Entstehung topologischer Defekte am Ende der Inflation

Benjamin Janutta

30. Januar 2004

Zusammenfassung

In dieser Diplomarbeit wird ein Überblick über das kosmologische Standardmodell sowie die Grundlagen der Inflation gegeben. Es wird weiter ein durch ein supersymmetrisches Szenario motiviertes Modell für hybride Inflation diskutiert. Insbesondere interessiert hier der Phasenübergang nach der Inflation, der die Ausgangsbedingungen für die Standardkosmologie schafft. In diesem Rahmen wird die spontane Symmetriebrechung, das Formen von topologischen Defekten sowie die Thermalisierung der Felder diskutiert.

Formation of Topological Defects at the End of Inflation

Benjamin Janutta

January 30th, 2004

Abstract

In this diploma thesis we give a brief overview of the standard cosmology and the basic concepts of inflation. Furthermore we discuss a hybrid inflationary model that is motivated by supersymmetry. Particularly we analyse the phase transition after inflation, which sets the initial conditions for the radiation dominated phase. In this framework the spontaneous symmetry breaking, the formation of topological defects and the thermalization of the fields is discussed.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **4**

2 Inflation und das kosmologische Standardmodell **7**

2.1 Das kosmologische Standardmodell 7

2.1.1 Die Friedmanngleichung 8

2.1.2 Lösungen der Friedmanngleichung 10

2.1.3 Einige kosmologische Parameter 12

2.1.4 Schwächen des kosmologischen Standardmodells 13

2.2 Der inflationäre Ansatz 16

2.2.1 Inflation und die Schwächen des Standardmodells 16

2.2.2 Inflation und das Inflaton 19

2.2.3 Slow-Roll Inflation 20

2.2.4 Das Ende der Inflation und das Reheating 21

3 Inflation **23**

3.1 Hybride Inflation 23

3.2 Das $\mathbb{Z}_2$-symmetrische Hybrid-Modell 25

3.2.1 Ein supersymmetrischer Ansatz 25

3.2.2 Das skalare Potential 27

3.3 Der Zerfall des falschen Vakuums 28

3.3.1 Die lineare Approximation 28

3.3.2 Fluktuationen in der Nähe des kritischen Punktes 30

3.4 Berechnungen auf dem Gitter 33

3.4.1 Das tachyonische Preheating mit **LatticeEasy** 34

3.4.2 Das Bilden von Domänen 37

3.5 Das Thermalisieren der Felder 39

4 Zusammenfassung und Ausblick **43**

A Quantenfluktuationen des Inflatonfeldes **45**

B LatticeEasy **47**
B.1 Reskalierung der Variablen 47
B.2 Das Programmpotential 48
B.3 Komponenten von **LatticeEasy** 49
B.4 Die Staggered-Leapfrog-Methode 49
B.5 Die verschiedenen Output Variablen 50

Literaturverzeichnis **51**

Kapitel 1

Einleitung

Zu Beginn des 20. Jahrhunderts leitete Einstein mit der Formulierung der Allgemeinen Relativitätstheorie die Geburt der modernen Kosmologie ein. Mit dieser war es möglich, die Frage nach dem Ursprung des Universums auf einer physikalischen Basis, anstelle einer philosophischen, zu erklären. In der Allgemeinen Relativitätstheorie beschreibt die Einsteingleichung die Wechselwirkung zwischen der Materie und der Krümmung.

In den darauffolgenden Jahren wurden eine ganze Reihe von Beobachtungen gemacht, die man in diesem theoretischen Rahmen gut erklären konnte. Ging man ursprünglich davon aus, daß das Universum statisch ist, so nahm man von diesem Bild Abstand, nachdem Hubble in den 20er Jahren eine Korrelation zwischen der Rotverschiebung der Spektren von Galaxien und deren Entfernung entdeckte. Die theoretische Erklärung hierzu lieferte Friedmann. Dieser nahm ein homogenes und isotropes Universum an und fand eine einfache Lösung der Einsteingleichung. Diese erklärte Hubbles Beobachtungen mit einem sich ausdehnenden Universum. Auch die 1965 durch Penzias und Wilson entdeckte kosmische Hintergrundstrahlung (CMBR) kann nur im Rahmen eines expandierenden Universums erklärt werden, weshalb deren Entdeckung die Diskussionen um ein statisches Universum beendeten.

Auch wenn heute alle beobachteten Phänomene mit dem kosmologischen Standardmodell erklärt werden können, ist es nicht vollends zufriedenstellend. Dies liegt daran, daß sich ein Universum, wie wir es beobachten, im Rahmen der Standardkosmologie nur mit einem ganz bestimmten Satz von Anfangsbedingungen erklären läßt. Theorien, die einen solch hohen Grad von "fine tuning" benötigen, sind in der Physik nicht sehr beliebt. Mit einer Lösung dieses "fine tuning" Problems konnte Guth 1981 aufwarten. Er postulierte, daß es eine Phase mit beschleunigter Expansion im frühen Universum gab. Hierzu ist es nötig, eine kosmologische Konstante in die Einsteingleichung zu schreiben. Eine solche kosmologische Konstante hatte Einstein bereits in die ursprünglichen Fassung der Einsteingleichung geschrieben, diese aber später gestrichen und sie gar als seine "größte Eselei" bezeichnet. Einen solchen kosmologischen Term erhält man, wenn die

potentielle Energie eines skalaren Feldes, hier des Inflatons, einen nichtverschwindenden Vakuumerwartungswert hat. Im Fall der Inflation wird die Energiedichte von der potentiellen Energie des Inflatonfeldes dominiert.

Es zeigt sich, daß die Inflation auch den Ursprung der Dichtefluktuationen, wie sie in der kosmischen Hintergrundstrahlung und in der Struktur auf großen Skalen beobachtet werden, erklärt. Die jüngsten Messungen stimmen sehr gut mit den theoretischen Vorhersagen überein.

Es stellt sich die Frage, woher man ein skalares Feld mit den oben genannten Eigenschaften nimmt, da es im Standardmodell der Teilchenphysik keine solchen Felder gibt. Eine Erweiterung des Standardmodells der Teilchenphysik, in die die Inflation gut eingebettet werden kann, ist die Supersymmetrie. Allgemeiner gilt, daß die Hybride Inflation, eine bestimmte Art von inflationären Modellen, in Theorien mit vielen skalaren Feldern natürlich eingebettet werden kann.

An die inflationäre Phase schließt sich die Standardkosmologie an. Dieser Phasenübergang ist von besonderem Interesse, weil er die Anfangsbedingungen für die thermale Phase setzt. Es wird hier der Fall der hybriden Inflation betrachtet, bei der die inflationäre Phase durch einen Phasenübergang zweiter Ordnung endet. Bei solchen Phasenübergängen können topologische Defekte entstehen, welche unter Umständen einen signifikanten Beitrag zur Energiedichte des Universums leisten können. Es muss aber vermieden werden, daß solche Defekte die Energiedichte dominieren, weshalb es wichtig ist, ihr Entstehen zu studieren. Dies wird anhand des einfachsten Modells, eines $\mathbb{Z}_2$-symmetrischen Modells, gemacht, auch wenn die bei diesen Modellen entstehenden Defekte, die "Domain Walls", durch Beobachtungen ausgeschlossen sind. Es wird gezeigt, daß diese Prozesse auch analytisch durch die lineare Approximation beschrieben werden können. Diese wird mit der numerischen Rechnung verglichen, um zu bestimmen für welchen Zeitraum diese gültig ist. Auch der Effekt der Expansion des Universums auf die Dynamik des Phasenübergangs ist untersucht worden, und es zeigt sich, daß sie nur einen sehr kleinen Effekt hat. Außerdem zeigen drei- und zweidimensionale Simulationen die Entstehung von Domänen. Die Durchschnittsgröße dieser Domänen ist etwa der inverse Hubble-Parameter.

Eine weitere fundamentale Frage ist die Erzeugung von Teilchen und deren Thermalisierung. Dieser Prozess findet ausschliesslich über nichtlineare Prozesse statt, welche die Energie an Moden mit kleineren Wellenlängen abgeben. Dieser Prozess soll abgeschätzt werden.

Die Arbeit ist wie folgt gegliedert: Im zweiten Kapitel wird der theoretische Rahmen dieser Arbeit vorgestellt. Dies sind die grundlegenden Gleichungen der Standardkosmologie, sowie eine Diskussion der auftretenden Probleme. Es wird gezeigt wie man eine inflationäre Phase realisieren kann und wie dadurch einige Probleme der Standardkosmologie gelöst werden. Kapitel 3 beginnt mit der Einführung der hybriden Inflation. In Abschnitt 3.3.1 werden einige Ergebnisse zum tachyonischen Preheating aus Ref. [29]

reproduziert. Im darauffolgenden Abschnitt beginnt die Diskussion der Ergebnisse, die **LatticeEasy** geliefert hat. Das letzte Kapitel faßt die Ergebnisse zusammen und liefert einen Ausblick auf mögliche Erweiterungen. Im Anhang befindet sich eine kurze Diskussion der primordialen Dichtefluktuationen sowie eine Beschreibung einiger Aspekte zur Programmierung von **LatticeEasy**.

Kapitel 2

Inflation und das kosmologische Standardmodell

In diesem Kapitel wird das kosmologische Standardmodell sowie ein einfaches Modell für die inflationäre Phase vorgestellt. In die Kosmologie führen [1–4] ausführlich ein. Die inflationäre Phase und die Strukturentstehung diskutieren Liddle und Lyth in ihrem Buch [5].

2.1 Das kosmologische Standardmodell

Unser Verständnis des Universums fußt zur Zeit auf dem sehr erfolgreichen kosmologischen Standardmodell. Dieses beschreibt das Verhalten des Universums von den ersten Bruchteilen einer Sekunde bis in die jetzige Zeit, ungefähr 13 Milliarden Jahre später. Diese Theorie steht auf vier sehr stabilen Pfeilern, zum einen auf dem theoretischen Rahmen, ausgearbeitet von Einstein [6] und Friedmann [7], und zum andern auf drei mittlerweile gut verifizierten Beobachtungen.

- In den 30er Jahren entdeckte Hubble [8] die Expansion unseres Universums. Er stellte eine Rotverschiebung der Spektren entfernter Galaxien fest[1]. Dies läßt darauf schliessen, daß die Galaxien sich von uns entfernen.

- In den 40er Jahren erklärte Gamow [9] den beobachteten relativen Bestandteil leichter Elemente (Deuterium, Helium und Lithium) an der baryonischen Materie. Er stellte ein Modell auf, nach welchem die Elemente in den ersten Sekunden bis Minuten nach dem Urknall durch nukleare Reaktionen im thermischen Gleichgewicht "gekocht" wurden.

[1] genauer die Verschiebung der Lyman-α Linie

- 1965 gelang der Nachweis der kosmischen Hintergrundstrahlung durch Penzias und Wilson [10]. Bei ihr handelt es sich um eine isotrope Schwarzkörperstrahlung mit einer Temperatur von ungefähr 3 K. Sie entstand, als das Universum kalt genug war, um neutrale Atome zu bilden. Zu der Zeit entkoppelten die Photonen vom Rest der Materie. Dies wird auch die Zeit der letzten Streuung genannt. Zu diesem Zeitpunkt war das Universum etwa 300.000 Jahre alt.

Heute ist das kosmologische Standardmodell sehr gut bestätigt. Große Probleme gibt es aber noch damit, auf natürliche Weise dessen notwendige Anfangsbedingungen zu schaffen. Der beste Kandidat für die Lösung dieses Problems ist die inflationäre Kosmologie.

2.1.1 Die Friedmanngleichung

Aufgrund unserer Unfähigkeit, mit dem Universum Experimente durchzuführen, gab es die wildesten Spekulationen über den Ursprung und die Entwicklung des Universums. Mit der Entwicklung der Allgemeinen Relativitätstheorie ergab sich der Zusammenhang zwischen der Energiedichte und der Geometrie des Universums. Dieser wird durch die Einsteinsche Feldgleichung beschrieben:

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R\, g_{\mu\nu} = 8\pi G_N T_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}. \tag{2.1}$$

Dabei ist $R_{\mu\nu}$ der Ricci-Tensor, R der Ricci-Skalar, $T_{\mu\nu}$ der Energie-Impuls-Tensor, G_N ist die Newtonsche Gravitationskonstante, $g_{\mu\nu}$ ist die Metrik und Λ ist die kosmologische Konstante. $G_{\mu\nu}$ ist der Einstein-Tensor. Mit dieser theoretischen Grundlage war es möglich, eine weniger spekulative Theorie aufzustellen. Die allgemeine Lösung dieser Gleichung interessiert hier nicht, sondern vielmehr eine Lösung für unser Universum. Es wird davon ausgegangen, daß unser Universum auf großen Skalen homogen und isotrop ist. Unter dieser Annahme ist die allgemeinste Form gerade die Robertson-Walker-Metrik:

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - a(t)^2 \left(\frac{\mathrm{d}r^2}{1 - kr^2} + r^2 \left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\, \mathrm{d}\phi^2 \right) \right). \tag{2.2}$$

Dabei ist $a(t)$ der Skalenfaktor, dieser ist ein Maß für die Ausdehnung des Universums, k ist eine Konstante[2], die die räumliche Krümmung charakterisiert und r, θ und ϕ sind die mitbewegten Koordinaten. Aus der Metrik kann die skalare Krümmung (Ricci-Skalar) der Raumzeit berechnet werden:

$$R = 6\frac{\ddot{a}}{a} + 6\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + 6\frac{k}{a^2}. \tag{2.3}$$

[2]Man kann r, θ und ϕ gerade so wählen, daß $k = -1, 0, +1$ ist, das heisst, daß unser Universum entweder hyperbolisch, flach oder sphärisch ist.

Die räumliche Krümung läßt sich ebenfalls ausrechnen. Diese ist gerade:

$$R^{(3)} = \frac{6k}{a^2(t)} \qquad \text{mit} \qquad \begin{cases} k = -1 & \text{offen} \\ k = 0 & \text{flach} \\ k = +1 & \text{geschlossen} \end{cases} .$$

Das Universum ist räumlich entweder offen, flach oder geschlossen.

Um die Einsteingleichung zu lösen, braucht man neben der gefundenen Geometrie des Universums auch eine Beschreibung der Energiedichte. Dazu ist die allgemeinste Form des Energie-Impuls-Tensors unter der Annahme von Homogenität und Isotropie zu bestimmen. Ein bekannter Energie-Impuls-Tensor, der die Vorraussetzung von Homogenität erfüllt, ist der einer idealen Flüssigkeit:

$$T_{\mu\nu} = -p\, g_{\mu\nu} + (p + \rho) U_\mu U_\nu, \tag{2.4}$$

dabei sind $p(t)$ und $\rho(t)$ der Druck und die Energiedichte der Flüssigkeit zu einer gegebenen Zeit während der Expansion, U^μ ist die Vierergeschwindigkeit. Für die Vierergeschwindigkeit gilt $U^\mu U_\mu = 1$. Außerdem wird gefordert, daß das Universum isotrop ist. Für die Vierergeschwindigkeit gilt dann $U = (1, 0, 0, 0)$. Der Energie-Impuls-Tensor erhält die Form:

$$T_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(\rho, p, p, p). \tag{2.5}$$

Werden dieser Energie-Impuls-Tensor (2.5) sowie die Robertson-Walker Metrik (2.2) in die Einsteingleichung eingesetzt, so ergibt sich die Bewegungsgleichung des expandierenden Universums. Die μ=ν=0 Komponente der Gleichung ergibt die Friedmanngleichung:

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} + \frac{\Lambda}{3} - \frac{k}{a^2}. \tag{2.6}$$

Hier ist $H(t)$ der Hubble-Parameter. Für die μ=ν=(1, 2, 3)-Komponenten ergibt sich:

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = -8\pi G p \tag{2.7}$$

Die Differenz von Gl. (2.6) und Gl.(2.7) ergibt

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{\Lambda}{3} - \frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p). \tag{2.8}$$

Die Energieerhaltung $D_\mu T^{\mu\nu} = 0$ ergibt:

$$\dot{\rho} = -3H(\rho + p). \tag{2.9}$$

Die verschiedenen Lösungen dieser Gleichung werden weiter unten noch diskutiert.

Wird in Gl.(2.6) der kosmologische Term $\propto \Lambda$ vernachlässigt, so erhält man ein einfaches Analogon zur klassischen Mechanik. Wird $-k/a^2$ als die Gesamtenergie betrachtet, so kann $8\pi G\rho/3$ als das Potential interpretiert werden, $(\dot{a}/a)$ ist dann die kinetische Energie. Für $\Lambda = 0$ dehnt sich das Universum entweder aus, oder es zieht sich zusammen. Das Schicksal des Universums bestimmt in diesem Fall der Krümmungsparameter k. Für ein positives k zieht sich das Universum nach seiner maximalen Ausdehnung wieder zusammen. Für k=0,-1 endet die Expansion des Universums nie. Diese Betrachtung gilt nicht für $\Lambda \neq 0$.

Teilchen- und Ereignishorizont

Die Frage nach der Kausalität spielt in der Kosmologie eine große Rolle. Da sich Information höchstens mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten kann, stellt sich die Frage, welche Teile des Universums in kausalem Kontakt sind oder es einmal waren.

Nach der Allgemeinen Relativitätstheorie gilt für Lichtstrahlen $\mathrm{d}r = \mathrm{d}t/a(t)$. Die Entfernung, die ein Lichtstrahl seit dem Urknall zurückgelegt haben kann, ist dann:

$$d_H(t) = a(t) \int_0^t \frac{\mathrm{d}t'}{a(t')}. \tag{2.10}$$

Wenn d_H endlich ist, so ist unsere Sicht durch einen Teilchenhorizont begrenzt. Dieser ist die Grenze zwischen dem sichtbaren Universum und dem Teil des Universums, von dem aus uns bisher noch keine Lichtsignale errreichen konnten. Ob d_H endlich ist, hängt vor allem vom Verhalten von $a(t)$ zu sehr kleinen Zeiten ab. Auf das Verhalten von $a(t)$ wird weiter unten noch eingegangen.

Außerdem spricht man noch vom Ereignishorizont:

$$d_E(t) = a(t) \int_t^\infty \frac{\mathrm{d}t'}{a(t')}. \tag{2.11}$$

Dies ist der Bereich des Vorwärtslichtkegels, den wir heute innerhalb einer bestimmten Zeit noch beeinflussen können.

2.1.2 Lösungen der Friedmanngleichung

Unter der Annahme, daß sich das Universum mit einer Zustandsgleichung von der Form $p = w\rho$ beschreiben lässt, können die Lösungen der Friedmanngleichung betrachtet werden.

Die Lösung der allgemeinen Bewegungsgleichung

Für den allgemeinen Fall $w = p/\rho$ und $w \neq -1$ ergibt sich mit Gl. (2.9) für ein konstantes w

$$\rho \propto a^{-3(1+w)}. \tag{2.12}$$

Wird der Krümmungsterm und die kosmologische Konstante vernachlässigt, so wird aus der Friedmanngleichung (2.6):

$$a(t) \propto t^{2/3(1+w)}. \tag{2.13}$$

Das Verhalten des Skalenfaktors hängt demnach nur von der Zustandsgleichung der das Universum dominierenden Materie ab.

Ein strahlungsdominiertes Universum

Für Strahlung und ultrarelativistische Materie lautet die Zustandsgleichung $p = \rho/3$. Dominiert diese Form von Energie das Universum, ergibt Gl.(2.12):

$$\rho(t) \propto a^{-4}(t). \tag{2.14}$$

Die Strahlung erfährt also eine Ausdünnung durch die Expansion des Universums, dies erklärt einen Faktor a^{-3}. Der zusätzliche Faktor $a^{-1}(t)$ wird durch die Rotverschiebung erklärt. Aus Gl.(2.13) bekommt man:

$$a(t) \propto t^{1/2}. \tag{2.15}$$

Für den Horizont in der strahlungsdominierten Phase gilt:

$$d_H \propto t \propto H^{-1}. \tag{2.16}$$

Demnach wächst der Horizont schneller als der Skalenfaktor. Weiter ist zu erkennen, daß der Horizont während einer strahlungsdominierten Phase gerade dem inversen Hubbleparameter entspricht, diese Größen werden deshalb oft synonym verwendet.

Man geht in der Tat davon aus, daß es im jungen Universum eine strahlungsdominierte Phase gegeben hat. Die Berechnungen für die Urknall-Nukleosynthese wurde z.B. für eine solche Phase gemacht.

Ein materiedominiertes Universum

Die Zustandsgleichung nichtrelativistischer Materie lautet $p = 0$. Es wird angenommen, daß sich die materiedominierte Phase an eine strahlungsdominierte Phase angeschlossen hat. Mit Gl.(2.12) ist $\rho \propto a(t)^{-3}$ und aus (2.13) ergibt sich:

$$a(t) \propto t^{2/3}. \tag{2.17}$$

Auch für den materiedominierte Fall gilt $d_H \propto H^{-1} \propto t$. Der Horizont wächst demnach auch im materiedominierten Universum schneller als der Skalenfaktor.

Ein Universum, das von Vakuumenergie dominiert wird

Nimmt man an, die Vakuumenergie erfüllt die Zustandsgleichung $p = -\rho$, so gibt Gl.(2.12) ein exponentielles Wachstum des Skalenfaktors (auch *de Sitter* Fall genannt):

$$a(t) \propto e^{\sqrt{\Lambda/3}\,t} = e^{Ht}. \tag{2.18}$$

Auch für diesen Fall kann das Verhalten des Horizonts ausgerechnet werden. Man kommt auf:

$$d_H(t) = H^{-1} e^{Ht}. \tag{2.19}$$

Während einer vakuumdominierten Phase ist der mitbewegte Horizont demnach konstant.

Das Vorhandensein einer Vakuumenergie könnte die Geschicke des Universums entscheidend beeinflussen. Für ein $\Lambda < 0$ könnte z.B. ein räumlich offenes Universum wieder kollabieren. Ebenso wie ein $\Lambda > 0$ ein räumlich geschlossenes Universum bis in alle Ewigkeit expandieren könnte. In der Tat zeigen die aktuellen Messungen, daß die Vakuumenergie den größten Beitrag zur Energiedichte des Universums liefert.

2.1.3 Einige kosmologische Parameter

Als erstes definiere ich die kritische Dichte ρ_c

$$\rho_c \equiv \frac{3H_0^2}{8\pi G} \simeq 1.05\, 10^4 \text{ eV cm}^{-3}. \tag{2.20}$$

H_0 ist der Hubble Parameter zur heutigen Zeit:

$$H_0 \equiv 2998 \text{ Mpc}. \tag{2.21}$$

Die kritische Dichte ρ_c gibt gerade die Dichte an, die in Abwesenheit einer kosmologischen Konstante ein räumlich flaches Universum ergibt. Die kritische Dichte entspricht etwa vier Protonen pro Kubikmeter. Mit dem kosmologischen Dichtekoeffizienten

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_c} \tag{2.22}$$

lässt sich die Friedmanngleichung (2.6) schreiben als

$$\Omega - 1 = \frac{k}{a^2 H^2} + \frac{\Lambda}{3H^2}. \tag{2.23}$$

Man kann jetzt die Energiedichten der verschiedenen auftretenden Energieformen durch die kritische Dichte ausdrücken. Man definiert die Terme $\Omega_i \equiv \rho_i/\rho_c$ für Strahlung, Materie und die kosmologische Konstante:

$$\begin{aligned} \Omega_M &= \frac{8\pi G_N \rho_M}{3H_0^2} \qquad \Omega_R = \frac{8\pi G_N \rho_R}{3H_0^2} \\ \Omega_\Lambda &= \frac{\Lambda}{3H_0^2}. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Bei der Bestimmung all dieser kosmologischen Parameter sind in den letzten Jahren große Fortschritte gemacht worden. Ein erster Meilenstein wurde vom Hubble Space Telescope gesetzt. Im Jahr 2003 wurden die Daten der Wilkinson Microwave Anisotropy Probe veröffentlicht [19]. Dieses Experiment vermisst die Anisotropie des CMB. Aus diesen Messungen können die kosmologischen Parameter sehr genau bestimmt werden [20]. Kombiniert man die Messungen der aktuellen Experimente, so ergeben sich folgende Werte [21]:

$$\Omega_0 = 1.02 \pm 0.02. \tag{2.25}$$

Ω_0 ist das Verhältnis der gemessenen Energiedichte und der kritischen Dichte. Dies teilt sich wie folgt auf:

- In den Anteil von Materie
$$\Omega_M = 0.27 \pm 0.04. \tag{2.26}$$
An diesem hat die baryonische Materie einen Anteil von
$$\Omega_b = 0.044 \pm 0.004. \tag{2.27}$$
Den restlichen Anteil macht die "Dunkle Materie" aus. Diese Materie klumpt ebenso wie die baryonische Materie auch, ihr Ursprung ist jedoch noch nicht geklärt.

- In den restlichen Anteil zur Energiedichte. Dieser wird der "Dunklen Energie" zugeschrieben:
$$\Omega_\Lambda = 0.73 \pm 0.04 \tag{2.28}$$
Der Ursprung dieses Löwenanteils an der Energiedichte ist noch nicht geklärt. So könnte z.B. eine kosmologische Konstante dafür verantwortlich sein.

2.1.4 Schwächen des kosmologischen Standardmodells

Das kosmologische Standardmodell ist heute sehr gut bestätigt. Trotzdem sind einige Fragen ungeklärt. Die meisten dieser Fragen hängen mit den Anfangsbedingungen zusammen, d.h. man bräuchte ganz bestimmte Bedingungen zu einer bestimmten Zeit in der Entwicklung des Universums, um dieses, wie wir es beobachten können, zu erhalten.

Für die folgenden Probleme gibt es noch keine Lösung:

- Die globale Struktur des Universums
  - Warum ist der von uns beobachtbare Teil des Universums fast flach?
  - Warum ist die Materieverteilung auf großen Skalen so homogen und isotrop?
- Der Ursprung der Struktur im Universum

  - Wie entstanden die Dichtefluktuationen, aus denen sich Galaxien, Galaxienhaufen und Superhaufen bilden konnten?

- Der Ursprung von Materie und Strahlung
  - Woher stammt all die Energie des Universums?
  - Was ist der Ursprung der Dunklen Materie und der Dunklen Energie im Universum?
  - Wie entstand die Materie-Antimaterie Asymmetrie?

- Die anfängliche Singularität
  - Hatte das Universum einen Anfang?
  - Wie sieht das Universum außerhalb unseres sichtbaren Universums aus?

Auf einige dieser Probleme wird im Folgenden noch genauer eingegangen.

Das Flachheitsproblem

Die Friedmanngleichung kann auch in Abhängigkeit des Dichteparameters Ω ausgedrückt werden (2.23). Ignoriert man hier die kosmologische Konstante (oder fügt sie in Ω ein), so wird daraus:

$$\Omega - 1 = \frac{k}{a^2 H^2} \tag{2.29}$$

Ist das Universum flach ($k = 0, \Omega = 1$), dann bleibt es flach. Ansonsten hat Ω eine Dynamik. Als Flachheitsproblem bezeichnet man die Tatsachen, daß wir, obwohl die Größe aH während der strahlungs- und materiedominierten Phase ein abnehmde Funktion der Zeit ist, ein nahezu flaches Universum beobachten. Aus Gl. (2.29) und den Werten aus Abschnitt 2.1.2 ergibt sich:

$$\Omega - 1 \propto \begin{cases} t & \text{(während der strahlungsdominierten Phase)} \\ t^{2/3} & \text{(während der materiedominierten Phase).} \end{cases} \tag{2.30}$$

Zum Zeitpunkt der Nukleosynthese, bei t=1s, muss $|\Omega - 1|_{t=1\text{s}} \approx 10^{-15}$ gewesen sein.

Um diese Flachheit des Universums zu erreichen, sind sehr unnatürliche Anfangsbedingungen nötig. Es läßt sich zeigen, daß fast alle Anfangsbedingungen zu entweder einem geschlossenen oder offenen Universum führen. Im geschlossenen Fall würde das Universum fast sofort wieder kollabieren. Ein offenes Universum wäre sehr schnell durch die Krümmung dominiert und würde so binnen weniger Sekunden auf unter 3 K abkühlen, die Temperatur, die die kosmische Hintergrundstrahlung heute hat. Aus diesem Grund wird auch manchmal vom Altersproblem gesprochen: Wie konnte unser Universum so alt werden?

Das Horizontproblem

Die derzeitigen Berechnungen ergeben, daß die kausal zusammenhängenden Gebiete zur Zeit der letzten Streuung[3] einen Durchmesser von etwa 180 $\Omega_0^{-1/2}$ Mpc hatten. Dies entspricht beim heutigen Horizont einem Raumwinkel von etwa einem Grad. Die Distanz, die die Photonen der Hintergrundstrahlung seitdem zurückgelegt haben, ist etwa 6000 Mpc (in einem flachen Universum [5]). Die Beobachtungen zeigen, daß Mikrowellen aus unterschiedlichen kausal zusammenhängenden Gebieten dieselbe Temperatur[4] haben, obwohl sie zur Zeit der letzten Streuung keinen kausalen Kontakt hatten. Dies läßt sich im Rahmen des kosmologische Standardmodell nicht erklären. Dieselbe Situation zeigt sich in der Nukleosynthese. Man beobachtet dieselben Anteile an primordialen Elementen in allen Raumrichtungen, obwohl das Universum zum Zeitpunkt der Nukleosynthese aus vielen kausal nicht zusammenhängenden Gebieten bestand. Dies nennt man Horizont- oder Homogenitätsproblem.

Das Reliktproblem

Viele Modelle für Physik jenseits des Standardmodells sagen schwere Teilchen vorher, die bei hohen Temperaturen während des Urknalls entstehen. Diese sind zum Teil stabil und könnten so bis heute die Energiedichte des Universums dominieren.

Vom heutigen Standpunkt aus ist das problematischste Relikt das Gravitino. Dieses Elementarteilchen tritt in supersymmetrischen Theorien als der Spin-$\frac{3}{2}$ Partner des Gravitons auf (siehe Ref. [23]).

Ein weiteres Relikt sind die magnetischen Monopole, die man in vereinheitlichten Theorien erhält. Die theoretischen Vorraussagen für magnetische Monopole liegen aber deutlich über den experimentellen Schranken. Historisch gesehen waren es gerade diese Monopole, die man mit dem Einführen einer inflationären Phase loswerden wollte.

Homogenität und Isotropie

Das kosmologische Standardmodell ist also nicht in der Lage, die Homogenität und Isotropie des Universums auf großen Skalen zu erklären, aber ebensowenig die Inhomogenität auf kleinen Skalen. Woher stammen die primordialen Dichtefluktuationen, die dazu führten, daß Galaxien, Galaxienhaufen und Superhaufen entstehen konnten?

[3] zu diesem Zeitpunkt entstand die kosmische Hintergrundstrahlung

[4] bis auf $\frac{\delta T}{T} \sim 10^{-5}$

2.2 Der inflationäre Ansatz

Die inflationäre Kosmologie entstand in den 80er Jahren. Die Vordenker waren Guth und Linde [13–17]. Dem inflationären Ansatz zufolge sollte es im frühen Universum eine Phase des exponentiellen Wachstums gegeben haben, die von einem skalaren Feld von konstanter Energiedichte getrieben wurde, dem Inflaton. Diese Dynamik wurde bereits in Abschnitt 2.1.2 beschrieben. Ein Feld konstanter Energiedichte dominiert das Universum und sorgt somit für ein exponentielles Wachstum des Skalenfaktors. Dies läßt sich wie folgt ausdrücken:

$$\text{Inflation} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \ddot{a} > 0 \quad . \tag{2.31}$$

Es gibt noch einen äquivalenten Ausdruck, der eine physikalische Interpretation erlaubt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{H^{-1}}{a} < 0. \tag{2.32}$$

Demnach wächst der Skalenfaktor während der Inflation schneller als die Hubblelänge H^{-1}.

Diese Phase des exponentielle Wachstums im Universums kann einige der vorhin angesprochenen Probleme des kosmologischen Standardmodells lösen.

2.2.1 Inflation und die Schwächen des Standardmodells

Im Vordergrund der folgenden Betrachtungen sollen die Probleme des kosmologischen Standardmodells stehen, die durch die inflationäre Kosmologie gelöst werden können.

Inflation und das Horizontproblem

Man betrachte den heute kausal zusammenhängenden Bereich und nehme an, dieser hatte vor der Inflation einen Radius von r_i. Während der Inflation bläht sich dieser auf $r_f = e^N r_i$ auf. Hierbei ist N die Anzahl der e-foldings die das Universum während der Inflation wächst. Diese ist definiert durch:

$$e^N = \frac{a(t_f)}{a(t_i)} = e^{H_I(t_f - t_i)}, \tag{2.33}$$

t_i und t_f sind Anfangs- bzw. der Endzeitpunkt der Inflation. Der Horizont bleibt während der Inflation konstant. Dauert die inflationäre Phase lange genug an, so wird r den Horizont verlassen. Nach der Inflation, während der materie- bzw. strahlungsdominierten Phase, wächst der Horizont schneller als der Skalenfaktor (siehe Abschnitt (2.1.2)). Skalen, die während der Inflation den Horizont verlassen haben, treten wieder in ihn ein. Auf diese Weise löst sich das Horizontproblem, denn Skalen, die zur Zeit der letzten Streuung

in keinem kausalen Zusammenhang standen, waren vor der Inflation in kausalem Kontakt, wodurch man die Homogenität, die heute gesehen wird, erklären kann.

Es läßt sich sogar die Anzahl der e-foldings berechnen, die erforderlich ist, um das Horizontproblem zu lösen. Dazu ist es nötig, daß das heute kausal zusammenhängende Universum vor der Inflation kleiner war als der Horizont während der Inflation H_I. Also muss der heutige Horizont H_0^{-1} durch die Inflation auf eine Größe $\lambda_{H_0}(t_i)$ kleiner als H_I^{-1} reduziert werden:

$$\lambda_{H_0}(t_i) = H_0^{-1} \left(\frac{a_{t_f}}{a_{t_0}}\right) \left(\frac{a_{t_i}}{a_{t_f}}\right) \lesssim H_I^{-1}. \tag{2.34}$$

Aus der Erhaltung der Entropie S folgt $S \propto aT$. Der Quotient a_{t_f}/a_{t_i} kann demnach durch einen Quotienten der entsprechenden Temperaturen ersetzen werden. Dies ergibt:

$$H_0^{-1} \left(\frac{T_0}{T_f}\right) e^{-N} \lesssim H_I^{-1}. \tag{2.35}$$

Bei dieser Rechnung wird eine kurze materiedominierte Phase direkt nach der Inflation vernachlässigt. T_f ist die Temperatur am Ende der Inflation, die man auch Reheating Temperatur T_{RH} nennt. Wird die Gleichung nach N umgestellt, so ergibt sich:

$$N \gtrsim \ln\left(\frac{T_0}{H_0}\right) - \ln\left(\frac{T_{RH}}{H_I}\right) \approx 67 - \ln\left(\frac{T_{RH}}{H_I}\right). \tag{2.36}$$

Demnach ist muss $N \gtrsim 70$ sein, um das Horizontproble zu lösen.

Inflation und das Flachheitsproblem

Wir betrachten das Verhalten von $|\Omega - 1|$ während der Inflation. Da H während der Inflation nahezu konstant ist, bekommen wir:

$$\Omega - 1 = \frac{k}{a^2 H^2} \propto \frac{1}{a^2} \propto e^{-2Ht} \tag{2.37}$$

Es ist also sehr natürlich, daß $|\Omega - 1|$ nach der Inflation fast null ist (siehe Abb. 2.2.1).

Außerdem kann eine untere Schranke für die Anzahl der e-foldings N berechnet werden. Wir wissen aus Ref. [18], daß nach der inflationären Phase $|\Omega - 1| \approx 10^{-60}$ war. Die Anzahl der e-foldings bekommt man aus:

$$\frac{|\Omega - 1|_{t=t_f}}{|\Omega - 1|_{t=t_i}} = \left(\frac{a_i}{a_f}\right)^2 = e^{-2N}. \tag{2.38}$$

Nimmt man an, daß $|\Omega - 1|_{t=t_i} \sim O(1)$ ist, so ist für $N \approx 70$ das Flachheitsproblem gelöst. Dies stimmt gut mit den Werten aus dem Horizontproblem überein.

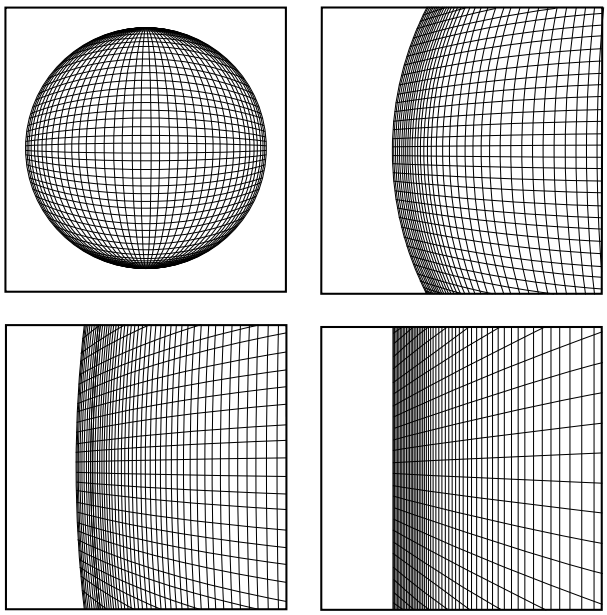

Abbildung 2.1: Das exponentielle Wachstum während der Inflation vergrößert den Krümmungsradius des beobachtbaren Universums so stark, daß unser Universum flach erscheint. Wie ein Ballon, dessen Oberfläche immer flacher erscheint, wenn wir ihn weiter aufpusten. (Aus Ref. [4])

Inflation und das Reliktproblem

Das Reliktproblem wird sehr einfach gelöst: Nimmt man $N = 70$ an, so nimmt die Dichte der Relikte, die vor der inflationäre Phase entstanden sind, nach Gl. (2.36) um den Faktor $e^{-3N} \approx 10^{-92}$ ab. Damit verdünnt man alle Materie, die vor der Inflation entstanden ist, ausreichend. Das Reliktproblem ist aber nur dann gelöst, wenn sich nach der Inflation keine neuen ungewollten Relikte bilden. Die Reheating-Temperatur darf also nicht zu hoch sein. Auf der anderen Seite gibt es auch eine untere Schranke für die Reheating-Temperatur, da bestimmte Prozesse, die nach der Inflation stattfinden, eine bestimmte Temperatur benötigen.

Die Schranken sind stark modellabhängig. Um keine Gravitinos zu erzeugen, muss $T_{RH} \lesssim 10^9$ GeV sein. Für magnetische Monopole liegt die obere Schranke bei $T_{RH} \lesssim 10^{16}$ GeV. Es gibt auch eine untere Schranke für die Reheating Temperatur. Diese ergibt sich aus den Berechnungen zur Nukleosynthese, die bei ungefähr 1 MeV einsetzt. Für die Reheating Temperatur gilt somit 1 MeV $\lesssim T_{RH} \lesssim 10^9$ GeV.

Inflation und die primordialen Dichtefluktuation

Während der inflationären Phase fluktuiert das Inflatonfeld. Diese Fluktuationen werden klassisch und konstant, man sagt sie frieren ein, wenn ihre Wellenlänge den Horizont

verlässt. Diese Fluktuationen des Inflatonfeldes sind gerade die primordialen Dichtefluktuationen, aus denen sich dann Galaxien, Galaxienhaufen und Superhaufen bilden können (siehe Anhang A).

Zusammenfassend kann man sagen, daß eine inflationäre Phase einige Probleme des kosmologischen Standardmodells sehr gut löst. Wie ein skalares Feld ein exponentielles Wachstum treiben kann, wird im Folgenden diskutiert.

2.2.2 Inflation und das Inflaton

Betrachtet werden soll die Dynamik eines reellen skalaren Feldes, des Inflatonfeldes ϕ. Dieses soll das exponentielle Wachstum während der Inflation treiben.

Die Wirkung des Inflatonfeldes lautet:

$$S = \int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\mathcal{L} = \int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\left(\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + V(\phi)\right). \tag{2.39}$$

Hier ist $g \equiv \det g_{\mu\nu} = -a^6$ (siehe auch Gl. (2.2)). Dieser Faktor wird eingeführt, damit die Wirkung unter Koordinatentransformationen invariant bleibt. Aus den Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\partial^\mu\frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\delta\partial^\mu\phi} - \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\delta\phi} = 0 \tag{2.40}$$

bekommen wir dann

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} - \frac{\nabla^2\phi}{a^2} + V' = 0, \tag{2.41}$$

mit $V' = \mathrm{d}V(\phi)/\mathrm{d}\phi$. Vernachlässigt man die räumlichen Ableitungen, so gibt dies gerade die Bewegungsgleichung eines Massenpunktes in einem Potential V, dieser erfährt eine Reibung von $3H$.

Der Energie-Impuls-Tensor unseres skalares Feldes ist:

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - g_{\mu\nu}\mathcal{L}. \tag{2.42}$$

Wird angenommen, daß das Inflatonfeld ϕ bis auf kleine Fluktuationen $\delta\phi$ homogen ist, so kann die räumlichen Ableitung vernachlässigt werden. Damit lautet der Energie-Impuls-Tensor $T_{\mu\nu}$:

$$T_{00} = \rho_\phi = \left(\frac{\dot{\phi}}{2}\right)^2 + V(\phi), \tag{2.43}$$

$$T_{ii} = p_\phi = \left(\frac{\dot{\phi}}{2}\right)^2 - V(\phi). \tag{2.44}$$

Auch hier ist der Energie-Impuls-Tensor wieder diagonal, deshalb läßt sich die T_{00}-Komponente als Energiedichte ρ_ϕ und die T_{ii}-Komponenten als Druck p_ϕ interpretieren.

Wenn hier der Potentialterm dominiert

$$V \gg \dot{\phi}^2, \tag{2.45}$$

so wird daraus:

$$p_\phi \approx -\rho_\phi. \tag{2.46}$$

Wie hier zu erkennen ist, kann ein skalares Feld, das die Energiedichte des Universum dominiert, die Inflation treiben, solange der kinetischen Term vernachlässigt werden kann.

Die ersten inflationären Modelle gingen davon aus, daß das Inflatonfeld in einem falschen Vakuum gefangen ist, es dann durch einen Potentialwall durchtunnelt und so die Inflation endet. Die Struktur auf großen Skalen, ebenso wie die Struktur der kosmischen Hintergrundstrahlung, schliesst solche Modelle aus. Da aber die Inflation viele der Probleme des kosmologischen Standardmodells so elegant löst, wurde versucht ein sanfteres Ende der Inflation zu finden, man sprach von einem "graceful exit". So wurde die Slow-Roll Inflation eingeführt.

2.2.3 Slow-Roll Inflation

In der Slow-Roll Inflation werden bestimmte Bedingungen an das Verhalten des Inflatonfeldes gestellt. Aus der Bewegungsgleichung wird:

$$\ddot{\phi_0} + 3H\dot{\phi_0} + V'(\phi_0) = 0. \tag{2.47}$$

Ist $\dot{\phi_0}^2 \ll V(\phi_0)$, rollt das Feld langsam das Potential hinunter. Ist das Potential außerdem hinreichend flach, so kann die zweite Ableitung des Inflatonfeldes $\ddot{\phi}$ ebenfalls vernachlässigt werden. Die Bewegungsgleichung lautet dann:

$$3H\dot{\phi_0} = -V'(\phi_0). \tag{2.48}$$

Solange die Slow-Roll Bedingung erfüllt ist, lässt sich die Friedmann-Gleichung schreiben als:

$$H^2 \approx \frac{8\pi G_N}{3} V(\phi_0). \tag{2.49}$$

Mit Gl. (2.48) wird aus Gl. (2.49)

$$\dot{\phi_0} \ll V(\phi_0) \Rightarrow \frac{(V')^2}{V} \ll H^2 \tag{2.50}$$

sowie

$$\ddot{\phi} \ll 3H\dot{\phi} \Rightarrow V'' \ll H^2. \tag{2.51}$$

Diese Bedingungen beschreibt man in der inflationären Kosmologie durch Slow-Roll Parameter ϵ, η und δ. Diese sind definiert durch:

$$\epsilon = -\frac{\dot{H}}{H^2} = 4\pi G\frac{\dot{\phi_0}^2}{H^2} = \frac{1}{16\pi G}\left(\frac{V'}{V}\right)^2, \tag{2.52}$$

$$\eta = \frac{1}{8\pi G}\left(\frac{V''}{V}\right) = \frac{1}{3}\frac{V''}{H^2}, \tag{2.53}$$

$$\delta = \eta - \epsilon = -\frac{\ddot{\phi}}{H\dot{\phi}}\,. \tag{2.54}$$

Die Slow-Roll Bedingung ist erfüllt, solange

$$\epsilon \ll 1 \qquad \text{und} \qquad |\eta| \ll 1. \tag{2.55}$$

Ist jetzt das Potential $V(\phi)$ hinreichend flach, so sind die Slow-Roll Parameter ϵ und η während der Inflation klein und ungefähr konstant.

2.2.4 Das Ende der Inflation und das Reheating

Da sich das Universum im Moment nicht in einer inflationären Phase befindet, muss die Inflation irgendwann geendet haben. Die Standardkosmologie geht davon aus, daß sich das Universum irgendwann in einer strahlungsdominierten Phase befand. Demnach muss es nach der Inflation einen Phasenübergang von einer inflationären Phase in eine strahlungsdominierte Phase gegeben haben.

Während der Inflation hat das Inflaton einen nicht verschwindenden Vakuumerwartungswert (VEV). Diesen nennt man auch das falsche Vakuum. Zum Ende der Inflation sollte das Inflatonfeld ein stabiles Minimum erreicht haben, das wahre Vakuum.

Während sich ϕ dem Minimum nähert, wird die Steigung des Potentials größer und so nimmt $\dot{\phi}$ stark zu, weshalb die Slow-Roll Bedingung irgendwann nicht mehr erfüllt ist. Das Inflatonfeld wird schließlich kohärent um das Minimum des Potentials oszillieren. Zu dieser Zeit wird die Energiedichte des Universums nicht mehr von der potentiellen sondern von der kinetischen Energie des Inflatonfeldes dominiert und das Universum befindet sich nicht länger in einer inflationären Phase. Die Oszillationen können als impulslose ϕ-Teilchen interpretiert werden, die in leichtere Felder zerfallen, die an das Inflaton koppeln. Dies beschreibt man durch einen Zerfallsterm $\Gamma_\phi\dot{\phi}$ mit der Zerfallsbreite Γ_ϕ in der Bewegungsgleichung (2.49):

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \Gamma_\phi\dot{\phi} + V'(\phi) = 0. \tag{2.56}$$

Dieser Zerfall wird die Oszillation dämpfen, bis ϕ das wahre Vakuum bei $\phi = 0$ erreicht. Die Zerfallsprodukte werden dann das Universum thermalisieren, nachdem die Temperatur während der Inflation exponentiell abnahmn ($T \propto e^{Ht}$).

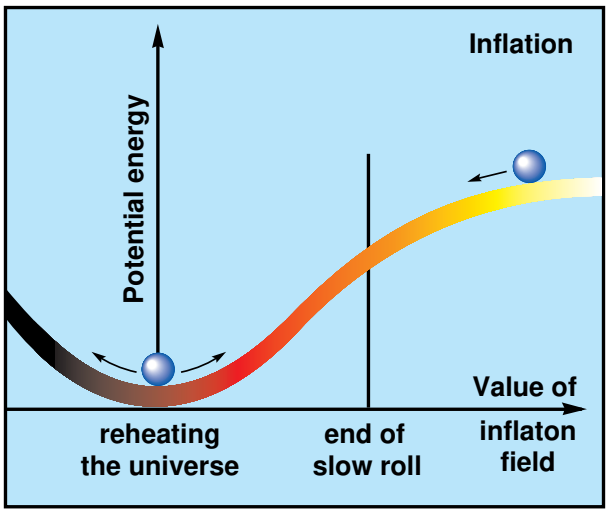

Abbildung 2.2: Das Inflatonfeld rollt langsam das Potential herunter, bis dieses steiler wird. Die Slow-Roll Bedingung ist nicht mehr gegeben und das Reheating beginnt. (Aus [4])

Der Übergang von der Inflation in die strahlungsdominierte Phase spielt in der Kosmologie eine wichtige Rolle. In einigen inflationären Modellen ist dieser Übergang mit einer Symmetriebrechung verbunden. Im nächsten Kapitel wird dies noch eingehend im Rahmen der hybriden Inflation diskutiert.

Kapitel 3

Inflation

Seit Linde und Guth in den 1980ern das kosmologische Standardmodell um eine inflationäre Phase erweitert haben, sind weitere inflationäre Modelle entwickelt worden. Diese unterscheiden sich im Wesentlichen durch ihre Potentiale. Sie lassen sich sinnvoll in zwei Klassen einteilen:

Ein-Feld-Modelle: In den Ein-Feld-Modellen trägt das langsam rollende Inflatonfeld ϕ nahezu die gesamte Energie des Universums. Das Minimum des Potentials liegt bei $\phi = 0$, hier verschwindet V. Diese Form von Modellen wurde im vorigen Kapitel skizziert.

Hybride Modelle: Bei hybdriden Modellen wird neben dem langsam rollenden Inflatonfeld noch mindestens ein weiteres Feld ψ benutzt. Dieses zweite Feld trägt fast die gesamte Energie des Universums.

Im Folgenden werden ausschließlich hybride Modelle betrachtet.

3.1 Hybride Inflation

Die hybride Inflation wurde 1991 von Linde eingeführt [25]. In dieser Art von Modellen trägt, wie schon vorher erwähnt, nicht das Inflatonfeld ϕ den Löwenanteil der Energiedichte, sondern ein zweites Feld ψ, das man oft auch als Higgsfeld bezeichnet. Während der Inflation wird das Higgsfeld durch Wechselwirkungen mit dem Inflatonfeld in einem falschen Vakuum gehalten. Fällt ϕ unter einen kritischen Wert ϕ_c, so ändert sich das Vorzeichen des Quadrates der Masse des ψ-Feldes, die Inflation endet und das Reheating setzt ein.

Linde führte dieses Modell ursprünglich ein, um Probleme bei der Produktion von Axionen[1] zu beseitigen [25]. Das Potential des ursprünglich von Linde vorgeschlagenen

[1] diese sind im übrigen auch Kandidaten für die dunkle Materie

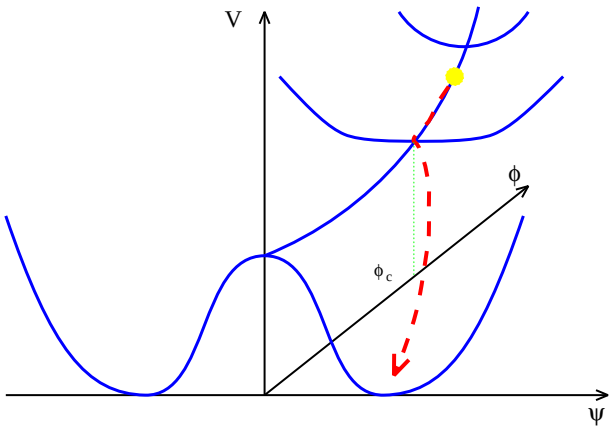

Abbildung 3.1: Hier sieht man das Potential der hybriden Inflation. Das Feld ϕ rollt den $\psi = 0$ Kanal herunter, bis es den kritischen Punkt erreicht. Danach ist die Lösung $\psi = 0$ instabil und die Felder rollen zu ihrem wahren Minimum bei $\phi = 0$, $\psi = \pm M$. (Abb. aus Ref. [24])

Modells hatte folgende Form (siehe auch Abb. 3.1):

$$V = \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda(\psi^2 - M^2)^2 + \frac{1}{2}\lambda'\psi^2\phi^2. \tag{3.1}$$

Die effektive Masse des Higgsfeldes ψ ist

$$m^2_{\psi_{\text{eff}}} = \lambda'\phi^2 - \lambda M^2. \tag{3.2}$$

Diese verschwindet, wenn

$$\phi = \phi_c \equiv \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda'}}\, M \tag{3.3}$$

ist. Diesen Punkt nennt man kritischen Punkt. Solange $\phi > \phi_c$ ist, ist die $\mathbb{Z}_2$-Symmetrie im Erwartungswert des Higgsfeldes $\langle\psi\rangle = 0$ ungebrochen. Mit

$$V = V_0 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 \tag{3.4}$$

kann die Dynamik in diesem Bereich durch ein quadratisches Potential angenähert werden. Hierbei ist $V_0 = \lambda M^4$. Es wird angenommen, daß der erste Term das Potential dominiert, da es sich ansonsten um ein Einfeld-Modell handeln würde.

Diese Lösung wird bei $\phi = \phi_c$ instabil, $\psi = 0$ ist dann kein lokales Minimum mehr und das Quadrat der effektiven Masse $m_{\psi_{\text{eff}}}$ wird negativ. Die Inflation endet, der Endzustand weist keine $\mathbb{Z}_2$-Symmetrie mehr auf. Der Erwartungswert des Higgsfeldes ψ ist dann $\langle\psi\rangle = \pm M$. Man sagt, die $\mathbb{Z}_2$-Symmetrie ist spontan gebrochen. Die Dynamik nach dem kritischen Punkt wird weiter unten noch ausführlich diskutiert.

3.2 Das $\mathbb{Z}_2$-symmetrische Hybrid-Modell

Heute wird versucht, die Inflation in einem größeren Rahmen zu verstehen. Dazu bettet man inflationäre Modelle in Erweiterungen des Standardmodells der Teilchenphysik ein. Das Standardmodell beschreibt die Teilchenphysik mit großem Erfolg, kann aber, wie die Standardkosmologie, einige Phänomene nicht erklären. Ein vielversprechender Kandidat diese Probleme zu lösen, ist die Supersymmetrie. Die Supersymmetrie ist eine Symmetrie zwischen Bosonen und Fermionen. Da in den Potentialen der skalaren Felder der Supersymmetrie oft flache Richtungen vorkommen, identifiziert man eines dieser Felder mit dem Inflaton, da ein hinreichend flaches Potential benötigt wird, um die Slow-Roll Bedingung zu erfüllen.

Auf die Supersymmetrie soll hier nicht weiter eingegangen werden. Einführungen gibt es z.B. von Wess und Bagger [26], Buchbinder und Kuzenko [27] oder Ref. [28].

3.2.1 Ein supersymmetrischer Ansatz

In der Supersymmetrie bekommt man das skalare Potential V aus dem Superpotential W durch:

$$V = \sum_i \left| \frac{\partial W}{\partial F_i} \right|^2 . \tag{3.5}$$

Hier sind die F_i die im Superpotential auftretenden Felder. Normalerweise basiert die hybride Inflation auf Superpotentialen der Form

$$W_G = \lambda T (M_G^2 - \Sigma^2). \tag{3.6}$$

Dabei sind T und Σ chirale Superfelder und λ ist die Kopplung. T wird mit dem Inflatonfeld identifiziert. Diese Form von Superpotential ist gut bekannt. Es ist nicht nur das einfachste Modell das hybride Inflation ergibt, es hat auch den Vorteil, daß es für ein kanonisches Kählerpotential keine großen Korrekturen aus der Supergravitation erhält. Dies liegt daran, daß im Superpotential nur lineare Terme des Inflatonfeldes T auftreten, und Terme höherer Ordnung in T wegen der R-Invarianz verboten sind.

Des weiteren berücksichtigt man in diesem Modell einen Polonyi-Term, siehe Ref. [22]

$$W_S = M_S^2(\beta + S). \tag{3.7}$$

Hier ist $\beta = (2 - \sqrt{3})M_P$. Hier wurde β so gewählt, daß die kosmologische Konstante gerade verschwindet. Weiter ist $\langle S \rangle = (\sqrt{3} - 1)M_P$. M_S ist die Skala auf der die Supersymmetrie gebrochen wird. Diese wird so gewählt, daß die Gravitinomasse $m_{3/2} = M_S^2/M_P \exp(2 - \sqrt{3})$ ungefähr $m_{3/2} \simeq 100$ GeV wird. Die Planckmasse ist $M_P = (8\pi G_N)^{1/2} = 2.4 \cdot 10^{18}$ GeV. Daraus folgt $M_S \simeq 1.4 \cdot 10^{10}$ GeV.

Es wurde lange Zeit angenommen, daß der Polonyi-Term vernachlässigt werden kann, aber für Modelle mit kleiner Kopplung λ ist dies nach Ref. [30] nicht der Fall. Unser Superpotential lautet:

$$\begin{aligned} W &= W_G + W_S \\ &= \lambda T(M_G^2 - \Sigma^2) + M_S(\beta + S) \end{aligned} \tag{3.8}$$

Dieses ist invariant unter $\mathbb{Z}_2$-Transformationen $\Sigma \to -\Sigma$. Der erste Term bricht die globale $\mathbb{Z}_2$-Symmetrie im Grundzustand, erhält aber die Supersymmetrie. Der zweite Term bricht die lokale Supersymmetrie im wahren Vakuum. Führt man eine Variablentransformation mit

$$\Phi = \frac{\xi S}{\sqrt{1+\xi^2}} + \frac{T}{\sqrt{1+\xi^2}}, \quad \Psi = \frac{S}{\sqrt{1+\xi^2}} + \frac{\xi T}{\sqrt{1+\xi^2}}, \tag{3.9}$$

wobei $\xi = M_S^2/(\lambda M_G^2)$ und

$$\lambda_1 = \frac{\lambda}{\sqrt{1+\xi^2}}, \quad \lambda_2 = \frac{\lambda\xi}{\sqrt{1+\xi^2}}, \quad M = M_G\sqrt{1+\xi^2} \tag{3.10}$$

durch, so bekommt man:

$$W = \lambda_1\Phi(M^2 - \Sigma^2) + \lambda_2\Psi\Sigma^2 + M_S^2\beta. \tag{3.11}$$

Dies ist die bekannte Form eines O'Raifeartaigh-Modells [31]. Die zwei Formen des Superpotentials sind äquivalent. In Ref. [30] wird gezeigt, daß ξ sehr klein gegen eins sein muss, um die Inflation zu ermöglichen. Also ist hier $T \approx \Phi$, $S \approx \Psi$ und $M \approx M_G$.

Das skalare Potential ergibt sich nach (3.5) aus dem Superpotential zu:

$$V = \lambda^2|M_G^2 - \Sigma^2|^2 + 4\lambda^2|T|^2|\Sigma|^2 + M_S^4. \tag{3.12}$$

Der entsprechende Grundzustand ist:

$$\langle T\rangle = 0, \qquad \langle\Sigma\rangle = \pm M_G. \tag{3.13}$$

Solange $T > M_G/2$ ist, hat das Potential bei $\Sigma = 0$ ein lokales Minimum. Das Potential ist in T- und S-Richtung flach, wie es für eine inflationäre Phase erforderlich ist.

Werden noch Korrekturen aus der Supergravitation herangezogen, so lautet das Potential:

$$V = e^{K/M_P^2}\left[\left|\frac{\partial W}{\partial F_i} + \frac{F_i^* W}{M_P^2}\right|^2 - 3\frac{|W^2|}{M_P^2}\right]. \tag{3.14}$$

K ist dabei das kanonische Kählerpotential, $K = \sum_i |F_i|^2$. Bis auf Korrekturen der Ordnung $\mathcal{O}(1/M_P^n)$ sind die Erwartungswerte der Felder im wahren Vakuum dann

$$\langle T\rangle = 0 \qquad |\langle\Sigma\rangle| = M_G \qquad \langle S\rangle = (2-\sqrt{3})M_P. \tag{3.15}$$

Die Korrekturen aus der Supergravitation unterscheiden zwischen dem Real- und Imaginärteil von $T = (\phi + i\chi)/\sqrt{2}$. Solange $\phi > \phi_c = M_G$ ist, hat V wieder ein lokales Minimum bei $\Sigma = (\sigma + i\rho)/\sqrt{2} = 0$. Die Energiedichte ist dann etwa $V = \lambda^2 M_G^4$, was zu einer inflationären Phase führt, deren Hubble Parameter nach Gl.(2.49) $H = \lambda M_G^2/(\sqrt{3}M_P)$ ist. Das Potential ist nahezu flach in ϕ-Richtung, ϕ spielt die Rolle des Inflatons, und σ identifiziert man mit dem Higgsfeld.

3.2.2 Das skalare Potential

Das skalare Potential von ϕ und σ lautet

$$V(\phi, \sigma) = \lambda^2 \left(M_G^2 - \frac{\sigma^2}{2} \right)^2 + \lambda^2 \phi^2 \sigma^2 + \kappa\phi, \tag{3.16}$$

bis auf Korrekturen der Ordnung $\mathcal{O}(1/M_P^2)$. Der lineare Term ist von der Ordnung $\mathcal{O}(1/M_P)$, mit

$$\kappa = 2^{2/3}(2 - \sqrt{3})\lambda \frac{M_S^2 M_G^2}{M_P} \approx 0.6\lambda m_{3/2} M_G^2. \tag{3.17}$$

Das Quadrat der effektiven Masse des Higgsfeldes ist gerade

$$m_{\sigma_{\text{eff}}}^2 = \lambda \left(M_G^2 - \phi^2 \right). \tag{3.18}$$

Daraus ergibt sich der kritische Punkt des Potentials zu

$$\phi_c = M_G. \tag{3.19}$$

Nach Ref. [30] kann für einen bestimmten Satz von Parametern angenommen werden, daß lediglich lineare Terme beitragen. Dieser Satz von Parametern ist gerade:

$$\begin{aligned} M_S &= 1.6 \cdot 10^{16}\ \text{GeV} \\ m_{3/2} &= 130\ \text{GeV} \\ \lambda &= 1.3 \cdot 10^{-5} \\ H &= 3.1 \cdot 10^{8}\ \text{GeV} \\ \kappa &= (4.6 \cdot 10^{9}\ \text{GeV})^3 \end{aligned} \tag{3.20}$$

Damit lassen sich aus Gl. (3.14) die Slow-Roll Parameter berechnen:

$$\epsilon = \frac{M_P^2}{2} \left(\frac{V'}{V} \right)^2 = \frac{4\xi^2\beta^2}{M_P^2} \left((1 - \frac{\phi^3}{2\sqrt{2}\xi\beta M_P^2} + ... \right) \tag{3.21a}$$

$$\eta = M_P^2 \frac{V''}{V} = \frac{3}{2} \frac{\phi^2}{M_P^2} + ... \tag{3.21b}$$

Diese erfüllen nach Gl. (2.55) die Slow-Roll-Bedingung, solange $\phi \ll M_P$. Mit dem betrachteten Potential kann also eine inflationäre Phase gut realisiert werden. Diese endet in Hybrid-Modellen bei einem kritischen Punkt ϕ_c. Das falsche Vakuum zerfällt. Es findet ein Phasenübergang von einer inflationären in eine strahlungsdominierte Phase statt. Dieser Vorgang wird als Reheating bezeichnet.

3.3 Der Zerfall des falschen Vakuums

Die Dynamik des Zerfalls des falschen Vakuums wird schon seit der Formulierung der ersten inflationären Modelle sehr intensiv diskutiert (siehe Ref. [38,39]). Bei diesem Phasenübergang zerfällt das Inflatonfeld über eine parametrische Resonanz zwischen dem Inflatonfeld und einem Materiefeld (siehe Ref. [40, 41]). Diesen Prozess nennt man Preheating. Hierbei werden die Moden mit kurzen Wellenlängen exponentiell verstärkt. Der resultierende Zustand befindet sich nicht in thermischem Gleichgewicht, was lokal zu sehr hohen effektiven Temperaturen führen kann. In diesem nicht thermischen Zustand kann die eben spontan gebrochene Symmetrie lokal wieder hergestellt werden (siehe Ref. [42, 43]). Danach oszilliert das Inflaton um das Minimum und gibt seine Energie durch Selbstwechselwirkung an Moden mit kleineren Wellenlängen oder durch Wechselwirkung mit anderen Materiefeldern ab, bis ein thermischer Zustand erreicht ist. Die Zeit, bis ein thermischer Zustand erreicht ist, hängt stark von der Kopplung der beteiligten Felder ab. Während der Thermalisierung wird die Symmetrie wieder gebrochen und nach Ref. [44] können topologische Defekte gebildet werden.

In Ref. [36] wird jedoch gezeigt, daß der Zerfall über die parametrische Resonanz bei hybriden Inflationsmodellen, wie hier eines diskutiert wird, nicht stattfindet. Stattdessen wachsen hier die langwelligen Moden des Hybridfeldes σ an, nachdem das Quadrat dessen effektiver Masse negativ geworden ist, weshalb diese Phase tachyonisches Preheating genannt wird. Auch hier ist der resultierende Zustand nicht thermisch, die vorher gebrochene Symmetrie kann lokal wieder hergestellt werden. Bei der Thermalisierung wird diese Symmetrie wieder gebrochen, und auch hier können topologische Defekte entstehen.

3.3.1 Die lineare Approximation

Im folgenden soll zunächst das tachyonische Preheating numerisch berechnet werden. Dieses beginnt am kritischen Punkt ϕ_c des Potentials. Die Bewegungsgleichungen der

Felder lauten nach Gl. (2.40) mit Gl. (3.16):

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} - \frac{\nabla^2\phi}{a^2(t)} + 2\lambda^2\sigma^2\phi + \kappa = 0 \tag{3.22}$$

$$\ddot{\sigma} + 3H\dot{\sigma} - \frac{\nabla^2\sigma}{a^2(t)} + \lambda^2\phi^2\sigma - \lambda^2 M_G^2\sigma = 0 \tag{3.23}$$

Für den homogenen Teil des Inflatonfeldes vernachlässigt man die räumlichen Ableitungen. Der homogene Teil des Higgsfeldes ist $\sigma_{\rm cl} = 0$. Die Bewegungsgleichung des Inflatonfeldes lautet dann:

$$\ddot{\phi_{\rm cl}} + 3H\dot{\phi_{\rm cl}} + \kappa = 0. \tag{3.24}$$

Also ist

$$\dot{\phi_{\rm cl}} \simeq -\frac{\kappa}{3H}. \tag{3.25}$$

Daraus erhält man die Lösung nahe des kritischen Punktes

$$\phi_{\rm cl}(t) = M_G - \frac{\kappa}{3H}t. \tag{3.26}$$

Der Ursprung der Zeit ist dabei auf $\phi(0) = \phi_c = M_G$ gesetzt. Der Phasenübergang von der Inflation in die strahlungsdominierte Phase beginnt bei $t = 0$. Diese Lösung wird im Folgenden in das Potential aus Gl. (3.16) eingesetzt, und es werden lediglich Terme linear in t und quadratisch in σ betrachtet. Dies ist die lineare Approximation. Später wird gezeigt, daß diese nur bis zu einer bestimmten Zeit gilt.

Die lineare Approximation wird auch in Hybridmodellen verwendet, die nicht durch die Supersymmetrie motiviert sind. Bei diesen besteht immer eine gewisse Willkür in der Wahl von $\dot{\phi_{\rm cl}}$ bei $t = 0$. Bei dem hier betrachteten Modell ergibt sich $\dot{\phi_{\rm cl}}$ aus dem Korrekturterm der Supergravitation.

Das resultierende Potential lautet:

$$V(\phi, \sigma) = -\frac{1}{2}D^3 t\sigma^2 + ... \tag{3.27}$$

Hier ist $D^3 = 4\lambda^2\kappa M_G/(3H)$, was mit in den Werten aus Gl.(3.20) gerade $D \simeq 3.4H$ ergibt. Mit diesem Potential soll die Lösung der Bewegungsgleichung der Fourierkomponenten der Felder numerisch bestimmt werden. Aus diesen kann dann die Varianz der Felder berechnet werden, die gerade das charakteristische Anwachsen der Fluktuationen wiedergibt. Diese Fluktuationen thermalisieren später. Nach diesem Thermalisieren beginnt die Standardkosmologie. In Anhang A wird das Verhalten von Fluktuationen eines skalaren Feldes während der Inflation betrachtet. Die Fluktuationen des Inflatonfeldes führen zur Entstehung der Strukturen auf grossen Skalen.

3.3.2 Fluktuationen in der Nähe des kritischen Punktes

In einem flachen de Sitter-Raum mit einer Metrik

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - e^{2Ht}\,\mathrm{d}\vec{x}^{\,2} \tag{3.28}$$

kann man die Felder $\phi(t,\vec{x})$ nach ebenen Wellen entwickeln, diese sind Eigenzustände des Impulses:

$$\phi(t,\vec{x}) = \phi_{cl} + e^{\frac{3}{2}Ht}\int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^{3/2}}\left(a_\phi(\vec{k})\phi_k(t)e^{i\vec{k}\vec{x}} + a_\phi^\dagger(\vec{k})\phi_k^*(t)e^{-i\vec{k}\vec{x}}\right) \tag{3.29}$$

$$\sigma(t,\vec{x}) = e^{\frac{3}{2}Ht}\int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^{3/2}}\left(a_\sigma(\vec{k})\sigma_k(t)e^{i\vec{k}\vec{x}} + a_\sigma^\dagger(\vec{k})\sigma_k^*(t)e^{-i\vec{k}\vec{x}}\right). \tag{3.30}$$

Hier sind die Erzeugungs - und Vernichtungsoperatoren $a^\dagger(\vec{k}), a(\vec{k})$ und den Fourierkoeffizienten ϕ_k und σ_k. Der homogene Teil des Higgsfeldes σ_{cl} taucht hier nicht auf, weil die Anfangsbedingung gerade $\sigma_{\mathrm{cl}}(0) = 0$ ist.

Die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren erfüllen die kanonischen Vertauschungsrelationen:

$$\left[a_\phi(\vec{k}), a_\phi^\dagger(\vec{k})\right] = \left[a_\sigma(\vec{k}), a_\sigma^\dagger(\vec{k})\right] = \delta^3\left(\vec{k} - \vec{k'}\right). \tag{3.31}$$

Die kanonisch konjugierten Operatoren der Felder ϕ und σ sind:

$$\pi_\phi(t,\vec{x}) = e^{3Ht}\dot{\phi}(t,\vec{x}) \tag{3.32a}$$

$$\pi_\sigma(t,\vec{x}) = e^{3Ht}\dot{\sigma}(t,\vec{x}). \tag{3.32b}$$

Für die Fourierkomponenten gelten dann die folgenden Bewegungsgleichungen:

$$\ddot{\phi_k} + \left(k^2e^{-2Ht} - \frac{9}{4}H^2\right)\phi_k = 0 \tag{3.33}$$

$$\ddot{\sigma_k} + \left(k^2e^{-2Ht} - \frac{9}{4}H^2 - D^3t\right)\sigma_k = 0 \tag{3.34}$$

Die Lösung von Gl. (3.33) ist aus dem Studium der Dichtefluktuationen während der Inflation in Anhang A bekannt. Diese ist gerade die Hankelfunktion

$$\phi_k(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{H}\right)^{1/2} H^{(1)}_{3/2}(z), \tag{3.35}$$

wobei $z = ke^{-Ht}/H$ und

$$H^{(1)}_{3/2}(z) = -\left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} e^{iz}\,\frac{z+i}{z} \tag{3.36}$$

ist.

Die Lösung von Gl. (3.34) muß numerisch bestimmt werden. Man kann jedoch für die Zeiten $t \ll t_c$ und $t \gg t_c$, $t = t_c$ bei $\phi = \phi_c$, wo

$$k^2 e^{-2Ht_c} - \frac{9}{4}H^2 = |D^3 t_c| \tag{3.37}$$

ist, Lösungen finden. Zu großen negativen Zeiten ist dies wieder die Hankelfunktion.

Für sehr große Zeiten, $t \gg t_c$ wird aus Gl. (3.34)

$$\ddot{\sigma} - D^3 t \sigma_k = 0. \tag{3.38}$$

Dies ist ein skalares Feld im Minkowskiraum, mit einem Massenquadrat von $\mu^2(t) = -D^3 t$, das mit der Zeit abnimmt. Die Lösungen sind durch die Airyfunktionen Ai und Bi gegeben [32]. Eine genäherte Lösung kann man bekommen, wenn man die Airy-und die Hankelfunktionen bei $t = t_c$ vergleicht,

$$\sigma_k(t) = C_A(k)\mathrm{Ai}(z) + C_B(k)\mathrm{Bi}(z), \tag{3.39}$$

hier ist $z = Dt$. Für Moden mit $k < H$ findet man

$$C_A = i\sqrt{\frac{\pi}{2D}}, \qquad C_B = \sqrt{\frac{\pi}{2D}}. \tag{3.40}$$

Ist $z = Dt \gg 1$ so wird das Verhalten von $\sigma_k(t)$ durch das asymptotische Anwachsen der Airyfunktion Bi(z) dominiert,

$$\mathrm{Bi} \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}} z^{-1/4} e^{\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}}. \tag{3.41}$$

Um das Anwachsen der Fluktuationen zu messen, wie es für das tachyonische Preheating zu erwarten ist, wird die Varianz der entsprechenden Felder berechnet. Die Varianz ergibt sich gerade zu:

$$\left\langle \sigma^2(t) \right\rangle_r = \left\langle \sigma^2(t) \right\rangle - \left\langle \sigma^2(0) \right\rangle \tag{3.42}$$

wobei

$$\left\langle \sigma^2(t) \right\rangle = \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^2}\, e^{3Ht} |\sigma_k(t)|^2 \equiv \int \mathrm{d}k f_k(t) \tag{3.43}$$

ist.

Die Spektren der $f_k(t)$ sind in Abb. 3.2 zu sehen. Man sieht wie erwartet das rapide Anwachsen der Fluktuationen. Für kleine k sieht man ein quadratisches Verhalten $f_k \propto k^2$. Werden grössere Impulse, $k > k_* \approx 3H$, zu großen Zeiten betrachtet, so ist ein verlangsamtes Anwachsen dieser Moden zu erkennen, d.h. die f_k für große k sind klein. Für sehr große Impulse, $k \gg k_\star$, ergibt sich das Verhalten eines masselosen Feldes, d.h. $f_k \propto k$.

Die Varianz $\langle \sigma^2(t) \rangle$ ist in Abb. 3.3 aufgetragen. Diese zeigt das charakteristische Verhalten unseres Modells, ein stärker als exponentielles Anwachsen mit der Zeit. Es wird

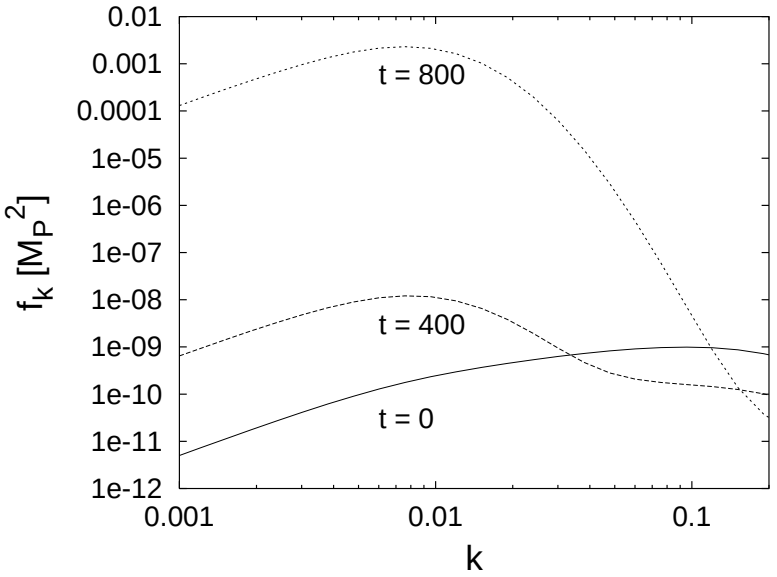

Abbildung 3.2: Das Spektrum des Higgsfeldes, berechnet mit Mathematica. Aus Ref. [45].

angenommen, daß die Zeit zu der das Formieren der Domänen beendet ist, abgeschätzt werden kann, indem die Varianz mit dem globalen Minimum des Potentials verglichen wird

$$\left\langle \sigma^2(t_{sp}) \right\rangle_r \simeq 2M_G^2. \tag{3.44}$$

Dies sollte dann etwa bei $t_{sp} \simeq 3/H$ sein.

Die tachyonischen Moden σ_k sind ab der Dekohärenzzeit $t_{\rm dec}$ als klassisch zu betrachten. So ist das System zu späten Zeiten hinreichend durch eine klassische Wahrscheinlichkeitsverteilung $f(\sigma_k, t)$ der Amplituden von σ_k beschrieben. Der homogene Teil $\sigma_{\rm cl} = \langle \sigma(t, \vec{x}) \rangle$ bleibt null.

Die Dekohärenzzeit $t_{\rm dec}$ ist der Zeitpunkt, bei dem die tachyonischen Moden klassisch werden, d.h., daß das Produkt $|\sigma_k(t)\pi_{\sigma_k}(t)|$ größer als 1/2 wird, dem Minimum für oszillierende Moden. Für große Zeiten ergibt sich dieses Produkt aus der exponentiell wachsenden Airy-Funktion Bi(z):

$$|\sigma(t)\pi_{\sigma_k}(t)| \simeq \frac{1}{\pi} D |C_B(K)|^2 \exp\left(\frac{4}{3}(Dt)^{3/2}\right). \tag{3.45}$$

Für die sog. weichen Moden $k < H$ erhält man aus $|\sigma_k(t)\pi_{\sigma k}(t)| = R_{\rm dec} \gg 1$ die Dekohärenzzeit zu

$$t_{\rm dec} \simeq \frac{1}{D}\left(\frac{3}{4}\ln(2R_{\rm dec})\right)^{2/3}. \tag{3.46}$$

Für $R_{\rm dec} = 100$ ist $t_{\rm dec} \sim 3/D \sim 1/H$.

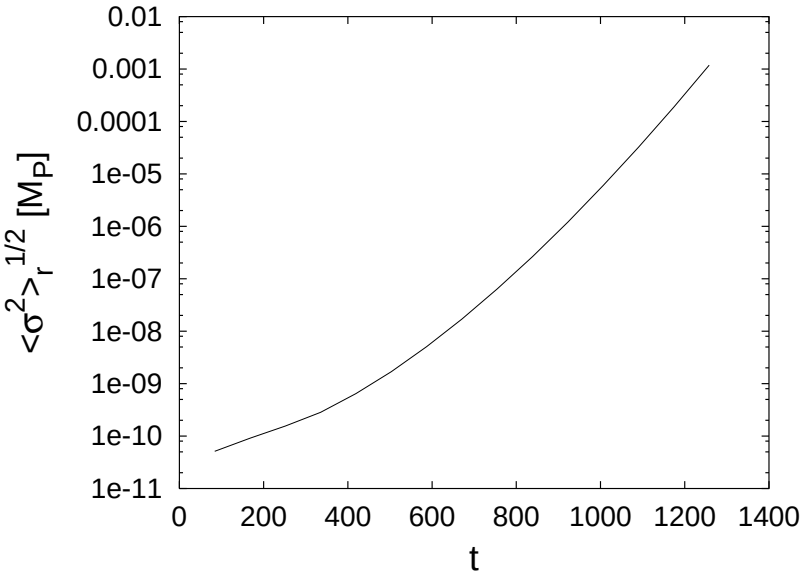

Abbildung 3.3: Das exponentielle Wachstum der Varianz des Higgsfeldes, berechnet mit Mathematica. Aus Ref. [45]

Mit der linearen Approximation ist man in der Lage, den exponentiellen Anstieg der Fluktuationen zu berechnen. Hierzu wurde das Potential linearisiert. Es wurde gezeigt, daß das System durch das tachyonische Preheating in einen Zustand mit hoch besetzten langwelligen Moden, die sich nicht im thermischen Gleichgewicht befinden, getrieben wird. Die inflationäre Kosmologie verlangt jedoch, daß sich ein thermischer Zustand an die Inflation anschliesst. Dies kann durch die lineare Approximation nicht beschrieben werden. Um ein Thermalisieren der Felder zu beobachten, müssen die Terme höherer Ordnung berücksichtigt werden.

Es gibt verschiedene Methoden, diese Terme in den Rechnungen zu berücksichtigen. Eine Möglichkeit ist die Hartree-Approximation. Dies wurde in Ref. [45] diskutiert. Hier sollen jetzt Berechnungen auf einem Gitter durchgeführt werden. Dazu wird die Gittersimulation **LatticeEasy** benutzt.

3.4 Berechnungen auf dem Gitter

LatticeEasy behandelt die Felder klassisch. In Abschnitt 3.3.2 wurde gezeigt, daß dies ab der Dekohärenzzeit eine gute Näherung ist. Die Dekohärenzzeit in Programmeinheiten ist:

$$t_{\mathrm{dec}} \sim 420 \tag{3.47}$$

Um der Quantennatur der Felder gerecht zu werden, generiert **LatticeEasy** zu Beginn eines Laufs zufällige gaussförmige Fluktuationen für jeden Gitterpunkt und addiert diese zum Erwartungswert der Felder. Die Ableitungen der Felder bekommen ebenfalls eine solche Quantenkorrektur erster Ordnung. Solche gausschen Fluktuationen können auch schon der Zeit t_{dec} eingeführt werden, denn da die lineare Anfangsphase sie undeformiert beibehält.

Auch die Expansion des Universums kann berücksichtigt werden. Hierzu gibt man entweder eine Expansionsrate vor, oder das Programm berechnet den Skalenfaktor und den Hubble Parameter selbstkonsitent durch Lösen der Friedmanngleichung.

Eine ausführliche Beschreibung von **LatticeEasy** kann in Ref. [46] gefunden werden. In Anhang B ist eine kurze Beschreibung der wichtigsten Komponenten und der Reskalierung zu finden.

Im vorherigen Teil wurde gezeigt, daß sich das betrachtete System etwa ab der Dekohärenzzeit klassisch beschreiben läßt. Zunächst soll aber noch gezeigt werden, daß auch das tachyonischen Preheating mit der obigen Näherung gut beschrieben wird. Dazu werden zunächst einige Ergebnisse aus dem vorherigen Teil mit **LatticeEasy** reproduziert.

3.4.1 Das tachyonische Preheating mit LatticeEasy

LatticeEasy benötigt neben den reskalierten Modellparametern, die im Anhang B aufgeführt sind, noch ein paar weitere Eingaben. So muss vor Beginn einer Simulation die Anzahl der Dimensionen des Gitters N_{dim}, die Größe der einzelnen Zeitschritte $\mathrm{d}t_{\mathrm{pr}}$, die Zeit t_f, bis zu der das Programm laufen soll, sowie die Länge des Gitters L und die Anzahl der Gitterpunkte N an das Programm übergeben werden. Mit den letzten beiden bestimmt man den Spektralbereich. Dieser muss an das jeweilige Problem angepasst werden. Wenn nicht anders erwähnt, wurden die Berechnungen für $N_{\mathrm{dim}} = 3$ durchgeführt. Möchte man das tachyonische Preheating analysieren, so sollte vor allem der Spektralbereich um das Maximum in Abb. 3.2 enthalten sein, denn die Moden um das Maximum tragen am meisten zur Varianz bei. Später soll noch die Thermalisierung der Felder diskutiert werden. Um diese Effekte zu sehen, müssen auch Moden mit kleineren Wellenlängen berücksichtigt werden.

Bei den Berechnungen mit **LatticeEasy** beginnen die Simulationen jeweils am kritischen Punkt ϕ_c des Potentials. Wie im letzten Abschnitt auch, soll zunächst die Varianz und das Spektrum des Higgsfeldes während des tachyonischen Preheatings betrachtet werden. Diese Ergebnisse sind dann mit den Ergebnissen aus Abschnitt 3.3.2 zu vergleichen. Des weiteren soll gezeigt werden, ob es einen Unterschied macht, diese Läufe mit selbstkonsistenter Expansion beziehungsweise ohne durchzuführen. Da die inflationäre Phase am kritischen Punkt endet, sollten die Unterschiede minimal sein.

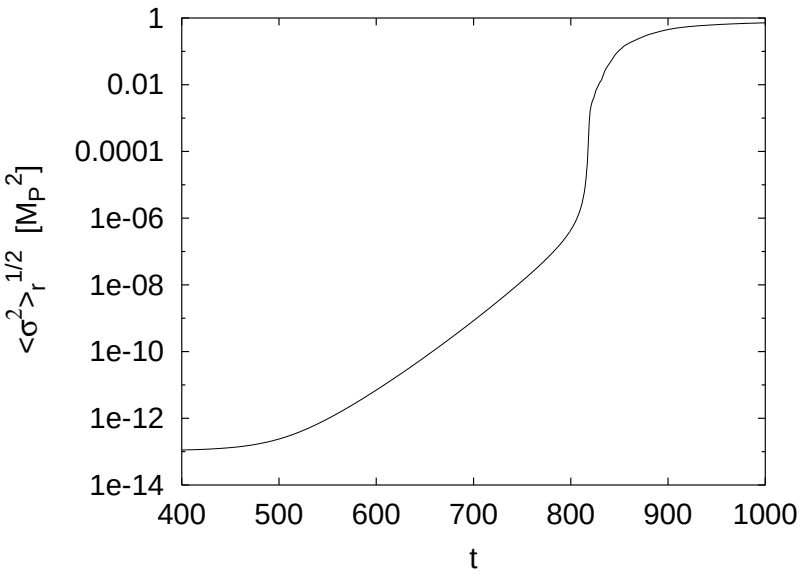

Abbildung 3.4: Das exponentielle Wachstum der Varianz des Higgsfeldes, berechnet mit **LatticeEasy**.

Die Varianz

$$\text{Varianz}(f) = \left\langle f^2 \right\rangle - \left\langle f \right\rangle^2 \tag{3.48}$$

rechnet **LatticeEasy** automatisch aus den Feldwerten auf dem Gitter aus. Hier ist $\langle f \rangle$ der klassische Wert des Feldes, dieses ist der Mittelwert über alle Gitterpunkte.

Abbildung 3.4 zeigt das exponentielle Wachstum der Varianz während des tachyonischen Preheatings. Abbildung 3.5 zeigt das Spektrum der f_k. Es sieht hier so aus, als ob das tachyonische Preheating erst sehr lange nach dem kritischen Punkt beginnen würde. Dies ist auf den Infrarot-Cutoff der Gittersimulation zurückzuführen. Die Moden, die früh wachsen, also die Moden mit sehr kleinen k, sind nicht in dem betrachteten Spektralbereich enthalten, weshlab kein Anwachsen der Varianz zu sehen ist. Abgesehen von diesem Gitterartefakt stimmen die Ergebnisse gut mit denen aus Abschnitt 3.3.2 (siehe hierzu die Abb. 3.3 und 3.2) überein.

LatticeEasy berechnet das tachyonische Preheating demnach trotz der klassischen Näherung korrekt. In Ref. [29] wurde das Ende des tachyonischen Preheatings t_{sp} abgeschätzt auf $t'_{\text{sp}} \sim 3/H$ dies ist in Programmeinheiten gerade $t_{\text{sp}} \sim 1200$. Nach Abb. 3.4 scheint dies eine gute Abschätzung gewesen zu sein.

Es zeigt sich bei diesen Läufen, daß **LatticeEasy** große Schwierigkeiten mit kleinen κ hat. Das Programm bricht Läufe wegen numerischer Instabilität ab. Dies liegt vermutlich daran, daß die Anfangsgeschwindigkeit in Programmeinheiten für das ursprüngliche κ sehr klein gegen eins sind ($\mathcal{O}(10^{-8})$). Deshalb wurde für die folgenden Untersuchungen

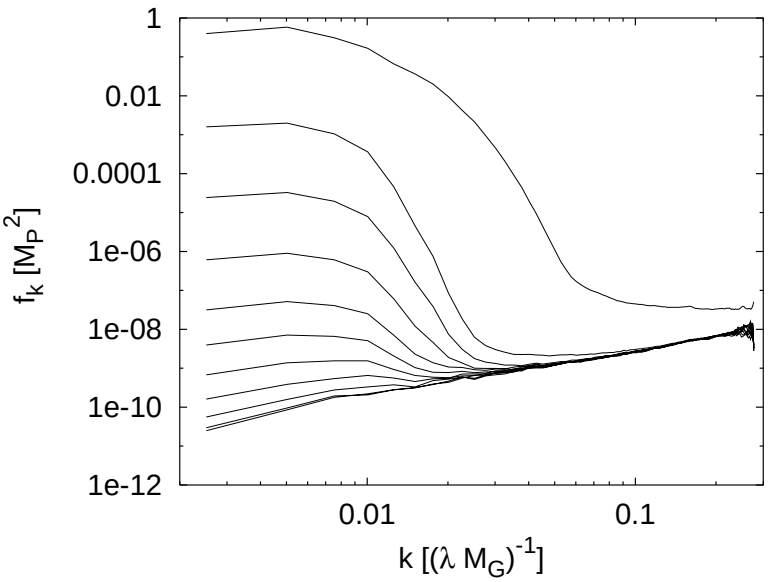

Abbildung 3.5: Hier sieht man das Spektrum des Higgsfeldes während des tachyonischen Preheatings. Man sieht wie die Moden mit kleinen k exponentiell anwachsen.

ein neues κ gewählt. Der neue Parameter $\tilde{\kappa}$ ist:

$$\tilde{\kappa} = 3 \cdot 10^{34}\mathrm{GeV}^3. \tag{3.49}$$

Hieraus ergibt sich die Anfangsgeschwindigkeit des Inflatonfeldes in Programmeinheiten zu:

$$\dot{\phi}_{\mathrm{pr},0} = -2.24293 \cdot 10^{-2}. \tag{3.50}$$

Qualitativ sollte dies keinen Unterschied ausmachen.

Es sollte auch der Einfluß der Expansion auf das tachyonische Preheating untersucht werden. Dieser ist in Abb. 3.6 zu sehen. Diese beiden Spektren zeigen keine signifinkanten Unterschiede. Die Expansion hat demnach einen sehr geringen Einfluss auf die Dynamik des tachyonischen Preheatings.

Am kritischen Punkt des Potential kommt es zu einer spontanen Symmetriebrechung. Betrachtet man die Wahrscheinlichkeitsverteilung des Higgsfeldes nach dem kritischen Punkt, so sollte hier die Symmetriebrechung sichtbar werden. Dieses ist in Abb. 3.7 zu sehen. Zu Beginn eines Laufes zeigt das Higgsfeld ein sehr schmales Maximum bei $\sigma = 0$, die Symmetrie ist noch erhalten und die Fluktuationen sind noch nicht durch das tachyonische Preheating verstärkt. Bei $t = 18$ verbreitert sich das Maximum und daraufhin bilden sich zwei Maxima bei $\sigma = \pm M_G$. Die Symmetrie ist gebrochen. Die Maxima oszillieren zwar immer noch um $\sigma \pm M_G$, aber die Amplituden der Oszillationen sind klein gegen M_G. Die Symmetrie wird innerhalb einer Schwingung gebrochen. Die

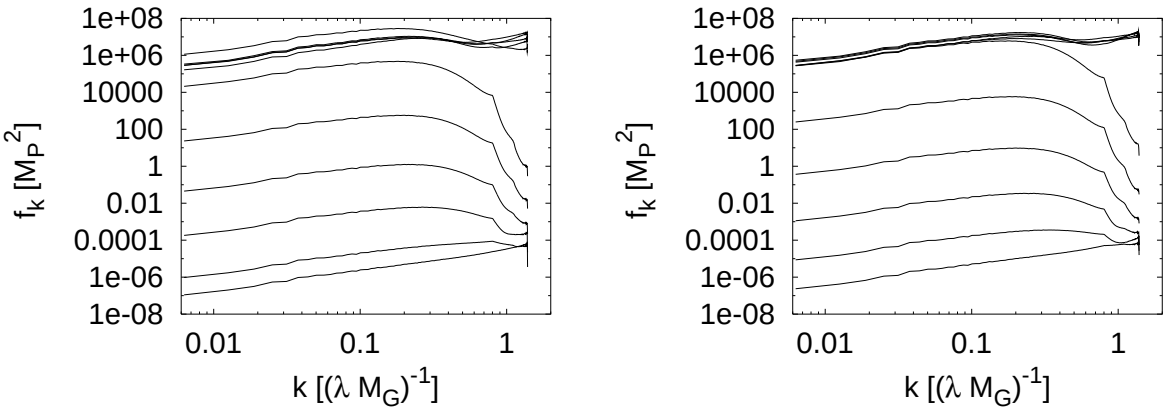

Abbildung 3.6: Hier sieht man das Spektrum des Higgsfeldes während des tachyonischen Preheatings. Im rechten Plot hat wurde Expansion von **LatticeEasy** selbstkonsistent berechnet, im linken vernachlässigt. In diesen beiden Läufen wurde $\tilde{\kappa}$ verwendet. Wieder wachsen die Moden mit der Zeit.

Wahrscheinlichkeitsverteilung weist eine leichte Asymmetrie auf, außerdem findet man immer noch Werte $|\sigma| \ll M_G$, obwohl die Symmetrie gebrochen ist. Darauf wird weiter unten noch eingegangen.

3.4.2 Das Bilden von Domänen

Bei Phasenübergängen kann es zur Entstehung topologischer Defekte kommen. Diese könnten einen erheblichen Teil zur Energiedichte beitragen, weshalb deren Entstehen hier untersucht werden soll. Die topologischen Defekte, die beim Brechen einer Z_2-Symmetrie entstehen, sind die "Domain Walls". Diese Form der Defekte sind zwar durch Beobachtungen zwar ausgeschlossen, deren Studium ist dennoch interessant.

In Abschnitt 3.4.1 wurde bereits die Symmetriebrechung diskutiert. Es wurde gezeigt, daß auch lange nach der Symmetriebrechung noch Punkte auf dem Gitter mit $|\sigma| \ll M_G$ gibt. Dies ist auf die Ausbildung einer Domänenstruktur zurückzuführen. Die Punkte an denen $|\sigma| \ll M_G$ ist sind gerade die angesprochenen Domain Walls. Die Domänen sind in Abb. 3.9 zu sehen.

Hier sieht man auch, wie die Domänen mit der Zeit wachsen und große Domänen kleineren "essen". Betrachtet man Abb. 3.9 so ist ab $t = 325$ zu erkennen, daß die Domänen ihre Form kaum noch verändern. Hier soll die Größe der Domänen ungefähr abgeschätz werden. Die physikalische Länge des Gitters aus diesem Lauf ist $L = 7,69 \cdot 10^{-9}$ GeV^{-1}. Die gebildeten Domänen sind in ihrer Ausdehnung etwa halb so groß. Dies entspricht etwa den Abschätzungen aus Ref. [29], nach dem die Domain Walls etwa so groß wie der inverse Hubble-Parameter $H^{-1} = 3.22 \cdot 10^{-9}$ sein sollten. Dieses Verhalten findet man nur für Gitter, für deren Gesamtlänge gilt:$L > H^{-1}$.

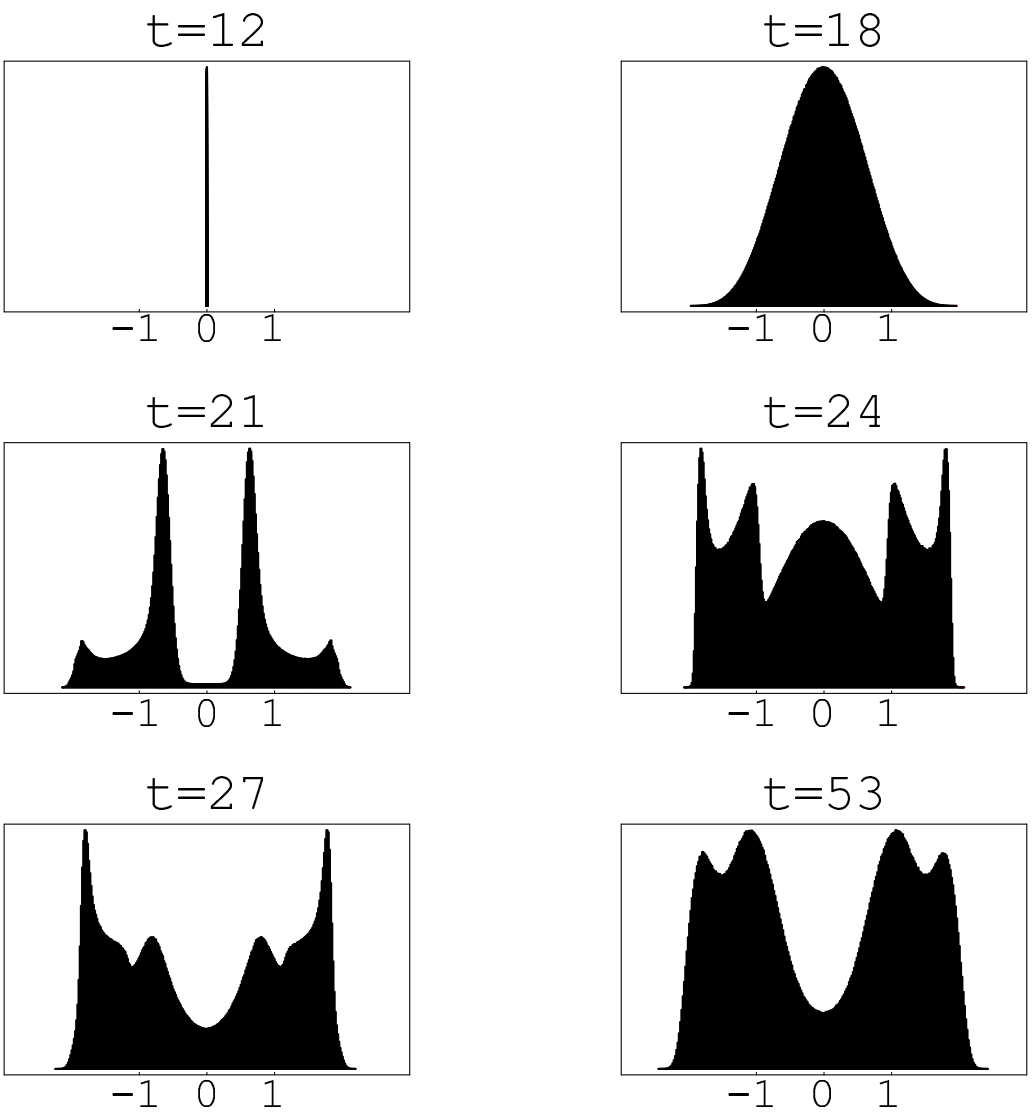

Abbildung 3.7: Hier ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung des Higgsfeldes dargestellt. Die Werte des Feldes sind in Einheiten von M_G gegeben, die Zeit ist in Einheiten von λM_G^{-1} angegeben. Man kann hier sehr gut den Vorgang der Symmetriebrechung beobachten.

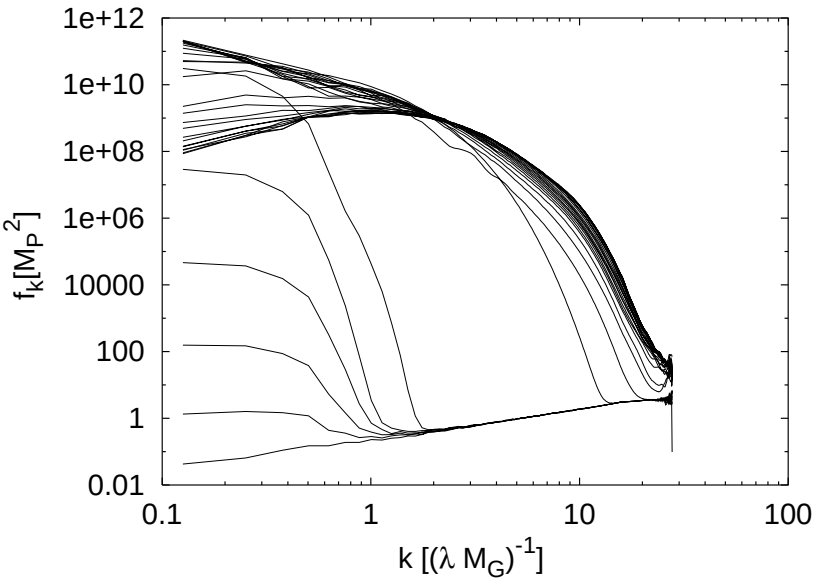

Abbildung 3.8: Dieses Spektrum beinhaltet auch die Moden mit kürzeren Wellenlängen. Man sieht deutlich, wie die Moden mit kleinen k während des tachyonischen Preheatings anwachsen und zum Ende des tachyonischen Preheatings auch die Moden mit größeren k anwachsen. Danach beginnt das Thermalisieren und die Besetzungszahlen für kleinen k sinken, wenn auch nur sehr langsam.

Betrachtet man kleine Gitter mit $L < H^{-1}$, so bleibt nach einer gewissen Zeit nur noch eine Domäne übrig und die Wahrscheinlichkeitsverteilung hat nur noch ein Maximum hat.

Ähnliche Resultate sind auch in Refs. [35,47,48] für andere Hybride Modelle zu finden. Copeland et al benutzen hierfür jedoch ein anderes Programm.

3.5 Das Thermalisieren der Felder

Zuletzt soll noch das Thermalisieren der Felder diskutiert werden. Um das Thermalisieren der Felder beobachten zu können, müssen auch die kurzwelligen Moden berücksichtigt werden, weshalb für diese Läufe ein sehr kleines Gitter mit vielen Gitterpunkten verwendet wird.

Für ein bosonisches Feld im thermischen Gleichgewicht bei einer Temperatur T mit einem chemischen Potential μ erwartet man für das Spektrum der Besetzungszahlen:

$$n_k = \frac{1}{e^{\frac{\omega_k - \mu}{T}} - 1} \tag{3.51}$$

Das Preheating erzeugt aber so große Besetzungszahlen, daß hier ohne weiteres das klas-

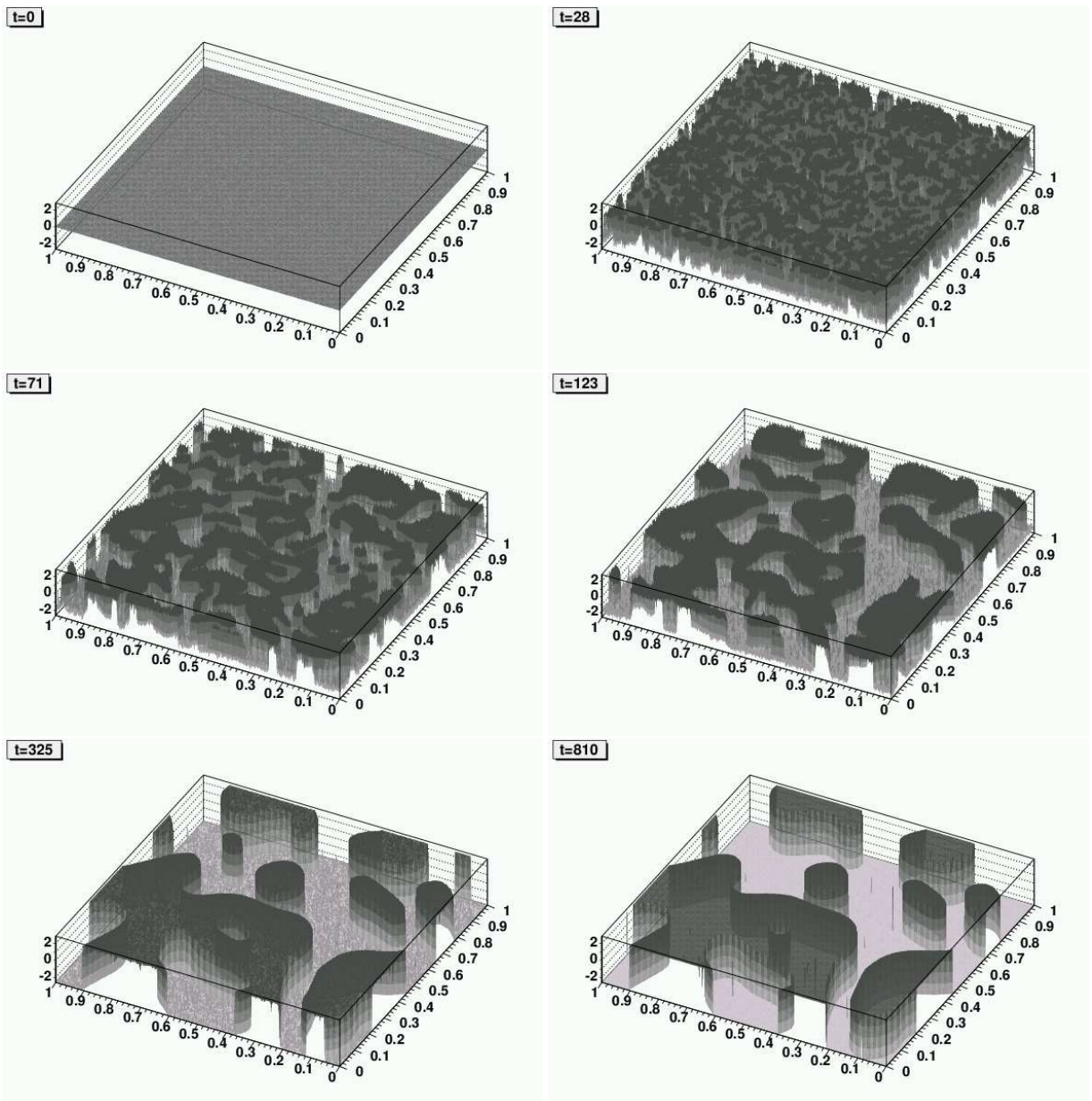

Abbildung 3.9: Hier sieht man das Enstehen der topologischen Defekte. Dargestelllt ist ein zweidimensionales Gitter und auf diesem sowie die Feldwerte des Higgsfeldes in Einheiten von M_G. Man kann auch sehen, wie große Domäne kleinere "fressen" und so die Größe der Domänen mit Zeit zunimmt. Dieser Prozess verlangsamt sich rapide und so ist zwischen $t = 325$ und $t = 810$ kaum noch ein Unterschied auszumachen. In dem betrachteten Lauf war die Gitterlänge $L_{\mathrm{pr}} = 1000$, dies entspricht einer physikalischen Länge von $L = 7,69 \cdot 10^{-9}$ GeV^{-1}. Also ist $L > H^{-1}$.

sische Limit verwendet werden kann:

$$n_k \approx e^{-\frac{\omega_k - \mu}{T}}. \tag{3.52}$$

Das für $k \gg m, \mu$ gerade $n_k \propto \frac{1}{k}$ ist und für $k \ll m, \mu$ ist $n_k \approx$ const. Das Spektrum der n_k ist in Abb. 3.10 dargestellt.

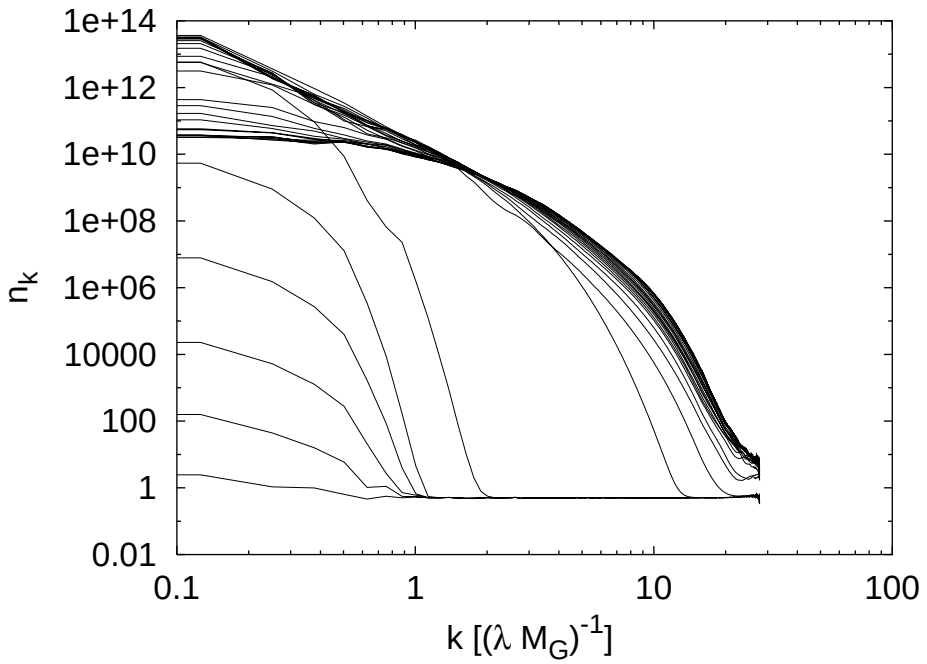

Abbildung 3.10: Das Spektrum der n_k zeigt das gleiche Verhalten wie das Spektrum der f_k. Während des tachyonischen Preheatings wachsen die Moden mit kleinen k. Danach beginnt das Thermalisieren und die Besetzungszahlen der Moden mit kleinen k sinken wieder. Auch hier sieht man, daß das Thermalisieren am Ende des Laufs noch nicht abgeschlossen ist.

Nach Ref. [34] gibt es für die verschiedenen inflationären Modelle einen Satz von Regeln, der die Thermalisierung beschreibt. Diese lauten wie folgt:

1. In vielen, wenn nicht sogar allen brauchbaren Modellen der Inflation gibt es einen Mechanismus, der die Fluktuationen für mindestens ein Feld χ exponentiell verstärkt. Dieser Mechanismus neigt dazu, Moden mit großen Wellenlängen anzuregen, man erhält ein hochinfrarotes Spektrum.

2. Es reicht aus, ein Feld χ stark anzuregen, um daraufhin auch alle weiteren leichten Felder, die mit χ wechselwirken, in einen ähnlich angeregten Zustand zu ziehen.

3. Die angeregten Felder lassen sich in verschiedene Gruppen mit gleichen Charakteristika einteilen (Spektrum, Besetzungszahlen, effektive Temperatur), die von der Kopplungskonstanten abhängen.

4. Sind die Felder einmal verstärkt, so werden sie das thermische Gleichgewicht über Streuprozesse erreichen, die die Energie in Moden mit größerem Impuls umverteilen.

Auch bei dem hier betrachteten Modell sind diese Charakteristika zu beobachten. Etwa ab dem kritischen Punkt sieht man ein exponentielles Anwachsen der Fluktuationen, erst im Higgsfeld σ und dann im Inflatonfeld ϕ. Dies wird durch die Rückreaktion gebremst.

Die Thermalisierung ist in dem hier betrachteten Zeitrahmen noch nicht beendet. Dafür sind die Besetzungszahlen für kleine k auch am Ende unserer Läufe immer noch zu hoch. Durch die Wahl einer größeren Anzahl an Gitterpunkten könnte dieser Prozess sicherlich besser simuliert werden, da mehr Moden mit höheren k zur Verfügung stünden. Allerdings würde dies auch die Rechenzeit massiv erhöhen.

Kapitel 4

Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wurde der Phasenübergang von der inflationären in die strahlungsdominierte Phase untersucht. Dieser Phasenübergang ist deshalb von Interesse, weil er die Anfangsbedingungen für die Standardkosmologie liefert. Die Betrachtungen sind auf ein inflationäres Modell beschränkt, einem $\mathbb{Z}_2$-symmetrischen Modell, das in Ref. [29] eingeführt wurde. Innerhalb des Phasenübergangs wurden verschiedene Aspekte diskutiert.

Zu Beginn des Pasenübergangs wird die $\mathbb{Z}_2$-Symmetrie spontan gebrochen. Hier beginnt das tachyonische Preheating. Dieses wird sehr gut durch die lineare Approximation beschrieben. Während des tachyonischen Preheatings wachsen vor allem die langwelligen Moden des Higgsfeldes exponentiell an und führen so zu einem Zustand, der nicht im thermischen Gleichgewicht ist. Die lineare Approximation ist nur eine kurze Zeit gültig.

Die Ergebnisse aus der linearen Approximation wurden dann mit der Gittersimulation **LatticeEasy** reproduziert. Diese berücksichtigt auch Terme höherer Ordnung, welche das tachyonische Preheating schließlich beenden und das Universum thermalisieren. Wegen auftretender numerischer Instabilitäten in der Simulation mußte das verwendete Modell minimal modifiziert werden. Diese Modifikation sollte qualitativ keinen Unterschied machen. Mit diesem modifizierten Modell konnten noch weitere Aspekte des Phasenübergangs studiert werden.

Zunächst wurde die Symmetriebrechung etwas genauer untersucht. Es zeigte sich, daß die Symmetrie bereits nach einer Schwingung vollständig gebrochen ist. Außerdem wurde die Entstehung topologischer Defekte untersucht, auch wenn die enstandenen "Domain Walls" durch Beobachtungen ausgeschlossen sind. Die durchschnittliche Größe der Defekte entspricht etwa der Hubblelänge, dies entspricht auch den Abschätzungen aus Ref. [29].

Am Ende wurde der letzte Teil des Phasenübergangs studiert, das Thermalisieren der Felder. Hier hat sich gezeigt, daß der Vorgang des Thermalisierens sehr viel mehr Zeit in Anspruch nimmt, als die spontane Symmetriebrechung oder das Formen topolo-

gischer Defekte. Außerdem scheint der durch den Gitterabstand gegebene UV-Cutoff die Thermalisierung künstlich zu verlangsamen.

Das hier studierte Modell ist zwar aufgrund der entstehenden topologischen Defekte durch die Beobachtungen ausgeschlossen, es ist aber nach Ref. [45] ohne weiteres möglich, das Modell auf eine $U(1)$-Symmetrie zu erweitern. Die dort entstehenden topologischen Defekte sind nicht durch Beobachtungen ausgeschlossen, weshalb dies eine interessante Erweiterung des Modells wäre.

Anhang A

Quantenfluktuationen des Inflatonfeldes

In Abschnitt 2.2.2 wurden die Fluktuationen $\delta\phi$ des Inflatonfeldes vernachlässigt. Hier soll das Verhalten eines massiven Skalarfeldes studiert werden. Die hier entwickelten Lösungen werden noch verwendet.

Das massive Skalarfeld χ läßt sich in seinen homogenen Teil und seine Fluktuationen aufteilen:

$$\chi(t,\vec{x}) = \chi_0(t) + \delta\chi(t,\vec{x}). \tag{A.1}$$

Die Fluktuationen in ihre Fourierkomponenten entwickelt lauten:

$$\delta\chi(t,\vec{x}) = \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^{2/3}} e^{i\vec{k}\vec{x}} \delta\chi_k(t). \tag{A.2}$$

Die Bewegungsgleichung für die Fourierkomponenten ist dann:

$$\delta\ddot{\chi}_k + 3H\delta\dot{\phi}_k + \left(\frac{k^2}{a^2} + m_\chi^2\right)\delta\chi_k = 0. \tag{A.3}$$

Hier wird nur der Term erster Ordnung des Potentials

$$V(\chi) = \frac{1}{2} m_\chi^2 \chi^2 \tag{A.4}$$

betrachtet wird.

Während der Inflation wächst der Skalenfaktor exponentiell, d.h. $a \sim e^{Ht}$. Um den Term mit der ersten Ableitung zu eliminieren, ist das Feld zu reskalieren. Die Bewegungsgleichung mit $\sigma = e^{3/2 Ht}\chi$ ergibt:

$$\delta\ddot{\sigma}_k + \left(k^2 e^{-2Ht} + m_\chi - \frac{9}{4}H^2\right)\delta\sigma_k = 0. \tag{A.5}$$

Mit $\nu_\chi = \frac{9}{4} - \frac{m_\chi^2}{H^2}$ ergibt sich:

$$\ddot{\sigma}_k + (k^2 e^{-2Ht} - H^2 \nu_\chi^2) = 0. \tag{A.6}$$

Solange ν_χ reell ist, sind die Lösungen dieser Gleichung gerade durch die Hankelfunktionen gegeben:

$$\sigma_k(t) = C_1(k) H_{\nu_\chi}^{(1)}(z) + C_2(k) H_{\nu_\chi}^{(2)}, \tag{A.7}$$

hier ist $z = \frac{k}{aH}$, $H_{\nu_\chi}^{(1)}(z)$ und $H_{\nu_\chi}^{(2)}$ sind die Hankelfunktionen erster und zweiter Art. Für das ultraviolette Regime ($k \gg aH$) erwarten man gerade die ebene Welle als Lösung.

Anhang B

LatticeEasy

Einen Grossteil der Rechnungen in dieser Diplomarbeit wurden mit Hilfe des Programms **LatticeEasy2.0**, geschrieben von Felder und Tkachev, durchgeführt. Das Programm wurde entwickelt, um das Verhalten skalarer Felder in einem expandierenden Universum auf einem Gitter zu simulieren. **LatticeEasy** ist dabei nicht auf ein spezielles inflationäres Modell beschränkt. Die Programmierer haben Wert darauf gelegt, daß man in **LatticeEasy** jedes beliebige inflationäre Modell einprogrammieren kann. Meine Aufgabe bestand darin, für das Programm eine *model.h* Datei zu schreiben. In diese müssen das betrachtete inflationäre Potential und die ersten beiden Ableitungen nach den auftretenden Feldern geschrieben werden. Vor dem Programmieren muss eine Reskalierung der aufretenden Größen durchgeführt werden. Dies ist erforderlich, damit der Computer mit Größen arbeiten kann, die ungefähr eins sind.

B.1 Reskalierung der Variablen

Das Programm gibt für die Reskalierung eine Standardroutine vor, diese kann benutzt werden, sie läßt sich aber auch fast beliebig variieren. Für die Standardreskalierung sind die zwei Parameter A und β zu wählen. Diese ergeben sich aus dem dominanten Term des Potentials, der lautet in unserem Fall

$$V = \frac{\mathrm{cpl}}{\beta}\phi^{\beta}. \tag{B.1}$$

Für unseren Fall wählen wir $\beta = 4$. Der zweite Parameter wird gerade so gewählt, daß $1/A$ gerade gleich dem Wert des Inflatonfeldes am kritischen Punkt ist. Somit ist

$$A \equiv \frac{1}{\phi_c} = \frac{1}{M_G}. \tag{B.2}$$

Die übrigen Variablen für die Reskalierung ergeben sich hieraus zu:

$$\begin{aligned} B \equiv & \sqrt{\text{cpl}}\phi_c^{-1+\beta/2} = \lambda M_G; \\ r \equiv & \frac{6}{2+\beta} = 1; \quad s \equiv 3\frac{2-\beta}{2+\beta} = -1. \end{aligned} \tag{B.3}$$

Hiernach reskalieren sich jetzt die Felder sowie die Koordinaten wie folgt:

$$f_{\text{pr}} \equiv Aa^r f; \quad \vec{x}_{\text{pr}} \equiv B\vec{x}; \quad \mathrm{d}t_{\text{pr}} \equiv Ba^s \mathrm{d}t \tag{B.4}$$

Hier ist $f = \phi, \sigma$, also die im Modell auftretenden Felder. **LatticeEasy** benutzt ausschließlich die reskalierten Programmfelder f_{pr}.

B.2 Das Programmpotential

Als erstes müssen die Gleichungen des reskalierten Potentials in die *model.h* Datei geschrieben werden. Das reskalierte Potential ist definiert durch:

$$V_{\text{pr}} = \frac{A^2}{B^2} a^{-2s+2r} V. \tag{B.5}$$

Wobei V das physikalische Potential ausgedrückt in Programmfeldern ist. Mit der oben gefundenen Reskalierung läßt sich das Potential für das $\mathbb{Z}_2$-symmetrische Hybrid-Modell schreiben als

$$\begin{aligned} V(\phi,\sigma) &= \lambda^2 \left(M_G^2 - \frac{\sigma^2}{2} \right)^2 + \lambda^2 \phi^2 \sigma^2 + \kappa\phi \\ &= \left(\frac{M_G}{a} \right)^4 \left(\lambda^2 \left(a^2 - \frac{\sigma_{\text{pr}}}{2} \right)^2 + \lambda^2 \sigma_{\text{pr}}^2 \phi_{\text{pr}}^2 + a^3 \kappa' \phi_{\text{pr}} \right). \end{aligned} \tag{B.6}$$

Hier ist

$$f_{\text{pr}} = \frac{a}{M_G} \qquad \text{und} \qquad \kappa' = \frac{\kappa}{\lambda^2 M_G^3}. \tag{B.7}$$

Damit ist dann das Programmpotential

$$V_{\text{pr}} = \left(a^2 - \frac{\sigma_{\text{pr}}}{2} \right)^2 + \lambda^2 \sigma_{\text{pr}}^2 \phi_{\text{pr}}^2 + a^3 \kappa' \phi_{\text{pr}} \tag{B.8}$$

Außerdem müssen auch die ersten beiden Ableitungen des Potentials nach den Feldern in die *model.h* Datei geschrieben werden. Diese lauten:

$$\frac{\partial V_{\rm pr}}{\partial \phi_{\rm pr}} = 2\sigma_{\rm pr}^2 + \kappa' \tag{B.9}$$

$$\frac{\partial V_{\rm pr}}{\partial \sigma_{\rm pr}} = -2a^2\sigma_{\rm pr} + \sigma^3 + 2\sigma_{\rm pr}\phi_{\rm pr} \tag{B.10}$$

$$\frac{\partial^2 V_{\rm pr}}{\partial \phi_{\rm pr}^2} = 2\sigma_{\rm pr}^2 \tag{B.11}$$

$$\frac{\partial^2 V_{\rm pr}}{\partial \sigma_{\rm pr}^2} = -2a^2 + 3\sigma_{\rm pr}^2 + 2\phi_{\rm pr} \tag{B.12}$$

Die zweite Ableitung entspricht gerade der effektiven Masse der Felder.

Außerdem muss auch die Ableitung des Inflatonfeldes nach der Zeit in Programmeinheiten bestimmt werden. Für diese ergibt sich:

$$\phi'_{\rm pr} = \frac{1}{B}a^{-s}\dot{\phi}_{\rm pr} = \frac{A}{B}\left(a^{r-s}\dot{\phi} + ra^{r-s-1}\dot{a}\phi\right). \tag{B.13}$$

Für unser Modell ist das

$$\dot{\phi}_{\rm pr} = \frac{a^2}{\lambda M_G^2}\left(\dot{\phi} + \frac{\dot{a}}{a}\phi\right). \tag{B.14}$$

B.3 Komponenten von LatticeEasy

Das Programmpaket, das man frei aus dem Internet herunterladen kann, besteht aus mehreren Dateien. Um das Programm zum Laufen zu bekommen, reicht es, die beiden Dateien *parameters.h* und *model.h* an das betrachtete Modell anzupassen.

Eine sehr ausführliche Beschreibung der einzelnen Komponenten findet man in Ref [46].

B.4 Die Staggered-Leapfrog-Methode

LatticeEasy benutzt die sogenannte Staggered-Leapfrog-Methode, um das System von Differentialgleichungen zu lösen. Um eine Gleichung von zweiter Ordnung in der Zeit zu lösen, muß die erste und zweite Ableitung nach der Zeit bei jedem Schritt gespeichert werden, um daraus die zweite Ableitung zu berechnen. Die Staggered-Leapfrog-Methode speichert also die Variablen (Werte der Felder) zu verschiedenen Zeiten und berechnet daraus die Werte zu späteren Zeiten. Benutzt das Programm einen Zeitsprung dt und sind die Werte der Felder für eine Zeit t bekannt, so sind auch die Ableitungen der Felder zur Zeit $t - {\rm d}t/2$ bekannt. Mit den Werten der Felder wird dann die zweite Ableitung $\ddot{f}$

für die Zeit t berechnet und diese wird benutzt, um $\dot{f}$ für $t + \mathrm{d}t/2$ zu berechnen. Dieser Wert wird dann benutzt f für $t + \mathrm{d}t$ zu berechnen, was den Prozess wieder von vorn startet. Schematisch sieht dies wie folgt aus:

$$f(t) = f(t - \mathrm{d}t) + \mathrm{d}t\ \dot{f}(t - \mathrm{d}t/2) \tag{B.15}$$

$$\dot{f}(t + \mathrm{d}t/2) = \dot{f}(t - \mathrm{d}t/2) + \mathrm{d}t\ddot{f}[f(t)] \tag{B.16}$$

$$f(t + \mathrm{d}t) = f(t) + \mathrm{d}t\ \dot{f}(t + \mathrm{d}t/2) \tag{B.17}$$

Diese Methode hat eine höhere Stabilität als die herkömmliche Euler-Methode, da sie mit jedem Schritt f bzw. $\dot{f}$ in Abhängigkeit von ihren Ableitungen zu einem Zeitpunkt *in der Mitte* zwischen den Schritten bestimmt. Die Methode geht jedoch auch davon aus, daß man $\ddot{f}$ in Abhängigkeit von f bestimmen kann. Aus diesem Grund ist die Reskalierung so gewählt worden, daß sie die erste Ableitung in der Bewegungsgleichung eliminiert.

Da man dem Programm Anfangsbedingungen für synchrone Zeiten übergibt, sind diese noch zu desynchronisieren. Hierzu werden die Anfangsbedingungen für $t = 0$ gesetzt. Dann sind die Werte der Felder mit einem Euler-Schritt der Größe $\mathrm{d}t/2$ zu berechnen, um danach mit einem Leapfrog fortzufahren. Alle weiteren Berechnungen werden dann mit der Staggered-Leapfrog-Methode gemacht.

Speichert das Programm die verschiedenen möglichen Daten, so müssen diese natürlich wieder synchronisiert werden. Hierzu wird die *save()* Routine immer dann aufgerufen, wenn die Werte der Felder den Ableitungen voraus sind. In diesem Fall setzt die Routine die Felder einen halben Schritt zurück, berechnet alle auszugebenden Daten und setzt das Feld dann wieder einen halben Schritt vorwärts. Die einzige Funktion, die diese Synchronisierung nicht verwendet, ist die *checkpoint* Funktion. Diese speichert die Werte der Felder und deren Ableitungen an den einzelnen Gitterpunkten. Dieses Bild der Gitterpunkte bleibt desynchronisiert, da man mit diesem einen abgebrochenen Lauf des Programms wieder aufnehmen kann oder einen Lauf fortsetzen kann.

B.5 Die verschiedenen Output Variablen

Es gibt eine große Anzahl von Möglichkeiten, das Verhalten der skalaren Felder darzustellen, und **LatticeEasy** ist in der Lage, eine Vielzahl von Größen zu berechnen. Hierbei sind die verschiedenen Outputs unterschiedlich gut dazu geeignet, die verschiedenen Eigenschaften eines Modells zu illustrieren. Es gibt z.B. immer die Möglichkeit, die reinen Daten darzustellen, d.h. die Werte der Felder $f(t, \vec{x})$ auf den Gitterpunkten. Dies ist meist nicht besonders anschaulich. Gleichwertig hierzu sind die Werte der Fouriertransformierten $f_k(t)$, insbesondere das Spektrum, das sich hieraus ergibt. **LatticeEasy** hat eine eingebaute Routine, die die Fouriertransformierte berechnet.

Eine weitere interressante Größe ist die mitbewegte Teilchenzahldichte n_f des Feldes f. Diese lautet

$$n_f(t) \equiv \frac{1}{(2\pi)^3} \int \mathrm{d}^3k \; n_k(t). \tag{B.18}$$

Hier sind die

$$n_k \equiv \frac{1}{2\omega_k} |\dot{f}_k|^2 + \frac{\omega_k}{2} |f_k|^2 \tag{B.19}$$

die Besetzungszahlen in den verschieden Moden k. Weiter sind

$$\omega_k \equiv \sqrt{k^2 + m^2_{f\,\mathrm{eff}}} \tag{B.20}$$

$$m^2_{f\,\mathrm{eff}} \equiv \frac{\partial^2 V}{\partial f^2}. \tag{B.21}$$

Die zweiten Ableitungen des Potentials nach den Feldern wurde bereits weiter oben gegeben.

Literaturverzeichnis

[1] E. W. Kolb und M. S. Turner, 1990, "The early Universe", Addison-Wesley, Redwood City, California USA.

[2] J. A. Peacock, 1999, "Cosmological Physics", Cambridge University Press, Cambridge UK.

[3] C. W. Misner, K. S. Thorne und J. A. Wheeler, 1973, "Gravitation", Freeman, New York USA.

[4] J. Garcia-Bellido, "Astrophysics and cosmology," arXiv:hep-ph/0004188.

[5] A. R. Liddle, D. H. Lyth, 2000, "Cosmological Inflation and Large-Scale Structure", Cambridge University Press, Cambridge UK.

[6] A. Einstein, 1917, Akad. Wiss. Phys.**142** (4)

[7] A. A. Friedmann, 1922, Z. Phys. **10** 377.

[8] E. P. Hubble, 1929, Publ Nat. Acad. Sci **15** 168.

[9] G. Gamow, 1946, Phys. Rev. **70** 572.

[10] A. A. Penzias, and R. W. Wilson, 1965, Astrophys. J. **142** 419.

[11] J. Ellis, D. Nanopoulos, and M. Quirós, 1986, Phys. Lett. B **174**, 176.

[12] R. H. Dicke, P. J. E. Peebles, 1979, in General Relativity: An Einstein Centenary Survey 504, Cambridge University Press, Cambridge UK.

[13] A. H. Guth, "The Inflationary Universe: A Possible Solution To The Horizon And Flatness Problems," Phys. Rev. D **23** (1981) 347.

[14] A. D. Linde, "A New Inflationary Universe Scenario: A Possible Solution Of The Horizon, Flatness, Homogeneity, Isotropy And Primordial Monopole Problems," Phys. Lett. B **108** (1982) 389.

[15] A. H. Guth, and S.-Y. Pi, "Fluctuations In The New Inflationary Universe," Phys. Rev. Lett. **49**,1110 (1982).

[16] A. Albrecht, und P. J. Steinhardt, 1982, Phys. Rev. Lett. **48** 1220

[17] A. D. Linde, "Chaotic Inflation," Phys. Lett. B **129** (1983) 177.

[18] Riotto, A., 2002, "Inflation and the theory of cosmological perturbations," [arXiv:hep-ph/0210162].

[19] L. Page, 2003 "The Wilkinson Microwave Anisotropy Probe," [arXiv:astro-ph/0306381].

[20] G. Hinshaw *et al.*, 2003, "First Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Data Processing Methods and Systematic Errors Limits," arXiv:astro-ph/0302222.

[21] D. N. Spergel *et al.*, 2003, "First Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Determination of Cosmological Parameters," Astrophys. J. Suppl. **148** (2003) 175 [arXiv:astro-ph/0302209].

[22] J. Polonyi, "Generalization Of The Massive Scalar Multiplet Coupling To The Supergravity"

[23] M. Kawasaki, K. Kohri and T. Moroi, 2000, "Radiative decay of a massive particle and the non-thermal process in primordial nucleosynthesis," Phys. Rev. D **63** (2001) 103502 [arXiv:hep-ph/0012279].

[24] A. R. Liddle, "Acceleration of the universe," New Astron. Rev. **45** (2001) 235 [arXiv:astro-ph/0009491].

[25] A. D. Linde, "Axions in inflationary cosmology," Phys. Lett. B **259** (1991) 38.

[26] Wess, J., Bagger, J., "Supersymmetry and Supergravity", princeton University Press, 1992.

[27] I. L. Buchbinder und S. M. Kuzenko, "Ideas and Methods in Supersymmetrie and Supergravity: Or a Walk through Superspace", Istitute of Physics and Publishing, Bristol (1998)

[28] J. Louis, I. Brunner and S. J. Huber, "The supersymmetric standard model," arXiv:hep-ph/9811341.

[29] T. Asaka, W. Buchmuller and L. Covi, "False vacuum decay after inflation," Phys. Lett. B **510** (2001) 271 [arXiv:hep-ph/0104037].

[30] W. Buchmuller, L. Covi and D. Delepine, "Inflation and supersymmetry breaking," Phys. Lett. B **491** (2000) 183 [arXiv:hep-ph/0006168].

[31] L. O'Raifeartaigh, "Spontaneous Symmetry Breaking For Chiral Scalar Superfields," Nucl. Phys. B **96** (1975) 331.

[32] Abramowitz, M., Stegun, I.A., "Handbook of Mathematical Functions", National Bureau of Standards, Washington, 1964

[33] S. Y. Khlebnikov and I. I. Tkachev, "Classical decay of inflaton," Phys. Rev. Lett. **77** (1996) 219 [arXiv:hep-ph/9603378].

[34] G. N. Felder and L. Kofman, "The development of equilibrium after preheating," Phys. Rev. D **63** (2001) 103503 [arXiv:hep-ph/0011160].

[35] G. N. Felder, L. Kofman and A. D. Linde, "Tachyonic instability and dynamics of spontaneous symmetry breaking," Phys. Rev. D **64** (2001) 123517 [arXiv:hep-th/0106179].

[36] G. N. Felder, J. Garcia-Bellido, P. B. Greene, L. Kofman, A. D. Linde and I. Tkachev, "Dynamics of symmetry breaking and tachyonic preheating," Phys. Rev. Lett. **87** (2001) 011601 [arXiv:hep-ph/0012142].

[37] P. B. Greene, L. Kofman, A. D. Linde and A. A. Starobinsky, "Structure of resonance in preheating after inflation," Phys. Rev. D **56** (1997) 6175 [arXiv:hep-ph/9705347].

[38] A. D. Dolgov and A. D. Linde, "Baryon Asymmetry In Inflationary Universe," Phys. Lett. B **116** (1982) 329.

[39] L. F. Abbott, E. Farhi and M. B. Wise, "Particle Production In The New Inflationary Cosmology," Phys. Lett. B **117** (1982) 29.

[40] J. H. Traschen and R. H. Brandenberger, "Particle Production During Out-Of-Equilibrium Phase Transitions," Phys. Rev. D **42** (1990) 2491.

[41] L. Kofman, A. D. Linde and A. A. Starobinsky, "Reheating after inflation," Phys. Rev. Lett. **73** (1994) 3195 [arXiv:hep-th/9405187].

[42] L. Kofman, A. D. Linde and A. A. Starobinsky, "Non-Thermal Phase Transitions After Inflation," Phys. Rev. Lett. **76** (1996) 1011 [arXiv:hep-th/9510119].

[43] I. I. Tkachev, "Phase Transitions at Preheating," Phys. Lett. B **376** (1996) 35 [arXiv:hep-th/9510146].

[44] I. Tkachev, S. Khlebnikov, L. Kofman and A. D. Linde, "Cosmic strings from preheating," Phys. Lett. B **440** (1998) 262 [arXiv:hep-ph/9805209].

[45] J. Hamann, "Hybrid Inflation with a Local Gauge Symmetrie", Diplomarbeit, Hamburg 2004

[46] G. N. Felder and I. Tkachev, "LATTICEEASY: A program for lattice simulations of scalar fields in an expanding universe,", http://physics.edu/gfelder/latticeeasy [arXiv:hep-ph/0011159]

[47] E. J. Copeland, S. Pascoli and A. Rajantie, "Dynamics of tachyonic preheating after hybrid inflation," Phys. Rev. D **65** (2002) 103517 [arXiv:hep-ph/0202031].

[48] J. Garcia-Bellido, M. Garcia Perez and A. Gonzalez-Arroyo, "Symmetry breaking and false vacuum decay after hybrid inflation," Phys. Rev. D **67** (2003) 103501 [arXiv:hep-ph/0208228].

Danksagung

Für die sehr interessante Aufgabenstellung möchte ich mich bei Herrn Buchmüller recht herzlich bedanken. Herrn Louis danke ich für seine Betreuung von Seiten des Fachbereichs.

Ganz besonderes herzlich möchte ich mich bei Laura für ihre stets engagierte und geduldige Betreuung bedanken, die sie mir bis zum Schluss hat zukommen lassen.

Jörgen danke ich dafür, daß er in den letzten Monaten den Haushalt alleine geschmissen hat. Toffi für die unzähligen Male Korrekturlesens. Nicht vergessen möchte ich meinen Jan, Du hast mindestens einen gut bei mir.

Außerdem möchte ich der Theorie-Gruppe danken, die mit der guten Arbeitsatmosphäre stets dafür gesorgt hat, daß ich gern “zur Arbeit” gegangen bin.

Meinen Eltern danke ich für Ihre Liebe.

Veel’n Dank.

Erklärung gemäß Diplomprüfungsordnung

Hiermit versichere ich, diese Arbeit selbständig angefertigt zu haben. Die wesentlichen Quellen und Hilfsmittel sind angegeben. Ich erkläre mein Einverständnis mit der Auslage meiner Diplomarbeit in der Bibliothek des Fachbereichs Physik der Universität Hamburg.

Hamburg, den 30.1.2004

Benjamin Janutta