ist es leicht zu zeigen, dass der Zusatzterm für $x^0 \to -\infty$ schneller als jede Potenz abfällt. Somit ergibt sich

$$\phi = \phi_0 + \lambda \int \mathrm{d}^4x\ \Delta_{ret}(x) g_x. \tag{5.9}$$

Nun stellt sich die Frage, ob dies überhaupt wieder ein Element der Feldalgebra ist. Das ist in der Tat der Fall, denn es gilt der folgende

**Satz 5.12.** *Sei $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^4)$, $g \in \mathcal{S}_2$. Dann ist $\phi = \int \mathrm{d}^4x\ T(x) g_x \in \mathcal{M}$.*

*Beweis.* Zunächst zeigen wir, dass es zu jedem $m$ ein $n$ gibt, so dass

$$\|\phi\|^2_{mn} = \int \mathrm{d}^4x \mathrm{d}^4y\ \left(1+|x|^2\right)^m \left(1+|y|^2\right)^n \left| \int \mathrm{d}^4z\ T(z)\, (x|\, g_z\, |y) \right|^2 < \infty$$

gilt. Da $T$ eine temperierte Distribution ist, gibt es Zahlen $C, l$ und einen Multiindex $\alpha$, so dass

$$\left| \int \mathrm{d}^4z\ T(z)\, (x|\, g_z\, |y) \right| \leq C \sup_{z\in\mathbb{R}^4} \left\{ \left(1+|z|^2\right)^l \left| \partial_z^\alpha\, (x|\, g_z\, |y) \right| \right\}$$

gilt. Wegen $g \in \mathcal{S}_2$ gibt es zu jedem $p, q$ ein $D$, so dass

$$\left| \partial_z^\alpha\, (x|\, g_z\, |y) \right| = \left| (x|\, (\partial^\alpha g)_z\, |y) \right| \leq D \left(1+|x-z|^2\right)^{-p} \left(1+|y-z|^2\right)^{-q}$$

gilt (vergleiche (5.1)). Wir wählen $p = m + 3$, $q = p + l$ und erhalten mit (5.5)

$$\|\phi\|_{mn}^2 \leq C' \int \mathrm{d}^4x \mathrm{d}^4y \ \left(1 + |x|^2\right)^m \left(1 + |y|^2\right)^n \left(1 + |x|^2\right)^{-m-3} \left(1 + |y|^2\right)^{m+3+l}.$$

Die $x$-Integration ist durchführbar, die $y$-Integration ist für $n \leq -(m+3+l)-3$ durchführbar. Somit gibt es zu jedem $m$ ein $n$ so dass $\|\phi\|_{mn} < \infty$ gilt. Ganz analog zeigt man, dass es zu jedem $n$ ein $m$ gibt so dass $\|\phi\|_{mn} < \infty$ gilt. Also ist $\phi \in \mathcal{M}$. □

In [17] wurde dieser Satz auf der Ebene der Weyl-Symbole bewiesen (Korollar zu Theorem 4). Man kann ihn als Indiz dafür werten, dass die Wahl von $\mathcal{M}$ als Feldalgebra und $\mathcal{S}_2$ als Variationsideal vernünftig war.

Es stellt sich nun die Frage nach der Lokalisierung der Lösung. Wie oben sei $F$ eine polynomial beschränkte Funktion mit Träger im Vorwärtslichtkegel und $\alpha$ ein Multiindex, so dass $\Delta_{ret} = \partial^\alpha F$ gilt. Wir setzen $\phi := \int \mathrm{d}^4x \ \Delta_{ret}(x) g_x$ und nehmen an, dass $g$ im Kompaktum $G$ rechtslokalisiert ist. Es gilt

$$\begin{aligned}
|\phi\,|y)|_l &= \sup_z \left\{ \left(1 + |z|^2\right)^{\frac{l}{2}} \left| \int \mathrm{d}^4x \ F(x) \left(z\right| \left(\partial^\alpha g\right)_x \left|y\right) \right| \right\} \\
&\leq C \sup_z \left\{ \left(1 + |z|^2\right)^{\frac{l}{2}} \int_{\bar{V}_+} \mathrm{d}^4x \ \left(1 + |x|^2\right)^{\frac{n}{2}} \left|\left(z - x\right| \partial^\alpha g \left|y - x\right)\right| \right\} \\
&\leq C \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{l}{2}} \int_{\bar{V}_+} \mathrm{d}^4x \ \left(1 + |x|^2\right)^{\frac{n+l}{2}} \sup_z \left\{ \left(1 + |z|^2\right)^{\frac{l}{2}} \left|\left(z\right| \partial^\alpha g \left|y - x\right)\right| \right\} \\
&\leq C' \int_{\bar{V}_+} \mathrm{d}^4x \ \left(1 + |x|^2\right)^{\frac{n+l}{2}} \left(1 + |y - x|^2\right)^{\frac{m}{2}} e^{-\frac{1}{4}d(G, y-x)^2} \\
&\leq C' \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{m}{2}} \left(1 + |y|^2\right)^{\frac{m}{2}} \int_{\bar{V}_+} \mathrm{d}^4x \ \left(1 + |x|^2\right)^{\frac{m+n+l}{2}} e^{-\frac{1}{4}d(y-G, x)^2}.
\end{aligned}$$

Hier wurde wieder (5.4) verwendet. Das Integral in der letzten Zeile versuchen wir nun weiter abzuschätzen. Dazu wählen wir $x'(y) \in \bar{V}_+$ so, dass $d(y - G, x'(y)) = d(y - G, \bar{V}_+)$ gilt. $z(x, y) \in y - G$ sei so gewählt, dass $d(z(x, y), x) = d(y - G, x)$ gilt und $x''(x, y) \in \bar{V}_+$ sei so gewählt, dass $d(z(x, y), x''(x, y)) = d(z(x, y), \bar{V}_+)$ gilt (siehe Abbildung 5.1). Dann gilt wegen der Konvexität von $\bar{V}_+$

$$d(y - G, x)^2 \geq d(x, x''(x, y))^2 + d(x''(x, y), y - G)^2 \geq d(x, x''(x, y))^2 + d(\bar{V}_+, y - G)^2.$$

Offensichtlich ist $d(x'(y), x''(x, y))$ kleiner gleich dem Durchmesser $|G|$ von $G$. Mit der Dreiecksungleichung ergibt sich somit

$$d(x, x''(x, y))^2 \geq d(x, x'(y))^2 - 2|G|d(x, x''(x, y)) - |G|^2 \geq d(x, x'(y))^2 - 2|G|d(x, x'(y)) - 3|G|^2.$$

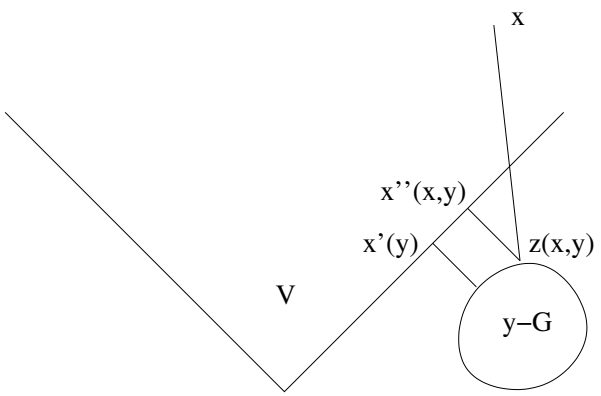


Abbildung 5.1: Konstruktion der Abschätzungen

Wir erhalten also

$$\begin{aligned}
|\phi\,|y)|_l &\leq C''\left(1+|y|^2\right)^{\frac{m}{2}} e^{-\frac{1}{4}d(\bar{V}_+,y-G)^2}\int_{\bar{V}_+}\mathrm{d}^4x\ \left(1+|x|^2\right)^{\frac{m+n+l}{2}} e^{-\frac{1}{4}\left(|x-x'(y)|^2-2|G||x-x'(y)|-3|G|^2\right)}\\
&\leq C'''\left(1+|y|^2\right)^{\frac{m}{2}} e^{-\frac{1}{4}d(\bar{V}_+,y-G)^2}\int_{\bar{V}_+-x'(y)}\mathrm{d}^4x\ \left(1+|x+x'(y)|^2\right)^{\frac{m+n+l}{2}} e^{-\frac{1}{4}\left(|x|^2-2|G||x|\right)}\\
&\leq C''''\left(1+|y|^2\right)^{\frac{m}{2}}\left(1+|x'(y)|^2\right)^{\frac{m+n+l}{2}} e^{-\frac{1}{4}d(\bar{V}_+,y-G)^2}\int\mathrm{d}^4x\ \left(1+|x|^2\right)^{\frac{m+n+l}{2}} e^{-\frac{1}{4}|x|^2+\frac{|G|}{2}|x|}.
\end{aligned}$$

Offenbar gibt es eine Konstante $D$, so dass $\left(1+|x'(y)|^2\right)\leq D\left(1+|y|^2\right)$ für alle $y$ gilt. Wir erhalten also

$$|\phi\,|y)|_l \leq \left(1+|y|^2\right)^{m+\frac{n+l}{2}} e^{-\frac{1}{4}d(G+\bar{V}_+,y)^2}.$$

Somit haben wir bewiesen

**Satz 5.13.** *Sei $g$ rechts- (links-) lokalisiert im Kompaktum $G$. Dann ist $\phi := \int \mathrm{d}^4x\ \Delta_{ret}(x)g_x$ rechts- (links-) lokalisiert in $G+\bar{V}_+$.*

Wenn also das $g$ aus (5.9) im Kompaktum $G$ rechts- (links-) lokalisiert ist, so ist $\phi-\phi_0$, das heißt, die durch den Quellterm verursachte Störung, in $G+\bar{V}_+$ rechts- (links-) lokalisiert. Es handelt sich also wirklich um einen, in unserem Sinne, lokalen Störterm.

Wenn wir nun eine lokalisierte $\phi^3$-Wechselwirkung einführen wollen, so wäre eine nahe liegende, auch aus der Diskussion des Wirkungsprinzips motivierte Wahl

$$S_1 := \lambda \mathrm{Tr}\left(g\phi^3\right). \tag{5.10}$$

Als Bewegungsgleichung erhält man

$$(\Box+m^2)\phi = \lambda\left(\phi^2 g+\phi g\phi+g\phi^2\right).$$

Mit dem Yang-Feldman-Ansatz ergibt sich die Korrektur erster Ordnung in $\lambda$ zur Lösung $\phi_0$ der freien Feldgleichung als einlaufendes Feld zu

$$\phi_1 = \int \mathrm{d}^4x\ \Delta_{ret}(x)\left((\phi_0\phi_0 g)_x+(\phi_0 g\phi_0)_x+(g\phi_0\phi_0)_x\right).$$

Hier lassen sich offensichtlich keine Aussagen über die Lokalisierung von $\phi_1$ machen. Wenn $g$ rechtslokalisiert in $G$ ist, so gilt das offenbar auch für den ersten Term, für die beiden anderen im Allgemeinen aber nicht. Der Wechselwirkungsterm (5.10) ist also in unserem Sinne nicht lokal.

Eine Form des Wechselwirkungsterms, die diese Probleme vermeidet, ist

$$S_1 := \lambda \mathrm{Tr}\left((g\phi)^3\right). \tag{5.11}$$

Das kommutative Analogon dazu wäre, die Felder erst abzuschneiden und dann in die Wirkung einzusetzen. Im kommutativen Fall ist das allerdings das Gleiche, wie das Produkt der Felder mit $g^3$ abzuschneiden. Für unsere nichtkommutative Theorie macht es aber sehr wohl einen Unterschied. Als Bewegungsgleichung erhält man nämlich

$$(\Box + m^2)\phi = 3\lambda g\phi g\phi g,$$

die Korrektur erster Ordnung in $\lambda$ zur freien Lösung ist also

$$\phi_1 = \int \mathrm{d}^4x \ \Delta_{ret}(x)(g\phi_0 g\phi_0 g)_x.$$

Wenn $g$ in $G_{r(l)}$ rechts- (links-) lokalisiert ist, ist nach Bemerkung 5.7 auch $g\phi_0 g\phi_0 g$ in $G_{r(l)}$ rechts- (links-) lokalisiert. Aus Satz 5.13 folgt dann, dass $\phi_1$ in $G_{r(l)} + \bar{V}_+$ rechts- (links-) lokalisiert ist. Das gilt offensichtlich auch für die Korrekturen höherer Ordnung. Zum Beispiel ergibt sich für die Korrektur zweiter Ordnung:

$$\phi_2 = \int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4y \ \Delta_{ret}(x)\Delta_{ret}(y)\left((g(g\phi_0 g\phi_0 g)_y g\phi_0 g)_x + (g\phi_0 g(g\phi_0 g\phi_0 g)_y g)_x\right). \tag{5.12}$$

Der Wechselwirkungsterm (5.11) hat also die gewünschten Lokalisationseigenschaften.

Nun stellt sich natürlich die Frage, ob man mit einem Wechselwirkungsterm der Form (5.11) einen adiabatischen Limes durchführen kann. Eine Vorraussetzung dafür ist, dass es ein Netz $\{g_n\}$ von (möglicherweise lokalisierten) Elementen von $\mathcal{S}_2$ gibt, so dass

$$\lim_{n\to\infty} g_n\phi g_n\phi g_n = \phi^2$$

gilt. Dies ist wegen der Hypostetigkeit der Multiplikation in $\mathcal{M}$ und Bemerkung A.16 dann der Fall, wenn die Menge der $g_n$ beschränkt in $\mathcal{M}$ ist und das Netz $\{g_n\}$ gegen die Eins konvergiert. Wir wissen bereits, dass es sogar gegen $\mathbb{1}$ konvergente Folgen von Elementen von $\mathcal{S}_2$ gibt. Insbesondere kann man eine Folge $\{h_n\}, h_i \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^4)$ wählen, die auf jedem Kompaktum gleichmässig gegen $(2\pi)^{-2}$ konvergiert. Dann ist $\{\tilde{h}_n\}$ (vergleiche (5.8)) eine Folge von lokalisierten Elementen von $\mathcal{S}_2$, die nach Lemma B.2 in $\mathcal{M}$ gegen $\mathbb{1}$ konvergiert. Als konvergente Folge ist sie natürlich auch beschränkt. Eine der Grundvorraussetzungen für die Konstruktion eines adiabatischen Limes mit lokalisierten Wechselwirkungstermen der Form (5.11) ist somit erfüllt.

## 5.5 Die lokalen Funktionale und ihre Peierls-Klammer

Eine Verallgemeinerung von (5.11) wären Funktionale der Form

$$\phi \mapsto \mathrm{Tr}(f_1\phi f_2\phi \dots f_n\phi) =: \circ\phi(f_1)\phi(f_2)\dots\phi(f_n)\circ, \qquad f_i \in \mathcal{S}_2, \tag{5.13}$$

die im Folgenden *lokale Funktionale* genannt werden. Die Betrachtung dieser Funktionale wird nicht nur durch die im vorangegangenen Abschnitt vorgenommene Diskussion der Lokalisationseigenschaften von Wechselwirkungstermen nahe gelegt. Die lokalen Funktionale stellen auch eine sehr natürliche Klasse von nichtlinearen Funktionalen auf der Feldalgebra dar. Sie sind auch deshalb interessant, weil sie eine Besonderheit der nichtkommutativen Feldtheorie sind. Natürlich sind die lokalen Funktionale der kommutativen Feldtheorie ein Spezialfall unserer lokalen Funktionale. Zum Beispiel könnte man in der kommutativen Theorie (5.13) auch einfach als $\mathrm{Tr}\,(f_1 \cdot \ldots \cdot f_n\phi^n)$ schreiben. In der nichtkommutativen Feldtheorie sind das nicht nur andere Ausdrücke, sie unterscheiden sich, wie wir im vorangegangenen Abschnitt gesehen haben, auch in ihren physikalischen Eigenschaften.

In diesem Abschnitt werden wir, ohne dabei Anspruch auf Vollständigkeit zu erheben, einige Eigenschaften der lokalen Funktionale untersuchen. Insbesondere werden wir mit Peierls Methode ihre Poisson-Klammer berechnen. Schließlich wird auf lokale Funktionale, die Ableitungen der Felder enthalten, eingegangen.

Aus der Zyklizität der Spur folgt offensichtlich, dass die lokalen Funktionale zyklisch sind, das heißt, dass für zyklische Permutationen $\sigma \in \mathbb{Z}_n$

$$\circ\phi(f_1)\dots\phi(f_n)\circ = \circ\phi(f_{\sigma(1)})\dots\phi(f_{\sigma(n)})\circ \tag{5.14}$$

gilt.

Betrachten wir nun die von den lokalen Funktionalen erzeugte Algebra. Eine interessante Eigenschaft der lokalen Funktionale ist, dass sie in gewisser Weise faktorisieren, wenn man als "Testfunktionen" Operatoren von Rang Eins, also in der Form $f_i = |a_i\rangle\langle b_i|$ mit $a_i, b_i \in \mathcal{S}_1$, wählt:

$$\circ\phi(f_1)\dots\phi(f_n)\circ = \mathrm{Tr}\,(|a_1\rangle\langle b_1|\phi\dots|a_n\rangle\langle b_n|\phi) = \phi(|a_1\rangle\langle b_n|)\phi(|a_2\rangle\langle b_1|)\dots\phi(|a_n\rangle\langle b_{n-1}|). \tag{5.15}$$

Hier wurde $\phi(f) := \circ\phi(f)\circ$ gesetzt. Es handelt sich natürlich nicht wirklich um eine Faktorisierung, da die $f_i$ sozusagen verschoben zusammengesetzt werden.

In gewisser Weise läßt sich diese Faktorisierung auch umkehren. Denn sei $\{\psi_i\}$ eine Orthonormalbasis von $L^2(\mathbb{R}^2)$. Dann läßt sich jedes $f \in \mathcal{S}_2$ in Matrixelemente entwickeln: $f = \sum_{ij} c_{ij}|\psi_i\rangle\langle\psi_j|$. Die Koeffizienten $c_{ij}$ bilden dann eine schnell konvergente Reihe. Siehe dazu auch Abschnitt A.3, wo diese Entwicklung mit den Eigenfunktionen des zweidimensionalen harmonischen Oszillators durchgeführt wird. Sei nun $g \in \mathcal{S}_2$ durch $g = \sum_{ij} d_{ij}|\psi_i\rangle\langle\psi_j|$

gegeben. Dann gilt

$$\begin{aligned}\phi(f)\phi(g) &= \sum_{ijkl} c_{ij}d_{kl}\langle\psi_j|\phi|\psi_i\rangle\langle\psi_l|\phi|\psi_k\rangle \\ &= \sum_{ijkl} c_{ij}d_{kl}\mathrm{Tr}\left(|\psi_k\rangle\langle\psi_j|\phi|\psi_i\rangle\langle\psi_l|\phi\right) \\ &= \sum_{ijkl} c_{ij}d_{kl}\circ\phi(|\psi_k\rangle\langle\psi_j|)\phi(|\psi_i\rangle\langle\psi_l|)\circ .\end{aligned}$$

Wir haben also das Produkt zweier lokaler Funktionale durch eine Summe von lokalen Funktionalen ausgedrückt. Offenbar funktioniert das auch für lokale Funktionale mit beliebigen Potenzen der Felder. Im kommutativen Fall ist so etwas nicht möglich. Das Produkt zweier Integrale läßt sich im Allgemeinen nicht als Summe von Integralen schreiben:

$$\int \mathrm{d}^4x\ f(x)\phi(x)\ \int \mathrm{d}^4y\ g(y)\phi(y) \neq \sum_n \int \mathrm{d}^4z\ h_n(z)\phi^2(x).$$

Natürlich bleiben hier viele Fragen offen. Zum Beispiel ist nicht klar, wie sich die positiven lokalen Funktionale charakterisieren lassen. Die lokalen Funktionale scheinen aber eine interessante algebraische Struktur zu besitzen, die es Wert sein könnte, genauer untersucht zu werden.

Nun soll mit Peierls Methode [31], [32] die Poisson-Klammer

$$\{\circ\phi(f_1)\dots\phi(f_m)\circ, \circ\phi(g_1)\dots\phi(g_n)\circ\}$$

von lokalen Funktionalen des freien Feldes berechnen. Dazu addieren wir den Term

$$-\lambda\circ\phi(f_1)\dots\phi(f_m)\circ$$

zur freien Wirkung. Das Feld, dessen Erwartungswerte für $x^0 \to \pm\infty$ mit der Lösung $\phi$ der freien Feldgleichung übereinstimmen, und das in erster Ordnung in $\lambda$ die modifizierte Feldgleichung löst, ist durch

$$\phi_{A/R} = \phi - \lambda\int \mathrm{d}x\ \Delta_{av/ret}(x)\sum_{\sigma\in\mathbb{Z}_n}(f_{\sigma(1)}\phi f_{\sigma(2)}\cdots f_{\sigma(m-1)}\phi f_{\sigma(m)})_x$$

gegeben. Dies wird nun im Funktional $\circ\phi(g_1)\dots\phi(g_n)\circ$ ausgewertet und der Term erster Ordnung in $\lambda$ bestimmt. Für die Peierls-Klammer erhält man so

$$\begin{aligned}\{\circ\phi(f_1)\dots\phi(f_m)\circ, \circ\phi(g_1)\dots\phi(g_n)\circ\} &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}|_{\lambda=0}\mathrm{Tr}\left(g_1\phi_R\dots g_n\phi_R - g_1\phi_A\dots g_n\phi_A\right) \\ &= -\int \mathrm{d}x\ \Delta(x)\sum_{\sigma\in\mathbb{Z}_m}\sum_{\sigma'\in\mathbb{Z}_n}\mathrm{Tr}\left(g_{\sigma'(1)}\phi\dots\phi g_{\sigma'(n)}\left(f_{\sigma(1)}\phi\dots\phi f_{\sigma(m)}\right)_x\right) \\ &= \int \mathrm{d}x\ \Delta(x)\sum_{\sigma\in\mathbb{Z}_m}\sum_{\sigma'\in\mathbb{Z}_n}\mathrm{Tr}\left(f_{\sigma(1)}\phi\dots\phi f_{\sigma(m)}\left(g_{\sigma'(1)}\phi\dots\phi g_{\sigma'(n)}\right)_x\right). \quad (5.16)\end{aligned}$$

Hier wurde die Kommutatorfunktion $\Delta = \Delta_{ret} - \Delta_{av}$ eingeführt, die Antisymmetrie von $\Delta$ verwendet und $\mathrm{Tr}\,(f_x g) = \mathrm{Tr}\,(f g_{-x})$ benutzt.

Wir wollen nun sehen, ob diese Klammer die üblichen Eigenschaften der Poisson-Klammer erfüllt. Da sie über die Ableitung definiert ist, gilt die Leibniz-Regel. Die Antisymmetrie folgt aus der Antisymmetrie von $\Delta$ und der Zyklizität der Spur: $\mathrm{Tr}\,(f_x g) = \mathrm{Tr}\,(f g_{-x})$. Man kann auch die Jacobi-Identität nachprüfen:

$$
\begin{aligned}
& \{\{\circ\phi(f_1)\dots\phi(f_m)\circ, \circ\phi(g_1)\dots\phi(g_n)\circ\}, \circ\phi(h_1)\dots\phi(h_k)\circ\} + \text{zykl. Vert.} \\
= \; & \int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4y\; \Delta(x)\Delta(y) \sum_{\sigma\sigma'\sigma''} \mathrm{Tr} \\
& \Bigg[ \sum_{i=1}^{m-1} f_1\phi\dots\phi f_i \left(h_1\phi\dots\phi h_k\right)_y f_{i+1}\phi\dots\phi f_m \left(g_1\phi\dots\phi g_n\right)_x && (5.17) \\
& + \sum_{i=1}^{n-1} f_1\phi\dots\phi f_m \Big(g_1\phi\dots\phi g_i \left(h_1\phi\dots\phi h_k\right)_y g_{i+1}\phi\dots\phi g_n\Big)_x && (5.18) \\
& + \sum_{i=1}^{k-1} h_1\phi\dots\phi h_i \left(g_1\phi\dots\phi g_n\right)_y h_{i+1}\phi\dots\phi h_k \left(f_1\phi\dots\phi f_m\right)_x && (5.19) \\
& + \sum_{i=1}^{m-1} h_1\phi\dots\phi h_k \Big(f_1\phi\dots\phi f_i \left(g_1\phi\dots\phi g_n\right)_y f_{i+1}\phi\dots\phi f_m\Big)_x && (5.20) \\
& + \sum_{i=1}^{n-1} g_1\phi\dots\phi g_i \left(f_1\phi\dots\phi f_m\right)_y g_{i+1}\phi\dots\phi g_n \left(h_1\phi\dots\phi h_k\right)_x && (5.21) \\
& + \sum_{i=1}^{k-1} g_1\phi\dots\phi g_n \Big(h_1\phi\dots\phi h_i \left(f_1\phi\dots\phi f_m\right)_y h_{i+1}\phi\dots\phi h_k\Big)_x \Bigg]. && (5.22)
\end{aligned}
$$

Dabei steht $f_i$ für $f_{\sigma(i)}$, $g_i$ für $g_{\sigma'(i)}$ und $h_i$ für $h_{\sigma''(i)}$. Den Term (5.17) kann man unter Verwendung der Zyklizität der Spur umformen:

$$
\begin{aligned}
& \sum_{\sigma\sigma'\sigma''} \sum_{i=1}^{m-1} \mathrm{Tr}\,\Big(f_1\phi\dots\phi f_i \left(h_1\phi\dots\phi h_k\right)_y f_{i+1}\phi\dots\phi f_m \left(g_1\phi\dots\phi g_n\right)_x\Big) \\
& \qquad = \sum_{\sigma\sigma'\sigma''} \sum_{i=1}^{m-1} \mathrm{Tr}\,\Big(h_1\phi\dots\phi h_k \left(f_1\phi\dots\phi f_i \left(g_1\phi\dots\phi g_n\right)_x f_{i+1}\phi\dots\phi f_m\right)_{-y}\Big).
\end{aligned}
$$

Man sieht, dass er sich wegen der Antisymmetrie von $\Delta$ mit dem Term (5.20) weghebt. Analog zeigt man, dass sich die Terme (5.19) und (5.22) und (5.18) und (5.21) wegheben. Die Peierls-Klammer von lokalen Funktionalen der freien Felder erfüllt also die üblichen Eigenschaften der Poisson-Klammer.

Da wir das wechselwirkende Feld mit dem Yang-Feldman-Formalismus pertubativ als formale Potenzreihe in der Kopplungskonstanten aus dem einlaufenden freien Feld bestimmen, können wir nun auch die Peierls-Klammer für das wechselwirkende Feld berechnen. Man erhält

so wieder eine Potenzreihe in der Kopplungskonstanten. Dies ist äquivalent dazu, die Peierls-Klammer direkt für das wechselwirkende Feld zu berechnen und es dann in der Kopplungskonstanten zu entwickeln[1]. Somit erfüllt auch die Peierls-Klammer des wechselwirkenden Feldes die üblichen Eigenschaften der Poisson-Klammer.

Ein Spezialfall von (5.16) ist

$$\{\phi(f),\phi(g)\} = \int \mathrm{d}^4x\ \Delta(x)\mathrm{Tr}(fg_x). \tag{5.23}$$

Dies ist mit der Poisson-Klammer

$$\{\phi(f),\phi(g)\} = \int \mathrm{d}^4x\ \Delta(x) \int \mathrm{d}y\ f(y)g(y-x) \tag{5.24}$$

der kommutativen Feldtheorie zu vergleichen. Vom algebraischen Standpunkt aus sind die beiden Ausdrücke identisch. Die $y$-Integration in (5.24) entspricht der Spur und $g(\cdot - x)$ ist die um $x$ verschobene Testfunktion $g_x$. Wir haben es lediglich mit unterschiedlichen Algebren zu tun. Insbesondere verschwindet im nichtkommutativen Fall, anders als im kommutativen, das Produkt von in disjunkten Gebieten lokalisierten $f, g$ nicht. Das macht es im nichtkommutativen Fall schwer, anhand des Ausdrucks (5.23) die Kausalität der Theorie zu diskutieren. Wenn man den Begriff der Kausalität jedoch nur auf das Ausbreitungsverhalten lokaler Störungen bezieht, so ist die Theorie, wie wir im vorigen Abschnitt gesehen haben, kausal. Darüber hinaus fällt die Peierls-Klammer (5.23) für zunehmende raumartige Trennung der Lokalisationsgebiete sehr schnell ab. Sei zum Beispiel $f$ in $F$ rechtslokalisiert und $g$ in $G$ linkslokalisiert. Dann ist $\int \mathrm{d}^4x\ \Delta(x)g_x$ in $G + \bar{V}$ linkslokalisiert und es gilt

$$\begin{aligned}
|\{\phi(f),\phi(g)\}| &\leq \int \mathrm{d}^4y\mathrm{d}^4z\ \ |(z|\, f^*\, |y)| \left|(z| \int \mathrm{d}^4x\Delta(x)g_x\, |y)\right| \\
&\leq \int \mathrm{d}^4y\mathrm{d}^4z\ \ \left(1+|z|^2\right)^{-\frac{k}{2}} |f^*\, |y)|_k \left(1+|z|^2\right)^{-\frac{l}{2}} \left|\int \mathrm{d}^4x\Delta(x)g_x\, |y)\right|_l \\
&\leq C_f C_g \int \mathrm{d}^4y\mathrm{d}^4z\ \ \left(1+|z|^2\right)^{-\frac{k+l}{2}} \left(1+|y|^2\right)^{\frac{k'+l'}{2}} e^{-\frac{1}{4}d(y,F)^2} e^{-\frac{1}{4}d(y,G+\bar{V})^2}.
\end{aligned}$$

Die $z$-Integration kann man zum Beispiel mit der Wahl $k = l = 3$ durchführen. Das verbleibende Integral über $y$ geht dann für zunehmende raumartige Trennung von $F$ und $G$ sehr schnell gegen Null. Analog kann man für linkslokalisiertes $f$ und rechtslokalisiertes $g$ argumentieren.

Die Peierls-Klammer (5.23) stimmt auch mit dem Kommutator (6.7) aus [14] überein. Für zwei Zustände $\omega, \omega'$ auf $\mathcal{E}$ wurde dort

$$[\phi(\omega),\phi(\omega')] = i \int \mathrm{d}^4x\ \Delta(x) \int \mathrm{d}^4y\ \omega_W(y)\omega'_W(y-x)$$

berechnet, mit den Weyl-Symbolen $\omega_W(x) := (2\pi)^{-4} \int \mathrm{d}^4k\ e^{-ikx}\omega(e^{ikq})$. Wegen (2.19) stimmt das, bis auf den Faktor $i$, mit unserer Formel überein.

[1] Das ist die Aussage von Proposition 2 aus [32]. Der dort gegebene Beweis läßt sich aber wohl nicht direkt auf den nichtkommutativen Fall übertragen. Es ist aber nicht schwer, die genannte Eigenschaft für $S_{int} = \lambda\mathrm{Tr}\,(h_1\phi \ldots h_l\phi)$ direkt zu überprüfen.

Es soll nun noch kurz auf lokale Funktionale mit Ableitungen eingegangen werden. Dazu definieren wir

$$\mathrm{Tr}\,(f_1\partial^{\alpha_1}\phi\dots f_m\partial^{\alpha_m}\phi) =: \circ\partial^{\alpha_1}\phi(f_1)\dots\partial^{\alpha_m}\phi(f_m)\circ\,. \tag{5.25}$$

Hier sind die $\alpha_i$ Multiindizes. Offenbar gilt, wie im kommutativen Fall,

$$\partial^\alpha\phi(f) = (-1)^{|\alpha|}\phi(\partial^\alpha f).$$

In lokalen Funktionalen mit höheren Potenzen der Felder lassen sich die Ableitungen aber offensichtlich nicht komplett auf die Testfunktionen ziehen.

Wir wollen nun die Peierls-Klammer dieser Funktionale ausrechnen und zeigen, dass auch hier die üblichen Eigenschaften der Poisson-Klammer gelten. Addieren wir das $\lambda$-fache von (5.25) zur freien Wirkung, so erhalten wir als Bewegungsgleichung

$$(\Box+m^2)\phi = \lambda\sum_{\sigma\in\mathbb{Z}_m}(-1)^{\alpha_{\sigma(m)}}\partial^{\alpha_{\sigma(m)}}\left(f_{\sigma(1)}\partial^{\alpha_{\sigma(2)}}\phi\dots\partial^{\alpha_{\sigma(m-1)}}\phi f_{\sigma(m)}\right).$$

Die Korrektur erster Ordnung in $\lambda$ zum einlaufenden freien Feld $\phi_0$ ist somit durch

$$\phi_1 = \lambda\int \mathrm{d}^4x\;\Delta_{ret}(x)\sum_{\sigma\in\mathbb{Z}_m}(-1)^{\alpha_{\sigma(m)}}\partial^{\alpha_{\sigma(m)}}\left(f_{\sigma(1)}\partial^{\alpha_{\sigma(2)}}\phi\dots\partial^{\alpha_{\sigma(m-1)}}\phi f_{\sigma(m)}\right)_x$$

gegeben. Es ist hier $(\partial^\alpha\phi)_x = \partial^\alpha(\phi_x)$ zu beachten. Hier sind auch wieder dieselben Lokalitätseigenschaften wie bei lokalen Funktionalen ohne Ableitungen erfüllt. Für die Peierls-Klammer erhält man nun

$$\begin{aligned}\{\circ\partial^{\alpha_1}\phi(f_1)\dots\partial^{\alpha_m}\phi(f_m)\circ,\circ\partial^{\beta_1}\phi(g_1)\dots\partial^{\beta_n}\phi(g_n)\circ\} &= \int \mathrm{d}^4x\;\Delta(x)\mathrm{Tr}\sum_{\sigma\in\mathbb{Z}_m}\sum_{\sigma'\in\mathbb{Z}_n}\\ \cdot\left(\partial^{\beta_{\sigma'(n)}}\left(f_{\sigma(1)}\partial^{\alpha_{\sigma(1)}}\phi\dots\partial^{\alpha_{\sigma(m-1)}}\phi f_{\sigma(m)}\right)\partial^{\alpha_{\sigma(m)}}\left(g_{\sigma'(1)}\partial^{\beta_{\sigma'(1)}}\phi\dots\partial^{\beta_{\sigma'(n-1)}}\phi g_{\sigma'(n)}\right)_x\right).\end{aligned}$$

Dass Leibniz-Regel und Antisymmetrie erfüllt sind, sieht man wie im vorigen Abschnitt. Auch die Jacobi-Identität ist erfüllt. Als Beispiel zeigen wir, dass sich die (5.17) und (5.20) entsprechenden Terme wegheben:

$$\begin{aligned}&\sum_{\sigma\sigma'\sigma''i}\mathrm{Tr}\left(\partial^{\beta_n}\left(f_1\partial^{\alpha_1}\phi\dots\partial^{\alpha_{i-1}}\phi f_i\partial^{\alpha_i+\gamma_k}\left(h_1\partial^{\gamma_1}\phi\dots\partial^{\gamma_{k-1}}\phi h_k\right)_y f_{i+1}\partial^{\alpha_{i+1}}\phi\dots\partial^{\alpha_{m-1}}\phi f_m\right)\right.\\ &\quad\left.\cdot\partial^{\alpha_m}\left(g_1\partial^{\beta_1}\phi\dots\partial^{\beta_{n-1}}\phi g_n\right)_x\right)(-1)^{\gamma_k}\\ =&\sum_{\sigma\sigma'\sigma''i}(-1)^{\gamma_k+\beta_n}\mathrm{Tr}\left(\partial^{\alpha_i+\gamma_k}\left(h_1\partial^{\gamma_1}\phi\dots\partial^{\gamma_{k-1}}\phi h_k\right)_y f_1\partial^{\alpha_1}\phi\dots\partial^{\alpha_{i-1}}\phi f_i\right.\\ &\quad\left.\cdot\partial^{\alpha_m+\beta_n}\left(g_1\partial^{\beta_1}\phi\dots\partial^{\beta_{n-1}}\phi g_n\right)_x f_{i+1}\partial^{\alpha_{i+1}}\phi\dots\partial^{\alpha_{m-1}}\phi f_m\right)\\ =&\sum_{\sigma\sigma'\sigma''i}(-1)^{\beta_n}\mathrm{Tr}\Big(\partial^{\alpha_i}\left(h_1\partial^{\gamma_1}\phi\dots\partial^{\gamma_{k-1}}\phi h_k\right)\\ &\quad\cdot\partial^{\gamma_k}\left(f_1\partial^{\alpha_1}\phi\dots\partial^{\alpha_{i-1}}\phi f_i\partial^{\alpha_m+\beta_n}\left(g_1\partial^{\beta_1}\phi\dots\partial^{\beta_{n-1}}\phi g_n\right)_x f_{i+1}\partial^{\alpha_{i+1}}\phi\dots\partial^{\alpha_{m-1}}\phi f_m\right)_{-y}\Big)\end{aligned}$$

Dabei steht wiederum $f_i$ für $f_{\sigma(i)}$ und so weiter. Die erste Zeile entspricht dabei (5.17) und die letzte, wegen der Antisymmetrie von $\Delta$, gerade dem Negativen von (5.20).

## 5.6 Quantisierung

In diesem Abschnitt sollen erste Schritte zu einer Quantisierung der im vorangegangenen Abschnitt eingeführten lokalen Funktionale auf den freien Feldern unternommen werden. Auch hier wird eine interessante Eigenschaft der lokalen Funktionale zutage treten.

Wir wollen nun aus dem lokalen Funktional (5.13), das man auch als ein Funktional

$$\circ \dots \circ : \mathcal{M} \times {\mathcal{S}_2}^{\otimes n} \to \mathbb{C}$$

auffassen kann, ein operatorwertiges Funktional

$$;\dots;: {\mathcal{S}_2}^{\otimes n} \to \mathcal{L}(\mathcal{D}, \mathcal{H})$$

machen. Dabei ist $\mathcal{D}$ wie üblich ein dichter Teilraum des Hilbertraums $\mathcal{H}$. Die Semikolons sollen hier andeuten, dass es sich um ein Analogon zum normalgeordneten Produkt der kommutativen Feldtheorie handelt. Ähnlich wie in (3.1) setzen wir

$$;\phi(f_1)\dots\phi(f_n); = \int \mathrm{d}^4k_1 \dots \mathrm{d}^4k_n \ ;\check{\phi}(k_1)\dots\check{\phi}(k_n); \mathrm{Tr}(f_1 e^{ik_1 q} \dots f_n e^{ik_n q}), \tag{5.26}$$

wobei $;\check{\phi}(k_1)\dots\check{\phi}(k_n);$ den Operatoranteil trägt. Wir wollen nun der Frage nachgehen, ob die Ausdrücke $;\check{\phi}(k_1)\dots\check{\phi}(k_n);$ mit den üblichen normalgeordneten Produkten der kommutativen Feldtheorie zusammenhängen.

Der Grund für das Auftreten der Normalordnung in der kommutativen QFT ist der folgende: Die Felder $\phi(x)$ und somit auch die $\check{\phi}(k)$ sind operatorwertige temperierte Distributionen. Nun treten Probleme bei Produkten von Feldern auf, denn das Produkt zweier Distributionen ist im Allgemeinen nicht wohldefiniert. Man kann das auch folgendermaßen sehen:

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}^4x \ \phi(x)\phi(x)f(x) &= \int \mathrm{d}^4k_1\mathrm{d}^4k_2 \ \check{\phi}(k_1)\check{\phi}(k_2) \int \mathrm{d}^4x \ f(x)e^{i(k_1+k_2)x} \\ &= \int \mathrm{d}^4k_1\mathrm{d}^4k_2 \ \check{\phi}(k_1)\check{\phi}(k_2)\hat{f}(k_1+k_2).\end{aligned}$$

Nun ist $\hat{f}(k_1+k_2)$ aber keine Schwartzfunktion in $k_1$ und $k_2$, sodass der Ausdruck nicht wohldefiniert ist. Man geht deshalb von $\phi(x)^2$ über zu $:\phi(x)^2:$ , was wiederum eine operatorwertige temperierte Distribution ist. Dass das im nichtkommutativen Fall gar nicht nötig ist, zeigt uns das folgende

**Lemma 5.14.** *Sei $f_i \in \mathcal{S}_2$ $\forall i$. Dann ist die Abbildung*

$$\mathbb{R}^{4n} \ni (k_1, \dots, k_n) \mapsto \mathrm{Tr}\left(f_1 e^{ik_1 q} \dots f_n e^{ik_n q}\right) =: T(k_1, \dots, k_n) \tag{5.27}$$

*eine Schwartzfunktion.*

*Beweis.* Wegen der Stetigkeit von $\mathbb{R}^4 \ni k \mapsto e^{ikq} \in \mathcal{M}$, der Stetigkeit von $\mathcal{M} \ni \phi \mapsto \phi f \in \mathcal{S}_2$ für $f \in \mathcal{S}_2$ (Bemerkung A.27) und der Stetigkeit der Spur auf $\mathcal{S}_2$ ist die Abbildung stetig. Die Ableitung nach $(k_1)_\mu$ ergibt zum Beispiel

$$\frac{\partial}{\partial(k_1)_\mu} T(k_1, \dots, k_n) = \mathrm{Tr}\left(f_1 \left(iq^\mu - \frac{i}{2}(k_1\sigma)^\mu\right) e^{ik_1 q} \dots f_n e^{ik_n q}\right),$$

also wieder eine stetige Funktion. Offenbar sind auch alle anderen und höheren Ableitungen stetig, somit ist $T$ glatt. Außerdem gibt es zu jedem Multiindex $\beta$ ein $C$, so dass

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial k_1}\right)^{\beta} T(k_1,\dots,k_n)\right| \leq C \sum_{\alpha\leq\beta} \left(1+|k_1|^2\right)^{\frac{|\beta-\alpha|}{2}} \left|\mathrm{Tr}\left(f_1 q^{\alpha} e^{ik_1 q} f_2 e^{ik_2 q} \dots f_n e^{ik_n q}\right)\right|$$

gilt. Nach Voraussetzung gilt darüber hinaus

$$|(x|\, f\, |y)| \leq |f|_{lm} \left(1+|x|^2\right)^{-\frac{l}{2}} \left(1+|y|^2\right)^{-\frac{m}{2}} \qquad \forall l,m\in\mathbb{R}, \forall x,y\in\mathbb{R}^4, \forall f\in\mathcal{S}_2$$

und somit mit $D(x)\,|y) = e^{\frac{i}{2}\langle x,\sigma^{-1}y\rangle}\,|x+y)$ (vergleiche (B.17)) und (5.5)

$$\begin{aligned}
p'_{h\beta}(T) &= \sup_{k_i\in\mathbb{R}^4} \left\{ \prod_{i=1}^{n} \left(1+|k_i|^2\right)^{\frac{h_i}{2}} \left| \left(\frac{\partial}{\partial k_i}\right)^{\beta_i} \mathrm{Tr}\left(f_1 e^{ik_1 q} \dots f_n e^{ik_n q}\right)\right| \right\} \\
&\leq C \sup_{k_i\in\mathbb{R}^4} \left\{ \prod_{i=1}^{n} \sum_{\alpha_i\leq\beta_i} \left(1+|k_i|^2\right)^{\frac{h_i+|\beta_i-\alpha_i|}{2}} \left|\mathrm{Tr}\left(f_1 q^{\alpha_1} e^{ik_1 q} \dots f_n q^{\alpha_n} e^{ik_n q}\right)\right| \right\} \\
&\leq C \sup_{k_i\in\mathbb{R}^4} \left\{ \prod_{i=1}^{n} \sum_{\alpha_i\leq\beta_i} \left(1+|k_i|^2\right)^{\frac{h_i+|\beta_i-\alpha_i|}{2}} \right. \\
&\qquad \left. \cdot \int \prod_{j=1}^{n} \mathrm{d}^4 x_j \prod_{\sigma\in\mathbb{Z}_n} \left|\left(x_{\sigma(1)}\right| f_{\sigma(1)} q^{\alpha_{\sigma(1)}} \left|x_{\sigma(2)}+\sigma k_{\sigma(1)}\right)\right| \right\} \\
&\leq C' \prod_i \left( \sup_{\alpha_i\leq\beta_i} |f_i q^{\alpha_i}|_{l_i m_i} \right) \sup_{k_i\in\mathbb{R}^4} \left\{ \prod_{i=1}^{n} \left(1+|k_i|^2\right)^{\frac{h_i+|\beta_i|-m_i}{2}} \right\} \int \mathrm{d}^4 x_i \ \left(1+|x_i|^2\right)^{\frac{-l_i+m_i}{2}}.
\end{aligned}$$

Hier ist $p'$ eine Variante der Halbnorm (A.1). $h$ ist ein $n$-Multiindex, $\beta_i$ ein 4-Multiindex. Offensichtlich kann man für alle $h$ und $\beta$ die Multiindizes $l,m$ so wählen, dass der Ausdruck endlich ist. □

Der Ausdruck (5.26) ist also wohldefiniert, wenn $;\check{\phi}(k_1)\dots\check{\phi}(k_n);$ eine temperierte Distribution in den $k_i$ ist, wovon man im Allgemeinen ausgehen kann. Bei der Quantisierung von lokalen Funktionalen mit höheren Potenzen der Felder treten die üblichen Divergenzprobleme also nicht auf. In gewisser Weise wurde mit dem IR-Cutoff durch die Multiplikation mit "Testfunktionen" $f_i$ gleichzeitig ein UV-Cutoff durchgeführt. Dabei spielt eine wesentliche Rolle, dass die $e^{ikq}$ Verschiebungsoperatoren sind (Bemerkung 2.1) und immer zwischen zwei Testfunktionen stehen. Dadurch werden im Ausdruck (5.27) die Testfunktionen $f_i$ gewissermaßen gegeneinander verschoben was das Lemma 5.14 auch anschaulich plausibel macht.

Eine interessante Konsequenz von Lemma 5.14 ist, dass auch die normalerweise UV-divergenten höheren Terme aus dem Yang-Feldman-Formalismus wohldefiniert sind. Als Beispiel schauen wir uns den relevanten Teil des ersten Terms von $\phi_2(f)$ an (vergleiche (5.12)):

$$\mathrm{Tr}\left(fD(x)gD(y)ge^{ik_1 q}ge^{ik_2 q}gD(-y)ge^{ik_3 q}gD(-x)\right)$$

Die $D(x)$ sind wie die $e^{ikq}$ Verschiebungsoperatoren, so dass es sich nach Lemma 5.14 um eine Schwartzfunktion in $x, y, k_i$ handelt. Somit sind die $x-$ und $y-$ Integrationen in (5.12) ausführbar. Das geht auch in allen höheren Ordnungen, da zwischen zwei Verschiebungsoperatoren immer ein Element von $\mathcal{S}_2$ steht.

Nachdem wir nun gesehen haben, dass eine Normalordnung für die $;\check{\phi}(k_1)\dots\check{\phi}(k_n);$ nicht nötig ist, wollen wir im Folgenden einige ihrer Eigenschaften aus dem Korrespondenzprinzip ableiten. Aus der Forderung, dass (5.14) auch für die quantisierten Funktionale gilt, erhält man

$$;\check{\phi}(k_1)\dots\check{\phi}(k_n);=;\check{\phi}(k_{\sigma(1)})\dots\check{\phi}(k_{\sigma(n)}); \tag{5.28}$$

für zyklische Vertauschungen $\sigma$.

Nun setzen wir $\check{\phi}(k) :=;\check{\phi}(k);$ und versuchen, $[\check{\phi}(k_1),\check{\phi}(k_2)]$ aus der Forderung zu bestimmen, dass $[\phi(f),\phi(g)]$ bis auf einen Faktor $i$ mit (5.23) übereinstimmt. Es gilt

$$[\phi(f),\phi(g)] = \int \mathrm{d}^4k\mathrm{d}^4k'\ [\check{\phi}(k),\check{\phi}(k')]\mathrm{Tr}(fe^{ikq})\mathrm{Tr}(ge^{ik'q}).$$

Wir nehmen $[\check{\phi}(k),\check{\phi}(k')] = \delta(k+k')\check{\rho}(k)$ an, und wollen $\check{\rho}(k)$ bestimmen. Die hinteren Faktoren sind gerade die Fouriertransformierten der Weyl-Symbole von $f$ und $g$. Man erhält somit

$$\begin{aligned}
[\phi(f),\phi(g)] &= \int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4k\ \rho(x)e^{-ikx}\mathrm{Tr}(fe^{ikq})\mathrm{Tr}(ge^{-ikq}) \\
&= \int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4k\ \rho(x)\mathrm{Tr}(fe^{ikq})\mathrm{Tr}(g(e^{-ikq})_{-x}) \\
&= \int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4k\ \rho(x)\widehat{f_W}(k)\widehat{(g_x)_W}(-k) \\
&= \int \mathrm{d}^4x\ \rho(x)\widehat{(fg_x)_W}(0) \\
&= \int \mathrm{d}^4x\ \rho(x)\mathrm{Tr}(fg_x).
\end{aligned}$$

Dabei wurde die Formel für die getwistete Faltung benutzt. Vergleich mit (5.23) ergibt $\rho = \Delta$ beziehungsweise

$$[\check{\phi}(k),\check{\phi}(k')] = \delta(k+k')\frac{1}{2\omega(\mathbf{k})}\left(\delta(k^0-\omega(\mathbf{k})) - \delta(k^0+\omega(\mathbf{k}))\right),$$

das heißt wir können $\check{\phi}(k)$ wie in (3.2) durch

$$\check{\phi}(k) = \left(\theta(k_0)a(\mathbf{k})^* + \theta(-k_0)a(-\mathbf{k})\right)\delta(k^2-m^2)$$

definieren, wobei $a^*$ und $a$ die üblichen Vertauschungsrelationen für Erzeuger und Vernichter erfüllen:

$$[a(\mathbf{k}),a(\mathbf{k}')^*] = 2\omega(\mathbf{k})\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}').$$

Wenn man nun für die höheren Potenzen der Felder in erster Ordnung in $\hbar$ die Vertauschungsrelation

$$[;\check{\phi}(k_1)\dots\check{\phi}(k_m);,;\check{\phi}(p_1)\dots\check{\phi}(p_n);] = \hbar \sum_{\sigma\in\mathbb{Z}_m}\sum_{\sigma'\in\mathbb{Z}_n} \delta(k_{\sigma(m)}+p_{\sigma'(1)})\check{\Delta}(k_{\sigma(m)})\cdot \\ ;\check{\phi}(k_{\sigma(1)})\dots\check{\phi}(k_{\sigma(m-1)})\check{\phi}(p_{\sigma'(2)})\dots\check{\phi}(p_{\sigma'(n)});+\mathcal{O}(\hbar^2) \quad (5.29)$$

annimmt, so kann man die Peierls-Klammer (5.16) in erster Ordnung in $\hbar$ reproduzieren:

$$\begin{aligned}
&[;\phi(f_1)\dots\phi(f_m);,;\phi(g_1)\dots\phi(g_n);]\\
=&\hbar\sum_{\sigma\sigma'}\int\prod_{i=1}^m \mathrm{d}^4k_i\prod_{j=1}^n \mathrm{d}^4p_j\ \delta^{(4)}(k_{\sigma(m)}+p_{\sigma'(1)})\check{\Delta}(k_{\sigma(m)})\\
&\quad\cdot;\check{\phi}(k_{\sigma(1)})\dots\check{\phi}(k_{\sigma(m-1)})\check{\phi}(p_{\sigma'(2)})\dots\check{\phi}(p_{\sigma'(n)});\\
&\quad\cdot\mathrm{Tr}\left(f_1e^{ik_1q}\dots f_me^{ik_mq}\right)\mathrm{Tr}\left(g_1e^{ip_1q}\dots g_ne^{ip_nq}\right)+\mathcal{O}(\hbar^2)\\
=&\hbar\int\prod_{i=1}^m \mathrm{d}^4k_i\prod_{j=1}^n \mathrm{d}^4p_j\ \delta^{(4)}(k_m+p_1)\check{\Delta}(k_m);\check{\phi}(k_1)\dots\check{\phi}(k_{m-1})\check{\phi}(p_2)\dots\check{\phi}(p_n);\\
&\quad\cdot\sum_{\sigma\sigma'}\mathrm{Tr}\left(f_{\sigma(1)}e^{ik_1q}\dots f_{\sigma(m)}e^{ik_mq}\right)\mathrm{Tr}\left(g_{\sigma'(1)}e^{ip_1q}\dots g_{\sigma'(n)}e^{ip_nq}\right)+\mathcal{O}(\hbar^2)\\
=&\hbar\int\mathrm{d}^4x\Delta(x)\int\prod_{i=1}^{m-1}\mathrm{d}^4k_i\prod_{j=2}^n\mathrm{d}^4p_j\ ;\check{\phi}(k_1)\dots\check{\phi}(k_{m-1})\check{\phi}(p_2)\dots\check{\phi}(p_n);\\
&\quad\cdot\sum_{\sigma\sigma'}\mathrm{Tr}\left(f_{\sigma(1)}e^{ik_1q}\dots e^{ik_{m-1}q}f_{\sigma(m)}\left(g_{\sigma'(2)}e^{ip_2q}\dots e^{ip_nq}g_{\sigma'(1)}\right)_x\right)+\mathcal{O}(\hbar^2).
\end{aligned}$$

Aufgrund der Tatsache, dass für die Wohldefiniertheit des Ausdrucks (5.26) keine Normalordnung nötig ist, und wegen der Forderung (5.28) nach Zyklizität, wäre es nahe liegend, für das $;\cdot;$-geordnete Produkt

$$;\check{\phi}(k_1)\dots\check{\phi}(k_n);:=\frac{1}{n}\sum_{\sigma\in\mathbb{Z}_n}\check{\phi}(k_{\sigma(1)})\dots\check{\phi}(k_{\sigma(n)}) \quad (5.30)$$

zu setzen. Nun ist das Produkt zweier zyklischer Ausdrücke natürlich im Allgemeinen nicht zyklisch. Man kann es aber zyklisieren. Denn für ein Produkt von Feldern gilt

$$\phi_1\dots\phi_n =;\phi_1\dots\phi_n;+\frac{1}{n}\left([\phi_1,\phi_2\dots\phi_n]+[\phi_1\phi_2,\phi_3\dots\phi_n]+\dots+[\phi_1\dots\phi_{n-1},\phi_n]\right).$$

Die Kommutatoren ergeben Ausdrücke der Ordnung $\hbar$ mit Produkten von $n-2$ Feldern. Diese lassen sich wieder zyklisieren, bis man in Ordnung $\hbar^{\left[\frac{n}{2}\right]}$ entweder Ausdrücke mit einem Feld (für $n$ ungerade) oder komplexe Zahlen (für $n$ gerade) erhält. Diese sind natürlich per Definition zyklisch. Auf diese Weise würde man eine Produktformel für die Ausdrücke (5.26) erhalten. Das wäre dann eine Deformierung des kommutativen Produkts der klassischen Funktionalen (5.13).

Eine Konsequenz der Ordnungsvorschrift (5.30) wäre, dass bei Verwendung von Operatoren von Rang Eins als Testfunktionen auch eine Zyklisierung auftritt:

$$;\phi(|a_1\rangle\langle b_1|)\dots\phi(|a_n\rangle\langle b_n|);=\frac{1}{n}\sum_{\sigma\in\mathbb{Z}_n}\phi(|a_{\sigma(1)}\rangle\langle b_{\sigma(n)}|)\dots\phi(|a_{\sigma(n)}\rangle\langle b_{\sigma(n-1)}|).$$

Dies ist mit der Gleichung (5.15) für die klassischen lokalen Funktionale zu vergleichen.

Es soll hier aber noch einmal betont werden, dass dies nur erste Schritte zu einer Quantisierung der lokalen Funktionale der freien Felder sind. Die Erfahrungen, die bei der Quantisierung von nichtlokalen Feldtheorien gemacht wurden, deuten darauf hin, dass man hier sehr vorsichtig vorgehen sollte. So hatte man dort das Problem, dass in der klassischen Theorie das einlaufende und das auslaufende Feld dieselbe Peierls-Klammer wie das freie Feld haben [33], während das für den Kommutator in der quantisierten Theorie nicht mehr gilt [34].

# Kapitel 6

# Zusammenfassung und Ausblick

Motiviert durch die in der nichtkommutativen Quantenfeldtheorie auftretenden Probleme, insbesondere die UV/IR-Divergenzen, wurden in dieser Arbeit klassische nichtkommutative Feldtheorien untersucht. Zunächst wurde ein allgemeiner Rahmen entwickelt, in dem sich ein Wirkungsprinzip für nichtkommutative Feldtheorien definieren, und die Bewegungsgleichung daraus ableiten lässt. Dabei wurde das aus der kommutativen Feldtheorie bekannte Konzept von "Abschneidefunktionen" algebraisch charakterisiert. Auch das Noether-Theorem wurde in diesem Rahmen formuliert. Schließlich wurde die Algebra $\mathcal{M}$ vorgestellt, die sich in diesen Rahmen einfügt, und die eine skalare Feldtheorie auf dem nichtkommutativen Minkowski-Raum beschreibt.

Wir haben dann einen Lokalitätsbegriff für $\mathcal{M}$ entwickelt und untersucht, welche Wechselwirkungsterme ein kausales Ausbreitungsverhalten haben. Das führte uns zur Definition von lokalen Funktionalen, die auch einige interessante algebraische Eigenschaften haben. Auch bei der Quantisierung dieser Funktionale trat ein interessantes Phänomen auf, und zwar ist zur Definition von Produkten von Feldern keine Normalordnung mehr nötig. Es wurde ein Vorschlag zur expliziten Konstruktion des deformierten (quantisierten) Produkts von lokalen Funktionalen gemacht, jedoch nicht weiter verfolgt.

Auch einige andere Fragen sind offen geblieben. Es konnte nicht geklärt werden, ob die in [25] angegebene Konstruktion eines divergenzfreien Energie-Impuls-Tensors für wechselwirkende Theorien in unserem Sinne lokal ist. Auch die Stärke des Lokalisationsbegriffs, also die Eindeutigkeit des Lokalisationsgebietes, sollte noch untersucht werden.

Es wurden auch neue Fragen aufgeworfen: Sowohl die Wahl von $\mathcal{M}$ als Feldalgebra als auch die Definition des Lokalitätsbegriffes schienen zwar durchaus vernünftig zu sein, waren aber doch relativ ad hoc. Es wäre also interessant zu sehen, ob die Schlussfolgerungen, die wir für die Form der lokalen Funktionale gezogen haben, von dieser Wahl abhängen, oder eine allgemeine Eigenschaft nichtkommutativer Feldtheorien sind. Auch eine genauere Untersuchung der algebraischen Struktur der (quantisierten) lokalen Funktionale könnte interessant sein, zum Beispiel im Hinblick auf die Charakterisierung von lokalen Gleichgewichtszuständen.

Ausgehend von abgeschnittenen Wechselwirkungstermen der Form (5.11) könnte man nun auch das ins Auge fassen, was diese Diplomarbeit motiviert hat, die Durchführung des adiabatischen Limes. Auch die Formulierung von Eichtheorien auf nichtkommutativen Raumzeiten,

eventuell im hier vorgestellten Rahmen, wäre ein interessantes Thema. Schließlich bleibt als Fernziel natürlich die Einbeziehung gravitativer Effekte.

# Anhang A

# Die Topologie der Feldalgebren

## A.1 Lokal konvexe Räume

In diesem Abschnitt sollen einige Definitionen und Sätze aus der Theorie lokal konvexer Räume wiedergegeben werden, die für die Diskussion der topologischen Eigenschaften der Feldalgebren $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ und $\mathcal{M}$ in den nächsten beiden Abschnitten wichtig sind. Wir orientieren uns dabei an [15].

**Definition A.1.** Sei $X$ ein $K$-Vektorraum. Eine *Halbnorm* auf $X$ ist eine Abbildung $p : X \to \mathbb{R}^0_+$ mit den folgenden Eigenschaften:

$$p(\lambda x) = |\lambda| p(x) \qquad \forall \lambda \in K, x \in X; \qquad p(x+y) \leq p(x) + p(y) \qquad \forall x, y \in X.$$

Eine Familie $\{p_\alpha\}_{\alpha \in A}$ von Halbnormen heißt *separierend*, wenn

$$(p_\alpha(x) = 0 \quad \forall \alpha \in A) \Rightarrow x = 0$$

gilt.

**Definition A.2.** Ein *lokal konvexer Raum* ist ein $K$-Vektorraum $X$ mit einer separierenden Familie von Halbnormen. Seine Topologie ist die schwächste Topologie, so dass alle Halbnormen stetig sind.

Auf lokal konvexen Räumen ist auch der Begriff der Vollständigkeit definiert, allerdings nicht über die Konvergenz von Cauchy-Folgen, sondern über die von Cauchy-Netzen. Wir führen also den Begriff des Netzes ein:

**Definition A.3.** Eine Indexmenge $I$ mit einer Ordnungsrelation $\prec$ heißt *gerichtetes System*, wenn es zu allen $\alpha, \beta \in I$ ein $\gamma \in I$ gibt, so dass $\alpha \prec \gamma$ und $\beta \prec \gamma$ gilt, und $\prec$ eine Partialordnung ist, das heißt eine reflexive, transitive und antisymmetrische Relation.

**Definition A.4.** Ein Netz auf einer Menge $S$ ist eine Abbildung von einem gerichteten System $I$ nach $S$.

**Beispiel A.5.** Eine Folge ist offensichtlich ein Netz mit den natürlichen Zahlen als gerichtetem System. Der Begriff des Netzes ist somit eine Verallgemeinerung des Folgenbegriffs.

**Definition A.6.** Ein Netz $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ auf einem lokal konvexen Raum $X$ *konvergiert gegen* $x \in X$, wenn es zu jeder Halbnorm $p$ und zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\beta$ gibt, so dass

$$p(x_\alpha - x) < \epsilon \qquad \forall \alpha \succ \beta$$

gilt.

**Definition A.7.** Ein Netz $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ auf einem lokal konvexen Raum $X$ heißt *Cauchy-Netz*, wenn es zu jeder Halbnorm $p$ und zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\gamma$ gibt, so dass

$$p(x_\alpha - x_\beta) < \epsilon \qquad \forall \alpha, \beta \succ \gamma$$

gilt.

**Definition A.8.** Ein lokal konvexer Raum $X$ heißt *vollständig*, wenn jedes Cauchy-Netz konvergiert.

**Definition A.9.** Ein vollständiger, lokal konvexer Raum heißt *Fréchet-Raum*, wenn seine Topologie durch eine abzählbare Halbnorm-Familie erzeugt wird.

**Definition A.10.** Zwei Halbnormfamilien $p_\alpha$, $q_\beta$ auf $X$ heissen *äquivalent*, wenn sie dieselbe Topologie erzeugen.

**Satz A.11.** *Die Halbnormfamilien $\{p_\alpha\}_{\alpha\in A}$ und $\{q_\beta\}_{\beta\in B}$ auf $X$ sind genau dann äquivalent, wenn es zu jedem $\alpha \in A$ eine positive Konstante $C$ und $\beta_1 \dots \beta_m \in B$ gibt, so dass*

$$p_\alpha(x) \leq C\,(q_{\beta_1}(x) + \cdots + q_{\beta_m}(x)) \qquad \forall x \in X$$

*gilt, und zu jedem $\beta \in B$ eine positive Konstante $D$ und $\alpha_1 \dots \alpha_n \in A$, so dass*

$$q_\beta(x) \leq D\,(p_{\alpha_1}(x) + \cdots + p_{\alpha_n}(x)) \qquad \forall x \in X$$

*gilt.*

**Definition A.12.** Eine Familie $\{p_\alpha\}_{\alpha\in A}$ von Halbnormen heißt *gerichtet*, wenn es zu allen $\alpha, \beta \in A$ ein $\gamma \in A$ und eine Konstante $C$ gibt, so dass

$$p_\alpha(x) + p_\beta(x) \leq C p_\gamma(x) \qquad \forall x \in X$$

gilt.

**Satz A.13.** *Jeder lokal konvexe Raum besitzt eine gerichtete Halbnormfamilie, die äquivalent ist zur Halbnormfamilie, die die Topologie des Raumes definiert.*

**Satz A.14.** *Eine lineare Abbildung $f : X \to Y$ zwischen zwei lokal konvexen Räumen mit Halbnormfamilien $\{p_\alpha\}_{\alpha\in A}$ und $\{q_\beta\}_{\beta\in B}$ ist genau dann stetig, wenn es zu jedem $\beta \in B$ eine positive Konstante $C$ und $\alpha_1 \dots \alpha_m \in A$ gibt, so dass*

$$q_\beta(f(x)) \leq C\,(p_{\alpha_1}(x) + \cdots + p_{\alpha_m}(x)) \qquad \forall x \in X$$

*gilt. Wenn $\{r_\gamma\}$ eine gerichtete Halbnormfamilie von $X$ ist, so ist $f$ genau dann stetig, wenn es zu jedem $\beta \in B$ eine positive Konstante $C$ und $\gamma \in C$ gibt, so dass*

$$q_\beta(f(x)) \leq C r_\gamma(x) \qquad \forall x \in X$$

*gilt.*

**Definition A.15.** Eine Teilmenge $Y \subset X$ eines lokal konvexen Raums $X$ mit Halbnormen $\{p_\alpha\}_{\alpha\in A}$ heißt *beschränkt*, wenn es eine Funktion $C : A \to \mathbb{R}^+$ gibt, so dass

$$p_\alpha(y) \leq C(\alpha) \qquad \forall y \in Y, \alpha \in A$$

gilt.

*Bemerkung* A.16. Aus der Definition und dem vorherigen Satz folgt, dass das Bild einer beschränkten Menge unter einer stetigen, linearen Abbildung wieder beschränkt ist.

**Definition A.17.** Seien $X, Y$ lokal konvexe Räume mit Halbnormen $\{p_\alpha\}_{\alpha\in A}$ und $\{q_\beta\}_{\beta\in B}$. Dann wird die *Produkttopologie* auf $X \times Y$ durch die Halbnormen

$$r_{\alpha,\beta}(x, y) := \max\{p_\alpha(x), q_\beta(y)\}$$

erzeugt.

## A.2 Die Räume $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ und $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

In diesem Abschnitt sollen die topologische Eigenschaften der in der klassischen kommutativen Feldtheorie wichtigen Funktionenräume $\mathcal{E}(\mathbb{R}^d)$ und $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ besprochen werden. Wir orientieren uns an [35].

$\mathcal{E}(\mathbb{R}^d)$ ist der Raum der glatten, komplexwertigen Funktionen auf $\mathbb{R}^d$. Die Topologie ist die der gleichmäßigen Konvergenz jeder Ableitung auf kompakten Gebieten, das heißt sie wird durch die Halbnormen

$$r_{\alpha,C}(f) := \sup_{x\in C} |\partial^\alpha f(x)|$$

erzeugt. Hier ist $\alpha$ ein Multiindex und $C \subset \mathbb{R}^d$ ein Kompaktum. Es genügt offenbar, die Kompakta aus der Menge der Bälle $B_n$ mit Radius $n \in \mathbb{N}$ zu wählen. Da $\mathcal{E}(\mathbb{R}^d)$ vollständig ist ([35], tome I, ch. III, §7), ist es somit ein Fréchet-Raum. Unter Verwendung eines $\epsilon/3$-Arguments läßt sich zeigen, dass die punktweise Multiplikation $\mathcal{E}(\mathbb{R}^d) \times \mathcal{E}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{E}(\mathbb{R}^d)$ stetig ist. Dabei kann man wegen der Nichtlinearität der Multiplikation nicht den Satz A.14 benutzen, sondern muss die durch die Halbnormen erzeugten Umgebungsbasen betrachten.

$\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ ist der Raum der glatten, komplexwertigen Funktionen mit kompaktem Träger. Seine Topologie wird erzeugt durch die Halbnormen

$$s_{\{m\},\{\epsilon\}}(f) := \sup_n \left\{ \sup_{|x|\geq n, |\alpha|\leq m_n} \left\{ \frac{|\partial^\alpha f(x)|}{\epsilon_n} \right\} \right\}.$$

Hier ist $\{\epsilon\}$ eine monoton fallende, gegen Null konvergente Folge und $\{m\}$ eine monoton steigende, divergente Folge. In dieser Topologie ist $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ vollständig, aber kein Fréchet-Raum. Die Inklusion $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{E}(\mathbb{R}^d)$ ist stetig. Es ist auch nicht schwer zu zeigen, dass für festes $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ die Multiplikation $\mathcal{E}(\mathbb{R}^d) \ni \phi \mapsto \phi g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ stetig ist. $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ liegt auch dicht in $\mathcal{E}(\mathbb{R}^d)$. Denn sei $f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^d)$. Wir wählen $f_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ so, dass $f_n$ in $B_n$ mit $f$ übereinstimmt. Dann gilt $\lim_n r_{\alpha,C}(f - f_n) = 0$. Algebraisch ist $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ offensichtlich ein Ideal von $\mathcal{E}(\mathbb{R}^d)$.

## A.3 Die Topologie von $\mathcal{M}$

$\mathcal{M}$ ist definiert als ein Raum von stetigen Operatoren auf dem Schwartzraum $\mathcal{S}_1 := \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Wir betrachten also zunächst $\mathcal{S}_1$ und seine Topologie.

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ ist der Raum der glatten, komplexwertigen Funktionen in $\mathbb{R}^d$, die schneller als jede Potenz abfallen. Seine Topologie wird durch die Halbnormen

$$p_{\alpha,\beta}(f) := \sup_{x\in\mathbb{R}^4} |x^\alpha \partial^\beta f(x)| \tag{A.1}$$

erzeugt. Hier sind $\alpha$ und $\beta$ Multiindizes. Äquivalent dazu ist die Halbnormfamilie

$$q_{\alpha,\beta}(f) := \int \mathrm{d}^4x \ |x^\alpha \partial^\beta f(x)|^2. \tag{A.2}$$

In dieser Topologie ist $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ vollständig ([35] tome II, ch. VII, §3) und wegen der Abzählbarkeit der Halbnormfamilien ein Fréchet-Raum.

In ([15], Appendix to V.3) wurde eine weitere äquivalente Halbnormfamilie $\{h_m\}$ durch

$$h_m(f) := \|(N+1)^m f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \tag{A.3}$$

definiert. Dabei ist $m$ ein $d$-Multiindex und $N_i = a_i^* a_i$ der Niveauoperator des harmonischen Oszillators. $\{h_m\}$ ist offensichtlich eine gerichtete Halbnormfamilie.

Schwartzfunktionen liegen in $L^2(\mathbb{R}^d)$, lassen sich also in den Eigenfunktionen des harmonischen Oszillators entwickeln: $b_n := \langle n|f\rangle$. Hier ist $n$ ein $d$-Multiindex. Auf dem Raum der $d$-Multiindex-Folgen definiert man analog zu (A.3) die Halbnormen

$$g_m(b)^2 := \sum_n (n+1)^{2m} |b_n|^2.$$

Der durch diese Halbnormen topologisierte Folgenraum ist dann unter der Abbildung $\{b_n\} \mapsto \sum_n b_n|n\rangle$ homöomorph zu $\mathcal{S}_1$.

Wir betrachten nun $\mathcal{L}(\mathcal{S}_1)$, den Raum der stetigen Operatoren auf $\mathcal{S}_1$, in der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf beschränkten Teilmengen. Diese Topologie wird durch die Halbnormen $\{r_{p,B}\}$ erzeugt, die durch

$$r_{p,B}(\phi) := \sup_{f\in B}\{p(\phi(f))\}$$

definiert sind. Dabei ist $p$ eine Halbnorm von $\mathcal{S}_1$ und $B \subset \mathcal{S}_1$ eine beschränkte Teilmenge.

**Satz A.18.** *$\mathcal{L}(\mathcal{S}_1)$ ist vollständig.*

*Beweis.* Nach ([36] Prop. 7) ist $\mathcal{L}_\mathrm{b}(E,F)$ (hier steht b für die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf beschränkten Teilmengen) vollständig, wenn $E$ Fréchet-Raum und $F$ vollständiger, lokal konvexer Hausdorff-Raum ist. Diese Eigenschaften werden von $\mathcal{S}_1$ erfüllt. □

Allerdings ist $\mathcal{L}(\mathcal{S}_1)$ kein Fréchet-Raum [37].
Für $\phi \in \mathcal{L}(\mathcal{S}_1)$ kann man die Matrixelemente

$$c_{mn} := \langle m|\phi|n\rangle. \tag{A.4}$$

bilden. Umgekehrt kann man sich fragen, wann die Reihe

$$\phi := \sum_{mn} c_{mn}|m\rangle\langle n| \tag{A.5}$$

in $\mathcal{L}(\mathcal{S}_1)$ konvergiert. Es gilt der folgende

**Satz A.19.** *Die Reihe (A.5) konvergiert genau dann in $\mathcal{L}(\mathcal{S}_1)$, wenn es zu jedem d-Multiindex $k$ einen d-Multiindex $l$ gibt, so dass*

$$g_{k,-l}(c)^2 := \sum_{mn}(m+1)^{2k}(n+1)^{-2l}|c_{mn}|^2 < \infty \tag{A.6}$$

*gilt.*

*Beweis (im Wesentlichen aus [37]).* Angenommen, (A.6) sei erfüllt. Sei $f \in \mathcal{S}_1$ durch $f := \sum_n b_n|n\rangle$ gegeben. Dann gilt

$$\begin{aligned} h_k(\phi(f))^2 &= \sum_m (m+1)^{2k}\left|\sum_n c_{mn}b_n\right|^2 \\ &\leq \sum_m (m+1)^{2k}\left(\sum_n (n+1)^{-2l}|c_{mn}|^2\right)\left(\sum_n (n+1)^{2l}|b_n|^2\right) = g_{k,-l}(c)^2 h_l(b)^2. \end{aligned}$$

Hier wurde die Cauchy-Schwartzsche-Ungleichung benutzt. Somit ist $\phi$ ein stetiger Operator auf $\mathcal{S}_1$.

Sei umgekehrt $\phi$ stetig, das heißt zu jedem $k$ existieren $C$ und $l$, so dass

$$h_k(\phi(f))^2 \leq C h_l(f)^2$$

gilt. Wir setzen $f = |n\rangle$. Dann gilt

$$h_k(\phi(f))^2 = \sum_m (m+1)^{2k}|c_{mn}|^2 \leq C(n+1)^{2l}.$$

Wir setzen $l' = (l_1+1, \ldots, l_d+1)$. Es folgt

$$g_{k,-l'}(c)^2 \leq C\sum_n \prod_{i=1}^d (n_i+1)^{-2} = C\left(\sum_{n_i=0}^{\infty}(n_i+1)^{-2}\right)^d < \infty$$

□

*Bemerkung* A.20. Wir können für jeden Operator $\phi \in \mathcal{L}(\mathcal{S}_1)$ die Matrixelemente (A.4) bilden. Nach dem zweiten Teil des obigen Beweises gibt es dann zu jedem $d$-Multiindex $k$ einen $d$-Multiindex $l$, so dass

$$h_{k,-l}(\phi) := g_{k,-l}(c) < \infty$$

gilt. Wegen $\langle m|\phi^*|n\rangle = \overline{\langle n|\phi|m\rangle} = \overline{c_{nm}}$ ist $\phi$ genau dann in $\mathcal{L}(\mathcal{S}_1)^*$, wenn es zu jedem $l$ ein $k$ gibt, so dass $h_{-k,l}(\phi) < \infty$ gilt.

*Bemerkung* A.21. Die Vervollständigung des Raumes der $d$-Multiindex-Doppelfolgen $\{c_{mn}\}$ bezüglich der Norm $g_{k,l}$ nennen wir $\mathcal{G}_{k,l}$. Somit haben wir eine Entsprechung von $\mathcal{L}(\mathcal{S}_1)$ und $\mathcal{G}_L := \cap_k \cup_l \mathcal{G}_{k,l}$. Auf $\mathcal{G}_L$ kann man durch Bildung der induktiven und projektiven Topologie (siehe zum Beispiel [38], II.5,6) eine Topologie definieren, das heißt eine Umgebungsbasis der Null ist gegeben durch

$$V_{k,C} := \{\{c_{mn}\} \in \mathcal{G}_L | g_{k,l}(c) \leq C(l) \text{ für ein } l\}\,. \tag{A.7}$$

Dabei ist sind $k$ und $l$ jeweils $d$-Multiindizes und $C$ eine strikt positive Funktion. In [37] wird gezeigt, dass in dieser Topologie die Zuordnung $\mathcal{L}(\mathcal{S}_1) \ni \phi \mapsto \{c_{mn}\} \in \mathcal{G}_L$ ein Homöomorphismus ist.

Nun wollen wir die Stetigkeit der Multiplikation in $\mathcal{L}(\mathcal{S}_1)$ untersuchen. Offensichtlich ist sie separat, das heißt bei Festhalten von einem der beiden Faktoren, stetig. Sie ist allerdings nicht in beiden Argumenten stetig. Denn es gilt

$$r_{p,B}(\phi\psi) = \sup_{f\in B}\{p(\phi(\psi(f)))\} = r_{p,\psi(B)}(\phi).$$

Wenn wir nun $\psi$ aus ganz $\mathcal{L}(\mathcal{S}_1)$ wählen können, so ist $\{\psi(f)|\psi \in \mathcal{L}(\mathcal{S}_1)\}$ offensichtlich nicht beschränkt, so dass wir die rechte Seite der obigen Gleichung nicht durch eine weitere Halbnorm abschätzen können. Das ändert sich natürlich, wenn wir die Multiplikation im zweiten Argument auf eine beschränkte Teilmenge $B'$ von $\mathcal{L}(\mathcal{S}_1)$ einschränken. Denn $B'$ ist genau dann beschränkt, wenn

$$r_{p,B}(\psi) \leq C(p,B) \qquad \forall\psi \in B', \forall p, B$$

und somit

$$\sup_{g\in B'(B)}\{p(g)\} = \sup_{\psi\in B'}\sup_{f\in B}\{p(\psi(f))\} \leq C(p,B) \qquad \forall p, B$$

gilt. Also ist $B'(B) \subset \mathcal{S}_1$ beschränkt, und somit die Abbildung $\mathcal{L}(\mathcal{S}_1) \times B' \to \mathcal{L}(\mathcal{S}_1)$ stetig. Für diese Situation gibt es einen speziellen Stetigkeitsbegriff:

**Definition A.22.** Eine Abbildung $f : X \times Y \to Z$, wobei $X, Y, Z$ lokal konvexe Räume sind, heißt *links-* beziehungsweise *rechts-hypostetig*, wenn sie separat stetig ist, und bei Einschränkung auf $B_1 \times Y$ bzw. $X \times B_2$, wobei $B_{1,2}$ beliebige beschränkte Teilmengen von $X$ bzw. $Y$ sind, stetig ist. Sie heißt *hypostetig*, wenn sie sowohl rechts- als auch linkshypostetig ist.

Wir haben somit bewiesen:

**Satz A.23.** *Die Multiplikation auf $\mathcal{L}(\mathcal{S}_1)$ ist rechts-hypostetig.*

Man kann auch die volle Hypostetigkeit der Multiplikation auf $\mathcal{L}(\mathcal{S}_1)$ zeigen, dies ist für unsere Zwecke aber nicht notwendig, da aus der Rechtshypostetigkeit auf $\mathcal{L}(\mathcal{S}_1)$ die Linkshypostetigkeit auf $\mathcal{L}(\mathcal{S}_1)^*$ und somit die volle Hypostetigkeit auf $\mathcal{M} := \mathcal{L}(\mathcal{S}_1) \cap \mathcal{L}(\mathcal{S}_1)^*$ folgt.

Nun wollen wir $\mathcal{S}_2$ betrachten, die Menge der stetigen Operatoren auf $\mathcal{S}_1$ deren Integralkern in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2d})$ liegt. Wir topologisieren $\mathcal{S}_2$ so, dass die Abbildung $\mathcal{S}_2 \ni \phi \mapsto I_\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2d})$ auf den Integralkern ein Homöomorphismus ist. Eine Halbnormfamilie von $\mathcal{S}_2$ ist also, analog zu (A.3) durch

$$h'_{m_1,m_2}(\phi) := \|(N^{(1)}+1)^{m_1}(N^{(2)}+1)^{m_2} I_\phi\|_{L^2(\mathbb{R}^{2d})}$$

gegeben. Dabei wirken $N^{(1)}$ und $N^{(2)}$ auf die ersten beziehungsweise auf die zweiten $d$ Koordinaten. Offensichtlich gilt

$$h'_{m_1,m_2}(\phi) = h_{m_1,m_2}(\phi).$$

Somit liegt $\phi$ also genau dann in $\mathcal{S}_2$, wenn

$$h_{k,l}(\phi) < \infty \qquad \forall k,l$$

gilt.

*Bemerkung* A.24. $\mathcal{S}_2$ liegt dicht in $\mathcal{L}(\mathcal{S}_1)$. Denn sei $\phi \in \mathcal{L}(\mathcal{S}_1)$ und die $\{c_{mn}\}$ wie in (A.4) gegeben. Dann setzen wir

$$\phi_M := \sum_{|m|\le M} \sum_{|n|\le M} c_{mn} |m\rangle\langle n|.$$

Offensichtlich gilt $\phi_M \in \mathcal{S}_2\ \forall M$ und nach Satz A.19 konvergiert die Reihe für $M \to \infty$ gegen $\phi$.

*Bemerkung* A.25. Die Inklusion $\mathcal{S}_2 \to \mathcal{L}(\mathcal{S}_1)$ ist stetig, denn es gilt für $\phi \in \mathcal{S}_2$

$$r_{h_k,B}(\phi) = \sup_{f\in B} h_k(\phi(f)) \le \sup_{f\in B} h_{k,-l}(\phi) h_l(f) \le C_l h_{k,-l}(\phi).$$

*Bemerkung* A.26. $\mathcal{S}_2$ ist ein linksseitiges Ideal von $\mathcal{L}(\mathcal{S}_1)$. Anschaulich ist das klar, der Beweis ist auch nicht schwer. Sei $\phi \in \mathcal{L}(\mathcal{S}_1)$ und $g \in \mathcal{S}_2$. Wir erhalten

$$h_{m,n}(\phi g) \le h_{m,-l}(\phi) h_{l,n}(g) < \infty \tag{A.8}$$

wenn wir $l$ so wählen, dass $h_{m,-l}(\phi) < \infty$ gilt. Darüber hinaus ist die Abbildung

$$\mathcal{L}(\mathcal{S}_1) \ni \phi \mapsto \phi g \in \mathcal{S}_2$$

für alle $g \in \mathcal{S}_2$ stetig. Um dies zu zeigen, setzen wir

$$W_{m,n,g,\epsilon} := \left\{\phi \in \mathcal{L}(\mathcal{S}_1) | h_{m,-l}(\phi) \le \epsilon h_{l,n}(g)^{-1} \text{ für ein } l\right\}.$$

Vergleich mit (A.7) zeigt, dass es sich um eine Nullumgebung handelt. Wegen (A.8) gilt $h_{m,n}(W_{m,n,g,\epsilon} g) \le \epsilon$. Das beweist die Behauptung.

*Bemerkung* A.27. Wegen $I_{\phi^*}(x,y) = \bar{I}_\phi(y,x)$ gilt $\mathcal{S}_2^* = \mathcal{S}_2$. Daraus folgt mit den vorangegangenen Bemerkungen, dass $\mathcal{S}_2$ dicht in $\mathcal{M}$ liegt, die Inklusion $\mathcal{S}_2 \to \mathcal{M}$ stetig ist, $\mathcal{S}_2$ ein beidseitiges $*$-Ideal von $\mathcal{M}$ ist und die Abbildungen $\mathcal{M} \ni \phi \mapsto \phi g, g\phi \in \mathcal{S}_2$ für alle $g \in \mathcal{S}_2$ stetig sind.

**Satz A.28.** *Alle stetigen Derivationen auf $\mathcal{M}$ sind innere Derivationen.*

*Beweis.* Wir beschränken uns zunächst auf $\mathcal{L}(\mathcal{S}_1)$ und gehen vor wie beim Beweis derselben Eigenschaft für Matrizen. Sei also $X : \mathcal{L}(\mathcal{S}_1) \to \mathcal{L}(\mathcal{S}_1)$ eine stetige Derivation. Wir definieren

$$X^{pq}_{mn} := \langle m|X\left(|p\rangle\langle q|\right)|n\rangle.$$

Aus der Leibniz-Regel folgt somit

$$\begin{aligned}\delta_{qr}X^{ps}_{mn} = \langle m|X\left(|p\rangle\langle q||r\rangle\langle s|\right)|n\rangle &= \langle m|X\left(|p\rangle\langle q|\right)|r\rangle\langle s|n\rangle + \langle m|p\rangle\langle q|X\left(|r\rangle\langle s|\right)|n\rangle \\ &= \delta_{sn}X^{pq}_{mr} + \delta_{mp}X^{rs}_{qn}. \quad \text{(A.9)}\end{aligned}$$

Wir wollen nun zu $X$ ein $\psi \in \mathcal{L}(\mathcal{S}_1)$ finden, so dass

$$X(\phi) = [\psi, \phi] \qquad \forall \phi \in \mathcal{L}(\mathcal{S}_1)$$

gilt. Dazu schreiben wir

$$\psi = \sum_{mn} c_{mn}|m\rangle\langle n|$$

und berechnen

$$X^{pq}_{mn} = \langle m|\left[\psi, |p\rangle\langle q|\right]|n\rangle = c_{mp}\delta_{qn} - c_{qn}\delta_{mp}.$$

Wenn wir nun

$$c_{mp} := X^{p0}_{m0}$$

setzen, so kann man leicht nachrechnen, dass (A.9) erfüllt ist. Die Wahl ist hier natürlich nicht eindeutig, man könnte statt 0 auch einen beliebigen anderen Multiindex wählen, damit würde man jedoch nur die Diagonale verändern, das heißt ein Vielfaches der Eins addieren.

Es stellt sich nun die Frage, ob das so definierte $\psi$ in $\mathcal{L}(\mathcal{S}_1)$ liegt. Da $X$ stetig ist, gibt es zu jedem $(k, C)$ ein $(k', C')$, so dass $X(V_{k',C'}) \subset V_{k,C}$ gilt. Seien nun $(k, C)$ und $(k', C')$ solche Paare. Wir setzen für beliebige $p, q, l'$

$$\phi := (p+1)^{-k'}(q+1)^{-l'}C'(l')|p\rangle\langle q| \in V_{k',C'}.$$

Dann gilt

$$h_{k,l}(X(\phi))^2 = \sum_{mn}(m+1)^{2k}(n+1)^{2l}(p+1)^{-2k'}(q+1)^{-2l'}C'(l')^2|X^{pq}_{mn}|^2 \leq C(l)^2$$

und mit $k'' = (k'_1 + 1, \ldots, k'_d + 1)$ und $l'' = (l'_1 + 1, \ldots, l'_d + 1)$

$$\sum_{mnpq}(m+1)^{2k}(n+1)^{2l}(p+1)^{-2k''}(q+1)^{-2l''}|X^{pq}_{mn}|^2 \leq C(l)^2C'(l')^{-2}\left(\sum_{r=0}^{\infty}(r+1)^{-2}\right)^{2d} < \infty.$$

Somit gilt

$$\begin{aligned}h^2_{k,-k''}(\psi) = \sum_{mp}(m+1)^{2k}(p+1)^{-2k''}&|X^{p0}_{m0}|^2 \\ &\leq \sum_{mnpq}(m+1)^{2k}(n+1)^{2l}(p+1)^{-2k''}(q+1)^{-2l''}|X^{pq}_{mn}|^2 < \infty.\end{aligned}$$

Es existiert also zu jedem $k$ ein $k'$, so dass $h_{k,k'}(\psi) < \infty$ gilt, somit ist $\psi \in \mathcal{L}(\mathcal{S}_1)$.

Analog zeigt man, dass sich jede Derivationen auf $\mathcal{L}(\mathcal{S}_1)^*$ als Kommutator mit einem Element von $\mathcal{L}(\mathcal{S}_1)^*$ schreiben lässt. Die Menge der Derivation auf $\mathcal{M}$ ist grade die Schnittmenge der Derivationen von $\mathcal{L}(\mathcal{S}_1)$ und $\mathcal{L}(\mathcal{S}_1)^*$, somit sind alle Derivationen auf $\mathcal{M}$ innere. □

# Anhang B

# Die normalgeordneten Symbole

Durch die Darstellung (2.9) ist ein Isomorphismus zwischen $\mathcal{E}_\sigma$ und der Algebra der kompakten Operatoren auf dem Hilbertraum $H_\sigma = L^2(\mathbb{R}^2)$ gegeben. Die Feldalgebra $\mathcal{M}$ besteht aus stetigen Operatoren auf dem dichten Teilraum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2) \subset L^2(\mathbb{R}^2)$. Der Hilbertraum $L^2(\mathbb{R}^2)$ ist aus der Quantenmechanik natürlich gut bekannt. Wir können also versuchen, mathematische Methoden aus der Quantenmechanik auf unsere nichtkommutative Feldtheorie zu übertragen. Dazu dient dieser Anhang.

In den ersten beiden Abschnitten geben wir einen kurzen Überblick über die Bargmann-Fock-Darstellung und die kohärenten Zustände aus der Quantenmechanik. In Abschnitt B.3 werden die normalgeordneten Symbole eingeführt und im letzten Abschnitt in eine für die Feldtheorie passende Form gebracht. In den ersten drei Abschnitten orientieren wir uns an [39].

## B.1 Die Bargmann-Fock-Darstellung

Die Grundidee hinter der Bargmann-Fock-Darstellung ist folgende: Wenn man Erzeuger und Vernichter durch

$$a_k := \frac{Q_k + iP_k}{\sqrt{2}}; \qquad a_k^* := \frac{Q_k - iP_k}{\sqrt{2}}$$

definiert, so folgt aus den kanonischen Vertauschungsrelationen, dass

$$[a_i, a_j^*] = \delta_{ij}$$

gilt. Eine mögliche Darstellung der $a_i, a_i^*$ ist also, analog zur Darstellung der kanonischen Vertauschungsrelationen auf $L^2(\mathbb{R}^d)$, durch

$$a_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z_i}; \qquad a_i^* = z_i \tag{B.1}$$

auf einem noch zu bestimmenden Funktionenraum $\mathfrak{F}^d$ gegeben. Nun soll $\mathfrak{F}^d$ durch die Konstruktion eines Isomorphismus $L^2(\mathbb{R}^d) \to \mathfrak{F}^d$ genauer definiert werden. Da die Eigenfunktionen des harmonischen Oszillators eine Basis des Hilbertraums $L^2(\mathbb{R}^d)$ bilden, lässt sich jedes Element des Hilbertraums wie folgt entwickeln:

$$f = \sum_n c_n |n\rangle = \sum_n \frac{c_n}{\sqrt{n!}} (a^*)^n |0\rangle \tag{B.2}$$

Dabei ist $n$ ein $d$-Multiindex. Wir wollen $|0\rangle$ mit der Einsfunktion in $\mathfrak{F}^d$ identifizieren. Also wird $f$ auf

$$f(z) := \sum_n \frac{c_n}{\sqrt{n!}} z^n = \sum_n c_n u_n(z) \tag{B.3}$$

abgebildet. Nach Vorrausetzung gilt

$$\|\phi\|^2 = \sum_n |c_n|^2 = C^2 < \infty,$$

und somit

$$\sum_n \frac{|c_n| z^n}{\sqrt{n!}} \leq C \sum_n \frac{z^n}{\sqrt{n!}}.$$

Mit dem Quotientenkriterium zeigt man leicht, dass die Potenzreihe auf der rechten Seite und somit auch (B.3) als Kovergenzradius $\infty$ hat, somit ist $f$ analytisch.

Nun soll das Skalarprodukt in $\mathfrak{F}^d$ bestimmt werden. Wegen (B.1) soll

$$\int \mathrm{d}\mu(z)\ \rho(z) \bar{f}(z) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} g(z) = \int \mathrm{d}\mu(z)\ \rho(z) \bar{z} \bar{f}(z) g(z). \tag{B.4}$$

gelten. Hier ist $\mathrm{d}\mu(z) = \mathrm{d}^d x \mathrm{d}^d y$, $z = x + iy$ das übliche Integrationmaß auf der komplexen Ebene. Partielle Integration der linken Seite von (B.4) ergibt wegen der Analytizität von $f$

$$-\int \mathrm{d}\mu(z)\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \rho(z) \bar{f}(z) g(z) = \int \mathrm{d}\mu(z)\ \rho(z) \bar{z} \bar{f}(z) g(z).$$

Die Gleichung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\rho = -\bar{z}\rho$ mit der Randbedingung, dass $\rho$ im Unendlichen verschwindet, wird durch $\rho(z) = Ce^{-\bar{z}z}$ gelöst. Die Normierungskonstante $C$ ergibt sich aus der Forderung $\||0\rangle\|^2 = \|1\|^2 = \int \mathrm{d}z \rho(z) = 1$ zu $C = \pi^{-d}$.

Der Hilbertraum $L^2(\mathbb{R}^d)$ übersetzt sich also in den Hilbertraum $\mathfrak{F}^d$ von analytischen Funktionen mit $\|f\|^2 = \int \mathrm{d}\mu(z)\ |f(z)|^2 e^{-|z|^2} < \infty$. In $L^2(\mathbb{R}^d)$ liegt aber der Schwartzraum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, der für uns besonders interessant ist, da unsere Feldalgebra die der stetigen Operatoren auf diesem Raum ist. Deshalb ist es interessant, wie sich die Topologie von $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ auf $\mathfrak{F}^d$ übersetzt, in dem Sinne dass die Abbildung $A : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to A(\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)) =: \mathfrak{E}^d$ ein Homöomorphismus ist. In [40] wurde auf $\mathfrak{E}^d$ das Skalarprodukt

$$(f, g)_k := \int \mathrm{d}\mu(z)\ \left(1 + |z|^2\right)^k e^{-|z|^2} \bar{f}(z) g(z)$$

eingeführt. Dabei kann $k \in \mathbb{R}$ beliebig gewählt werden. Die Vervollständigung bezüglich der durch das Skalarprodukt gegebenen Norm ergibt die Hilberträume $\mathfrak{F}^d_\rho$. Es gilt dann

$$\mathfrak{E}^d = \cap_k \mathfrak{F}^d_k,$$

beziehungsweise die Halbnormen $\|\cdot\|_k$ erzeugen die Topologie von $\mathfrak{E}^d$.

**Satz B.1.** *Der Operator $\phi$ ist genau dann in $\mathcal{L}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^d))$, wenn es zu jedem $k \in \mathbb{R}$ ein $l \in \mathbb{R}$ gibt, so dass*

$$\|\phi\|_{k,l}^2 := \int \mathrm{d}\mu(z)\mathrm{d}\mu(z') \ \left(1+|z|^2\right)^k \left(1+|z'|^2\right)^l e^{-|z|^2-|z'|^2} \left|\phi(z,z')\right|^2 < \infty \tag{B.5}$$

*gilt. Dabei ist $\phi(z,z') = \sum (m!n!)^{-\frac{1}{2}} c_{mn} z^m \bar{z'}^n$ mit $c_{mn} = \langle m|\phi|n\rangle$.*

*Beweis.* Der Beweis erfolgt ganz analog zu dem von Satz A.19. Dabei wird ausgenutzt, dass die durch $(u_m, u_n)_k = \eta_{|m|}^k \delta_{mn}$ gegebenen $\eta_n^k$ die Ungleichung $(u_m, u_n)_k = \eta_{|m|}^k \delta_{mn}$ erfüllen [40] (die $u_n$ sind die Eigenfunktionen des harmonischen Oszillators (B.3)). □

Offensichtlich liegt $\phi$ genau dann in $\mathcal{L}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^d))^*$, wenn es zu jedem $n$ ein $m$ gibt, so dass $\|\phi\|_{mn} < \infty$ gilt.

Eine andere Familie von Halbnormen, die die Topologie von $\mathfrak{E}^d$ erzeugt, ist durch

$$|f|_k := \sup_{z\in\mathbb{C}^d} \left\{ \left(1+|z|^2\right)^{\frac{k}{2}} e^{-\frac{1}{2}|z|^2} \left|f(z)\right| \right\} \tag{B.6}$$

gegeben [40]. Eine wichtige Rolle spielt auch das Variationsideal $\mathcal{S}_2$, das heißt die Operatoren auf $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, deren Integralkern in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2d})$ liegt. Dessen Topologie wird offensichtlich durch die Halbnormen $\|\cdot\|_{kl}$ oder

$$|\phi|_{kl} := \sup_{z,z'\in\mathbb{C}^d} \left\{ \left(1+|z|^2\right)^{\frac{k}{2}} \left(1+|z'|^2\right)^{\frac{l}{2}} e^{-\frac{1}{2}(|z|^2+|z'|^2)} \left|\phi(z,z')\right| \right\} \tag{B.7}$$

erzeugt.

Die $|\cdot|$-Halbnormen entsprechen in gewisser Weise den $p$-Halbnormen (A.1), die $\|\cdot\|$-Halbnormen entsprechen den $q$-Halbnormen (A.2) des Schwartzraums. Dass hier in den Halbnormen keine Ableitungen auftreten, lässt sich folgendermaßen erklären: Nach (B.1) entspricht die Multiplikation mit $z_i$ der Anwendung von $a_i^*$, und somit der Anwendung von $Q_i$ und $P_i$. Somit enthält $\left(1+|z|^2\right)^k$ alle Monome von Orts- und Impulsoperatoren bis zur Ordnung $k$.

## B.2 Die kohärenten Zustände

Der Grundzustand des harmonischen Oszillators ist der am besten um den Ursprung des Phasenraums lokalisierte Zustand mit $\Delta p = \Delta q$. Die Verschiebung dieses Zustandes im Phasenraum ergibt die kohärenten Zustände. Zur Verschiebung um $(q,p)$ benutzt man den Operator

$$e^{i(\langle p,Q\rangle - \langle q,P\rangle)} = e^{\langle \alpha, a^*\rangle - \langle \bar{\alpha}, a\rangle} =: d(\alpha).$$

Hier bezeichnet $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das euklidische Skalarprodukt und es wurde $\alpha_i := \frac{q_i + ip_i}{\sqrt{2}}$ gesetzt. Wir verschieben nun den Grundzustand und definieren

$$|\alpha\rangle := d(\alpha)|0\rangle = e^{\alpha a^* - \bar{\alpha} a}|0\rangle = e^{\frac{1}{2}[\alpha a^*, \bar{\alpha} a]} e^{\alpha a^*} e^{-\bar{\alpha} a}|0\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{\alpha a^*}|0\rangle. \tag{B.8}$$

Wie man leicht sieht, sind die kohärenten Zustände Eigenvektoren des Vernichtungsoperators:

$$a_i|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} a_i e^{\alpha a^*}|0\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}[a_i, e^{\alpha a^*}]|0\rangle = \alpha_i|\alpha\rangle. \tag{B.9}$$

Aus $d(\alpha)d(\beta) = e^{i\Im(\alpha\bar{\beta})}d(\alpha+\beta)$ folgt

$$d(\alpha)|\beta\rangle = e^{i\Im(\alpha\bar{\beta})}|\alpha+\beta\rangle. \tag{B.10}$$

Somit ergibt sich

$$\langle\alpha|\beta\rangle = \langle 0|d(-\alpha)d(\beta)|0\rangle = e^{-i\Im(\alpha\bar{\beta})}\langle 0|d(\beta-\alpha)|0\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha-\beta|^2+i\Im(\bar{\alpha}\beta)} = e^{-\frac{1}{2}(|\alpha|^2+|\beta|^2)+\bar{\alpha}\beta}. \tag{B.11}$$

Wegen $d(\alpha)^* = d(-\alpha)$ gilt

$$\left[d(\alpha), \int \mathrm{d}\beta\ |\beta\rangle\langle\beta|\right]|f\rangle = \int \mathrm{d}\beta\ \left(e^{i\Im(\alpha\bar{\beta})}|\alpha+\beta\rangle\langle\beta| - e^{-i\Im((-\alpha)\bar{\beta})}|\beta\rangle\langle-\alpha+\beta|\right)|f\rangle = 0.$$

Die Standarddarstellung der Weyl-Gruppe auf $L^2(\mathbb{R})$ ist irreduzibel, mit Schurs Lemma folgt daraus, dass $\int \mathrm{d}\beta\ |\beta\rangle\langle\beta|$ ein Vielfaches der Eins ist. Das Integral konvergiert dabei in der starken Operatortopologie. Mit (B.11) findet man, dass es sich um das $\pi^d$-fache der Eins handelt. Die kohärenten Zustände bilden ein übervollständiges System von Einheitsvektoren. Wir haben nun auch eine Darstellung der Spur in kohärenten Zuständen: Es gilt

$$\mathrm{Tr}\phi = \pi^{-d}\mathrm{Tr}\left(\phi\int \mathrm{d}\alpha\ |\alpha\rangle\langle\alpha|\right) = \pi^{-d}\int \mathrm{d}\alpha\ \langle\alpha|\phi|\alpha\rangle$$

für Spurklasse-Operatoren $\phi$.

Nun wollen wir den Zusammenhang mit der Bargmann-Fock-Darstellung herstellen. Sei $f$ wie in (B.2) gegeben. Dann gilt

$$\langle\alpha|f\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}\sum_{nm}\frac{\bar{\alpha}^n}{n!}\langle 0|\bar{a}^n c_m|m\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}\sum_n \frac{c_n}{\sqrt{n!}}\bar{\alpha}^n = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}f(\bar{\alpha}). \tag{B.12}$$

Die Halbnormen (B.5), (B.6) und (B.7) aus dem vorigen Abschnitt übersetzen sich also zu

$$\begin{aligned}
\|\phi\|_{mn}^2 &= \int \mathrm{d}\mu(\alpha)\mathrm{d}\mu(\beta)\ \left(1+|\alpha|^2\right)^m\left(1+|\beta|^2\right)^n|\langle\alpha|\phi|\beta\rangle|^2, \\
|f|_l &= \sup_{\alpha\in\mathbb{C}^d}\left\{\left(1+|\alpha|^2\right)^{\frac{l}{2}}|\langle\alpha|f\rangle|\right\}, \\
|\phi|_{kl} &= \sup_{\alpha,\beta\in\mathbb{C}^d}\left\{\left(1+|\alpha|^2\right)^{\frac{k}{2}}\left(1+|\beta|^2\right)^{\frac{l}{2}}|\langle\alpha|\phi|\beta\rangle|\right\}.
\end{aligned}$$

## B.3 Die normalgeordneten Symbole

Im vorigen Abschnitt haben wir gesehen, dass sich beliebige Vektoren aus $L^2(\mathbb{R})$ (und damit aus $\mathcal{S}_1$) als analytische Funktionen darstellen lassen. Nun kann man die Frage stellen,

wie es mit den Erwartungswerten $\langle\alpha|\phi|\beta\rangle$ von Operatoren $\phi$ als Funktion von $\alpha$ und $\beta$ aussieht. Wir wollen auch unbeschränkte Operatoren zulassen, stellen aber die Forderung, dass es (möglicherweise negative) $d$-Multiindizes $s, t$ gibt, so dass

$$\sum_{mn} |c_{mn}|^2 (m+1)^{2s} (n+1)^{2t} = C^2 < \infty \tag{B.13}$$

gilt, wobei $c_{mn}$ die Matrixelemente $c_{mn} = \langle m|\phi|n\rangle$ des Operators bezüglich der Eigenzustände des harmonischen Oszillators sind. Für die uns hauptsächlich interessierende Menge $\mathcal{M}$ von Operatoren ist das erfüllt (vergleiche Abschnitt A.3). Das normalgeordnete Symbol von $\phi$ ist nun durch

$$\phi_N(\bar\alpha, \beta) := \frac{\langle\alpha|\phi|\beta\rangle}{\langle\alpha|\beta\rangle} = \sum_{mn} c_{mn} \frac{\langle\alpha|\frac{a^{*m}}{\sqrt{m!}}|0\rangle\langle 0|\frac{a^n}{\sqrt{n!}}|\beta\rangle}{e^{-\frac{1}{2}(|\alpha|^2+|\beta|^2)+\bar\alpha\beta}} = \sum_{mn} c_{mn} e^{-\bar\alpha\beta} \frac{\bar\alpha^m \beta^n}{\sqrt{m!n!}} \tag{B.14}$$

definiert. Wir setzen

$$\phi'(\bar\alpha, \beta) := \sum_{mn} c_{mn} \frac{\bar\alpha^m \beta^n}{\sqrt{m!n!}}$$

und untersuchen die Konvergenz der Potenzreihe. Aus (B.13) folgt $|c_{mn}| \leq (m+1)^{-s}(n+1)^{-t}C$. Somit gilt

$$\sum_{mn} |c_{mn}| \frac{|\alpha|^m |\beta|^n}{\sqrt{m!n!}} \leq C \sum_m (m+1)^{-s} \frac{|\alpha|^m}{\sqrt{m!}} \sum_n (n+1)^{-t} \frac{|\beta|^n}{\sqrt{n!}}.$$

Mit dem Quotientenkriterium überzeugt man sich leicht von der Konvergenz der beiden Potenzreihen für beliebige $\alpha$ und $\beta$. Somit ist $\phi'(\bar\alpha, \beta)$ und damit auch $\phi_N(\bar\alpha, \beta)$ eine analytische Funktion von $\bar\alpha$ und $\beta$. Daraus folgt, dass auch $F(u, v) = \phi_N(\bar\alpha, \beta)$ mit

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} \bar\alpha \\ \beta \end{pmatrix},$$

wobei $J$ die unitäre Matrix

$$J := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$$

ist, eine analytische Funktion ist. Also ist $F$ auf ganz $\mathbb{C}^d$ bekannt, wenn die Funktionswerte auf der reellen Achse bekannt sind. Aus $\Im u = \Im v = 0$ folgt aber $\alpha = \beta$, somit stecken alle Informationen bereits in der Diagonalen $\phi_N(\bar\alpha, \alpha)$, das heißt in den Erwartungswerten $\langle\alpha|\phi|\alpha\rangle$.

Wir nennen $\phi_N$ das normalgeordnete Symbol von $\phi$. Diese Namensgebung rechtfertigt sich wie folgt: Sei $\phi = a^{*m} a^n$, also ein normalgeordnetes Produkt von Erzeugern und Vernichtern. Dann berechnet man

$$\phi_N(\bar\alpha, \beta) = \frac{\langle\alpha|a^{*m} a^n|\beta\rangle}{\langle\alpha|\beta\rangle} = \bar\alpha^m \beta^n.$$

Das normalgeordnete Symbol eines normalgeordneten Produktes von Erzeugern und Vernichtern ist also ein Monom.

Wir wollen nun den Zusammenhang zu den in der nichtkommutativen Feldtheorie häufig verwendeten Weyl-Symbolen herstellen. Das Weyl-Symbol ist definiert durch

$$\phi_W(\alpha) := \int \mathrm{d}\mu(\eta)\ \mathrm{Tr}(\phi d(\eta)) e^{\alpha\bar{\eta}-\bar{\alpha}\eta}.$$

Aus dem Symbol ergibt sich der ursprüngliche Operator durch

$$\phi = \int \mathrm{d}\mu(\alpha)\mathrm{d}\mu(\eta)\ \phi_W(\alpha) e^{\alpha\bar{\eta}-\bar{\alpha}\eta} d(\eta).$$

Man rechnet leicht nach, dass das Monom $\bar{\alpha}^m\alpha^n$ hier dem symmetrisierten Produkt $(a^{*m}a^n)_{sym}$ der Erzeuger und Vernichter entspricht. Die beiden Symbole entsprechen also verschiedenen Ordnungsvorschriften. Man rechnet sie folgendermaßen ineinander um:

$$\begin{aligned}
\phi_N(\bar{\alpha},\alpha) &= \langle\alpha| \int \mathrm{d}\mu(\beta)\mathrm{d}\mu(\eta)\ \phi_W(\beta) e^{\beta\bar{\eta}-\bar{\beta}\eta} d(\eta)|\alpha\rangle \\
&= \int \mathrm{d}\mu(\beta)\ \phi_W(\beta) \int \mathrm{d}\mu(\eta)\ e^{\beta\bar{\eta}-\bar{\beta}\eta} e^{\eta\bar{\alpha}-\bar{\eta}\alpha} e^{-\frac{1}{2}|\eta|^2} \\
&= \int \mathrm{d}\mu(\beta)\ \phi_W(\beta) e^{-2|\beta-\alpha|^2}
\end{aligned} \tag{B.15}$$

Das normalgeordnete Symbol ergibt sich also aus dem Weyl-Symbol durch Verschmierung mit einer Gaußfunktion.

## B.4 Anwendung auf die Feldtheorie

In Abschnitt 2.2 hatten wir schon einmal Zustände betrachtet, die durch Verschiebung des Grundzustands des harmonischen Oszillators entstanden. In diesem Abschnitt wollen wir die Verbindung zu den kohärenten Zuständen aus Abschnitt B.2 herstellen und analog zum vorigen Abschnitt normalgeordnete Symbole für die Elemente unserer Feldalgebra definieren.

Ein Vergleich des Verschiebungsoperators $D(x)$ aus (2.11) in der Darstellung (2.9) mit dem durch (B.10) gegebenen Verschiebungsoperator ergibt

$$D(x) = d(\alpha(x)) \tag{B.16}$$

mit

$$\alpha_1(x) := \frac{x^0 + ix^2}{\sqrt{2}};\ \alpha_2(x) := \frac{x^1 + ix^3}{\sqrt{2}}.$$

Bereits aus (2.4) folgt

$$D(x)D(y) = e^{ix\sigma^{-1}q} e^{iy\sigma^{-1}q} = e^{-\frac{i}{2}x^\mu \sigma^{-1}_{\mu\nu}\sigma^{\nu\lambda} y^\rho \sigma^{-1}_{\rho\lambda}} e^{i(x+y)\sigma^{-1}q} = e^{-\frac{i}{2}\langle y,\sigma^{-1}x\rangle} D(x+y). \tag{B.17}$$

Mit (B.16) erhält man somit

$$(x|y) = \langle 0|D(-x)D(y)|0\rangle = e^{-\frac{i}{2}\langle x,\sigma^{-1}y\rangle} \langle 0|d(\alpha(y-x))|0\rangle = e^{-\frac{i}{2}\langle x,\sigma^{-1}y\rangle} e^{-\frac{1}{4}|x-y|^2}. \tag{B.18}$$

Nun soll das in Kapitel 5 verwendete normalgeordnete Symbol des Feldes definiert werden. Analog zur Definition von $F$ im vorigen Kapitel setzen wir

$$\phi_N(z(x,y)) = \phi_N(\bar{\alpha}(x), \beta(x)) = \frac{(x|\,\phi\,|y)}{(x|y)}$$

mit

$$z = J\begin{pmatrix}\bar{\alpha}(x)\\ \alpha(y)\end{pmatrix} = \frac{1}{2}(x+y) + \frac{i}{2}\sigma(x-y).$$

Es handelt sich wiederum um eine analytische Funktion in $\mathbb{C}^4$. Reelles $z$ entspricht $x = y$ und somit $\phi_N(z) = (z|\,\phi\,|z)$ dem Erwartungswert von $\phi$ im am besten um $z$ lokalisierten Zustand. Das normalgeordnete Symbol hat also, anders als das Weyl-Symbol eine direkte physikalische Interpretation.

Wie beim Weyl-Symbol vertauschen auch hier Ableitung und Symbolbildung:

$$\begin{aligned}(\partial_\mu\phi)_N(z) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{(x+te_\mu|\,\phi\,|y+te_\mu)}{(x+te_\mu|y+te_\mu)}e^{\frac{i}{2}\langle te_\mu,\sigma^{-1}(y-x)\rangle}\frac{(x+te_\mu|y+te_\mu)}{(x|y)}\right)\\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi_N\left(\frac{x+y}{2}+te_\mu+\frac{i}{2}\sigma(x-y)\right) = \partial_\mu\phi_N(z).\end{aligned}$$

Die Normen (B.5), (B.7) und (B.6) übersetzen sich also folgendermassen in die neue Schreibweise:

$$\begin{aligned}\|\phi\|^2_{mn} &= \int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4y\ \left(1+|x+y|^2\right)^m\left(1+|x-y|^2\right)^n e^{-\frac{1}{4}|y|^2}\,|\phi_N(x+i\sigma y)|^2\,,\\ |\phi|_{kl} &= \sup_{x,y\in\mathbb{R}^4}\left\{\left(1+|x|^2\right)^{\frac{k}{2}}\left(1+|y|^2\right)^{\frac{l}{2}}|(x|\,\phi\,|y)|\right\}\\ |f|_k &= \sup_{x\in\mathbb{R}^4}\left\{\left(1+|x|^2\right)^{\frac{k}{2}}|(x|\,|f\rangle|\right\}.\end{aligned}$$

Nach der Diskussion in Abschnitt B.2 ist klar, dass das Integral

$$\int \mathrm{d}^4x\ \ |x)\,(x|$$

in der starken Operatortopologie gegen $(2\pi)^2\mathbb{1}$ konvergiert. Nun soll untersucht werden, ob es auch in der Topologie von $\mathcal{M}$ konvergiert. Das ist in der Tat der Fall, denn es gilt

**Lemma B.2.** *Sei $g_n$ eine Folge von meßbaren Funktionen mit kompaktem Träger, $0 \le g_n(x) \le 1\ \forall x, n$, die auf jedem Kompaktum gleichmäßig gegen Eins konvergiert. Dann gilt*

$$\lim_n \tilde{g}_n = \lim_n \int \mathrm{d}^4x\ g_n(x)\,|x)\,(x| = (2\pi)^2\mathbb{1}$$

*in $\mathcal{M}$.*

*Beweis.* Es ist zu zeigen, dass es zu jedem $\epsilon, l$ und jeder beschränkten Menge $B \subset \mathcal{S}_1$ ein $N$ gibt, so dass

$$r_{B,l}((2\pi)^2\mathbb{1} - \tilde{g}_n) := \sup_{f\in B} \left|\left((2\pi)^2\mathbb{1} - \tilde{g}_n\right)(f)\right|_l \leq \epsilon \qquad \forall n \geq N \tag{B.19}$$

gilt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wählen wir

$$B := \{f \in \mathcal{S}_1 |\, |f|_l \leq b(l)\ \forall l\}$$

wobei $b$ eine positive Funktion ist.

Nun gilt

$$\begin{aligned}
\left|\left((2\pi)^2\mathbb{1} - \tilde{g}_n\right)(f)\right|_l &= \sup_{x\in\mathbb{R}^4} \left\{ \left(1+|x|^2\right)^{\frac{l}{2}} \left|(x|\left((2\pi)^2\mathbb{1} - \tilde{g}_n\right)|f\rangle\right| \right\} \\
&= \sup_{x\in\mathbb{R}^4} \left\{ \left(1+|x|^2\right)^{\frac{l}{2}} \int \mathrm{d}^4y\ \ |1-g_n(y)|\,|(x|y)|\,|(y|\,|f\rangle| \right\} \\
&\leq b(l+6) \int \mathrm{d}^4y\ \ |1-g_n(y)| \left(1+|y|^2\right)^{-\frac{l+6}{2}} \sup_{x\in\mathbb{R}^4} \left\{ \left(1+|x|^2\right)^{\frac{l}{2}} e^{-\frac{1}{4}|x-y|^2} \right\}.
\end{aligned}$$

Nach Lemma 5.10 gibt es ein $C$, so dass

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^4} \left\{ \left(1+|x|^2\right)^{\frac{l}{2}} e^{-\frac{1}{4}|x-y|^2} \right\} = ||y)|_l \leq C\left(1+|y|^2\right)^{\frac{l}{2}}$$

gilt. Wir wählen das Kompaktum $K \subset \mathbb{R}^4$ so, dass

$$b(l+6)C \int_{\mathbb{R}^4\setminus K} \mathrm{d}^4y\ \ \left(1+|y|^2\right)^{-3} < \frac{\epsilon}{2}$$

gilt. Nun müssen wir nur noch $N$ so wählen, dass

$$\sup_{x\in K}\{|1-g_n(x)|\} \leq \frac{\epsilon}{2}\left(b(l+6)C\int_K \mathrm{d}^4z\ \ \left(1+|z|^2\right)^{-3}\right)^{-1} \qquad \forall n \geq N$$

gilt. Dann folgt (B.19). □

# Literaturverzeichnis


[1] H. S. Snyder, "Quantized Space-Time," Phys. Rev. **71** (1947) 38.

[2] H. S. Snyder, "The Electromagnetic Field in Quantized Space-Time," Phys. Rev. **72** (1947) 68.

[3] S. Doplicher, K. Fredenhagen und J. E. Roberts, "Space-time quantization induced by classical gravity," Phys. Lett. B **331** (1994) 39.

[4] C. S. Chu und P. M. Ho, "Noncommutative open string and D-brane," Nucl. Phys. B **550** (1999) 151 [arXiv:hep-th/9812219].

[5] S. M. Girvin und T. Jach, "Formalism for the quantum Hall effect: Hilbert space of analytic functions," Phys. Rev. B **29** (1984) 5617.

[6] N. Seiberg und E. Witten, "String theory and noncommutative geometry," JHEP **9909** (1999) 032 [arXiv:hep-th/9908142].

[7] T. Filk, "Divergencies In A Field Theory On Quantum Space," Phys. Lett. B **376** (1996) 53.

[8] S. Minwalla, M. Van Raamsdonk und N. Seiberg, "Noncommutative perturbative dynamics," JHEP **0002** (2000) 020 [arXiv:hep-th/9912072].

[9] J. Gomis und T. Mehen, "Space-time noncommutative field theories and unitarity," Nucl. Phys. B **591** (2000) 265 [arXiv:hep-th/0005129].

[10] D. Bahns, S. Doplicher, K. Fredenhagen und G. Piacitelli, "On the unitarity problem in space/time noncommutative theories," Phys. Lett. B **533** (2002) 178 [arXiv:hep-th/0201222].

[11] A. Micu und M. M. Sheikh Jabbari, "Noncommutative phi**4 theory at two loops," JHEP **0101** (2001) 025 [arXiv:hep-th/0008057].

[12] O. Bratteli und D. Robinson, "Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics 1," Second Edition, Springer-Verlag, 2002.

[13] P. Halmos, "Measure Theory," van Nostrand, 1966.

[14] S. Doplicher, K. Fredenhagen und J. E. Roberts, "The Quantum structure of spacetime at the Planck scale and quantum fields," Commun. Math. Phys. **172** (1995) 187 [arXiv:hep-th/0303037].

[15] M. Reed und B. Simon, "Methods of modern mathematical physics I: functional analysis," Second Edition, Academic Press, 1980.

[16] R. Kadison und J. Ringrose, "Fundamentals of the theory of operator algebras II," Academic Press, 1986.

[17] J. M. Gracia-Bondia und J. C. Varilly, "Algebras of distributions suitable for phase-space quantum mechanics. I," J. Math. Phys. **29** (1988) 869.

[18] Y. Liao und K. Sibold, "Time-ordered perturbation theory on noncommutative spacetime: Basic rules," Eur. Phys. J. C **25** (2002) 469 [arXiv:hep-th/0205269].

[19] H. Bozkaya, P. Fischer, H. Grosse, M. Pitschmann, V. Putz, M. Schweda und R. Wulkenhaar, "Space/time noncommutative field theories and causality," arXiv:hep-th/0209253.

[20] C. Hayashi, "Hamiltonian Formalism in Non-local Field Theories," Prog. Theor. Phys. **10** (1953) 533.

[21] C. N. Yang und D. Feldman, "The S Matrix In The Heisenberg Representation," Phys. Rev. **24** (1992) 1.

[22] D. Bahns, Dissertation und D. Bahns, S. Doplicher, K. Fredenhagen und G. Piacitelli, in Vorbereitung.

[23] A. Gerhold, J. Grimstrup, H. Grosse, L. Popp, M. Schweda und R. Wulkenhaar, "The energy-momentum tensor on noncommutative spaces: Some pedagogical comments," arXiv:hep-th/0012112.

[24] R. Marnelius, "Can the $S$ matrix be defined in relativistic quantum field theories with nonlocal interaction?," Phys. Rev. D **10** (1974) 3411.

[25] T. Pengpan und X. Xiong, "A note on the non-commutative Wess-Zumino model," Phys. Rev. D **63** (2001) 085012 [arXiv:hep-th/0009070].

[26] M. Abou-Zeid und H. Dorn, "Comments on the energy-momentum tensor in noncommutative field theories," Phys. Lett. B **514** (2001) 183 [arXiv:hep-th/0104244].

[27] I. Hinchliffe und N. Kersting, "Review of the phenomenology of noncommutative geometry," arXiv:hep-ph/0205040.

[28] J. Madore, S. Schraml, P. Schupp und J. Wess, "Gauge theory on noncommutative spaces," Eur. Phys. J. C **16** (2000) 161 [arXiv:hep-th/0001203].

[29] P. Schupp, J. Trampetic, J. Wess und G. Raffelt, "The photon neutrino interaction in non-commutative gauge field theory and astrophysical bounds," arXiv:hep-ph/0212292.

[30] Y. Liao und C. Dehne, "Some phenomenological consequences of the time-ordered perturbation theory of QED on noncommutative spacetime," arXiv:hep-ph/0211425.

[31] R. E. Peierls, "The commutation laws of relativistic field theory," Proc. Roy. Soc. (London), **A 214** (1952) 143.

[32] M. Dütsch und K. Fredenhagen, "The master Ward identity and generalized Schwinger-Dyson equation in classical field theory," arXiv:hep-th/0211242.

[33] P. Gulmanelli, "On a Theorem in Non-Local Field Theories," Nuo. Cim. **10** (1953) 1582.

[34] R. P. Feynman und Y. Katayama, in der Diskussion nach Møllers Vortrag in "Proceedings of the International Conference on Theoretical Physics, Kyoto and Tokyo, September, 1953" Science Council of Japan, 1954.

[35] L. Schwartz, "Théorie des distributions", Paris, Hermann, 1959.

[36] J. Dieudonné und L. Schwartz, "La dualité dans les éspaces ($\mathcal{F}$) et ($\mathcal{LF}$)," Annales de l'Institut Fourier **1** (1949) 61.

[37] J. C. Varilly und J. M. Gracia-Bondia, "Algebras of distributions suitable for phase-space quantum mechanics. II. Topologies on the Moyal algebra," J. Math. Phys. **29** (1988) 880.

[38] H. Schaefer, "Topological Vector Spaces," Second Edition, Springer-Verlag, 1999.

[39] A. Perelomov, "Generalized Coherent States and Their Applications," Springer-Verlag, Berlin, 1986.

[40] V. Bargmann, "On a Hilbert Space of Analytic Functions and an Associated Integral Transform. Part II," Comm. Pure Appl. Math. **20** (1967) 1.

# Danksagung

Ich möchte mich an dieser Stelle bei Herrn Fredenhagen und Dorothea Bahns für die interessante Aufgabenstellung und die kompetente und geduldige Betreuung der Arbeit bedanken.

Für die schöne Zeit und die vielen interessanten Gespräche möchte ich mich auch bei allen anderen Mitgliedern der Arbeitsgruppe, besonders natürlich den Datschanesen, bedanken.

Wenn in dieser Arbeit nicht jedes dritte Wort falsch geschrieben ist, so ist dies das Verdienst von Tilmann Lunt. Dafür vielen Dank.

Bedanken möchte ich mich auch bei meinen Freunden für ihr Verständnis und die willkommenen Ablenkungen.

Schließlich gilt mein besonderer Dank meinen Eltern und Großeltern, deren uneingeschränkte Unterstützung mir ein sorgenfreies Studium ermöglicht hat.

# Erklärung gemäß Diplomprüfungsordnung

Ich versichere, diese Arbeit selbständig und nur unter Benutzung der angegebenen Hilfsmittel und Quellen verfasst zu haben. Ich gestatte die Veröffentlichung dieser Arbeit.

Jochen Zahn