Thermische Observablen gekoppelter Felder im Casimir-Effekt

Thermal Observables of Coupled Fields in the Casimir Effect

Henning Kühn
II. Institut für Theoretische Physik
Universität Hamburg

Diplomarbeit

6. Januar 2005

Gutachter der Diplomarbeit

Professor Dr. Klaus Fredenhagen
Professor Dr. Gerhard Mack

Erklärung

Ich versichere, dass ich diese Arbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe. Ich gestatte die Veröffentlichung meiner Arbeit.

Hamburg, den 6. Januar 2005

Abstract

In quantum field theoretical states in thermal equilibrium (KMS states) there are some observables, constructed from the field operators, which correspond to the global temperature of the state. But not much is known about the thermal observables of states, which are only locally in thermal equilibrium or are defined on a space that deviates from Minkowski space. In this work we will primarily look at the renormalized square of the field operator of a scalar quantum field. This observable will be analyzed under boundary conditions of the Casimir effect, like the restriction to one half-space or to the space between two parallel plates. Furthermore we will study two interacting scalar fields which have different initial temperatures and look at the change of the thermal observables due to the interaction. The result will be interpreted as some kind of energy exchange.

Überblick

In quantenfeldtheoretischen Zuständen im thermischen Gleichgewicht (KMS-Zustände) existieren aus den Feldoperatoren konstruierte Observablen, die mit der globalen Temperatur des Zustandes zusammenhängen. Es ist jedoch nur wenig über die thermischen Observablen von Zuständen bekannt, die sich nur lokal im thermischen Gleichgewicht befinden oder auf einem Raum definiert sind, der vom Minkowskiraum abweicht. In dieser Arbeit werden wir primär das renormierte Quadrat des Feldoperators eines skalaren Quantenfeldes betrachten. Diese Observable wird unter Randbedingungen des Casimir-Effektes, wie der Beschränkung auf einen Halbraum oder den Bereich zwischen zwei parallelen Platten, untersucht werden. Weiterhin werden wir zwei gekoppelte Skalarfelder studieren, welche unterschiedliche Anfangstemperaturen haben, und die Änderung der thermischen Observablen aufgrund der Kopplung betrachten. Das Resultat werden wir als eine Art Energieaustausch interpretieren.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung **8**

1 Grundbegriffe **11**
1.1 Thermische Observablen 11
1.2 Der Casimir-Effekt 12

2 Temperaturobservable eines skalaren Feldes **13**
2.1 Massives Feld 14
2.1.1 Kleine Masse 14
2.1.2 Große Masse 15

3 Der Casimir-Effekt **17**
3.1 Vakuumzustände mit Randbedingungen 17
3.1.1 Beschränkung auf einen Halbraum 17
3.1.2 Beschränkung auf ein Intervall 19
3.2 KMS-Zustände mit Randbedingungen 23
3.2.1 Beschränkung auf einen Halbraum 23
3.2.2 Beschränkung auf ein Intervall 24
3.3 Vom Ort unabhängige thermische Observable 24
3.3.1 Beschränkung auf einen Halbraum 24
3.3.2 Beschränkung auf ein Intervall 26

4 Kopplung zweier massiver Skalarfelder **29**
4.1 Zeitentwicklung eines Feldes 30
4.2 Berechnung von ϕ^2 im Grundzustand 32
4.2.1 Verhalten für kleine Zeiten 35
4.2.2 Verhalten für große Zeiten 36
4.3 Berechnung von ϕ^2 in einem KMS-Zustand 38
4.3.1 Verhalten für kleine Zeiten 43
4.3.2 Verhalten für große Zeiten 45
4.3.3 Interpretation des Langzeitverhaltens 47

5 Kopplung zweier masseloser Skalarfelder **49**
5.1 Berechnung von ϕ^2 im Grundzustand 50
5.1.1 Verhalten für kleine Zeiten 53
5.1.2 Verhalten für große Zeiten 53

5.2 Berechnung von ϕ^2 in einem KMS-Zustand 54
5.2.1 Verhalten für kleine Zeiten 56
5.2.2 Verhalten für große Zeiten 57
5.2.3 Interpretation des Langzeitverhaltens 60

6 Kopplung eines Feldes unter Randbedingungen 61

7 Zusammenfassung und Ausblick 65
7.1 Zusammenfassung 65
7.2 Ausblick 66

Abbildungsverzeichnis

2.1 $\omega_\beta(:\phi^2:)$ als Funktion von m und T 16

3.1 $\omega(:\phi^2:)$ in einem Intervall (Dirichlet-Randbedingungen) 22
3.2 $\omega(:\phi^2:)$ in einem Intervall (Neumann-Randbedingungen) 23

4.1 Verschiebung des Integrationsweges in der komplexen Ebene 37

5.1 $\int_1^\infty \frac{d\omega'}{4\omega'} \left(e^{-\frac{1}{4}\lambda^2(\omega'^2-1)} - e^{-\frac{1}{4}\lambda^2(\omega'^2+1)}\right)$ 52

Einleitung

Das Ziel dieser Arbeit ist die Untersuchung von thermischen Observablen in KMS-Zuständen. Buchholz, Ojima und Roos haben in ihrer Arbeit [2] nach einer Methode gesucht, die lokale Temperatur eines Quantenfeldes, welches nur lokal im thermischen Gleichgewicht ist, zu definieren. Ein Beispiel für ein solches System, welches sich nicht im globalen thermischen Gleichgewicht befindet, ist ein Zustand, der nur lokal eine definierte Temperatur hat, die jedoch vom Ort abhängig ist. Die Temperatur wird in diesen Zuständen definiert, indem Erwartungswerte gewisser Observablen, die aus den Feldoperatoren konstruiert werden, mit den entsprechenden Größen eines Zustandes im globalen thermischen Gleichgewicht verglichen werden. Das Quadrat des Feldoperators hat sich hierbei als eine nützliche Größe erwiesen. Über die thermodynamischen Eigenschaften von Quantenfeldern, die sich nicht im globalen Gleichgewicht befinden, oder auf einem Raum definiert sind, dessen Geometrie von der des Minkowskiraumes abweicht, ist noch wenig bekannt. Letztere werden in eindeutiger Weise renormiert, indem die Felder mit denen auf dem Minkowskiraum verglichen werden. In den folgenden Kapiteln werden lokale thermische Observablen eines skalaren Quantenfeldes in verschiedenen Systemen betrachtet, unter anderem in solchen Raumgeometrien, die sich von der Geometrie des Minkowskiraumes unterscheiden. Des Weiteren wird eine Kopplung zwischen zwei Quantenfeldern eingeführt, um zu bestimmen, wie die Temperaturobservablen sich verhalten, wenn zwei Systeme in Kontakt gebracht werden.

Übersicht

In Kapitel 1 werden wichtige Grundbegriffe erläutert.
In Kapitel 2 wird das Verhalten der Größe $\omega_\beta(:\phi^2:)$ in Abhängigkeit der Masse berechnet. Für kleine Massen wird eine Taylorentwicklung in der Masse durchgeführt, für große Massen wird die Näherung $m >> T$ durchgeführt, um die Integrale zu vereinfachen und zu lösen. Es stellt sich heraus, dass die Temperaturobservable mit wachsender Masse monoton fällt.
In Kapitel 3 wird untersucht, wie sich Randbedingungen auf die Feldobservablen auswirken. Zuerst wird ϕ^2 im Grundzustand unter verschiedenen Randbedingungen mit der entsprechenden Größe im Fall des freien Feldes verglichen. Danach wird ϕ^2 in einem KMS-Zustand mit verschiedenen Randbedingungen berechnet. Am Schluss von Kapitel 3 wird versucht, eine thermische Observable zu finden, die von den Randbedingungen unabhängig ist.
Kapitel 4 und 5 beschäftigen sich mit der Zeitentwicklung zweier gekoppelter Skalarfelder mit unterschiedlicher Temperatur. Das Ziel hierbei ist, herauszufinden, wie sich die

thermischen Observablen verhalten, wenn nicht länger nur ein einziges abgeschlossenes System betrachtet wird, sondern zwei Felder, welche gekoppelt sind. Das wird durch einen Kopplungsterm in der Klein-Gordon-Gleichung erreicht, der linear in den Feldern ist. Da diese Gleichung somit eine lineare Gleichung bleibt, ist es möglich, durch eine geeignete Linearkombination der Felder die Gleichungen zu entkoppeln und das Problem so auf die Zeitentwicklung von freien Skalarfeldern zurückzuführen. Es wird jeweils das Kurz- und das Langzeitverhalten bestimmt. Aufgrund der komplizierten Integrale ist es nicht möglich, einen geschlossenen Ausdruck anzugeben. Es wird unter anderem die Näherung kleiner Kopplung und kleiner Temperaturdifferenz zwischen beiden Feldern gemacht. Als Ergebnis erhalten wir, dass im Limes $t \to \infty$ die Temperaturen beider Felder sich angleichen. Eis solches Ergebnis ist auch in der klassischen Physik schwer theoretisch herzuleiten, es stimmt jedoch mit experimentellen Resultaten und der täglichen Erfahrung überein.
In Kapitel 6 werden schließlich die Resultate aus Kapitel 3 und 4 kombiniert: Es wird untersucht, inwiefern ein auf einen Halbraum beschränktes Skalarfeld ein unbeschränktes Feld, an das es gekoppelt ist, beeinflusst. Dabei stellt sich heraus, dass das beschränkte Feld, welches einen negativen Erwartungswert des Quadrates des Feldoperators hat, das andere Feld in der Art beeinflusst, dass dieses einen kleineren Erwartungwert für ϕ^2 als im Fall von zwei unbeschränkten Feldern bekommt. Das lässt die Schlussfolgerung zu, dass die unterschiedlichen Observablen beider Felder sich aufgrund der Kopplung einander annähern.

Kapitel 1

Grundbegriffe

1.1 Thermische Observablen

Neben dem Vakuumzustand gibt es in der Quantentheorie noch andere Zustände im thermischen Gleichgewicht. Im endlich-dimensionalen Fall der Quantenmechanik kann ein Temperaturzustand mit Hilfe der Dichtematrix ρ_β beschrieben werden:

$$\rho_\beta := \frac{e^{-\beta H}}{\mathrm{Tr}\,(e^{-\beta H})} \tag{1.1}$$

Die Dichtematrix ist eine operatorwertige Funktion des Hamiltonoperators H. $\beta = \frac{1}{T}$ ist die inverse Temperatur des Zustandes. Anders als in der Quantenmechanik können quantenfeldtheoretische Temperaturzustände nicht durch eine Dichtematrix beschrieben werden, da das Spektrum des Hamiltonoperators kontinuierlich ist. Diese Kubo-Martin-Schwinger (KMS)-Zustände beinhalten die Eigenschaften des Gibbs-Ensembles im Fall endlicher und unendlicher Quantensysteme. Sie sind dadurch ausgezeichnet, dass sie invariant unter Zeittranslationen sind. Das lineare Zustandsfunktional

$$\omega_\beta(A\alpha_t(B)) \tag{1.2}$$

muss stetig in der Zeit t sein. α_t ist die Zeittranslation und β die inverse Temperatur. A, B sind Elemente der Algebra der Observablen $\mathfrak{A}$. Diese Algebra $\mathfrak{A}$ ist unital, assoziativ und besitzt eine Sternoperation mit folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned} (A+\lambda B)^* &= A^* + \bar{\lambda} B^* \\ (AB)^* &= B^* A^* \\ A^{**} &= A \end{aligned} \tag{1.3}$$

Das Zustandsfunktional ω_β ist eine lineare Abbildung von der Algebra in die komplexen Zahlen: $\omega_\beta : \mathfrak{A} \to \mathbb{C}$ mit den folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned} \omega_\beta(A^*A) &\geq 0 \text{ (Positivität)} \\ \omega_\beta(1) &= 1 \text{ (Normiertheit)} \end{aligned} \tag{1.4}$$

Außerdem muss das Zustandsfunktional ω_β für ein durch einen positiven zeitartigen Einheitsvektor $e \in V_+$ definiertes Inertialsystem die KMS-Bedingung erfüllen: Für jedes Paar

von Operatoren $A, B \in \mathfrak{A}$ gibt es eine in $\{z \in \mathbb{C} : 0 < \Im(z) < \beta\}$ analytische und an den Rändern stetige Funktion h, so dass für $t \in \mathbb{R}$ gilt:

$$h(t) = \omega_\beta(B\alpha_{te}(A)),\ h(t + i\beta) = \omega_\beta(\alpha_{te}(A)B) \tag{1.5}$$

Es gibt Operatoren, deren Erwartungswert ein Maß für die Temperatur des Systems ist. In dieser Arbeit wird primär das Quadrat des Feldoperators ϕ untersucht. Die Größe $\omega_\beta(\phi^2) := \lim_{y\to x} \langle\beta|\, \phi(x)\phi(y)\, |\beta\rangle$ divergiert zwar, jedoch ist der Erwartungswert des Wickquadrates $\omega_\beta(:\phi^2:) := \lim_{y\to x}(\langle\beta|\, \phi(x)\phi(y)\, |\beta\rangle - \langle\Omega|\, \phi(x)\phi(y)\, |\Omega\rangle)$ endlich und hat im Fall eines ungekoppelten masselosen Skalarfeldes den Wert $\frac{1}{12\beta^2}$. In dieser Arbeit wird $\omega_\beta(:\phi^2:)$ für komplexere Fälle berechnet. Anders als im masselosen ungekoppelten Fall ohne Randbedingungen sind die resultierenden Integrale so kompliziert, dass sie sich oft nicht geschlossen lösen lassen, so dass häufig Näherungsmethoden zum Einsatz kommen.

1.2 Der Casimir-Effekt

Der Casimir-Effekt ist ein rein quantenfeldtheoretischer Effekt und ist eine Folge der normalerweise unbeobachtbaren Vakuumsenergie. Obwohl bei Abwesenheit von elektrischen Ladungen der Erwartungswert des elektrischen und magnetischen Feldes verschwindet ($\langle E\rangle = \langle B\rangle = 0$), ist der Erwartungswert des Quadrates der Felder nicht Null ($\langle E^2\rangle = \langle B^2\rangle \neq 0$). Der Erwartungswert der Energie $H = \frac{1}{2}\int d^3r(E^2(r) + B^2(r))$ ergibt deshalb auch einen von Null verschiedenen Wert. Geometrische Randbedingungen, z.B. die Einschränkung auf den Raum zwischen zwei parallelen Kondensatorplatten, stellen Bedingungen an die möglichen Wellenfunktionen. Es sind nicht mehr alle Moden möglich, da der Erwartungswert des Quantenfeldes an den Rändern verschwinden muss. Die Vakuumsenergie ist formal unendlich, jedoch ist es möglich, diese Größe in eindeutiger Weise zu renormieren, indem man sie mit der Vakuumsenergie im freien Fall vergleicht. Dieser Energieunterschied bewirkt Kräfte. Ob diese Kräfte anziehend oder abstoßend sind, hängt stark von der Geometrie und der Art der Randbedingungen ab. Um die Kräfte zwischen zwei ungeladenen Kondensatorplatten zu bestimmen, verwendet man aufgrund der Maxwellgleichungen Dirichlet-Randbedingungen (das Feld verschwindet an den Rändern) für die Tangentialkomponenten des elektrischen Feldes und die Normalkomponenten des magnetischen Feldes. Die erste Ableitung der Normalkomponenten des elektrischen Feldes und der Tangentialkomponenten des magnetischen Feldes verschwinden (Neumann-Randbedingungen). Mit diesen Bedingungen erhält man eine anziehende Kraft zwischen den Platten, der Druck beträgt (mit dem Plattenabstand a):

$$p = -\frac{\pi^2}{240a^4} \tag{1.6}$$

Der Casimir-Effekt wurde 1948 von Hendrik Casimir theoretisch vorhergesagt und 1958 von Marcus Spaarnay experimentell bestätigt. Neuere Untersuchungen (1997) von Steve Lamoreaux zeigen, dass das experimentelle Resultat bis auf 5% mit den theoretischen Vorhersagen übereinstimmt.

Kapitel 2

Temperaturobservable eines skalaren Feldes endlicher Temperatur im Minkowskiraum

In diesem Kapitel soll das Quadrat des Feldoperators eines skalaren Quantenfeldes in einem KMS-Zustand ausgewertet werden. Der renormierte Erwartungwert dieser Größe ist ein Maß für die Temperatur des Zustandes. Die Zweipunktfunktion eines Skalarfeldes mit der Temperatur Null lautet (mit $p_0 = \omega(p)$):

$$\Delta_+(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3p}{2\omega(p)} e^{-ip_\mu(x^\mu - y^\mu)} \tag{2.1}$$

Für ein Skalarfeld mit endlicher Temperatur $T = \frac{1}{\beta}$ lautet die Zweipunktfunktion:

$$\Delta_\beta(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3p}{2\omega(p)} \left(\frac{e^{-ip_\mu(x^\mu - y^\mu)}}{1-e^{-\beta\omega(p)}} + \frac{e^{ip_\mu(x^\mu - y^\mu)}}{e^{\beta\omega(p)}-1} \right) \tag{2.2}$$

Im Grenzwert $y \to x$ divergieren beide Funktionen. Wir renormieren deshalb, indem wir die Differenz bilden:

$$\begin{aligned} \Delta_\beta(x-y) - \Delta_+(x-y) &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3p}{2\omega(p)} \left(\frac{e^{-ip_\mu(x^\mu - y^\mu)}}{1-e^{-\beta\omega(p)}} + \frac{e^{ip_\mu(x^\mu - y^\mu)}}{e^{\beta\omega(p)}-1} - e^{-ip_\mu(x^\mu - y^\mu)} \right) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3p}{2\omega(p)} \left(\frac{1}{e^{\beta\omega(p)}-1} \right) \left(e^{ip_\mu(x^\mu - y^\mu)} + e^{-ip_\mu(x^\mu - y^\mu)} \right) \end{aligned} \tag{2.3}$$

Die Exponentialdarstellung des Cosinus wird ausgenutzt:

$$\Delta_\beta(x-y) - \Delta_+(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3p}{\omega(p)} \frac{\cos(p_\mu(x^\mu - y^\mu))}{e^{\beta\omega(p)}-1} \tag{2.4}$$

Grenzwertbildung und Einführung von Kugelkoordinaten ergeben:

$$\lim_{y\to x}(\Delta_\beta(x-y) - \Delta_+(x-y)) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3p}{\omega(p)} \frac{1}{e^{\beta\omega(p)}-1} = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^\infty \frac{dp}{\omega(p)} \frac{4\pi p^2}{e^{\beta\omega(p)}-1} \tag{2.5}$$

Im Fall eines masselosen Feldes gilt $\omega(p) = p$, damit erhalten wir:

$$\lim_{y\to x}(\Delta_\beta(x-y) - \Delta_+(x-y)) = \omega_\beta(:\phi^2:) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^\infty dp \frac{4\pi p}{e^{\beta p}-1} = \frac{1}{12\beta^2} \tag{2.6}$$

2.1 Massives Feld

Für ein Feld mit endlicher Masse m gilt $\omega(p) = \sqrt{p^2+m^2}$ und damit:

$$\omega_\beta(:\phi^2:) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3p}{\omega(p)}\frac{1}{e^{\beta\omega(p)}-1} = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^\infty \frac{dp}{\sqrt{p^2+m^2}}\frac{4\pi p^2}{e^{\beta\sqrt{p^2+m^2}}-1} \tag{2.7}$$

Mit der Substitution $u = \beta\sqrt{p^2+m^2}$, $\frac{du}{dp} = \beta^2\frac{p}{u}$ bekommen wir:

$$\omega_\beta(:\phi^2:) = \frac{1}{2\pi^2}\frac{1}{\beta^2}\int_{m\beta}^\infty du\sqrt{u^2-m^2\beta^2}\frac{1}{e^u-1} = \frac{1}{2\pi^2}\frac{1}{\beta^2}\int_{m\beta}^\infty du\sqrt{u^2-m^2\beta^2}\frac{e^{-u}}{1-e^{-u}} \tag{2.8}$$

$$= \frac{1}{2\pi^2}\frac{1}{\beta^2}\int_{m\beta}^\infty du\sqrt{u^2-m^2\beta^2}e^{-u}\sum_{n=0}^\infty e^{-nu} = \frac{1}{2\pi^2}\frac{1}{\beta^2}\int_{m\beta}^\infty du\sqrt{u^2-m^2\beta^2}\sum_{n=1}^\infty e^{-nu} \tag{2.9}$$

$$\omega_\beta(:\phi^2:) = \frac{1}{2\pi^2}\frac{1}{\beta^2}\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{2m\beta}{n}\right)K_1(m\beta n) = \frac{1}{2\pi^2}\sum_{n=1}^\infty \frac{m}{n\beta}K_1(mn\beta) \tag{2.10}$$

Hierbei ist K die MacDonaldsche Funktion und Γ die Gammafunktion. Da K_1 monoton fallend ist, steigt $\omega_\beta(:\phi^2:)$ wie im masselosen Fall monoton mit steigender Temperatur und verschwindet bei $T = 0$.

2.1.1 Kleine Masse

Um die Massenabhängigkeit zu bestimmen, entwickeln wir (2.8) in eine Taylorreihe um $m = 0$:

$$\omega_\beta(:\phi^2:) = \omega_\beta(:\phi^2:)\Big|_{m=0} + m\frac{d}{dm}\omega_\beta(:\phi^2:)\Big|_{m=0} + O(m^2) \tag{2.11}$$

Nach (2.6) gilt:

$$\omega_\beta(:\phi^2:)\Big|_{m=0} = \frac{1}{12\beta^2} \tag{2.12}$$

Und nach (2.8):

$$\frac{d}{dm}\omega_\beta(:\phi^2:)\Big|_{m=0} = \frac{1}{2\pi^2}\frac{1}{\beta^2}\frac{d}{dm}\int_{m\beta}^\infty \sqrt{u^2-m^2\beta^2}\frac{du}{e^u-1}\Big|_{m=0} \tag{2.13}$$

$$= \frac{1}{2\pi^2}\frac{1}{\beta^2}\int_{m\beta}^\infty \frac{d}{dm}\sqrt{u^2-m^2\beta^2}\frac{du}{e^u-1}\Big|_{m=0} - \frac{1}{2\pi^2}\sqrt{m^2-m^2}\frac{1}{e^{\beta m}-1}\Big|_{m=0} \tag{2.14}$$

Der zweite Term ist nicht definiert, da sowohl Zähler als auch Nenner Null sind. Jedoch existiert der Grenzwert $\lim_{m\to 0}\sqrt{m^2-m^2}\frac{1}{e^{\beta m}-1}=0$, deshalb setzen wir den zweiten Ausdruck Null. Der erste Ausdruck

$$\frac{1}{2\pi^2}\frac{1}{\beta^2}\int_{m\beta}^{\infty}\frac{d}{dm}\sqrt{u^2-m^2\beta^2}\frac{du}{e^u-1}\bigg|_{m=0}=\frac{1}{2\pi^2}\int_{m\beta}^{\infty}\frac{-m}{\sqrt{u^2-m^2\beta^2}}\frac{du}{e^u-1}\bigg|_{m=0} \tag{2.15}$$

hat an der unteren Integrationsgrenze eine Nullstelle im Zähler und im Nenner, deshalb substituieren wir $u=m\beta v$ und erhalten:

$$=\frac{1}{2\pi^2}\int_{1}^{\infty}\frac{-m}{\sqrt{v^2-1}}\frac{dv}{e^{\beta m v}-1}\bigg|_{m=0}=\frac{1}{2\pi^2}\int_{1}^{\infty}\frac{-m}{\sqrt{v^2-1}}\frac{dv}{1+\beta m v+(\beta m v)^2+\ldots-1}\bigg|_{m=0} \tag{2.16}$$

$$=\frac{1}{2\pi^2}\int_{1}^{\infty}\frac{-1}{\sqrt{v^2-1}}\frac{dv}{\beta v+\beta^2 v^2 m+\ldots}\bigg|_{m=0}=\frac{1}{2\pi^2\beta}\int_{1}^{\infty}\frac{-1}{\sqrt{v^2-1}}\frac{dv}{v}=\frac{-1}{4\pi\beta} \tag{2.17}$$

Nach (2.11) erhalten wir die Taylorentwicklung des Wickquadrates in der Masse, entwickelt um $m=0$:

$$\boxed{\omega_\beta(:\phi^2:)=\frac{1}{12\beta^2}-\frac{m}{4\pi\beta}+O(m^2)} \tag{2.18}$$

2.1.2 Große Masse

Wir möchten jetzt $\omega_\beta(:\phi^2:)$ im Grenzfall großer Masse und kleiner Temperatur ($\beta m >> 1$) bestimmen. Gleichung (2.8) können wir dann wie folgt nähern:

$$\omega_\beta(:\phi^2:)=\frac{1}{2\pi^2}\frac{1}{\beta^2}\int_{m\beta}^{\infty}du\sqrt{u^2-m^2\beta^2}e^{-u} \tag{2.19}$$

Die Wurzel entwickeln wir an der Stelle $u=m\beta$ in eine Potenzreihe in u:

$$\begin{aligned}\sqrt{u^2-m^2\beta^2}&=\sqrt{2}\sqrt{m\beta}\sqrt{u-m\beta}+\frac{1}{4}\frac{\sqrt{2}\,(u-m\beta)^{3/2}}{\sqrt{m\beta}}+O\left(\frac{(u-m\beta)^{5/2}}{(m\beta)^{3/2}}\right)\\ \omega_\beta(:\phi^2:)&\approx\frac{1}{2\pi^2}\frac{1}{\beta^2}\int_{m\beta}^{\infty}du\left(\sqrt{2}\sqrt{m\beta}\sqrt{u-m\beta}+\frac{1}{4}\frac{\sqrt{2}\,(u-m\beta)^{3/2}}{\sqrt{m\beta}}\right)e^{-u}\\ &=\frac{1}{2\pi^2}\frac{1}{\beta^2}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}\sqrt{m\beta}e^{-\beta m}+\frac{3\sqrt{2\pi}}{16}\frac{e^{-\beta m}}{\sqrt{m\beta}}\right)\end{aligned} \tag{2.20}$$

Da wir $m\beta >> 1$ vorausgesetzt haben, vernachlässigen wir den zweiten Term und erhalten das Wickquadrat in der Näherung großer Masse und kleiner Temperatur:

$$\boxed{\omega_\beta(:\phi^2:)\approx\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{\sqrt{m}e^{-\beta m}}{\beta^{3/2}}} \tag{2.21}$$

In Abbildung 2.1 ist $\omega_\beta(:\phi^2:)=\frac{1}{2\pi^2}\frac{1}{\beta^2}\int_{m\beta}^{\infty}du\sqrt{u^2-m^2\beta^2}\frac{1}{e^u-1}$ dargestellt. Auf dem Bild ist bei $m=0$ sehr gut die quadratische Abhängigkeit von der Temperatur sowie der monoton fallende Kurvenverlauf bei wachsender Masse zu sehen, wie man auch in Gleichung (2.21) und (2.18) sieht.

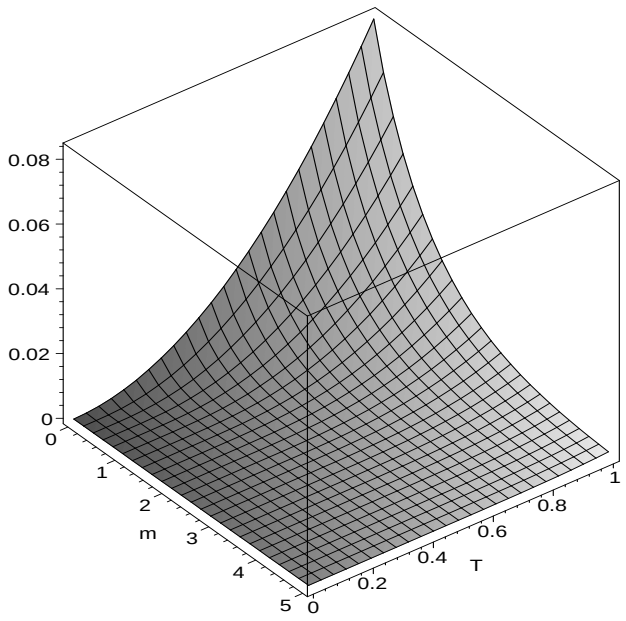

Abbildung 2.1: $\omega_\beta(:\phi^2:)$ als Funktion von m und T

Kapitel 3

Der Casimir-Effekt

Unser Ziel ist es, die Zweipunktfunktion eines skalaren Feldes zwischen zwei Platten zu berechnen. Diese Platten geben Randbedingungen vor. Ähnlich wie die Wellenfunktion eines quantenmechanischen Teilchens in einem Potentialtopf mit unendlich hohen Wänden muss das Quantenfeld an den Platten verschwinden. Dazu betrachten wir vorerst eine einzige Platte, welche so positioniert ist, dass das Feld auf $x^3 > 0$ beschränkt ist.

3.1 Vakuumzustände mit Randbedingungen

3.1.1 Beschränkung auf einen Halbraum

Wir wählen Dirichlet-Randbedingungen, das Feld verschwindet an den Rändern. Es sind auch andere Randbedingungen möglich, zum Beispiel Neumann-Randbedingungen, bei denen die Ableitungen des Feldes an den Rändern verschwinden. Auf diese Art der Randbedingungen wird später eingegangen. Da $\phi(x)\Big|_{x^3=0} = 0$ gelten muss, ist das Feld wie folgt definiert:

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{\sqrt{2\omega(p)}} \left(\frac{e^{-ip_\mu x^\mu} - e^{-i(S_3 p_\mu)x^\mu}}{\sqrt{2}} a(p) + \frac{e^{ip_\mu x^\mu} - e^{i(S_3 p_\mu)x^\mu}}{\sqrt{2}} a^*(p) \right) \tag{3.1}$$

Mit den Relationen $[a(p), a^*(p')] = (2\pi)^3 \delta(p - p')$, $[a(p), a(p')] = 0 = [a^*(p), a^*(p')]$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} &\langle\Omega| \left[\phi(x), \phi(y)\right] |\Omega\rangle_{HR} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p d^3p'}{\sqrt{4\omega(p)\omega(p')}} \frac{1}{2} \Bigg(\left(e^{-ip_\mu x^\mu} - e^{-i(S_3 p_\mu)x^\mu} \right) \left(e^{ip'_\mu y^\mu} - e^{i(S_3 p'_\mu)y^\mu} \right) \\ &- \left(e^{-ip'_\mu y^\mu} - e^{-i(S_3 p'_\mu)y^\mu} \right) \left(e^{ip_\mu x^\mu} - e^{i(S_3 p_\mu)x^\mu} \right) \Bigg) \delta(p - p') \end{aligned} \tag{3.2}$$

Infolge der Identität $(S_3 p_\mu)x^\mu = p_\mu(S_3 x^\mu)$ gilt:

$$\begin{aligned}
&\langle\Omega|\left[\phi(x),\phi(y)\right]|\Omega\rangle_{HR} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3p}{4\omega(p)}\Big(\Big(e^{-ip_\mu(x^\mu-y^\mu)} + e^{-i(S_3p_\mu)(x^\mu-y^\mu)} - e^{-ip_\mu(x^\mu-S_3y^\mu)} - e^{-i(S_3p_\mu)(x^\mu-S_3y^\mu)}\Big) \\
&- \Big(e^{ip_\mu(x^\mu-y^\mu)} + e^{i(S_3p_\mu)(x^\mu-y^\mu)} - e^{ip_\mu(x^\mu-S_3y^\mu)} - e^{i(S_3p_\mu)(x^\mu-S_3y^\mu)}\Big)\Big)
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Umkehren der p_3-Integrationsrichtung bei bestimmten Summanden ergibt:

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3p}{2\omega(p)}\left(e^{-ip_\mu(x^\mu-y^\mu)} - e^{-ip_\mu(x^\mu-S_3y^\mu)} - e^{ip_\mu(x^\mu-y^\mu)} + e^{ip_\mu(x^\mu-S_3y^\mu)}\right) \\
&= \Delta(x-y) - \Delta(x-S_3y)
\end{aligned} \tag{3.4}$$

mit dem Spiegelungsoperator $S_3\begin{pmatrix}x^0\\x^1\\x^2\\x^3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x^0\\x^1\\x^2\\-x^3\end{pmatrix}$.

Die Zweipunktfunktion des auf einen Halbraum beschränkten Skalarfeldes ist der positive Frequenzanteil:

$$\boxed{\omega_2(x,y)_{HR} = \Delta_+(x-y) - \Delta_+(x-S_3y)} \tag{3.5}$$

Der Erwartungswert des Wickquadrates ist die Differenz dieser Gleichung mit Gleichung (2.1):

$$\lim_{y\to x}(\Delta_+(x-y) - \Delta_+(x-S_3y) - \Delta_+(x-y)) = \boxed{\omega(:\phi^2:)_{HR} = -\Delta_+(2x^3)} \tag{3.6}$$

Diese Funktion soll jetzt für die masselose Theorie berechnet und graphisch dargestellt werden:

$$-\Delta_+(2x^3) = \frac{-1}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3p}{2\omega(p)}e^{-i2p_3x^3} \tag{3.7}$$

Mittels des Residuensatzes zeigen wir, dass dieser Ausdruck mit folgendem Integral übereinstimmt:

$$\begin{aligned}
\frac{-1}{(2\pi)^4}\int\frac{d^4p}{|p|^2}e^{-i2p_3x^3} &= \frac{-1}{(2\pi)^4}\int\frac{d^4p}{(p_0+i\,|p_{0\perp}|)(p_0-i\,|p_{0\perp}|)}e^{-i2p_3x^3} \\
&= \frac{-1}{(2\pi)^4}2\pi i\int\frac{dp_1dp_2dp_3}{i\,|p_{0\perp}|+i\,|p_{0\perp}|}e^{-i2p_3x^3} = \frac{-1}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3p}{2\,|p_{0\perp}|}e^{-i2p_3x^3}
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Hier bezeichnet $|p_{0\perp}| = \sqrt{p_1^2+p_2^2+p_3^2}$. Das Integral soll jetzt mit Hilfe des Residuensatzes ausgewertet werden:

$$\begin{aligned}
&\frac{-1}{(2\pi)^4}\int\frac{d^4p}{|p|^2}e^{-i2p_3x^3} = \frac{-1}{(2\pi)^4}\int\frac{d^4p}{(p_3+i\,|p_{3\perp}|)(p_3-i\,|p_{3\perp}|)}e^{-i2p_3x^3} \\
&= \frac{-1}{(2\pi)^4}(-2\pi i)\int\frac{dp_0dp_1dp_2}{-i\,|p_{3\perp}|-i\,|p_{3\perp}|}e^{-i2(-i|p_{3\perp}|)x^3} = \frac{-1}{(2\pi)^3}\int\frac{dp_0dp_1dp_2}{2\,|p_{3\perp}|}e^{-2|p_{3\perp}|x^3} \\
&= \frac{-1}{(2\pi)^3}\int_0^\infty\frac{4\pi p^2dp}{2p}e^{-2px^3} = \frac{-1}{(2\pi)^2}\int_0^\infty pdpe^{-2px^3} = \frac{-1}{(2\pi)^2}\frac{1}{(2x^3)^2}
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Damit erhalten wir also das Wickquadrat des auf einen Halbraum beschränkten masselosen Feldes:

$$\boxed{\omega(:\phi^2:)_{HR} = \frac{-1}{(2\pi)^2}\frac{1}{(2x^3)^2}} \tag{3.10}$$

Für ein Feld, das auf $x^2 > 0, x^3 > 0$ beschränkt ist, berechnet man analog:

$$\omega_2(x,y)_{\frac{1}{4}R} = \Delta_+(x-y) - \Delta_+(x-S_2y) - \Delta_+(x-S_3y) + \Delta_+(x-S_2S_3y) \tag{3.11}$$

Die Zweipunktfunktion eines skalaren Feldes, dessen drei Ortskoordinaten auf positive Werte beschränkt sind, lautet dann:

$$\begin{aligned}\omega_2(x,y)_{\frac{1}{8}R} = \Delta_+(x-y) - \Delta_+(x-S_2y) - \Delta_+(x-S_3y) + \Delta_+(x-S_2S_3y)\\ -\Delta_+(x-S_1y) + \Delta_+(x-S_1S_2y) + \Delta_+(x-S_1S_3y) - \Delta_+(x-S_1S_2S_3y)\end{aligned} \tag{3.12}$$

3.1.2 Beschränkung auf ein Intervall

Als nächstes wollen wir die Zweipunktfunktion für ein skalares Quantenfeld betrachten, das der Beschränkung $0 < x^3 < a$ unterliegt. Aufgrund der Randbedingungen existieren nur diskrete Werte für p_3.

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2a}}\int\frac{d^2p}{\sqrt{2\omega(p)}}\left(\frac{e^{-ip_\mu x^\mu} - e^{-i(S_3p_\mu)x^\mu}}{\sqrt{2}}a(p) + \frac{e^{ip_\mu x^\mu} - e^{i(S_3p_\mu)x^\mu}}{\sqrt{2}}a^*(p)\right) \tag{3.13}$$

Hierbei gilt $p_3 = \pi\frac{n}{a}$, $p_3' = \pi\frac{m}{a}$, $[a(p), a^*(p')] = (2\pi)^2\delta(p_1 - p_1')\delta(p_2 - p_2')\delta_{nm}$, $[a(p), a(p')] = 0 = [a^*(p), a^*(p')]$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned}\langle\Omega|\left[\phi(x),\phi(y)\right]|\Omega\rangle_I = \frac{1}{(2\pi)^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{4a}\int\frac{d^2pd^2p'}{\sqrt{4\omega(p)\omega(p')}}\\ \left(\left(e^{-ip_\mu x^\mu} - e^{-i(S_3p_\mu)x^\mu}\right)\left(e^{ip_\mu' y^\mu} - e^{i(S_3p_\mu')y^\mu}\right)\right.\\ \left. - \left(e^{-ip_\mu' y^\mu} - e^{-i(S_3p_\mu')y^\mu}\right)\left(e^{ip_\mu x^\mu} - e^{i(S_3p_\mu)x^\mu}\right)\right)\delta(p_1 - p_1')\delta(p_2 - p_2')\delta_{nm}\end{aligned} \tag{3.14}$$

Das Integral über p' wird mit Hilfe der Deltafunktionen ausgewertet:

$$\begin{aligned}\langle\Omega|\left[\phi(x),\phi(y)\right]|\Omega\rangle_I = \frac{1}{(2\pi)^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{4a}\int\frac{d^2p}{2\omega(p)}\\ \left(\left(e^{-ip_\mu(x^\mu-y^\mu)} + e^{-i(S_3p_\mu)(x^\mu-y^\mu)} - e^{-ip_\mu(x^\mu-S_3y^\mu)} - e^{-i(S_3p_\mu)(x^\mu-S_3y^\mu)}\right)\right.\\ \left. -\left(e^{ip_\mu(x^\mu-y^\mu)} + e^{i(S_3p_\mu)(x^\mu-y^\mu)} - e^{ip_\mu(x^\mu-S_3y^\mu)} - e^{i(S_3p_\mu)(x^\mu-S_3y^\mu)}\right)\right)\end{aligned} \tag{3.15}$$

Umkehren der p_3-Integrationsrichtung bei bestimmten Summanden und Zusammenfassen ergeben:

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2a} \int \frac{d^2p}{2\omega(p)} \Big(e^{-ip_\mu(x^\mu - y^\mu)} - e^{-ip_\mu(x^\mu - S_3 y^\mu)} - e^{ip_\mu(x^\mu - y^\mu)} + e^{ip_\mu(x^\mu - S_3 y^\mu)} \Big) \tag{3.16}$$

Der positive Frequenzanteil lautet:

$$\omega_2(x,y)_I = \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2a} \int \frac{d^2p}{2\omega(p)} \Big(e^{-ip_\mu(x^\mu - y^\mu)} - e^{-ip_\mu(x^\mu - S_3 y^\mu)} \Big) \tag{3.17}$$

Nach der Poisson-Resummationsformel $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int f(n) e^{-im2\pi n} dn$ gilt:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2a} \frac{1}{2\omega(p_1, p_2, n\frac{\pi}{a})} e^{-in\frac{\pi}{a}(x^3 - y^3)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dn \frac{1}{2a} \frac{1}{2\omega(p_1, p_2, n\frac{\pi}{a})} e^{-in\frac{\pi}{a}(x^3 - y^3) - im2\pi n} \tag{3.18}$$

Mit $p_3 = n\frac{\pi}{a}$ gilt:

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dp_3 \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2\omega(p_1, p_2, p_3)} e^{-ip_3(x^3 - y^3 + m2a)} \tag{3.19}$$

Mit diesem Resultat geht (3.17) über in:

$$\omega_2(x,y)_I = \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3p}{2\omega(p)} (e^{-ip_\mu(x^\mu - y^\mu + m2a^\mu)} - e^{-ip_\mu(x^\mu - S_3 y^\mu + m2a^\mu)}) \tag{3.20}$$

Damit lautet die Zweipunktfunktion eines skalaren Feldes, das auf ein Intervall der Breite a beschränkt ist:

$$\boxed{\omega_2(x,y)_I = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \big(\Delta_+(x - y + 2ma) - \Delta_+(x - S_3 y + 2ma) \big)} \tag{3.21}$$

Dabei ist $a^\mu = (0,0,0,a)$. Der Erwartungswert des Wickquadrates ist die Differenz von Gleichung (3.21) und Gleichung (2.1):

$$\omega(:\phi^2:)_I = \lim_{y \to x} \Big(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \big(\Delta_+(x - y + 2ma) - \Delta_+(x - S_3 y + 2ma) \big) - \Delta_+(x - y) \Big)$$

$$\boxed{\omega(:\phi^2:)_I = \sum_{m=-\infty}^{\infty, m \neq 0} \Delta_+(2ma) - \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Delta_+(2x^3 + 2ma)} \tag{3.22}$$

Auch dieser Erwartungswert soll für ein masseloses Feld berechnet werden. Nach Gleichung (3.6) und (3.10) gilt:

$$\begin{aligned} \omega(:\phi^2:)_I &= \sum_{m=-\infty}^{\infty, m \neq 0} \Delta_+(2ma) - \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Delta_+(2x^3 + 2ma) \\ &= 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{(2ma)^2} - \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{(2x^3 + 2ma)^2} \end{aligned} \tag{3.23}$$

Die Berechnung der ersten Summe, $2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2\pi)^2}\frac{1}{(2ma)^2}$, wird auf die Zetafunktion mit dem Argument 2 zurückgeführt ($\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}=\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$). Zur Bestimmung der zweiten Summe werden die Fourierreihen der Funktionen $x\sin(\lambda x)$ und $\cos(\lambda x)$ auf dem Intervall $x=-\pi\ldots\pi$ verwendet und an der Stelle $x=\pi$ ausgewertet:

$$\begin{aligned}\pi\sin(\lambda\pi) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(-\frac{\cos(\lambda\pi)}{\lambda+n}+\frac{\sin(\lambda\pi)}{\pi(\lambda+n)^2}\right)\\ \cos(\lambda\pi) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\sin(\lambda\pi)}{\pi(\lambda+n)}\end{aligned} \tag{3.24}$$

Wir multiplizieren die erste Zeile mit $\frac{\sin(\lambda\pi)}{\pi}$ und die zweite Zeile mit $\cos(\lambda x)$. Beide Zeilen werden dann addiert:

$$1=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(\sin(\lambda\pi))^2}{\pi^2(\lambda+n)^2} \tag{3.25}$$

Wir erhalten somit die Identität $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(\lambda+n)^2}=\frac{\pi^2}{(\sin(\lambda\pi))^2}$. Mit diesem Ergebnis bekommen wir:

$$\boxed{\omega(:\phi^2:)_I=\frac{1}{48a^2}-\frac{1}{16a^2}\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi x^3}{a}\right)^2}} \tag{3.26}$$

Das Wickquadrat eines masselosen Skalarfeldes auf dem Intervall ist also negativ und divergiert an den Rändern. In Abbildung 3.1 ist es für die Intervallbreite $a=1$ dargestellt. Die Singularitäten an den Rändern sind sehr schön zu erkennen.

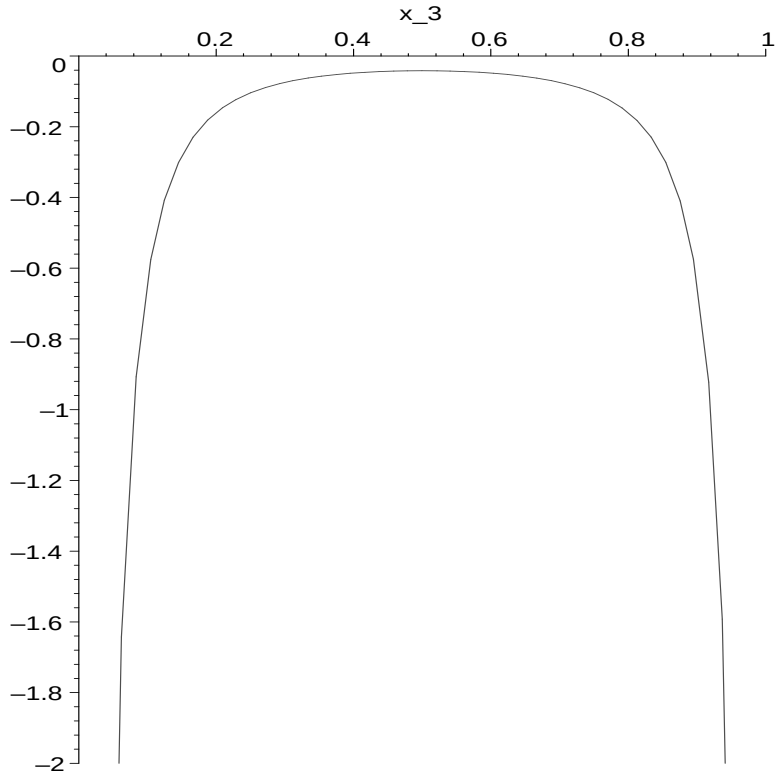

Abbildung 3.1: $\omega(:\phi^2:)$ in einem Intervall (Dirichlet-Randbedingungen)

Neumann-Randbedingungen: Die Felder in Gleichung (3.1) und (3.13) wurden so konstruiert, dass das Feld bei $x^3 = 0$ (beide Felder) und $x^3 = a$ (Intervall) verschwindet (Dirichlet-Randbedingungen). Wenn man jetzt fordert, dass nicht das Feld selber, sondern die erste Ableitung an den Rändern verschwindet (Neumann-Randbedingungen), so ergibt sich für das Feld im Halbraum:

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{\sqrt{2\omega(p)}} \left(\frac{e^{-ip_\mu x^\mu} + e^{-i(S_3 p_\mu)x^\mu}}{\sqrt{2}} a(p) + \frac{e^{ip_\mu x^\mu} + e^{i(S_3 p_\mu)x^\mu}}{\sqrt{2}} a^*(p) \right) \tag{3.27}$$

und für das auf ein Intervall beschränkte Feld:

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2a}} \int \frac{d^2p}{\sqrt{2\omega(p)}} \left(\frac{e^{-ip_\mu x^\mu} + e^{-i(S_3 p_\mu)x^\mu}}{\sqrt{2}} a(p) + \frac{e^{ip_\mu x^\mu} + e^{i(S_3 p_\mu)x^\mu}}{\sqrt{2}} a^*(p) \right) \tag{3.28}$$

Nach längerer Rechnung, die aber im Prinzip fast mit der Rechnung für den Fall der Dirichlet-Randbedingungen übereinstimmt und deshalb hier nicht aufgeführt wird, ergibt sich für das Wickquadrat eines masselosen skalaren Feldes auf einem Intervall, dessen Ableitungen an der Rändern verschwinden:

$$\boxed{\omega(:\phi^2:)_I = \frac{1}{48a^2} + \frac{1}{16a^2} \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi x^3}{a}\right)^2}} \tag{3.29}$$

Anders als im Fall der Dirichlet-Randbedingungen ist das Phiquadrat hier positiv. Wieder divergiert das Wickquadrat an den Rändern. Die Summe des Phiquadrates im Intervall unter Dirichlet- sowie Neumann-Randbedingungen ist nicht mehr vom Ort abhängig ($\frac{1}{24a^2}$).

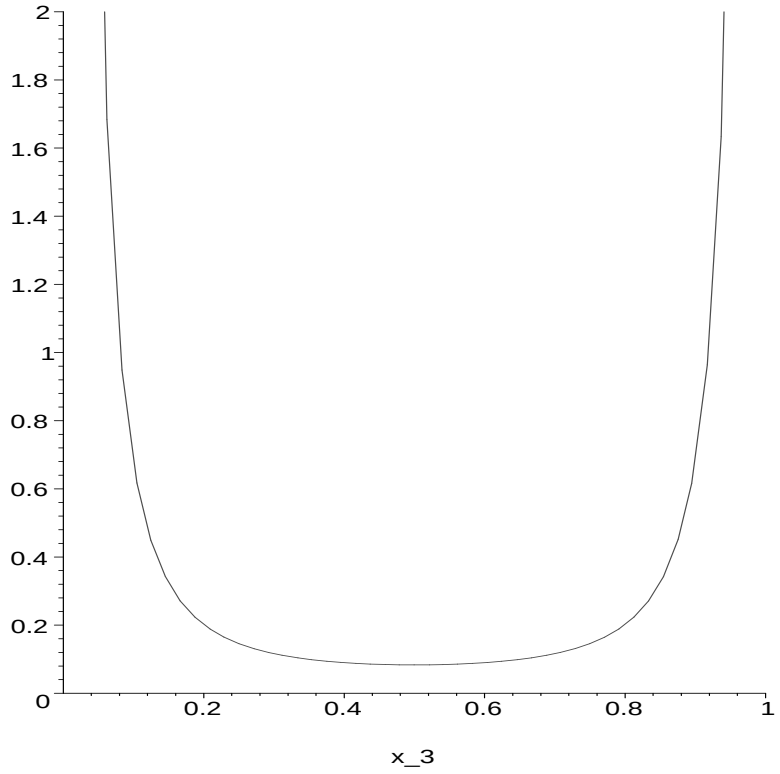

Abbildung 3.2: $\omega(:\phi^2:)$ in einem Intervall (Neumann-Randbedingungen)

3.2 KMS-Zustände mit Randbedingungen

Als Nächstes ist es unser Ziel, den Erwartungswert des Wickquadrates von KMS-Zuständen mit den Randbedingungen der vorherigen Abschnitte zu bestimmen. Es wird wieder mit der Zweipunktfunktion des Skalarfeldes mit Temperatur Null ohne Randbedingungen renormiert.

3.2.1 Beschränkung auf einen Halbraum

Gleichung (3.5) gilt nicht nur für den Zustand mit Temperatur Null, sondern auch für KMS-Zustände. Der Erwartungswert des Wickquadrates ist die Differenz von dieser Gleichung und Gleichung (2.1):

$$\lim_{y\to x}(\Delta_\beta(x-y)-\Delta_\beta(x-S_3y)-\Delta_+(x-y)) = \boxed{\omega_\beta(:\phi^2:)_{HR} = \omega_\beta(:\phi^2:) - \Delta_\beta(2x^3)} \quad (3.30)$$

Der letzte Term ist eine Verschiebung des Wickquadrates gegenüber dem Wickquadrat ohne Randbedingungen.

3.2.2 Beschränkung auf ein Intervall

Gleichung (3.21) gilt auch für KMS-Zustände. Der Erwartungswert des Wickquadrates ist die Differenz von Gleichung (3.21) und Gleichung (2.1):

$$\omega_\beta(:\phi^2:)_I = \lim_{y\to x}\Big(\sum_{m=-\infty}^{\infty}\big(\Delta_\beta(x-y+2ma)-\Delta_\beta(x-S_3y+2ma)\big)-\Delta_+(x-y)\Big) \tag{3.31}$$

$$\boxed{\omega_\beta(:\phi^2:)_I = \omega_\beta(:\phi^2:)+\sum_{m=-\infty}^{\infty,m\neq 0}\Delta_\beta(2ma)-\sum_{m=-\infty}^{\infty}\Delta_\beta(2x^3+2ma)} \tag{3.32}$$

Die Terme, über die summiert wird, bedeuten eine Korrektur des Wickquadrates gegenüber dem Fall ohne Randbedingungen.

3.3 Vom Ort unabhängige thermische Observable

Die in den vorherigen Abschnitten berechneten Wickquadrate sind ein Maß für die Temperatur des Systems, jedoch sind sie von den Randbedingungen und dem Ort abhängig. Deshalb soll jetzt versucht werden, eine Größe anzugeben, die unabhängig vom Ort ist und trotzdem als Observable der Temperatur interpretiert werden kann.

3.3.1 Beschränkung auf einen Halbraum

Für das Feld gilt:

$$\phi(x)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3p}{\sqrt{2\omega(p)}}\left(\frac{e^{-ip_\mu x^\mu}-e^{-i(S_3p_\mu)x^\mu}}{\sqrt{2}}a(p)+\frac{e^{ip_\mu x^\mu}-e^{i(S_3p_\mu)x^\mu}}{\sqrt{2}}a^*(p)\right) \tag{3.33}$$

Es soll folgender Erwartungswert berechnet werden:

$$\begin{aligned}&\langle\Omega|\,\partial_\lambda\phi(x)\partial_\nu\phi(y)\,|\Omega\rangle_{HR}=\\&\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3p}{2\omega(p)}\frac{1}{2}\left(-ip_\lambda e^{-ip_\mu x^\mu}+i(S_3p_\lambda)e^{-i(S_3p_\mu)x^\mu}\right)\left(ip_\nu e^{ip_\mu y^\mu}-i(S_3p_\nu)e^{i(S_3p_\mu)y^\mu}\right)\end{aligned} \tag{3.34}$$

Mit der Identität $(S_3p_\mu)x^\mu = p_\mu(S_3x^\mu)$ gilt:

$$\begin{aligned}=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3p}{4\omega(p)}\Big(&p_\lambda p_\nu e^{-ip_\mu(x^\mu-y^\mu)}-p_\lambda(S_3p_\nu)e^{-ip_\mu(x^\mu-S_3y^\mu)}\\&-(S_3p_\lambda)p_\nu e^{-i(S_3p_\mu)(x^\mu-S_3y^\mu)}+(S_3p_\lambda)(S_3p_\nu)e^{-i(S_3p_\mu)(x^\mu-y^\mu)}\Big)\end{aligned} \tag{3.35}$$

Umkehrung der p_3-Integrationsreihenfolge und Zusammenfassen ergeben:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3p}{2\omega(p)}\left(p_\lambda p_\nu e^{-ip_\mu(x^\mu-y^\mu)} - p_\lambda(S_3p_\nu)e^{-ip_\mu(x^\mu-S_3y^\mu)}\right) \\ &= \langle\Omega|\,\partial_\lambda\phi(x)\partial_\nu\phi(y)\,|\Omega\rangle - \langle\Omega|\,\partial_\lambda\phi(x)\partial_\nu\phi(S_3y)\,|\Omega\rangle \end{aligned} \tag{3.36}$$

Diese Gleichung gilt nach Einfügen des bekannten temperaturabhängigen Terms auch für KMS-Zustände. Da diese Funktion im Grenzwert $y \to x$ divergiert, renormieren wir mit dem Erwartungswert im Grundzustand ohne Randbedingungen:

$$\begin{aligned} &\omega_\beta(:\partial_\lambda\phi\partial_\nu\phi:)_{HR} = \\ &\lim_{y\to x}\Big(\langle\beta|\,\partial_\lambda\phi(x)\partial_\nu\phi(y)\,|\beta\rangle - \langle\beta|\,\partial_\lambda\phi(x)\partial_\nu\phi(S_3y)\,|\beta\rangle - \langle\Omega|\,\partial_\lambda\phi(x)\partial_\nu\phi(y)\,|\Omega\rangle\Big) \\ &= \lim_{y\to x}\left(\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3p}{\omega(p)}p_\lambda p_\nu\frac{\cos(p_\mu(x^\mu-y^\mu))}{e^{\beta\omega(p)}-1}\right) \\ &- \frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3p}{2\omega(p)}p_\lambda(S_3p_\nu)\left(\frac{e^{-ip_3 2x^3}}{1-e^{-\beta\omega(p)}}+\frac{e^{ip_3 2x^3}}{e^{\beta\omega(p)}-1}\right) \end{aligned} \tag{3.37}$$

Damit erhalten wir den Erwartungswert des Energie-Impuls-Tensors des auf einen Halbraum beschränkten Skalarfeldes endlicher Temperatur:

$$\begin{aligned} &\omega_\beta(:T^{\lambda\nu}:)_{HR} = \\ &\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3p}{\omega(p)}\frac{p^\lambda p^\nu}{e^{\beta\omega(p)}-1} - \frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3p}{2\omega(p)}p^\lambda(S_3p^\nu)\left(\frac{e^{-ip_3 2x^3}}{1-e^{-\beta\omega(p)}}+\frac{e^{ip_3 2x^3}}{e^{\beta\omega(p)}-1}\right) \end{aligned} \tag{3.38}$$

Der Erwartungswert zerfällt also in zwei Teile, der erste ist unabhängig von den Randbedingungen, der zweite enthält den Abstand zur Platte. Um den letzten Teil zu kompensieren, schauen wir uns folgende Funktion an:

$$\begin{aligned} &\partial_\lambda\partial_\nu\omega_\beta(:\phi^2:)_{HR} = \partial_\lambda\partial_\nu\omega_\beta(:\phi^2:) - \partial_\lambda\partial_\nu\Delta_\beta(2x^3) = -\partial_\lambda\partial_\nu\Delta_\beta(2x^3) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3p}{2\omega(p)}4(p_3)^2\delta_{\lambda 3}\delta_{\nu 3}\left(\frac{e^{-ip_3 2x^3}}{1-e^{-\beta\omega(p)}}+\frac{e^{ip_3 2x^3}}{e^{\beta\omega(p)}-1}\right) \end{aligned} \tag{3.39}$$

Um den ortsabhängigen Teil des Temperaturerwartungswertes zu kompensieren, wählen wir $\lambda = 3 = \nu$ und bilden folgende Differenz:

$$\begin{aligned} &\omega_\beta(:\partial_3\phi\partial_3\phi:)_{HR} - \frac{1}{4}\partial_3\partial_3\omega_\beta(:\phi^2:)_{HR} = \\ &\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3p}{\omega(p)}\frac{(p_3)^2}{e^{\beta\omega(p)}-1} + \frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3p}{2\omega(p)}(p_3)^2\left(\frac{e^{-ip_3 2x^3}}{1-e^{-\beta\omega(p)}}+\frac{e^{ip_3 2x^3}}{e^{\beta\omega(p)}-1}\right) \\ &- \frac{1}{4}\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3p}{2\omega(p)}4(p_3)^2\left(\frac{e^{-ip_3 2x^3}}{1-e^{-\beta\omega(p)}}+\frac{e^{ip_3 2x^3}}{e^{\beta\omega(p)}-1}\right) \end{aligned} \tag{3.40}$$

Damit erhalten wir folgende ortsunabhängige Größe:

$$\boxed{\omega_\beta(:\partial_3\phi\partial_3\phi:)_{HR} - \frac{1}{4}\partial_3\partial_3\omega_\beta(:\phi^2:)_{HR} = \frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3p}{\omega(p)}\frac{(p_3)^2}{e^{\beta\omega(p)}-1}} \tag{3.41}$$

Mit der Größe $\omega_\beta(:\partial_3\phi\partial_3\phi:)_{HR} - \frac{1}{4}\partial_3\partial_3\omega_\beta(:\phi^2:)_{HR}$ haben wir also eine Observable gefunden, die im Fall des Halbraumes unabhängig vom Ort ist und im Zusammenhang mit der Temperatur steht. Im masselosen Fall berechnet man mit der Substitution $p' = \beta p$, dass der Ausdruck proportional zu $\frac{1}{\beta^4}$ ist. Diese Observable ist mit der im Fall ohne Randbedingungen identisch, da die Observablen des auf einen Halbraum beschränkten Feldes bei großem Abstand von der Platte in die des Feldes ohne Randbedingungen übergehen. Leider ist diese Observable von der Art der Randbedingungen abhängig, es ist die x^3-Koordinate ausgezeichnet. Wir werden jetzt den Wert dieser Observable für den masselosen Fall berechnen:

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3p}{|p|}\frac{(p_3)^2}{e^{\beta|p|}-1} = \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{\beta^4}\int \frac{d^3p'}{|p'|}\frac{(p'_3)^2}{e^{|p'|}-1} \tag{3.42}$$

Einführung von Zylinderkoordinaten und die Substitution $\frac{d\omega}{dp} = \frac{p}{\omega}$ ergeben:

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{\beta^4}\int_{-\infty}^{\infty} dp_3 \int_0^\infty \frac{2\pi p dp}{\sqrt{p_3^2+p^2}}\frac{(p_3)^2}{e^{\sqrt{p_3^2+p^2}}-1} = \frac{1}{(2\pi)^2}\frac{1}{\beta^4}\int_{-\infty}^{\infty} dp_3 \int_{p_3}^\infty d\omega \frac{(p_3)^2}{e^\omega - 1} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\frac{1}{\beta^4}\int_{-\infty}^{\infty} dp_3 (p_3)^2 \ln\left(\frac{1}{1-e^{-p_3}}\right) = \frac{\pi^2}{90\beta^4}
\end{aligned} \tag{3.43}$$

$$\boxed{\omega_\beta(:\partial_3\phi\partial_3\phi:)_{HR}\Big|_{m=0} - \frac{1}{4}\partial_3\partial_3\omega_\beta(:\phi^2:)_{HR}\Big|_{m=0} = \frac{\pi^2}{90\beta^4}} \tag{3.44}$$

Der Erwartungswert ist also proportional zur vierten Potenz der Temperatur.

3.3.2 Beschränkung auf ein Intervall

Als Nächstes soll getestet werden, ob die gefundene Temperaturobservable auch im Fall eines Intervalls unabhängig vom Ort ist. Die Rechnung analog zum Fall der Beschränkung auf einen Halbraum aus dem letzten Abschnitt ergibt:

$$\begin{aligned}
&\langle\Omega|\,\partial_\lambda\phi(x)\partial_\nu\phi(y)\,|\Omega\rangle_I = \\
&\frac{1}{(2\pi)^3}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int\frac{d^3p}{2\omega(p)}\left(p_\lambda p_\nu e^{-ip_\mu(x^\mu-y^\mu+n2a^\mu)} - p_\lambda(S_3p_\nu)e^{-ip_\mu(x^\mu-S_3y^\mu+n2a^\mu)}\right) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\Big(\langle\Omega|\,\partial_\lambda\phi(x+2na)\partial_\nu\phi(y)\,|\Omega\rangle - \langle\Omega|\,\partial_\lambda\phi(x+2na)\partial_\nu\phi(S_3y)\,|\Omega\rangle\Big)
\end{aligned} \tag{3.45}$$

Auch diese Gleichung gilt für KMS-Zustände. Es wird wieder mit dem Erwartungswert im Grundzustand ohne Randbedingungen renormiert:

$$\begin{aligned}
&\omega_\beta(:\partial_\lambda\phi\partial_\nu\phi:)_I = \\
&\lim_{y\to x}\Bigg(\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Big(\langle\beta|\,\partial_\lambda\phi(x+2na)\partial_\nu\phi(y)\,|\beta\rangle - \langle\beta|\,\partial_\lambda\phi(x+2na)\partial_\nu\phi(S_3y)\,|\beta\rangle\Big) \\
&- \langle\Omega|\,\partial_\lambda\phi(x)\partial_\nu\phi(y)\,|\Omega\rangle\Bigg) \\
&= \lim_{y\to x}\left(\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3p}{\omega(p)}p_\lambda p_\nu\frac{\cos(p_\mu(x^\mu-y^\mu))}{e^{\beta\omega(p)}-1}\right) \\
&+ \frac{1}{(2\pi)^3}\sum_{n=-\infty}^{\infty,n\neq0}\int\frac{d^3p}{2\omega(p)}p_\lambda p_\nu\left(\frac{e^{-ip_3 2na}}{1-e^{-\beta\omega(p)}}+\frac{e^{ip_3 2na}}{e^{\beta\omega(p)}-1}\right) \\
&- \frac{1}{(2\pi)^3}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int\frac{d^3p}{2\omega(p)}p_\lambda(S_3p_\nu)\left(\frac{e^{-ip_3(2x^3+2na)}}{1-e^{-\beta\omega(p)}}+\frac{e^{ip_3(2x^3+2na)}}{e^{\beta\omega(p)}-1}\right)
\end{aligned} \tag{3.46}$$

Zur Kompensation des ortsabhängigen Teils wird wieder folgender Ausdruck berechnet:

$$\begin{aligned}
\partial_\lambda\partial_\nu\omega_\beta(:\phi^2:)_I &= -\sum_{n=-\infty}^{\infty}\partial_\lambda\partial_\nu\Delta_\beta(2x^3+2na) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int\frac{d^3p}{2\omega(p)}4(p_3)^2\delta_{\lambda3}\delta_{\nu3}\left(\frac{e^{-ip_3(2x^3+2na)}}{1-e^{-\beta\omega(p)}}+\frac{e^{ip_3(2x^3+2na)}}{e^{\beta\omega(p)}-1}\right)
\end{aligned} \tag{3.47}$$

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}
&\omega_\beta(:\partial_3\phi\partial_3\phi:)_I - \frac{1}{4}\partial_3\partial_3\omega_\beta(:\phi^2:)_I = \\
&= \lim_{y\to x}\left(\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3p}{\omega(p)}(p_3)^2\frac{\cos(p_\mu(x^\mu-y^\mu))}{e^{\beta\omega(p)}-1}\right) \\
&+ \frac{1}{(2\pi)^3}\sum_{n=-\infty}^{\infty,n\neq0}\int\frac{d^3p}{2\omega(p)}(p_3)^2\left(\frac{e^{-ip_3 2na}}{1-e^{-\beta\omega(p)}}+\frac{e^{ip_3 2na}}{e^{\beta\omega(p)}-1}\right) \\
&+ \frac{1}{(2\pi)^3}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int\frac{d^3p}{2\omega(p)}(p_3)^2\left(\frac{e^{-ip_3(2x^3+2na)}}{1-e^{-\beta\omega(p)}}+\frac{e^{ip_3(2x^3+2na)}}{e^{\beta\omega(p)}-1}\right) \\
&- \frac{1}{4}\frac{1}{(2\pi)^3}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int\frac{d^3p}{2\omega(p)}4(p_3)^2\left(\frac{e^{-ip_3(2x^3+2na)}}{1-e^{-\beta\omega(p)}}+\frac{e^{ip_3(2x^3+2na)}}{e^{\beta\omega(p)}-1}\right)
\end{aligned} \tag{3.48}$$

Im Fall der Beschränkung auf ein Intervall erhalten wir also folgenden Erwartungswert:

$$\omega_\beta(:\partial_3\phi\partial_3\phi:)_I - \frac{1}{4}\partial_3\partial_3\omega_\beta(:\phi^2:)_I =$$

$$\boxed{\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3p}{\omega(p)}\frac{(p_3)^2}{e^{\beta\omega(p)}-1} + \frac{1}{(2\pi)^3}\sum_{n=-\infty}^{\infty,n\neq0}\int\frac{d^3p}{2\omega(p)}(p_3)^2\left(\frac{e^{-ip_3 2na}}{1-e^{-\beta\omega(p)}}+\frac{e^{ip_3 2na}}{e^{\beta\omega(p)}-1}\right)} \tag{3.49}$$

Diese Observable ist wie im Fall des Halbraumes ortsunabhängig und von der Temperatur abhängig, jedoch stimmt sie nicht mehr mit dem für den Halbraum berechneten Wert überein.

Kapitel 4

Kopplung zweier massiver Skalarfelder

In diesem Kapitel sollen zwei miteinander gekoppelte massive Skalarfelder betrachtet werden. Die Wechselwirkung wird durch einen Kopplungsterm in der Klein-Gordon-Gleichung realisiert, der linear in den Feldern ist. Die beiden Gleichungen

$$\Big(\Box + m^2\Big)\phi = -f\psi \tag{4.1}$$

und

$$\Big(\Box + m^2\Big)\psi = -f\phi \tag{4.2}$$

lassen sich wie folgt in Matrixschreibweise darstellen:

$$\left(\Box + \begin{pmatrix} m^2 & f \\ f & m^2 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

Durch Diagonalisierung der Matrix nimmt die Gleichung folgende Form an:

$$\left(\Box + \begin{pmatrix} m^2 + f & 0 \\ 0 & m^2 - f \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} \phi + \psi \\ \phi - \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

Damit sind die Felder entkoppelt, mit den neuen Massen und Feldern:

$$\begin{aligned} m_1 &= \sqrt{m^2 + f} \\ m_2 &= \sqrt{m^2 - f} \\ \phi_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\phi + \psi\Big) \\ \phi_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\phi - \psi\Big) \end{aligned} \tag{4.5}$$

$$\Big(\Box + m_{1,2}^2\Big)\phi_{1,2} = 0 \tag{4.6}$$

Die neuen Felder sind Lösungen der Klein-Gordon-Gleichung mit den Massen m_1 und m_2.

4.1 Zeitentwicklung eines Feldes

Als Nächstes soll die Zeitentwicklung des Feldes ϕ betrachtet werden. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird die Kopplung eingeschaltet, bei $t < 0$ sei $f = 0$, wir haben vor dem Einschalten also zwei freie, ungekoppelte Skalarfelder. Für die Zeitentwicklung eines Skalarfeldes gilt:

$$\phi(t,x) = i\int d^3y\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Delta(t,x-y)\phi(0,y) + \Delta(t,x-y)\frac{\partial}{\partial t}\phi(0,y)\Big) \tag{4.7}$$

Das Feld ϕ drücken wir als Linearkombination der Felder ϕ_1 und ϕ_2 aus, da diese Felder frei sind und für sie deshalb die Zeitentwicklung durchgeführt werden kann. Zum Zeitpunkt $t = 0$ werden ϕ_1 und ϕ_2 wieder durch die ursprünglichen Felder ϕ und ψ ausgedrückt. Damit gilt für ϕ:

$$\begin{aligned}
\phi(t,p) &= \int d^3x e^{ip_jx^j}\phi(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\int d^3x e^{ip_jx^j}\Big(\phi_1(t,x)+\phi_2(t,x)\Big)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\int d^3x e^{ip_jx^j}\Big(i\int d^3y\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Delta_{m_1}(t,x-y)\phi_1(0,y) + \Delta_{m_1}(t,x-y)\frac{\partial}{\partial t}\phi_1(0,y)\Big)\\
&+ i\int d^3y\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Delta_{m_2}(t,x-y)\phi_2(0,y) + \Delta_{m_2}(t,x-y)\frac{\partial}{\partial t}\phi_2(0,y)\Big)\Big)\\
&= \frac{i}{2}\int d^3x e^{ip_jx^j}\int d^3y\\
&\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Delta_{m_1}(t,x-y)\big(\phi(0,y)+\psi(0,y)\big) + \Delta_{m_1}(t,x-y)\frac{\partial}{\partial t}\big(\phi(0,y)+\psi(0,y)\big)\\
&\frac{\partial}{\partial t}\Delta_{m_2}(t,x-y)\big(\phi(0,y)-\psi(0,y)\big) + \Delta_{m_2}(t,x-y)\frac{\partial}{\partial t}\big(\phi(0,y)-\psi(0,y)\big)\Big)
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Wir wollen uns jetzt den von ϕ abhängigen Teil der ersten Zeile näher ansehen (mit $x = (t, x^1, x^2, x^3)$ und $y = (0, y^1, y^2, y^3)$). Einsetzen der Definitionen für Δ und ϕ ergibt:

$$\begin{aligned}
&\frac{i}{2}\int d^3x e^{ip_jx^j}\int d^3y\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Delta_{m_1}(t,x-y)\phi(0,y) + \Delta_{m_1}(t,x-y)\frac{\partial}{\partial t}\phi(0,y)\Big)\\
&= \frac{i}{2}\int d^3x e^{ip_jx^j}\int d^3y\Big(\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3p'}{2\omega_{m_1}(p')}\Big(e^{-ip'^{m_1}_\mu(x^\mu-y^\mu)} - e^{ip'^{m_1}_\mu(x^\mu-y^\mu)}\Big)\phi(0,y)\\
&+ \frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3p'}{2\omega_{m_1}(p')}\Big(e^{-ip'^{m_1}_\mu(x^\mu-y^\mu)} - e^{ip'^{m_1}_\mu(x^\mu-y^\mu)}\Big)\frac{\partial}{\partial t}\phi(0,y)\Big)\\
&= \frac{i}{2}\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3x e^{ip_jx^j}\int d^3y\Big(\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3p'}{2\omega_{m_1}(p')}\Big(e^{-ip'^{m_1}_\mu(x^\mu-y^\mu)} - e^{ip'^{m_1}_\mu(x^\mu-y^\mu)}\Big)\\
&\int\frac{d^3p''}{\sqrt{2\omega_m(p'')}}\Big(a_\phi(p'')e^{-ip''_\nu y^\nu} + a^*_\phi(p'')e^{ip''_\nu y^\nu}\Big)\\
&+ \frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3p'}{2\omega_{m_1}(p')}\Big(e^{-ip'^{m_1}_\mu(x^\mu-y^\mu)} - e^{ip'^{m_1}_\mu(x^\mu-y^\mu)}\Big)\\
&\frac{\partial}{\partial t}\int\frac{d^3p''}{\sqrt{2\omega_m(p'')}}\Big(a_\phi(p'')e^{-ip''_\nu y^\nu} + a^*_\phi(p'')e^{ip''_\nu y^\nu}\Big)\Big)
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Die Integrale über x und p' werden unter Ausnutzung der Fourierdarstellung der Deltafunktion ausgewertet:

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\int d^3y \Bigg(\frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3p'}{2}\Big(e^{ip'_\mu y^\mu - i\omega_{m_1}(p')t}\delta^3(p-p') + e^{-ip'_\mu y^\mu + i\omega_{m_1}(p')t}\delta^3(p+p')\Big) \\
&\int \frac{d^3p''}{\sqrt{2\omega_m(p'')}}\Big(a_\phi(p'')e^{-ip''_\nu y^\nu} + a^*_\phi(p'')e^{ip''_\nu y^\nu}\Big) \\
&+ \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3p'}{2\omega_{m_1}(p')}\Big(e^{ip'_\mu y^\mu - i\omega_{m_1}(p')t}\delta^3(p-p') - e^{-ip'_\mu y^\mu + i\omega_{m_1}(p')t}\delta^3(p+p')\Big) \\
&\int \frac{d^3p''\sqrt{\omega_m(p'')}}{\sqrt{2}}\Big(a_\phi(p'')e^{-ip''_\nu y^\nu} - a^*_\phi(p'')e^{ip''_\nu y^\nu}\Big)\Bigg) \\
&= \frac{1}{2}\int d^3y \Bigg(\frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{2}\Big(e^{ip_\mu y^\mu - i\omega_{m_1}(p)t} + e^{ip_\mu y^\mu + i\omega_{m_1}(p)t}\Big) \\
&\int \frac{d^3p''}{\sqrt{2\omega_m(p'')}}\Big(a_\phi(p'')e^{-ip''_\nu y^\nu} + a^*_\phi(p'')e^{ip''_\nu y^\nu}\Big) \\
&+ \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_{m_1}(p)}\Big(e^{ip_\mu y^\mu - i\omega_{m_1}(p)t} - e^{ip_\mu y^\mu + i\omega_{m_1}(p)t}\Big) \\
&\int \frac{d^3p''\sqrt{\omega_m(p'')}}{\sqrt{2}}\Big(a_\phi(p'')e^{-ip''_\nu y^\nu} - a^*_\phi(p'')e^{ip''_\nu y^\nu}\Big)\Bigg)
\end{aligned}
\tag{4.10}
$$

Weiterhin wird die Exponentialdarstellung der trigonometrischen Funktionen verwendet. Die verbleibenden Integrale werten wir wieder mit der Integraldarstellung der Deltafunktion aus:

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\int d^3y \Bigg(\frac{1}{(2\pi)^3}\Big(e^{ip_\mu y^\mu}\cos(\omega_{m_1}(p)t)\Big)\int \frac{d^3p''}{\sqrt{2\omega_m(p'')}}\Big(a_\phi(p'')e^{-ip''_\nu y^\nu} + a^*_\phi(p'')e^{ip''_\nu y^\nu}\Big) \\
&- \frac{i}{(2\pi)^3}\frac{1}{\omega_{m_1}(p)}\Big(e^{ip_\mu y^\mu}\sin(\omega_{m_1}(p)t)\Big)\int \frac{d^3p''\sqrt{\omega_m(p'')}}{\sqrt{2}}\Big(a_\phi(p'')e^{-ip''_\nu y^\nu} - a^*_\phi(p'')e^{ip''_\nu y^\nu}\Big)\Bigg) \\
&= \frac{1}{2}\Bigg(\cos(\omega_{m_1}(p)t)\int \frac{d^3p''}{\sqrt{2\omega_m(p'')}}\Big(a_\phi(p'')\delta^3(p-p'') + a^*_\phi(p'')\delta^3(p+p'')\Big) \\
&- \frac{i}{\omega_{m_1}(p)}\sin(\omega_{m_1}(p)t)\int \frac{d^3p''\sqrt{\omega_m(p'')}}{\sqrt{2}}\Big(a_\phi(p'')\delta^3(p-p'') - a^*_\phi(p'')\delta^3(p+p'')\Big)\Bigg) \\
&= \frac{\cos(\omega_{m_1}(p)t)}{2\sqrt{2\omega_m(p)}}\Big(a_\phi(p) + a^*_\phi(-p)\Big) - \frac{i\sin(\omega_{m_1}(p)t)\sqrt{\omega_m(p)}}{2\sqrt{2}\omega_{m_1}(p)}\Big(a_\phi(p) - a^*_\phi(-p)\Big)
\end{aligned}
\tag{4.11}
$$

Damit wird Gleichung (4.8) zu:

$$\begin{aligned}\phi(t,p) = &\frac{\cos(\omega_{m_1}(p)t)}{2\sqrt{2\omega_m(p)}}\Big(a_\phi(p)+a_\phi^*(-p)\Big) - \frac{i\sin(\omega_{m_1}(p)t)\sqrt{\omega_m(p)}}{2\sqrt{2}\omega_{m_1}(p)}\Big(a_\phi(p)-a_\phi^*(-p)\Big)\\ &+\frac{\cos(\omega_{m_1}(p)t)}{2\sqrt{2\omega_m(p)}}\Big(a_\psi(p)+a_\psi^*(-p)\Big) - \frac{i\sin(\omega_{m_1}(p)t)\sqrt{\omega_m(p)}}{2\sqrt{2}\omega_{m_1}(p)}\Big(a_\psi(p)-a_\psi^*(-p)\Big)\\ &+\frac{\cos(\omega_{m_2}(p)t)}{2\sqrt{2\omega_m(p)}}\Big(a_\phi(p)+a_\phi^*(-p)\Big) - \frac{i\sin(\omega_{m_2}(p)t)\sqrt{\omega_m(p)}}{2\sqrt{2}\omega_{m_2}(p)}\Big(a_\phi(p)-a_\phi^*(-p)\Big)\\ &-\frac{\cos(\omega_{m_2}(p)t)}{2\sqrt{2\omega_m(p)}}\Big(a_\psi(p)+a_\psi^*(-p)\Big) + \frac{i\sin(\omega_{m_2}(p)t)\sqrt{\omega_m(p)}}{2\sqrt{2}\omega_{m_2}(p)}\Big(a_\psi(p)-a_\psi^*(-p)\Big)\end{aligned} \tag{4.12}$$

Man sieht, dass im Fall $f = 0$, wo $m_1 = m_2 = m$ gilt, das freie Feld $\frac{e^{-i\omega(p)t}a_\phi(p)+e^{i\omega(p)t}a_\phi^*(-p)}{\sqrt{2\omega(p)}}$ herauskommt. Weiterhin ist zu sehen, dass sich bei $t = 0$ alle Terme, die a_ψ und a_ψ^* enthalten, herauskürzen, so dass, wie erwartet, im Anfangszustand nur das Feld ϕ vorhanden ist. Die Zeitentwicklung des Feldes ψ lautet analog:

$$\begin{aligned}\psi(t,p) &= \int d^3x e^{ip_jx^j}\psi(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\int d^3x e^{ip_jx^j}\Big(\phi_1(t,x)-\phi_2(t,x)\Big)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\int d^3x e^{ip_jx^j}\Big(i\int d^3y\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Delta_{m_1}(t,x-y)\phi_1(0,y)+\Delta_{m_1}(t,x-y)\frac{\partial}{\partial t}\phi_1(0,y)\Big)\\ &- i\int d^3y\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Delta_{m_2}(t,x-y)\phi_2(0,y)+\Delta_{m_2}(t,x-y)\frac{\partial}{\partial t}\phi_2(0,y)\Big)\Big)\end{aligned} \tag{4.13}$$

Die weiteren Schritte zur Berechnung von $\psi(t,p)$ unterscheiden sich von den bisher durchgeführten Rechnungen nur um einige Vorzeichen, deshalb werden sie hier weggelassen.

$$\begin{aligned}\psi(t,p) = &\frac{\cos(\omega_{m_1}(p)t)}{2\sqrt{2\omega_m(p)}}\Big(a_\phi(p)+a_\phi^*(-p)\Big) - \frac{i\sin(\omega_{m_1}(p)t)\sqrt{\omega_m(p)}}{2\sqrt{2}\omega_{m_1}(p)}\Big(a_\phi(p)-a_\phi^*(-p)\Big)\\ &+\frac{\cos(\omega_{m_1}(p)t)}{2\sqrt{2\omega_m(p)}}\Big(a_\psi(p)+a_\psi^*(-p)\Big) - \frac{i\sin(\omega_{m_1}(p)t)\sqrt{\omega_m(p)}}{2\sqrt{2}\omega_{m_1}(p)}\Big(a_\psi(p)-a_\psi^*(-p)\Big)\\ &-\frac{\cos(\omega_{m_2}(p)t)}{2\sqrt{2\omega_m(p)}}\Big(a_\phi(p)+a_\phi^*(-p)\Big) + \frac{i\sin(\omega_{m_2}(p)t)\sqrt{\omega_m(p)}}{2\sqrt{2}\omega_{m_2}(p)}\Big(a_\phi(p)-a_\phi^*(-p)\Big)\\ &+\frac{\cos(\omega_{m_2}(p)t)}{2\sqrt{2\omega_m(p)}}\Big(a_\psi(p)+a_\psi^*(-p)\Big) - \frac{i\sin(\omega_{m_2}(p)t)\sqrt{\omega_m(p)}}{2\sqrt{2}\omega_{m_2}(p)}\Big(a_\psi(p)-a_\psi^*(-p)\Big)\end{aligned} \tag{4.14}$$

4.2 Berechnung von ϕ^2 im Grundzustand

Als Nächstes soll die Observable ϕ^2 des gekoppelten Feldes zur Zeit t berechnet und mit dem ϕ^2 des freien Feldes verglichen werden. Dazu wird Gleichung (4.12) in den Ortsraum

transformiert:

$$\begin{aligned}\phi(t,x) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3p e^{-ip_j x^j} \\ \Bigg(\frac{\cos(\omega_{m_1}(p)t)}{2\sqrt{2\omega_m(p)}}\Big(a_\phi(p)+a_\phi^*(-p)\Big) - \frac{i\sin(\omega_{m_1}(p)t)\sqrt{\omega_m(p)}}{2\sqrt{2}\omega_{m_1}(p)}\Big(a_\phi(p)-a_\phi^*(-p)\Big) \\ + \frac{\cos(\omega_{m_1}(p)t)}{2\sqrt{2\omega_m(p)}}\Big(a_\psi(p)+a_\psi^*(-p)\Big) - \frac{i\sin(\omega_{m_1}(p)t)\sqrt{\omega_m(p)}}{2\sqrt{2}\omega_{m_1}(p)}\Big(a_\psi(p)-a_\psi^*(-p)\Big) \\ + \frac{\cos(\omega_{m_2}(p)t)}{2\sqrt{2\omega_m(p)}}\Big(a_\phi(p)+a_\phi^*(-p)\Big) - \frac{i\sin(\omega_{m_2}(p)t)\sqrt{\omega_m(p)}}{2\sqrt{2}\omega_{m_2}(p)}\Big(a_\phi(p)-a_\phi^*(-p)\Big) \\ - \frac{\cos(\omega_{m_2}(p)t)}{2\sqrt{2\omega_m(p)}}\Big(a_\psi(p)+a_\psi^*(-p)\Big) + \frac{i\sin(\omega_{m_2}(p)t)\sqrt{\omega_m(p)}}{2\sqrt{2}\omega_{m_2}(p)}\Big(a_\psi(p)-a_\psi^*(-p)\Big)\Bigg)\end{aligned} \tag{4.15}$$

Es gelten wie zuvor die Relationen $[a(p), a^*(p')] = (2\pi)^3\delta(p-p')$, $[a(p), a(p')] = 0 = [a^*(p), a^*(p')]$. Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}\langle\Omega|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\Omega\rangle = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3p e^{-ip_j(x^j-y^j)}\frac{1}{8} \\ \Bigg(\frac{\cos(\omega_{m_1}(p)t)^2}{\omega_m(p)} + \frac{\cos(\omega_{m_2}(p)t)^2}{\omega_m(p)} + \frac{\sin(\omega_{m_1}(p)t)^2\omega_m(p)}{\omega_{m_1}(p)^2} + \frac{\sin(\omega_{m_2}(p)t)^2\omega_m(p)}{\omega_{m_2}(p)^2} \\ + \frac{2\cos(\omega_{m_1}(p)t)\cos(\omega_{m_2}(p)t)}{\omega_m(p)} + \frac{2\sin(\omega_{m_1}(p)t)\sin(\omega_{m_2}(p)t)\omega_m(p)}{\omega_{m_1}(p)\omega_{m_2}(p)} \\ \frac{\cos(\omega_{m_1}(p)t)^2}{\omega_m(p)} + \frac{\cos(\omega_{m_2}(p)t)^2}{\omega_m(p)} + \frac{\sin(\omega_{m_1}(p)t)^2\omega_m(p)}{\omega_{m_1}(p)^2} + \frac{\sin(\omega_{m_2}(p)t)^2\omega_m(p)}{\omega_{m_2}(p)^2} \\ - \frac{2\cos(\omega_{m_1}(p)t)\cos(\omega_{m_2}(p)t)}{\omega_m(p)} - \frac{2\sin(\omega_{m_1}(p)t)\sin(\omega_{m_2}(p)t)\omega_m(p)}{\omega_{m_1}(p)\omega_{m_2}(p)}\Bigg)\end{aligned} \tag{4.16}$$

Die ersten sechs Terme werden von den Vertauschungsrelationen der Operatoren a_ϕ^* und a_ϕ erzeugt, die letzten Terme von denen der Operatoren a_ψ^* und a_ψ:

$$\begin{aligned}\langle\Omega|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\Omega\rangle = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3p e^{-ip_j(x^j-y^j)}\frac{1}{4} \\ \Bigg(\frac{\cos(\omega_{m_1}(p)t)^2}{\omega_m(p)} + \frac{\cos(\omega_{m_2}(p)t)^2}{\omega_m(p)} + \frac{\sin(\omega_{m_1}(p)t)^2\omega_m(p)}{\omega_{m_1}(p)^2} + \frac{\sin(\omega_{m_2}(p)t)^2\omega_m(p)}{\omega_{m_2}(p)^2}\Bigg)\end{aligned} \tag{4.17}$$

Das Phiquadrat zur Zeit $t=0$ schreiben wir mit der Beziehung $\cos^2+\sin^2=1$ in folgender Weise:

$$\begin{aligned}\langle\Omega|\,\phi(0,x)\phi(0,y)\,|\Omega\rangle = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3p e^{-ip_j(x^j-y^j)}\frac{1}{4}\Bigg(\frac{1}{\omega_m(p)}+\frac{1}{\omega_m(p)}\Bigg) \\ = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3p e^{-ip_j(x^j-y^j)}\frac{1}{4} \\ \Bigg(\frac{\cos(\omega_{m_1}(p)t)^2+\sin(\omega_{m_1}(p)t)^2}{\omega_m(p)} + \frac{\cos(\omega_{m_2}(p)t)^2+\sin(\omega_{m_2}(p)t)^2}{\omega_m(p)}\Bigg)\end{aligned} \tag{4.18}$$

Jetzt bilden wir die Differenz von Gleichung (4.17) und (4.18):

$$\begin{aligned}&\langle\Omega|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\Omega\rangle - \langle\Omega|\,\phi(0,x)\phi(0,y)\,|\Omega\rangle = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3p e^{-ip_j(x^j-y^j)}\frac{1}{4}\\&\left(\frac{\sin(\omega_{m_1}(p)t)^2\omega_m(p)}{\omega_{m_1}(p)^2} + \frac{\sin(\omega_{m_2}(p)t)^2\omega_m(p)}{\omega_{m_2}(p)^2} - \frac{\sin(\omega_{m_1}(p)t)^2}{\omega_m(p)} - \frac{\sin(\omega_{m_2}(p)t)^2}{\omega_m(p)}\right)\end{aligned} \tag{4.19}$$

Zusammenfassen ergibt:

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3p e^{-ip_j(x^j-y^j)}\frac{\omega_m(p)}{4}\\&\left(\sin(\omega_{m_1}(p)t)^2\Big(\frac{1}{\omega_{m_1}(p)^2} - \frac{1}{\omega_m(p)^2}\Big) + \sin(\omega_{m_2}(p)t)^2\Big(\frac{1}{\omega_{m_2}(p)^2} - \frac{1}{\omega_m(p)^2}\Big)\right)\\&= \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3p e^{-ip_j(x^j-y^j)}\frac{\omega_m(p)}{4}\\&\left(\sin(\omega_{m_1}(p)t)^2\frac{-f}{\omega_{m_1}(p)^2\omega_m(p)^2} + \sin(\omega_{m_2}(p)t)^2\frac{f}{\omega_{m_2}(p)^2\omega_m(p)^2}\right)\end{aligned} \tag{4.20}$$

Mit der Reihenentwicklung $\frac{\omega_m^2}{\omega_{m_{1,2}}^2} = \frac{p^2+m^2}{p^2+m^2\pm f} = 1 \mp \frac{f}{\omega_m^2} + O(f^2)$ und der Ausnutzung der Additionstheoreme der Sinusfunktion erhalten wir:

$$\begin{aligned}&\langle\Omega|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\Omega\rangle - \langle\Omega|\,\phi(0,x)\phi(0,y)\,|\Omega\rangle \approx \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3p e^{-ip_j(x^j-y^j)}\frac{1}{4\omega_m(p)^3}\\&f\left(\sin(\omega_{m_2}(p)t)^2\Big(1+\frac{f}{\omega_m(p)^2}\Big) - \sin(\omega_{m_1}(p)t)^2\Big(1-\frac{f}{\omega_m(p)^2}\Big)\right)\\&= \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3p e^{-ip_j(x^j-y^j)}\frac{1}{4\omega_m(p)^3}\\&\left(f\Big(\sin(\omega_{m_2}(p)t)^2 - \sin(\omega_{m_1}(p)t)^2\Big) + \frac{f^2}{\omega_m(p)^2}\Big(\sin(\omega_{m_2}(p)t)^2 + \sin(\omega_{m_1}(p)t)^2\Big)\right)\\&= \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3p e^{-ip_j(x^j-y^j)}\frac{1}{4\omega_m(p)^3}\Bigg(f\sin((\omega_{m_2}(p)+\omega_{m_1}(p))t)\sin((\omega_{m_2}(p)-\omega_{m_1}(p))t)\\&+ \frac{f^2}{\omega_m(p)^2}\Big(\sin(\omega_{m_2}(p)t)^2 + \sin(\omega_{m_1}(p)t)^2\Big)\Bigg)\end{aligned} \tag{4.21}$$

Es gilt folgende Reihenentwicklung in f: $\omega_{m_2}(p)-\omega_{m_1}(p) = \sqrt{p^2+m^2-f}-\sqrt{p^2+m^2+f} = -\frac{f}{\sqrt{p^2+m^2}} + O(f^3)$. Damit gilt die Näherung:

$$\begin{aligned}&\langle\Omega|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\Omega\rangle - \langle\Omega|\,\phi(0,x)\phi(0,y)\,|\Omega\rangle\\&\approx \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3p e^{-ip_j(x^j-y^j)}\frac{1}{4\omega_m(p)^3}\left(f\sin(2\omega_m(p)t)\sin\Big(\frac{-ft}{\omega_m(p)}\Big) + \frac{f^2}{\omega_m(p)^2}2\sin(\omega_m(p)t)^2\right)\end{aligned} \tag{4.22}$$

Jetzt bilden wir den Grenzwert $y \to x$ und führen Kugelkoordinaten ein. Danach wird eine Substitution $\omega = \sqrt{p^2+m^2}$, $\omega d\omega = pdp$ durchgeführt:

$$\begin{aligned}
&\lim_{y\to x}\Big(\langle\Omega|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\Omega\rangle - \langle\Omega|\,\phi(0,x)\phi(0,y)\,|\Omega\rangle\Big) \approx \\
&\frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^\infty \frac{4\pi p^2 dp}{4\omega_m(p)^3}\left(f\sin(2\omega_m(p)t)\sin\Big(\frac{-ft}{\omega_m(p)}\Big) + \frac{f^2}{\omega_m(p)^2}2\sin(\omega_m(p)t)^2\right) \\
&\approx \frac{1}{8\pi^2}\int_m^\infty \sqrt{\omega^2-m^2}d\omega\left(-\frac{f}{\omega^2}\sin(2\omega t)\sin\Big(\frac{ft}{\omega}\Big) + \frac{f^2}{\omega^4}2\sin(\omega t)^2\right)
\end{aligned} \tag{4.23}$$

4.2.1 Verhalten für kleine Zeiten

Wir möchten jetzt das Verhalten dieser Größe für kleine Zeiten bestimmen. Den Ausdruck $\sin\left(\frac{ft}{\omega}\right)$ können wir in eine Potenzreihe entwickeln, da ω nach unten durch m beschränkt ist, f und t sind nach Voraussetzung klein. Für den Ausdruck $\sin(2\omega t)$ können wir nur für kleine ω eine Reihenentwicklung durchführen. Deshalb teilen wir das Integral in zwei Teile und wählen als Grenze $\frac{\epsilon}{t}$, mit $mt < \epsilon << 1$:

$$\begin{aligned}
&\lim_{y\to x}\Big(\langle\Omega|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\Omega\rangle - \langle\Omega|\,\phi(0,x)\phi(0,y)\,|\Omega\rangle\Big) \\
&\approx \frac{1}{8\pi^2}\int_m^{\frac{\epsilon}{t}} \sqrt{\omega^2-m^2}d\omega\left(-\frac{f}{\omega^2}\sin(2\omega t)\frac{ft}{\omega} + \frac{f^2}{\omega^4}2\sin(\omega t)^2\right) \\
&+ \frac{1}{8\pi^2}\int_{\frac{\epsilon}{t}}^\infty \sqrt{\omega^2-m^2}d\omega\left(-\frac{f}{\omega^2}\sin(2\omega t)\frac{ft}{\omega} + \frac{f^2}{\omega^4}2\sin(\omega t)^2\right)
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Im ersten Integral benutzen wir die Relation $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ und fassen zusammen. Da die untere Integrationsgrenze im zweiten Integral viel größer als m ist, können wir $\sqrt{\omega^2-m^2}$ durch ω ersetzen:

$$\begin{aligned}
&\approx \frac{f^2}{8\pi^2}\int_m^{\frac{\epsilon}{t}} \sqrt{\omega^2-m^2}d\omega\frac{2\sin(\omega t)}{\omega^3}\left(-t\cos(\omega t) + \frac{\sin(\omega t)}{\omega}\right) \\
&+ \frac{f^2}{8\pi^2}\int_{\frac{\epsilon}{t}}^\infty d\omega\left(-t\frac{\sin(2\omega t)}{\omega^2} + \frac{2\sin(\omega t)^2}{\omega^3}\right)
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Die trigonometrischen Funktionen des ersten Integrals werden in eine Reihe entwickelt. Im zweiten Integral wird die Substitution $u = \omega t$ durchgeführt:

$$\begin{aligned}
&\approx \frac{f^2}{8\pi^2}\int_m^{\frac{\epsilon}{t}} \sqrt{\omega^2-m^2}d\omega\frac{2\omega t}{\omega^3}\left(-t\Big(1-\frac{1}{2}\omega^2t^2\Big) + \frac{\omega t - \frac{1}{6}\omega^3t^3}{\omega}\right) \\
&+ \frac{f^2t^2}{8\pi^2}\int_\epsilon^\infty du\left(-\frac{\sin(2u)}{u^2} + \frac{2\sin(u)^2}{u^3}\right) \\
&\approx \frac{f^2t^4}{12\pi^2}\int_m^{\frac{\epsilon}{t}} \sqrt{\omega^2-m^2}d\omega + \frac{f^2t^2}{8\pi^2}\int_\epsilon^\infty du\left(-\frac{\sin(2u)}{u^2} + \frac{2\sin(u)^2}{u^3}\right) \\
&\approx \frac{f^2t^4}{12\pi^2}\left(\frac{1}{2}\frac{\epsilon^2}{t^2} + O\big(\ln(t)\big)\right) + \frac{f^2t^2}{8\pi^2}\frac{1-\cos(2\epsilon)}{2\epsilon^2} \approx \frac{\epsilon^2f^2t^2}{24\pi^2} + \frac{f^2t^2}{8\pi^2}\big(1+O(\epsilon^2)\big)
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Da $\epsilon << 1$ vorausgesetzt wurde, erhalten wir das Wickquadrat des gekoppelten Feldes ϕ am absoluten Temperaturnullpunkt für kleine Zeiten:

$$\boxed{\lim_{y\to x}\Big(\langle\Omega|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\Omega\rangle - \langle\Omega|\,\phi(0,x)\phi(0,x)\,|\Omega\rangle\Big) \approx \frac{f^2t^2}{8\pi^2}} \tag{4.27}$$

Man sieht also, dass für kleine Zeiten und schwache Kopplung dieser Ausdruck proportional zu t^2 und auch quadratisch in der Kopplungskonstante f ist.

4.2.2 Verhalten für große Zeiten

Als Nächstes ist es unser Ziel, die Größe $\lim_{y\to x}\Big(\langle\Omega|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\Omega\rangle - \langle\Omega|\,\phi(0,x)\phi(0,y)\,|\Omega\rangle\Big)$ für große Zeiten zu bestimmen. Den ersten Teil von Gleichung (4.23) wandeln wir mit Hilfe trigonometrischer Umformungen um und schreiben den Cosinus als Exponentialfunktion:

$$\begin{aligned}
&-\frac{f}{8\pi^2}\int_m^\infty \frac{\sqrt{\omega^2-m^2}d\omega}{\omega^2}\sin(2\omega t)\sin\Big(\frac{ft}{\omega}\Big)\\
&=-\frac{f}{16\pi^2}\int_m^\infty \frac{\sqrt{\omega^2-m^2}d\omega}{\omega^2}\Big(\cos\Big(2\omega t-\frac{ft}{\omega}\Big)-\cos\Big(2\omega t+\frac{ft}{\omega}\Big)\Big)\\
&=\Re\Big(-\frac{f}{16\pi^2}\int_m^\infty \frac{\sqrt{\omega^2-m^2}d\omega}{\omega^2}\Big(\exp\Big(i2\omega t-i\frac{ft}{\omega}\Big)-\exp\Big(i2\omega t+i\frac{ft}{\omega}\Big)\Big)\Big)
\end{aligned} \tag{4.28}$$

Wir werten jetzt den Teil des Integrals, der $\exp\Big(i2\omega t + i\frac{ft}{\omega}\Big)$ enthält, weiter aus. Der restliche Teil des Integrals führt auf das gleiche Ergebnis, deshalb beschränken wir uns hier auf den ersten Teil. Dazu setzen wir die Funktion in die komplexe ω-Ebene fort und ändern den Integrationsweg wie in Bild 4.1 dargestellt. Es ist leicht zu sehen, dass die Integrale, die zusätzlich durchzuführen sind, um den Kreis zu schließen, Null ergeben. Deshalb wurden sie weggelassen. Wir müssen also folgendes Integral lösen:

$$\begin{aligned}
&\Re\Big(\frac{f}{16\pi^2}\int_m^\infty \frac{\sqrt{\omega^2-m^2}d\omega}{\omega^2}\exp\Big(i2\omega t+i\frac{ft}{\omega}\Big)\Big)\\
\approx&\Re\Big(\frac{f}{16\pi^2}\int_0^\infty \frac{\sqrt{(m+i\omega_i)^2-m^2}id\omega_i}{(m+i\omega_i)^2}\exp\Big(i2(m+i\omega_i)t+i\frac{ft}{m+i\omega_i}\Big)\Big)\\
=&\Re\Big(\frac{f}{16\pi^2}\int_0^\infty \frac{\sqrt{i2m\omega_i-\omega_i^2}id\omega_i}{(m+i\omega_i)^2}\exp\Big(-2\omega_i t+\frac{\omega_i ft}{m^2+\omega_i^2}\Big)\exp\Big(i2mt+i\frac{mft}{m^2+\omega_i^2}\Big)\Big)
\end{aligned} \tag{4.29}$$

Wir führen die Substitution $\omega_i t = \omega'$ durch:

$$\approx \Re\Big(\frac{f}{16\pi^2}\int_0^\infty \frac{\sqrt{i2tm\omega'-\omega'^2}id\omega'}{(tm+i\omega')^2}\exp\Big(-2\omega'+\frac{\omega' f}{m^2+\frac{\omega'^2}{t^2}}\Big)\exp\Big(i2mt+i\frac{mft^3}{t^2m^2+\omega'^2}\Big)\Big) \tag{4.30}$$

Es überwiegen im Zähler und Nenner die Summanden, in denen t vorkommt. Da wir das Verhalten für sehr große Zeiten bestimmen möchten, vernachlässigen wir die übrigen Summanden:

$$\approx \frac{1}{t^{3/2}}\Re\left(\frac{f}{16\pi^2}\int_0^\infty \frac{\sqrt{i2m\omega'}id\omega'}{m^2}\exp\Big(-2\omega'+\frac{\omega' f}{m^2+\frac{\omega'^2}{t^2}}\Big)\exp\Big(i2mt+i\frac{mft^3}{t^2m^2+\omega'^2}\Big)\right) \tag{4.31}$$

Als Majorante des verbleibenden Integrals existiert das von t unabhängige konvergente Integral $\frac{f}{16\pi^2}\int_0^\infty \frac{\sqrt{2m\omega'}d\omega'}{m^2}\exp(-2\omega'+\frac{\omega' f}{m^2})$. Deshalb fällt $-\frac{f}{8\pi^2}\int_m^\infty \frac{\sqrt{\omega^2-m^2}d\omega}{\omega^2}\sin(2\omega t)\sin\left(\frac{ft}{\omega}\right)$ für große t mindestens wie $\frac{1}{t^{3/2}}$ ab.

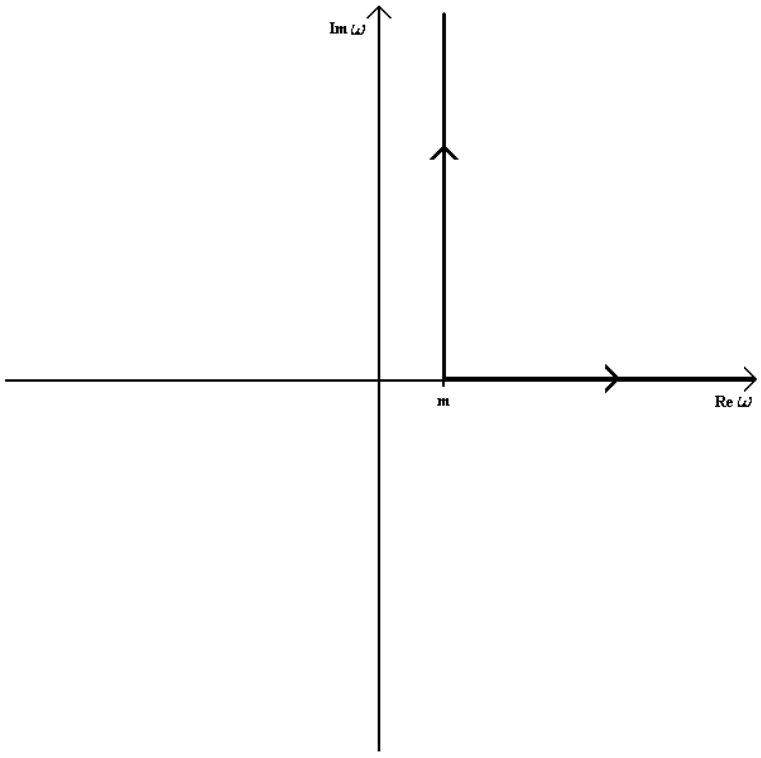

Abbildung 4.1: Verschiebung des Integrationsweges in der komplexen Ebene

Es ist noch der zweite Teil von Gleichung (4.23) auszuwerten:

$$\frac{f^2}{8\pi^2}\int_m^\infty \frac{\sqrt{\omega^2-m^2}}{\omega^4}2\sin(\omega t)^2\ d\omega = \frac{f^2}{8\pi^2}\int_m^\infty \frac{\sqrt{\omega^2-m^2}}{\omega^4}\Big(1-\cos(2\omega t)\Big)d\omega \tag{4.32}$$

Partielle Integration ergibt:

$$-\frac{f^2}{8\pi^2}\int_m^\infty \frac{\sqrt{\omega^2-m^2}}{\omega^4}\cos(2\omega t)d\omega = \frac{f^2}{8\pi^2}\int_m^\infty \frac{3\omega^2-4m^2}{\sqrt{\omega^2-m^2}\omega^5}\frac{\sin(2\omega t)}{2t}d\omega \tag{4.33}$$

Dieser Ausdruck konvergiert mit wachsendem t gegen Null. Es verbleibt also nur folgender Term:

$$\lim_{y\to x}\Big(\langle\Omega|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\Omega\rangle-\langle\Omega|\,\phi(0,x)\phi(0,y)\,|\Omega\rangle\Big)\approx\frac{f^2}{8\pi^2}\int_m^\infty\frac{\sqrt{\omega^2-m^2}}{\omega^4}d\omega \tag{4.34}$$

Damit erhalten wir folgendes Langzeitverhalten des Wickquadrates des gekoppelten Feldes ϕ zur Temperatur $T=0$:

$$\boxed{\lim_{y\to x}\Big(\langle\Omega|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\Omega\rangle-\langle\Omega|\,\phi(0,x)\phi(0,y)\,|\Omega\rangle\Big)\approx\frac{f^2}{24\pi^2m^2}} \tag{4.35}$$

4.3 Berechnung von ϕ^2 in einem KMS-Zustand

Die im letzten Abschnitt für den Grundzustand berechnete Größe soll jetzt für Felder mit endlicher Temperatur bestimmt werden. ϕ habe die inverse Temperatur β_1, ψ habe β_2. Mit der Definition des Feldes aus Gleichung (4.15) ergibt sich:

$$\begin{aligned}
&\langle\beta_1,\beta_2|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\beta_1,\beta_2\rangle=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3p e^{-ip_j(x^j-y^j)}\left(\frac{1+e^{-\beta_1\omega_m(p)}}{1-e^{-\beta_1\omega_m(p)}}\right)\frac{1}{8}\\
&\left(\frac{\cos(\omega_{m_1}(p)t)^2}{\omega_m(p)}+\frac{\cos(\omega_{m_2}(p)t)^2}{\omega_m(p)}+\frac{\sin(\omega_{m_1}(p)t)^2\omega_m(p)}{\omega_{m_1}(p)^2}+\frac{\sin(\omega_{m_2}(p)t)^2\omega_m(p)}{\omega_{m_2}(p)^2}\right.\\
&\left.+\frac{2\cos(\omega_{m_1}(p)t)\cos(\omega_{m_2}(p)t)}{\omega_m(p)}+\frac{2\sin(\omega_{m_1}(p)t)\sin(\omega_{m_2}(p)t)\omega_m(p)}{\omega_{m_1}(p)\omega_{m_2}(p)}\right)\\
&+\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3p e^{-ip_j(x^j-y^j)}\left(\frac{1+e^{-\beta_2\omega_m(p)}}{1-e^{-\beta_2\omega_m(p)}}\right)\frac{1}{8}\\
&\left(\frac{\cos(\omega_{m_1}(p)t)^2}{\omega_m(p)}+\frac{\cos(\omega_{m_2}(p)t)^2}{\omega_m(p)}+\frac{\sin(\omega_{m_1}(p)t)^2\omega_m(p)}{\omega_{m_1}(p)^2}+\frac{\sin(\omega_{m_2}(p)t)^2\omega_m(p)}{\omega_{m_2}(p)^2}\right.\\
&\left.-\frac{2\cos(\omega_{m_1}(p)t)\cos(\omega_{m_2}(p)t)}{\omega_m(p)}-\frac{2\sin(\omega_{m_1}(p)t)\sin(\omega_{m_2}(p)t)\omega_m(p)}{\omega_{m_1}(p)\omega_{m_2}(p)}\right)
\end{aligned} \tag{4.36}$$

Wir möchten jetzt das Phiquadrat zu $\beta_1 = \beta$, $\beta_2 = \beta + \Delta\beta$ mit kleinem $\Delta\beta$ zur Zeit t mit dem Phiquadrat zu $\beta_1 = \beta_2 = \infty$ vergleichen. Dazu bilden wir folgende Differenz:

$$\begin{aligned}
&\langle \beta, \beta+\Delta\beta |\, \phi(t,x)\phi(t,y)\, | \beta, \beta+\Delta\beta\rangle - \langle \Omega |\, \phi(t,x)\phi(t,y)\, | \Omega\rangle \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3p e^{-ip_j(x^j-y^j)} \left(\frac{2}{e^{\beta\omega_m(p)}-1}\right)\frac{1}{8} \\
&\left(\frac{\cos(\omega_{m_1}(p)t)^2}{\omega_m(p)} + \frac{\cos(\omega_{m_2}(p)t)^2}{\omega_m(p)} + \frac{\sin(\omega_{m_1}(p)t)^2\omega_m(p)}{\omega_{m_1}(p)^2} + \frac{\sin(\omega_{m_2}(p)t)^2\omega_m(p)}{\omega_{m_2}(p)^2}\right. \\
&\left. + \frac{2\cos(\omega_{m_1}(p)t)\cos(\omega_{m_2}(p)t)}{\omega_m(p)} + \frac{2\sin(\omega_{m_1}(p)t)\sin(\omega_{m_2}(p)t)\omega_m(p)}{\omega_{m_1}(p)\omega_{m_2}(p)}\right) \\
&+ \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3p e^{-ip_j(x^j-y^j)} \left(\frac{2}{e^{(\beta+\Delta\beta)\omega_m(p)}-1}\right)\frac{1}{8} \\
&\left(\frac{\cos(\omega_{m_1}(p)t)^2}{\omega_m(p)} + \frac{\cos(\omega_{m_2}(p)t)^2}{\omega_m(p)} + \frac{\sin(\omega_{m_1}(p)t)^2\omega_m(p)}{\omega_{m_1}(p)^2} + \frac{\sin(\omega_{m_2}(p)t)^2\omega_m(p)}{\omega_{m_2}(p)^2}\right. \\
&\left. - \frac{2\cos(\omega_{m_1}(p)t)\cos(\omega_{m_2}(p)t)}{\omega_m(p)} - \frac{2\sin(\omega_{m_1}(p)t)\sin(\omega_{m_2}(p)t)\omega_m(p)}{\omega_{m_1}(p)\omega_{m_2}(p)}\right)
\end{aligned} \tag{4.37}$$

Jetzt lassen wir y gegen x konvergieren. Mit einem Umrechnungsfaktor von $11605\frac{K}{eV}$ würde zum Beispiel die Masse des Elektrons einer Temperatur von mehreren Milliarden Kelvin entsprechen. Deshalb wollen wir βm und damit auch $\beta\omega$ als groß ansehen und damit den Ausdruck $\frac{1}{e^{\beta\omega}-1}$ durch $e^{-\beta\omega}$ ersetzen. Da wir vorausgesetzt haben, dass $\Delta\beta$ klein sein soll, entwickeln wir bis zum linearen Term in $\Delta\beta$: $e^{-(\beta+\Delta\beta)\omega} \approx e^{-\beta\omega} - \Delta\beta\omega e^{-\beta\omega}$. Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned}
&\lim_{y\to x}\Big(\langle \beta, \beta+\Delta\beta |\, \phi(t,x)\phi(t,y)\, | \beta, \beta+\Delta\beta\rangle - \langle \Omega |\, \phi(t,x)\phi(t,y)\, | \Omega\rangle\Big) \\
&\approx \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3p e^{-\beta\omega_m(p)}\frac{1}{2} \\
&\left(\frac{\cos(\omega_{m_1}(p)t)^2}{\omega_m(p)} + \frac{\cos(\omega_{m_2}(p)t)^2}{\omega_m(p)} + \frac{\sin(\omega_{m_1}(p)t)^2\omega_m(p)}{\omega_{m_1}(p)^2} + \frac{\sin(\omega_{m_2}(p)t)^2\omega_m(p)}{\omega_{m_2}(p)^2}\right) \\
&- \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3p \Delta\beta\omega_m(p) e^{-\beta\omega_m(p)}\frac{1}{4} \\
&\left(\frac{\cos(\omega_{m_1}(p)t)^2}{\omega_m(p)} + \frac{\cos(\omega_{m_2}(p)t)^2}{\omega_m(p)} + \frac{\sin(\omega_{m_1}(p)t)^2\omega_m(p)}{\omega_{m_1}(p)^2} + \frac{\sin(\omega_{m_2}(p)t)^2\omega_m(p)}{\omega_{m_2}(p)^2}\right. \\
&\left. - \frac{2\cos(\omega_{m_1}(p)t)\cos(\omega_{m_2}(p)t)}{\omega_m(p)} - \frac{2\sin(\omega_{m_1}(p)t)\sin(\omega_{m_2}(p)t)\omega_m(p)}{\omega_{m_1}(p)\omega_{m_2}(p)}\right) + O(\Delta\beta^2)
\end{aligned} \tag{4.38}$$

Bestimmung von $\lim_{y\to x}\Big(\langle\beta,\beta|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\beta,\beta\rangle - \langle\Omega|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\Omega\rangle\Big)$**:**

Wir möchten uns jetzt den ersten, von $\Delta\beta$ unabhängigen Teil näher betrachten. Wieder nehmen wir an, dass die Kopplung klein sei ($f << m^2$). Mit der Reihenentwicklung $\frac{\omega_m^2}{\omega_{m_{1,2}}^2} = \frac{p^2+m^2}{p^2+m^2\pm f} = 1 \mp \frac{f}{\omega_m^2} + \frac{f^2}{\omega_m^4} + O(f^3)$ und der Beziehung $\sin^2+\cos^2 = 1$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}
&\lim_{y\to x}\Big(\langle\beta,\beta|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\beta,\beta\rangle - \langle\Omega|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\Omega\rangle\Big) \approx \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3p e^{-\beta\omega_m(p)}\frac{1}{2}\\
&\left(\frac{\cos(\omega_{m_1}(p)t)^2}{\omega_m(p)} + \frac{\cos(\omega_{m_2}(p)t)^2}{\omega_m(p)} + \frac{\sin(\omega_{m_1}(p)t)^2}{\omega_m(p)}\frac{\omega_m(p)^2}{\omega_{m_1}(p)^2} + \frac{\sin(\omega_{m_2}(p)t)^2}{\omega_m(p)}\frac{\omega_m(p)^2}{\omega_{m_2}(p)^2}\right)\\
&\approx \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3p e^{-\beta\omega_m(p)}\frac{1}{2\omega_m(p)}\left(2 + \frac{f}{\omega_m(p)^2}\Big(\sin(\omega_{m_2}(p)t)^2 - \sin(\omega_{m_1}(p)t)^2\Big)\right.\\
&\left. + \frac{f^2}{\omega_m(p)^4}\Big(\sin(\omega_{m_2}(p)t)^2 + \sin(\omega_{m_1}(p)t)^2\Big)\right)
\end{aligned} \tag{4.39}$$

Wie verwenden die Additionstheoreme des Sinus und vernachlässigen Terme, die von höherer Ordnung als f^2 sind:

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3p e^{-\beta\omega_m(p)}\left(\frac{1}{\omega_m(p)} - \frac{f}{2\omega_m(p)^3}\sin((\omega_{m_2}(p)+\omega_{m_1}(p))t)\sin((\omega_{m_2}(p)-\omega_{m_1}(p))t)\right.\\
&\left. + \frac{f^2}{2\omega_m(p)^5}\Big(\sin(\omega_{m_2}(p)t)^2 + \sin(\omega_{m_1}(p)t)^2\Big)\right)\\
&\approx \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3p e^{-\beta\omega_m(p)}\\
&\left(\frac{1}{\omega_m(p)} - \frac{f}{2\omega_m(p)^3}\sin(2\omega_m(p)t)\sin\Big(\frac{-ft}{\omega_m(p)}\Big) + \frac{f^2}{\omega_m(p)^5}\sin(\omega_m(p)t)^2\right)
\end{aligned} \tag{4.40}$$

Nach Einführung von Kugelkoordinaten und Substitution $\omega = \sqrt{p^2+m^2}$, $\omega d\omega = pdp$ erhalten wir:

$$\begin{aligned}
&\lim_{y\to x}\Big(\langle\beta,\beta|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\beta,\beta\rangle - \langle\Omega|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\Omega\rangle\Big)\\
&\approx \frac{1}{2\pi^2}\int_m^\infty d\omega\sqrt{\omega^2-m^2}e^{-\beta\omega}\left(1 + \frac{f}{2\omega^2}\sin(2\omega t)\sin\Big(\frac{ft}{\omega}\Big) + \frac{f^2}{\omega^4}\sin(\omega t)^2\right)
\end{aligned} \tag{4.41}$$

Bestimmung von $\lim_{y\to x}\Big(\langle\beta,\beta+\Delta\beta|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\beta,\beta+\Delta\beta\rangle - \langle\beta,\beta|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\beta,\beta\rangle\Big)$**:**

Jetzt betrachten wir den in $\Delta\beta$ linearen Term des folgendes Ausdrucks:

$$\begin{aligned}
&\lim_{y\to x}\Big(\langle\beta,\beta+\Delta\beta|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\beta,\beta+\Delta\beta\rangle - \langle\beta,\beta|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\beta,\beta\rangle\Big)\approx\\
&-\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3p\Delta\beta\omega_m(p)e^{-\beta\omega_m(p)}\frac{1}{4}\\
&\Bigg(\frac{\cos(\omega_{m_1}(p)t)^2}{\omega_m(p)}+\frac{\cos(\omega_{m_2}(p)t)^2}{\omega_m(p)}+\frac{\sin(\omega_{m_1}(p)t)^2\omega_m(p)}{\omega_{m_1}(p)^2}+\frac{\sin(\omega_{m_2}(p)t)^2\omega_m(p)}{\omega_{m_2}(p)^2}\\
&-\frac{2\cos(\omega_{m_1}(p)t)\cos(\omega_{m_2}(p)t)}{\omega_m(p)}-\frac{2\sin(\omega_{m_1}(p)t)\sin(\omega_{m_2}(p)t)\omega_m(p)}{\omega_{m_1}(p)\omega_{m_2}(p)}\Bigg)+O(\Delta\beta^2)\\
&\approx\frac{-1}{(2\pi)^3}\int d^3p\Delta\beta e^{-\beta\omega_m(p)}\frac{1}{4}\Bigg(2-\frac{f}{\omega_m(p)^2}\sin(2\omega_m(p)t)\sin\Big(\frac{-ft}{\omega_m(p)}\Big)+\frac{2f^2}{\omega_m(p)^4}\sin(\omega_m(p)t)^2\\
&-2\cos(\omega_{m_1}(p)t)\cos(\omega_{m_2}(p)t)-2\sin(\omega_{m_1}(p)t)\sin(\omega_{m_2}(p)t)\Big(1+\frac{f^2}{2\omega_m(p)^4}\Big)\Bigg)
\end{aligned}\tag{4.42}$$

Es wurde $\frac{\omega_m^2}{\omega_{m_1}\omega_{m_2}}=1+\frac{f^2}{2\omega_m(p)^4}+O(f^4)$ bis zur Ordnung f^2 entwickelt. Weiterhin entwickeln wir $\omega_{m_{1,2}}=\omega_m\pm\frac{f}{2\omega_m}-\frac{f^2}{8\omega_m^3}+O(f^3)$:

$$\begin{aligned}
&\approx\frac{-1}{(2\pi)^3}\int d^3p\Delta\beta e^{-\beta\omega_m(p)}\frac{1}{4}\Bigg(2-\frac{f}{\omega_m(p)^2}\sin(2\omega_m(p)t)\sin\Big(\frac{-ft}{\omega_m(p)}\Big)+\frac{2f^2}{\omega_m(p)^4}\sin(\omega_m(p)t)^2\\
&-2\Bigg(\cos\Big(\omega_m(p)t-\frac{f^2}{8\omega_m(p)^3}t\Big)^2+\cos\Big(\frac{ft}{2\omega_m(p)}\Big)^2-1\Bigg)\\
&-2\Bigg(\sin\Big(\omega_m(p)t-\frac{f^2}{8\omega_m(p)^3}t\Big)^2-\sin\Big(\frac{ft}{2\omega_m(p)}\Big)^2\Bigg)\Big(1+\frac{f^2}{2\omega_m(p)^4}\Big)\Bigg)
\end{aligned}\tag{4.43}$$

Wir erhalten nach der trigonometrischen Umformung $\cos(c+d)\cos(c-d)=\cos(c)^2+\cos(d)^2-1$ und $\sin(c+d)\sin(c-d)=\sin(c)^2-\sin(d)^2$:

$$\begin{aligned}
&=\frac{-1}{(2\pi)^3}\int d^3p\Delta\beta e^{-\beta\omega_m(p)}\frac{1}{4}\Bigg(2-\frac{f}{\omega_m(p)^2}\sin(2\omega_m(p)t)\sin\Big(\frac{-ft}{\omega_m(p)}\Big)+\frac{2f^2}{\omega_m(p)^4}\sin(\omega_m(p)t)^2\\
&-2\Big(1-2\sin\Big(\frac{ft}{2\omega_m(p)}\Big)^2\Big)-2\Bigg(\sin\Big(\omega_m(p)t-\frac{f^2}{8\omega_m(p)^3}t\Big)^2-\sin\Big(\frac{ft}{2\omega_m(p)}\Big)^2\Bigg)\frac{f^2}{2\omega_m(p)^4}\Bigg)
\end{aligned}\tag{4.44}$$

$$= \frac{-1}{(2\pi)^3}\int d^3p\Delta\beta e^{-\beta\omega_m(p)}\frac{1}{4}\Bigg(\frac{f}{\omega_m(p)^2}\sin(2\omega_m(p)t)\sin\Big(\frac{ft}{\omega_m(p)}\Big)+\frac{2f^2}{\omega_m(p)^4}\sin(\omega_m(p)t)^2$$
$$+4\sin\Big(\frac{ft}{2\omega_m(p)}\Big)^2-\frac{f^2}{\omega_m(p)^4}\Bigg(\sin\Big(\omega_m(p)t-\frac{f^2}{8\omega_m(p)^3}t\Big)^2-\sin\Big(\frac{ft}{2\omega_m(p)}\Big)^2\Bigg)\Bigg) \tag{4.45}$$

Da $f >> m^2$ vorausgesetzt wurde, ist der Term $\frac{f^2}{\omega^4}\sin\left(\frac{ft}{2\omega}\right)^2$ vernachlässigbar klein gegen $4\sin\left(\frac{ft}{2\omega}\right)^2$. Außerdem ersetzen wir den Term $\frac{f^2}{\omega_m^4}\sin\left(\omega_m(p)t-\frac{f^2}{8\omega_m(p)^3}t\right)^2$ durch $\frac{f^2}{\omega_m^4}\sin\left(\omega_m(p)t\right)^2$, da die Abweichung von der Ordnung f^4 ist. Nach Einführung von Kugelkoordinaten und Substitution $\omega=\sqrt{p^2+m^2}$, $\omega d\omega = pdp$ erhalten wir:

$$\lim_{y\to x}\Big(\langle\beta,\beta+\Delta\beta|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\beta,\beta+\Delta\beta\rangle-\langle\beta,\beta|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\beta,\beta\rangle\Big)\approx$$
$$-\frac{\Delta\beta}{8\pi^2}\int_m^\infty d\omega\sqrt{\omega^2-m^2}e^{-\beta\omega}\left(\frac{f}{\omega}\sin(2\omega t)\sin\Big(\frac{ft}{\omega}\Big)+4\omega\sin\Big(\frac{ft}{2\omega}\Big)^2+\frac{f^2}{\omega^3}\sin(\omega t)^2\right) \tag{4.46}$$

Jetzt können wir die Gleichungen (4.46), (4.41) und (4.23) addieren und erhalten:

$$\lim_{y\to x}\Big(\langle\beta,\beta+\Delta\beta|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\beta,\beta+\Delta\beta\rangle-\langle\Omega|\,\phi(0,x)\phi(0,y)\,|\Omega\rangle\Big)\approx$$
$$-\frac{\Delta\beta}{8\pi^2}\int_m^\infty d\omega\sqrt{\omega^2-m^2}e^{-\beta\omega}\left(\frac{f}{\omega}\sin(2\omega t)\sin\Big(\frac{ft}{\omega}\Big)+4\omega\sin\Big(\frac{ft}{2\omega}\Big)^2+\frac{f^2}{\omega^3}\sin(\omega t)^2\right)$$
$$+\frac{1}{2\pi^2}\int_m^\infty d\omega\sqrt{\omega^2-m^2}e^{-\beta\omega}\left(1+\frac{f}{2\omega^2}\sin(2\omega t)\sin\Big(\frac{ft}{\omega}\Big)+\frac{f^2}{\omega^4}\sin(\omega t)^2\right)$$
$$+\frac{1}{8\pi^2}\int_m^\infty\sqrt{\omega^2-m^2}d\omega\left(-\frac{f}{\omega^2}\sin(2\omega t)\sin\Big(\frac{ft}{\omega}\Big)+\frac{f^2}{\omega^4}2\sin(\omega t)^2\right) \tag{4.47}$$

4.3.1 Verhalten für kleine Zeiten

Bestimmung von $\lim_{y\to x}\Big(\langle\beta,\beta|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\beta,\beta\rangle - \langle\Omega|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\Omega\rangle\Big)$**:**

Wir möchten $\lim_{y\to x}\Big(\langle\beta,\beta|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\beta,\beta\rangle - \langle\Omega|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\Omega\rangle\Big)$ für kleine Zeiten t auswerten. Nach Gleichung (4.38) gilt:

$$\begin{aligned}
&\lim_{y\to x}\Big(\langle\beta,\beta|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\beta,\beta\rangle - \langle\Omega|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\Omega\rangle\Big) \approx \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3p e^{-\beta\omega_m(p)}\frac{1}{2}\\
&\left(\frac{\cos(\omega_{m_1}(p)t)^2}{\omega_m(p)} + \frac{\cos(\omega_{m_2}(p)t)^2}{\omega_m(p)} + \frac{\sin(\omega_{m_1}(p)t)^2\omega_m(p)}{\omega_{m_1}(p)^2} + \frac{\sin(\omega_{m_2}(p)t)^2\omega_m(p)}{\omega_{m_2}(p)^2}\right)\\
&= \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3p e^{-\beta\omega_m(p)}\frac{1}{2\omega_m(p)}\\
&\left(2 + \sin(\omega_{m_1}(p)t)^2\frac{\omega_m(p)^2-\omega_{m_1}(p)^2}{\omega_{m_1}(p)^2} + \sin(\omega_{m_2}(p)t)^2\frac{\omega_m(p)^2-\omega_{m_2}(p)^2}{\omega_{m_2}(p)^2}\right)
\end{aligned} \tag{4.48}$$

Wir entwickeln die beiden Sinusfunktionen:

$$\begin{aligned}
&\lim_{y\to x}\Big(\langle\beta,\beta|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\beta,\beta\rangle - \langle\Omega|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\Omega\rangle\Big) \approx \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3p e^{-\beta\omega_m(p)}\frac{1}{2\omega_m(p)}\\
&\left(2 + \left(\omega_{m_1}(p)t - \frac{1}{6}\omega_{m_1}(p)^3t^3\right)^2\frac{-f}{\omega_{m_1}(p)^2} + \left(\omega_{m_2}(p)t - \frac{1}{6}\omega_{m_2}(p)^3t^3\right)^2\frac{f}{\omega_{m_2}(p)^2}\right)\\
&= \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3p e^{-\beta\omega_m(p)}\frac{1}{2\omega_m(p)}\left(2 - f\left(t - \frac{1}{6}(p^2+m^2+f)t^3\right)^2\right.\\
&\left. + f\left(t - \frac{1}{6}(p^2+m^2-f)t^3\right)^2\right)\\
&= \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3p e^{-\beta\omega_m(p)}\frac{1}{2\omega_m(p)}\left(2 + \frac{2}{3}f^2t^4 + O(t^6)\right)\\
&\approx \frac{1}{(2\pi)^2}\int_m^\infty d\omega\sqrt{\omega^2-m^2}e^{-\beta\omega}\left(2+\frac{2}{3}f^2t^4\right)
\end{aligned} \tag{4.49}$$

Mit Gleichung (2.21) erhalten wir als Näherung für kleine Zeiten:

$$\boxed{\lim_{y\to x}\Big(\langle\beta,\beta|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\beta,\beta\rangle - \langle\Omega|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\Omega\rangle\Big) \approx \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{\sqrt{m}e^{-\beta m}}{\beta^{3/2}}\left(1+\frac{1}{3}f^2t^4\right)} \tag{4.50}$$

Bestimmung von $\lim_{y\to x}\Big(\langle\beta,\beta+\Delta\beta|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\beta,\beta+\Delta\beta\rangle - \langle\beta,\beta|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\beta,\beta\rangle\Big)$**:**

Als Nächstes soll $\lim_{y\to x}\Big(\langle\beta,\beta+\Delta\beta|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\beta,\beta+\Delta\beta\rangle - \langle\beta,\beta|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\beta,\beta\rangle\Big)$ für kleine Zeiten entwickelt werden. Nach Gleichung (4.38) gilt:

$$\begin{aligned}
&\lim_{y\to x}\Big(\langle\beta,\beta+\Delta\beta|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\beta,\beta+\Delta\beta\rangle - \langle\Omega|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\Omega\rangle\Big)\\
&\approx -\frac{\Delta\beta}{(2\pi)^3}\int d^3p\,\omega_m(p)e^{-\beta\omega_m(p)}\frac{1}{4}\\
&\left(\frac{\cos(\omega_{m_1}(p)t)^2}{\omega_m(p)}+\frac{\cos(\omega_{m_2}(p)t)^2}{\omega_m(p)}+\frac{\sin(\omega_{m_1}(p)t)^2\omega_m(p)}{\omega_{m_1}(p)^2}+\frac{\sin(\omega_{m_2}(p)t)^2\omega_m(p)}{\omega_{m_2}(p)^2}\right.\\
&\left.-\frac{2\cos(\omega_{m_1}(p)t)\cos(\omega_{m_2}(p)t)}{\omega_m(p)}-\frac{2\sin(\omega_{m_1}(p)t)\sin(\omega_{m_2}(p)t)\omega_m(p)}{\omega_{m_1}(p)\omega_{m_2}(p)}\right)+O(\Delta\beta^2)
\end{aligned}\tag{4.51}$$

Wie zuvor werden die trigonometrischen Funktionen in eine Reihe entwickelt. So erhalten wir:

$$\begin{aligned}
&\lim_{y\to x}\Big(\langle\beta,\beta+\Delta\beta|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\beta,\beta+\Delta\beta\rangle - \langle\Omega|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\Omega\rangle\Big)\\
&\approx -\frac{\Delta\beta}{(2\pi)^3}\int d^3p e^{-\beta\omega_m(p)}\frac{1}{4}\left(2+\frac{2}{3}f^2t^4-2+\frac{1}{3}f^2t^4+O(t^6)\right)\\
&\approx -\frac{\Delta\beta}{(2\pi)^2}\int_m^\infty d\omega\,\omega\sqrt{\omega^2-m^2}e^{-\beta\omega}\frac{1}{2}\left(f^2t^4+O(t^6)\right)
\end{aligned}\tag{4.52}$$

Einen Teil des Integrals entwickeln wir in eine Potenzreihe an der Stelle $\omega = m$:

$$\omega\sqrt{\omega^2-m^2}=\sqrt{2}m^{3/2}\sqrt{\omega-m}+\frac{5}{4}\sqrt{2}\sqrt{m}\,(\omega-m)^{3/2}+O\left(\frac{(\omega-m)^{5/2}}{\sqrt{m}}\right)$$

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned}
&\lim_{y\to x}\Big(\langle\beta,\beta+\Delta\beta|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\beta,\beta+\Delta\beta\rangle - \langle\beta,\beta|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\beta,\beta\rangle\Big)\\
&\approx -\frac{\Delta\beta f^2t^4}{8\pi^2}\int_m^\infty d\omega\;\omega\sqrt{\omega^2-m^2}e^{-\beta\omega}\\
&\approx -\frac{\Delta\beta f^2t^4}{8\pi^2}\int_m^\infty d\omega\Big(\sqrt{2}m^{3/2}\sqrt{\omega-m}+\frac{5}{4}\sqrt{2}\sqrt{m}\,(\omega-m)^{3/2}\Big)e^{-\beta\omega}\\
&\approx -\frac{\Delta\beta f^2t^4}{8\pi^2}\left(\frac{\sqrt{\pi}m^{3/2}e^{-\beta m}}{\sqrt{2}\beta^{3/2}}+\frac{15}{16}\frac{\sqrt{2\pi m}e^{-\beta m}}{\beta^{5/2}}\right)
\end{aligned}\tag{4.53}$$

Nach Voraussetzung gilt $\beta m >> 1$, deshalb vernachlässigen wir der zweiten Term und erhalten:

$$\begin{aligned}
&\lim_{y\to x}\Big(\langle\beta,\beta+\Delta\beta|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\beta,\beta+\Delta\beta\rangle - \langle\beta,\beta|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\beta,\beta\rangle\Big)\\
&\approx \boxed{-\frac{\Delta\beta f^2t^4}{\sqrt{128\pi^3}}\frac{m^{3/2}e^{-\beta m}}{\beta^{3/2}}}
\end{aligned}\tag{4.54}$$

Jetzt können wir die Gleichungen (4.54), (4.50) und (4.27) addieren und erhalten als Näherung das Wickquadrat des Feldes ϕ für kleine Zeiten:

$$\begin{aligned}&\lim_{y\to x}\Big(\langle\beta,\beta+\Delta\beta|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\beta,\beta+\Delta\beta\rangle-\langle\Omega|\,\phi(0,x)\phi(0,y)\,|\Omega\rangle\Big)\\&\approx\boxed{-\frac{\Delta\beta f^2t^4}{\sqrt{128\pi^3}}\frac{m^{3/2}e^{-\beta m}}{\beta^{3/2}}+\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{\sqrt{m}e^{-\beta m}}{\beta^{3/2}}\left(1+\frac{1}{3}f^2t^4\right)+\frac{f^2t^2}{8\pi^2}}\end{aligned}\tag{4.55}$$

4.3.2 Verhalten für große Zeiten

Bestimmung von $\lim_{y\to x}\Big(\langle\beta,\beta|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\beta,\beta\rangle-\langle\Omega|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\Omega\rangle\Big)$**:**

Es soll jetzt das Verhalten von Gleichung (4.41) für große Zeiten bestimmt werden. Wir haben zuvor gesehen, dass $\frac{f}{8\pi^2}\int_m^\infty\frac{\sqrt{\omega^2-m^2}d\omega}{\omega^2}\sin(2\omega t)\sin\left(\frac{-ft}{\omega}\right)$ bei wachsendem t gegen Null konvergiert. Der entsprechende Teil von Gleichung (4.41) unterscheidet sich von dieser Größe nur um den Exponentialfaktor $e^{-\beta\omega}$ und geht daher auch gegen Null. Da $f^2<<\omega^4$ gilt, vernachlässigen wir den letzten Summanden in der Klammer unter dem Integral. Das restliche Integral wurde schon in Gleichung (2.21) berechnet.

$$\begin{aligned}&\lim_{y\to x}\Big(\langle\beta,\beta|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\beta,\beta\rangle-\langle\Omega|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\Omega\rangle\Big)\\&\approx\frac{1}{2\pi^2}\int_m^\infty d\omega\sqrt{\omega^2-m^2}e^{-\beta\omega}\left(1+\frac{f}{2\omega^2}\sin(2\omega t)\sin\left(\frac{ft}{\omega}\right)+\frac{f^2}{\omega^4}\sin(\omega t)^2\right)\\&\approx\frac{1}{2\pi^2}\int_m^\infty d\omega\sqrt{\omega^2-m^2}e^{-\beta\omega}\end{aligned}\tag{4.56}$$

Damit erhalten wir folgendes Langzeitverhalten:

$$\boxed{\lim_{y\to x}\Big(\langle\beta,\beta|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\beta,\beta\rangle-\langle\Omega|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\Omega\rangle\Big)\approx\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{\sqrt{m}e^{-\beta m}}{\beta^{3/2}}}\tag{4.57}$$

Bestimmung von $\lim_{y\to x}\Big(\langle\beta,\beta+\Delta\beta|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\beta,\beta+\Delta\beta\rangle-\langle\beta,\beta|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\beta,\beta\rangle\Big)$**:**

Auch Gleichung (4.46) soll für große Zeiten ausgewertet werden. Eine Verschiebung des Integrationsweges in die komplexe ω-Ebene (Bild 4.1) analog zu der zuvor durchgeführten Rechnung ergibt, dass der Teil des Integrals, der $\sin(2\omega t)\sin\left(\frac{ft}{\omega}\right)$ enthält, mit wachsendem t gegen Null geht. Die Funktionen $\sin\left(\frac{ft}{2\omega}\right)^2$ und $\sin(\omega t)^2$ oszillieren bei großem t sehr stark. Im Mittel ergibt $\sin^2$ den Wert $\frac{1}{2}$. Deshalb ersetzen wir diese Funktionen durch $\frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned}
&\lim_{y\to x}\Big(\langle\beta,\beta+\Delta\beta|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\beta,\beta+\Delta\beta\rangle-\langle\beta,\beta|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\beta,\beta\rangle\Big)\approx\\
&-\frac{\Delta\beta}{8\pi^2}\int_m^\infty d\omega\sqrt{\omega^2-m^2}e^{-\beta\omega}\left(\frac{f}{\omega}\sin(2\omega t)\sin\left(\frac{ft}{\omega}\right)+4\omega\sin\left(\frac{ft}{2\omega}\right)^2+\frac{f^2}{\omega^3}\sin(\omega t)^2\right)\\
&\approx-\frac{\Delta\beta}{8\pi^2}\int_m^\infty d\omega\sqrt{\omega^2-m^2}e^{-\beta\omega}\left(2\omega+\frac{f^2}{2\omega^3}\right)
\end{aligned}\tag{4.58}$$

Da nach Voraussetzung $f << m^2$ gilt, kann man $\frac{f^2}{2\omega^3}$ gegen 2ω vernachlässigen. Den verbleibenden Term entwickeln wir in eine Potenzreihe an der Stelle $\omega = m$:

$$\omega\sqrt{\omega^2-m^2}=\sqrt{2}m^{3/2}\sqrt{\omega-m}+\frac{5}{4}\sqrt{2}\sqrt{m}\,(\omega-m)^{3/2}+O\left(\frac{(\omega-m)^{5/2}}{\sqrt{m}}\right)$$

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned}
&\lim_{y\to x}\Big(\langle\beta,\beta+\Delta\beta|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\beta,\beta+\Delta\beta\rangle-\langle\beta,\beta|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\beta,\beta\rangle\Big)\approx\\
&\approx-\frac{\Delta\beta}{4\pi^2}\int_m^\infty d\omega\;\omega\sqrt{\omega^2-m^2}e^{-\beta\omega}\\
&\approx-\frac{\Delta\beta}{4\pi^2}\int_m^\infty d\omega\Big(\sqrt{2}m^{3/2}\sqrt{\omega-m}+\frac{5}{4}\sqrt{2}\sqrt{m}\,(\omega-m)^{3/2}\Big)e^{-\beta\omega}\\
&\approx-\frac{\Delta\beta}{4\pi^2}\left(\frac{\sqrt{\pi}m^{3/2}e^{-\beta m}}{\sqrt{2}\beta^{3/2}}+\frac{15}{16}\frac{\sqrt{2\pi m}e^{-\beta m}}{\beta^{5/2}}\right)
\end{aligned}\tag{4.59}$$

Nach Voraussetzung gilt $\beta m >> 1$, deshalb vernachlässigen wir der zweiten Term und erhalten:

$$\begin{aligned}
&\lim_{y\to x}\Big(\langle\beta,\beta+\Delta\beta|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\beta,\beta+\Delta\beta\rangle-\langle\beta,\beta|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\beta,\beta\rangle\Big)\\
&\approx\boxed{-\frac{\Delta\beta}{\sqrt{32\pi^3}}\frac{m^{3/2}e^{-\beta m}}{\beta^{3/2}}}
\end{aligned}\tag{4.60}$$

Jetzt addieren wir Gleichung (4.60), (4.57) und (4.35) und erhalten das Wickquadrat des gekoppelten Feldes ϕ im Grenzwert $t\to\infty$:

$$\begin{aligned}
&\lim_{y\to x}\Big(\langle\beta,\beta+\Delta\beta|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\beta,\beta+\Delta\beta\rangle-\langle\Omega|\,\phi(0,x)\phi(0,y)\,|\Omega\rangle\Big)\\
&\approx\boxed{-\frac{\Delta\beta}{\sqrt{32\pi^3}}\frac{m^{3/2}e^{-\beta m}}{\beta^{3/2}}+\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{\sqrt{m}e^{-\beta m}}{\beta^{3/2}}+\frac{f^2}{24\pi^2m^2}}
\end{aligned}\tag{4.61}$$

4.3.3 Interpretation des Langzeitverhaltens

Aus Gleichung (4.57) bestimmen wir das Phiquadrat des Systems, in dem beide Felder ϕ und ψ die gleiche Temperatur $\beta + \frac{\Delta\beta}{2}$ haben:

$$\begin{aligned}&\lim_{y\to x}\left(\left\langle \beta+\frac{\Delta\beta}{2},\beta+\frac{\Delta\beta}{2}\right|\phi(t,x)\phi(t,y)\left|\beta+\frac{\Delta\beta}{2},\beta+\frac{\Delta\beta}{2}\right\rangle - \langle\Omega|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\Omega\rangle\right)\\ &\approx \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{\sqrt{m}\;e^{-\left(\beta+\frac{\Delta\beta}{2}\right)m}}{\left(\beta+\frac{\Delta\beta}{2}\right)^{3/2}}\end{aligned} \tag{4.62}$$

Diese Größe wird in eine Reihe bis zur linearen Ordnung in $\Delta\beta$ entwickelt:

$$\begin{aligned}&\approx \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{\sqrt{m}\;e^{-\beta m}}{\beta^{3/2}} - \frac{\Delta\beta m}{2(2\pi)^{3/2}}\frac{\sqrt{m}\;e^{-\beta m}}{\beta^{3/2}} - \frac{3}{2}\frac{\Delta\beta}{2(2\pi)^{3/2}}\frac{\sqrt{m}\;e^{-\beta m}}{\beta^{5/2}}\\ &\approx \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{\sqrt{m}\;e^{-\beta m}}{\beta^{3/2}} - \frac{\Delta\beta}{2(2\pi)^{3/2}}\frac{m^{3/2}\;e^{-\beta m}}{\beta^{3/2}}\end{aligned} \tag{4.63}$$

Da nach Voraussetzung $m\beta >> 1$ gilt, ist der dritte Summand klein gegenüber dem zweiten und wurde weggelassen. Das Resultat ist mit $\lim_{y\to x}\Big(\langle\beta,\beta+\Delta\beta|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\beta,\beta+\Delta\beta\rangle - \langle\Omega|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\Omega\rangle\Big)$ identisch. Mit diesem Resultat stimmt der Erwartungswert von $\lim_{y\to x}\left(\left\langle\beta+\frac{\Delta\beta}{2},\beta+\frac{\Delta\beta}{2}\right|\phi(t,x)\phi(t,y)\left|\beta+\frac{\Delta\beta}{2},\beta+\frac{\Delta\beta}{2}\right\rangle - \langle\Omega|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\Omega\rangle\right)$ also im Grenzwert $t\to\infty$ mit $\lim_{y\to x}\Big(\langle\beta,\beta+\Delta\beta|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\beta,\beta+\Delta\beta\rangle - \langle\Omega|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\Omega\rangle\Big)$ überein. Auch wenn dadurch nicht gezeigt wurde, dass der Zustand $|\beta,\beta+\Delta\beta\rangle$ gegen $\left|\beta+\frac{\Delta\beta}{2},\beta+\frac{\Delta\beta}{2}\right\rangle$ konvergiert, zeigt diese Rechnung doch, dass die Erwartungswerte der Temperaturobservablen beider Felder sich angleichen. Wir können dieses Verhalten der thermischen Observablen als Energieaustausch interpretieren. Zwei quantenfeldtheoretische Systeme unterschiedlicher Temperatur werden gekoppelt, Energie fließt vom warmen zum kalten System, bis die Temperaturen sich ausgeglichen haben. Dieses Verhalten ist aus dem Alltag und der Beobachtung von Systemen, die den Gesetzen der klassischen Thermodynamik gehorchen, bekannt, jedoch ist es auch im klassischen Fall außerordentlich schwierig, solche Nichtgleichgewichtszustände theoretisch zu beschreiben.

Kapitel 5

Kopplung zweier masseloser Skalarfelder

Im letzten Kapitel wurden umfangreiche Untersuchungen des Verhaltens zweier gekoppelter massiver Skalarfelder unternommen. Dabei wurde vorausgesetzt, dass die Kopplung f viel kleiner als das Quadrat der Masse sei. Deshalb ist es nicht möglich, in diesen Resultaten einfach den Grenzwert $m \to 0$ zu bilden, um das Verhalten von masselosen Feldern zu bestimmen. Da masselose Felder in der Natur vorkommen, ist es interessant, auch für diese das Kopplungsverhalten zu bestimmen. Das soll in diesem Kapitel geschehen. Es werden die Klein-Gordon-Gleichungen mit Kopplungstermen im masselosen Fall aufgestellt.

$$\Box\phi = -f\psi \tag{5.1}$$

und

$$\Box\psi = -f\phi \tag{5.2}$$

lassen sich wie folgt in Matrixschreibweise darstellen:

$$\left(\Box + \begin{pmatrix} 0 & f \\ f & 0 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.3}$$

Durch Diagonalisierung der Matrix nimmt die Gleichung folgende Form an:

$$\left(\Box + \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & -f \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} \phi+\psi \\ \phi-\psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.4}$$

Damit sind die Felder entkoppelt, mit den neuen Massen und Feldern:

$$\begin{aligned} m_1 &= \sqrt{f} \\ m_2 &= i\sqrt{f} \\ \phi_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\phi+\psi\Big) \\ \phi_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\phi-\psi\Big) \end{aligned} \tag{5.5}$$

$$\left(\Box + m_{1,2}^2\right)\phi_{1,2} = 0 \tag{5.6}$$

Das Feld ϕ_2 hat eine imaginäre Masse, es besitzt keinen Grundzustand. Es ist aber trotzdem möglich, die Zeitentwicklung dieses Feldes genau wie im massiven Fall durchzuführen. Die physikalischen Felder ϕ und ψ bleiben natürlich masselos.

5.1 Berechnung von ϕ^2 im Grundzustand

Die Größen $\langle\Omega|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\Omega\rangle$ und $\langle\Omega|\,\phi(0,x)\phi(0,y)\,|\Omega\rangle$ wurden bereits exakt, ohne Näherung großer Masse, in den Gleichungen (4.17) und (4.18) berechnet. Wir bilden die Differenz von beiden und setzen unsere neuen Definitionen der Massen $m_{1,2}$ ein. $\omega_m(p)$ stimmt mit $|p|$ überein.

$$\begin{aligned}
&\langle\Omega|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\Omega\rangle - \langle\Omega|\,\phi(0,x)\phi(0,y)\,|\Omega\rangle = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3p e^{-ip_j(x^j-y^j)}\frac{1}{4}\\
&\left(\frac{\sin(\omega_{m_1}(p)t)^2|p|}{p^2+f} + \frac{\sin(\omega_{m_2}(p)t)^2|p|}{p^2-f} - \frac{\sin(\omega_{m_1}(p)t)^2}{|p|} - \frac{\sin(\omega_{m_2}(p)t)^2}{|p|}\right)\\
&= \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3p e^{-ip_j(x^j-y^j)}\frac{|p|}{4}\left(\sin(\omega_{m_1}(p)t)^2\frac{-f}{(p^2+f)p^2} + \sin(\omega_{m_2}(p)t)^2\frac{f}{(p^2-f)p^2}\right)
\end{aligned} \tag{5.7}$$

Jetzt werden Kugelkoordinaten eingeführt und das Integral, das $\sin(\omega_{m_2}(p)t)$ enthält, aufgrund des Wechsels von $\omega_{m_2} = \sqrt{p^2-f}$ vom Imaginären ins Reelle bei $p = \sqrt{f}$ in zwei Teile aufgespalten:

$$\begin{aligned}
&\langle\Omega|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\Omega\rangle - \langle\Omega|\,\phi(0,x)\phi(0,y)\,|\Omega\rangle\\
&= -\frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^\infty p^2dp\int_0^\pi \sin(\theta)d\theta\int_0^{2\pi} d\phi\; e^{-ip\cos(\theta)(x^3-y^3)}\frac{p}{4}\sin(\omega_{m_1}(p)t)^2\frac{f}{(p^2+f)p^2}\\
&+ \frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^{\sqrt{f}} p^2dp\int_0^\pi \sin(\theta)d\theta\int_0^{2\pi} d\phi\; e^{-ip\cos(\theta)(x^3-y^3)}\frac{p}{4}\sin(\omega_{m_2}(p)t)^2\frac{f}{(p^2-f)p^2}\\
&+ \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\sqrt{f}}^\infty p^2dp\int_0^\pi \sin(\theta)d\theta\int_0^{2\pi} d\phi\; e^{-ip\cos(\theta)(x^3-y^3)}\frac{p}{4}\sin(\omega_{m_2}(p)t)^2\frac{f}{(p^2-f)p^2}
\end{aligned} \tag{5.8}$$

Dann wird die Substitution $\omega_{m_1} = \sqrt{p^2+f}$, $\frac{d\omega_{m_1}}{dp} = \frac{p}{\omega_{m_1}}$, $\omega'_{m_2} = \sqrt{f-p^2} = i\omega_{m_2}$, $\frac{d\omega'_{m_2}}{dp} = -\frac{p}{\omega'_{m_2}}$ und $\omega_{m_2} = \sqrt{p^2-f}$, $\frac{d\omega_{m_2}}{dp} = \frac{p}{\omega_{m_2}}$ durchgeführt:

$$
\begin{aligned}
&\langle\Omega|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\Omega\rangle - \langle\Omega|\,\phi(0,x)\phi(0,y)\,|\Omega\rangle \\
&= -\frac{f}{(2\pi)^3}\int_{\sqrt{f}}^{\infty}\omega_{m_1}d\omega_{m_1}\int_0^{\pi}\sin(\theta)d\theta\int_0^{2\pi}d\phi\; e^{-i\sqrt{\omega_{m_1}^2-f}\cos(\theta)(x^3-y^3)}\frac{1}{4\omega_{m_1}^2}\sin(\omega_{m_1}t)^2 \\
&- \frac{f}{(2\pi)^3}\int_{\sqrt{f}}^{0}\omega'_{m_2}d\omega'_{m_2}\int_0^{\pi}\sin(\theta)d\theta\int_0^{2\pi}d\phi\; e^{-i\sqrt{f-\omega'^2_{m_2}}\cos(\theta)(x^3-y^3)}\frac{1}{-4\omega'^2_{m_2}}\sin(-i\omega'_{m_2}t)^2 \\
&+ \frac{f}{(2\pi)^3}\int_0^{\infty}\omega_{m_2}d\omega_{m_2}\int_0^{\pi}\sin(\theta)d\theta\int_0^{2\pi}d\phi\; e^{-i\sqrt{\omega_{m_2}^2+f}\cos(\theta)(x^3-y^3)}\frac{1}{4\omega_{m_2}^2}\sin(\omega_{m_2}t)^2
\end{aligned}
\tag{5.9}
$$

Ausführen der ϕ-Integration und Zusammenfassen ergeben:

$$
\begin{aligned}
&\langle\Omega|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\Omega\rangle - \langle\Omega|\,\phi(0,x)\phi(0,y)\,|\Omega\rangle \\
&= -\frac{f}{(2\pi)^2}\int_0^{\sqrt{f}}\frac{d\omega}{4\omega}\int_0^{\pi}\sin(\theta)d\theta\; e^{-i\sqrt{f-\omega^2}\cos(\theta)(x^3-y^3)}\sin(-i\omega t)^2 \\
&+ \frac{f}{(2\pi)^2}\int_0^{\sqrt{f}}\frac{d\omega}{4\omega}\int_0^{\pi}\sin(\theta)d\theta\; e^{-i\sqrt{\omega^2+f}\cos(\theta)(x^3-y^3)}\sin(\omega t)^2 \\
&+ \frac{f}{(2\pi)^2}\int_{\sqrt{f}}^{\infty}\frac{d\omega}{4\omega}\int_0^{\pi}\sin(\theta)d\theta\left(e^{-i\sqrt{\omega^2+f}\cos(\theta)(x^3-y^3)} - e^{-i\sqrt{\omega^2-f}\cos(\theta)(x^3-y^3)}\right)\sin(\omega t)^2
\end{aligned}
\tag{5.10}
$$

Es soll jetzt gezeigt werden, dass die letzte Zeile im Grenzfall $y \to x$ verschwindet. Dazu substituieren wir $z = x^3 - y^3$ und verschmieren mit einer Testfunktion $g(z) := \frac{1}{\lambda\sqrt{\pi}}e^{-\frac{z^2}{\lambda^2}}$. Um den Grenzwert $y \to x$ zu bilden, lassen wir später λ gegen Null gehen, $g(z)$ wird dann zur Deltafunktion. Gleichzeitig substituieren wir $u = \cos(\theta)$, $du = -\sin(\theta)d\theta$:

$$
\int_{-\infty}^{\infty}dz\;\frac{1}{\lambda\sqrt{\pi}}e^{-\frac{z^2}{\lambda^2}}\frac{f}{(2\pi)^2}\int_{\sqrt{f}}^{\infty}\frac{d\omega}{4\omega}\int_{-1}^{1}du\left(e^{-i\sqrt{\omega^2+f}uz} - e^{-i\sqrt{\omega^2-f}uz}\right)\sin(\omega t)^2 \tag{5.11}
$$

Ausführen der z-Integration ergibt:

$$
\frac{f}{(2\pi)^2}\int_{\sqrt{f}}^{\infty}\frac{d\omega}{4\omega}\int_{-1}^{1}du\left(e^{-\frac{1}{4}\lambda^2(\omega^2+f)u^2} - e^{-\frac{1}{4}\lambda^2(\omega^2-f)u^2}\right)\sin(\omega t)^2 \tag{5.12}
$$

Es wird die Substitution $\omega' = \frac{\omega}{\sqrt{f}}$ durchgeführt. Der Betrag des Integrals hat dann die Majorante:

$$
\frac{f}{(2\pi)^2}\int_{1}^{\infty}\frac{d\omega'}{4\omega'}\int_{-1}^{1}du\left(e^{-\frac{1}{4}\lambda^2(\omega'^2-1)f\;u^2} - e^{-\frac{1}{4}\lambda^2(\omega'^2+1)f\;u^2}\right) \tag{5.13}
$$

Jetzt soll der Grenzwert $\lambda \to 0$ gebildet werden. Es war leider nicht möglich, das Integral auf analytischem Wege zu lösen, deshalb wird $\int_1^{\infty}\frac{d\omega'}{4\omega'}\left(e^{-\frac{1}{4}\lambda^2(\omega'^2-1)} - e^{-\frac{1}{4}\lambda^2(\omega'^2+1)}\right)$

numerisch bestimmt und in Abbildung 5.1 dargestellt. Da nur das Verhalten für $\lambda \to 0$ interessiert, und u sowie f beschränkt sind, wurde hier $u = f = 1$ gesetzt. Man sieht, dass der Ausdruck für $\lambda \to 0$ verschwindet. Deshalb bleibt nach Bildung des Grenzwertes $y \to x$ übrig:

$$\begin{aligned}
&\lim_{y\to x}\Big(\langle\Omega|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\Omega\rangle - \langle\Omega|\,\phi(0,x)\phi(0,y)\,|\Omega\rangle\Big)\\
&= -\frac{f}{(2\pi)^3}\int_0^{\sqrt{f}} d\omega'_{m_2}\int_0^{\pi}\sin(\theta)d\theta\int_0^{2\pi} d\phi\frac{1}{4\omega'_{m_2}}\sin(-i\omega'_{m_2}t)^2\\
&+ \frac{f}{(2\pi)^3}\int_0^{\sqrt{f}} d\omega_{m_2}\int_0^{\pi}\sin(\theta)d\theta\int_0^{2\pi} d\phi\frac{1}{4\omega_{m_2}}\sin(\omega_{m_2}t)^2
\end{aligned} \tag{5.14}$$

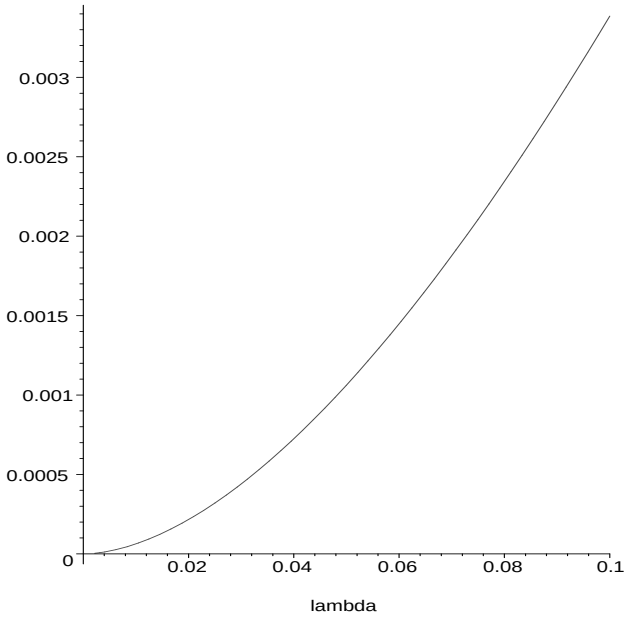

Abbildung 5.1: $\int_1^\infty \frac{d\omega'}{4\omega'}\left(e^{-\frac{1}{4}\lambda^2(\omega'^2-1)} - e^{-\frac{1}{4}\lambda^2(\omega'^2+1)}\right)$

Ausführung der Winkelintegrationen, Umbenennung der Integrationsvariablen und Umschreibung des Terms $\sin(-i\omega' t)$ in Exponentialfunktionen ergeben:

$$\begin{aligned}
&\lim_{y\to x}\Big(\langle\Omega|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\Omega\rangle - \langle\Omega|\,\phi(0,x)\phi(0,y)\,|\Omega\rangle\Big)\\
&= -\frac{f}{8\pi^2}\int_0^{\sqrt{f}}\frac{d\omega}{\omega}\Big(\frac{e^{\omega t}-e^{-\omega t}}{2i}\Big)^2 + \frac{f}{8\pi^2}\int_0^{\sqrt{f}}\frac{d\omega}{\omega}\sin(\omega t)^2
\end{aligned} \tag{5.15}$$

Mit der Substitution $u = \omega t$, $du = t d\omega$ erhalten wir das Ergebnis:

$$\begin{aligned}
&\lim_{y\to x}\Big(\langle\Omega|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\Omega\rangle - \langle\Omega|\,\phi(0,x)\phi(0,y)\,|\Omega\rangle\Big)\\
&= \frac{f}{8\pi^2}\int_0^{t\sqrt{f}}\frac{du}{u}\Big(\frac{e^{u}-e^{-u}}{2}\Big)^2 + \frac{f}{8\pi^2}\int_0^{t\sqrt{f}}\frac{du}{u}\sin(u)^2
\end{aligned} \tag{5.16}$$

5.1.1 Verhalten für kleine Zeiten

Es soll jetzt das Verhalten von Gleichung (5.16) für kleine Zeiten ($t << \frac{1}{\sqrt{f}}$) bestimmt werden. Da die obere Integrationsgrenze dann $t\sqrt{f} << 1$ ist, können wir den Integranden in eine Reihe entwickeln:

$$\begin{aligned}&\lim_{y\to x}\Big(\langle\Omega|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\Omega\rangle - \langle\Omega|\,\phi(0,x)\phi(0,y)\,|\Omega\rangle\Big)\\ &\approx \frac{f}{8\pi^2}\int_0^{t\sqrt{f}}\frac{du}{u}\Big(\frac{1+u-(1-u)}{2}\Big)^2 + \frac{f}{8\pi^2}\int_0^{t\sqrt{f}}\frac{du}{u}u^2 = \frac{f}{4\pi^2}\int_0^{t\sqrt{f}} u\;du\end{aligned} \tag{5.17}$$

In erster Ordnung bekommen wir also das Wickquadrat des gekoppelten masselosen Feldes zur Temperatur $T = 0$ für kleine Zeiten:

$$\boxed{\lim_{y\to x}\Big(\langle\Omega|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\Omega\rangle - \langle\Omega|\,\phi(0,x)\phi(0,y)\,|\Omega\rangle\Big) \approx \frac{f^2t^2}{8\pi^2}} \tag{5.18}$$

Dieses Resultat ist mit dem Erwartungswert der entsprechenden Größe im massiven Fall identisch (Gleichung (4.27)).

5.1.2 Verhalten für große Zeiten

Für große Zeiten ($t >> \frac{1}{\sqrt{f}}$) ist die obere Integrationsgrenze $t\sqrt{f} >> 1$, es überwiegt im Integranden die Exponentialfunktion mit positivem Exponenten. Wir können das Integral nähern:

$$\lim_{y\to x}\Big(\langle\Omega|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\Omega\rangle - \langle\Omega|\,\phi(0,x)\phi(0,y)\,|\Omega\rangle\Big) \approx \frac{f}{8\pi^2}\int_1^{t\sqrt{f}}\frac{du}{u}\frac{e^{2u}}{4} \tag{5.19}$$

Es gilt folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned}&\frac{f}{8\pi^2}\int_0^{t\sqrt{f}} du\frac{e^u}{4} < \frac{f}{32\pi^2}\int_1^{t\sqrt{f}}\frac{du}{u}e^{2u} < \frac{f}{8\pi^2}\int_0^{t\sqrt{f}} du\frac{e^{2u}}{4}\\ &\boxed{\frac{f}{32\pi^2}e^{t\sqrt{f}} < \frac{f}{32\pi^2}\int_1^{t\sqrt{f}}\frac{du}{u}e^{2u} < \frac{f}{64\pi^2}e^{2t\sqrt{f}}}\end{aligned} \tag{5.20}$$

Im masselosen Fall wächst $\lim_{y\to x}\Big(\langle\Omega|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\Omega\rangle - \langle\Omega|\,\phi(0,x)\phi(0,y)\,|\Omega\rangle\Big)$, das Wickquadrat des gekoppelten Feldes der Temperatur $T = 0$, also für genügend große Zeiten exponentiell. Im Gegensatz dazu konvergiert die entsprechende Größe im massiven Fall (Gleichung (4.35)).

5.2 Berechnung von ϕ^2 in einem KMS-Zustand

In diesem Abschnitt soll der Erwartungswert des Quadrates der Feldoperatoren des masselosen Skalarfeldes in einem KMS-Zustand berechnet werden. Wie zuvor betrachten wie zwei Felder mit kleinem Temperaturunterschied, ϕ habe die inverse Temperatur β, ψ habe $\beta + \Delta\beta$. Wir übernehmen das Resultat aus Gleichung (4.38) und setzen $m = 0$:

$$\begin{aligned}
&\langle \beta, \beta+\Delta\beta |\, \phi(t,x)\phi(t,y)\, | \beta, \beta+\Delta\beta \rangle - \langle \Omega |\, \phi(t,x)\phi(t,y)\, | \Omega \rangle \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p e^{-ip_j(x^j-y^j)} \left(\frac{2}{e^{\beta|p|}-1} \right) \frac{1}{8} \\
&\left(\frac{\cos(\omega_{m_1}(p)t)^2}{|p|} + \frac{\cos(\omega_{m_2}(p)t)^2}{|p|} + \frac{\sin(\omega_{m_1}(p)t)^2|p|}{\omega_{m_1}(p)^2} + \frac{\sin(\omega_{m_2}(p)t)^2|p|}{\omega_{m_2}(p)^2} \right. \\
&\left. + \frac{2\cos(\omega_{m_1}(p)t)\cos(\omega_{m_2}(p)t)}{|p|} + \frac{2\sin(\omega_{m_1}(p)t)\sin(\omega_{m_2}(p)t)|p|}{\omega_{m_1}(p)\omega_{m_2}(p)} \right) \\
&+ \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p e^{-ip_j(x^j-y^j)} \left(\frac{2}{e^{(\beta+\Delta\beta)|p|}-1} \right) \frac{1}{8} \\
&\left(\frac{\cos(\omega_{m_1}(p)t)^2}{|p|} + \frac{\cos(\omega_{m_2}(p)t)^2}{|p|} + \frac{\sin(\omega_{m_1}(p)t)^2|p|}{\omega_{m_1}(p)^2} + \frac{\sin(\omega_{m_2}(p)t)^2|p|}{\omega_{m_2}(p)^2} \right. \\
&\left. - \frac{2\cos(\omega_{m_1}(p)t)\cos(\omega_{m_2}(p)t)}{|p|} - \frac{2\sin(\omega_{m_1}(p)t)\sin(\omega_{m_2}(p)t)|p|}{\omega_{m_1}(p)\omega_{m_2}(p)} \right)
\end{aligned} \tag{5.21}$$

Da die Temperaturdifferenz nach Voraussetzung klein ist, entwickeln wir einen Teil des zweiten Integrals nach $\Delta\beta$:

$$\frac{1}{e^{(\beta+\Delta\beta)\omega}-1} = \frac{1}{e^{\beta\omega}-1} - \frac{\omega\ e^{\beta\omega}}{\left(e^{\beta\omega}-1\right)^2}\Delta\beta + O(\Delta\beta^2) \tag{5.22}$$

Gleichzeitig bilden wir den Grenzwert $y \to x$, das Integral bleibt aufgrund des Exponentialfaktors konvergent:

$$\begin{aligned}
&\lim_{y\to x} \Big(\langle \beta, \beta+\Delta\beta |\, \phi(t,x)\phi(t,y)\, | \beta, \beta+\Delta\beta \rangle - \langle \Omega |\, \phi(t,x)\phi(t,y)\, | \Omega \rangle \Big) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p \left(\frac{1}{e^{\beta|p|}-1} \right) \frac{1}{2} \\
&\left(\frac{\cos(\omega_{m_1}(p)t)^2}{|p|} + \frac{\cos(\omega_{m_2}(p)t)^2}{|p|} + \frac{\sin(\omega_{m_1}(p)t)^2|p|}{\omega_{m_1}(p)^2} + \frac{\sin(\omega_{m_2}(p)t)^2|p|}{\omega_{m_2}(p)^2} \right) \\
&- \frac{\Delta\beta}{(2\pi)^3} \int d^3p \left(\frac{|p|\ e^{\beta|p|}}{\left(e^{\beta|p|}-1\right)^2} \right) \frac{1}{4} \\
&\left(\frac{\cos(\omega_{m_1}(p)t)^2}{|p|} + \frac{\cos(\omega_{m_2}(p)t)^2}{|p|} + \frac{\sin(\omega_{m_1}(p)t)^2|p|}{\omega_{m_1}(p)^2} + \frac{\sin(\omega_{m_2}(p)t)^2|p|}{\omega_{m_2}(p)^2} \right. \\
&\left. - \frac{2\cos(\omega_{m_1}(p)t)\cos(\omega_{m_2}(p)t)}{|p|} - \frac{2\sin(\omega_{m_1}(p)t)\sin(\omega_{m_2}(p)t)|p|}{\omega_{m_1}(p)\omega_{m_2}(p)} \right) + O(\Delta\beta^2)
\end{aligned} \tag{5.23}$$

Wir führen Kugelkoordinaten ein und setzen die Definition von $\omega_{m_1}(p) = \sqrt{p^2+f}$ und $\omega_{m_2}(p) = \sqrt{p^2-f}$ ein:

$$\begin{aligned}
&\lim_{y\to x}\Big(\langle\beta,\beta+\Delta\beta|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\beta,\beta+\Delta\beta\rangle - \langle\Omega|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\Omega\rangle\Big)\\
&=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^\infty 4\pi p^2dp\left(\frac{1}{e^{\beta p}-1}\right)\frac{1}{2}\\
&\left(\frac{\cos(\sqrt{p^2+f}t)^2}{p}+\frac{\cos(\sqrt{p^2-f}t)^2}{p}+\frac{\sin(\sqrt{p^2+f}t)^2p}{p^2+f}+\frac{\sin(\sqrt{p^2-f}t)^2p}{p^2-f}\right)\\
&-\frac{\Delta\beta}{(2\pi)^3}\int_0^\infty 4\pi p^2dp\left(\frac{p\;e^{\beta p}}{(e^{\beta p}-1)^2}\right)\frac{1}{4}\\
&\left(\frac{\cos(\sqrt{p^2+f}t)^2}{p}+\frac{\cos(\sqrt{p^2-f}t)^2}{p}+\frac{\sin(\sqrt{p^2+f}t)^2p}{p^2+f}+\frac{\sin(\sqrt{p^2-f}t)^2p}{p^2-f}\right.\\
&\left.-\frac{2\cos(\sqrt{p^2+f}t)\cos(\sqrt{p^2-f}t)}{p}-\frac{2\sin(\sqrt{p^2+f}t)\sin(\sqrt{p^2-f}t)p}{\sqrt{p^2+f}\sqrt{p^2-f}}\right)+O(\Delta\beta^2)
\end{aligned}\tag{5.24}$$

Mit der Beziehung $\sin^2+\cos^2=1$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}
&\lim_{y\to x}\Big(\langle\beta,\beta+\Delta\beta|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\beta,\beta+\Delta\beta\rangle - \langle\Omega|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\Omega\rangle\Big)\\
&=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^\infty pdp\left(\frac{1}{e^{\beta p}-1}\right)\left(2-\sin(\sqrt{p^2+f}t)^2\frac{f}{p^2+f}+\sin(\sqrt{p^2-f}t)^2\frac{f}{p^2-f}\right)\\
&-\frac{\Delta\beta}{(2\pi)^2}\int_0^\infty p^2dp\left(\frac{e^{\beta p}}{(e^{\beta p}-1)^2}\right)\frac{1}{2}\left(2-\sin(\sqrt{p^2+f}t)^2\frac{f}{p^2+f}+\sin(\sqrt{p^2-f}t)^2\frac{f}{p^2-f}\right.\\
&\left.-2\cos(\sqrt{p^2+f}t)\cos(\sqrt{p^2-f}t)-\frac{2\sin(\sqrt{p^2+f}t)\sin(\sqrt{p^2-f}t)p^2}{\sqrt{p^2+f}\sqrt{p^2-f}}\right)+O(\Delta\beta^2)
\end{aligned}\tag{5.25}$$

Wir erhalten also folgende Größen:

$$\begin{aligned}
&\lim_{y\to x}\Big(\langle\beta,\beta|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\beta,\beta\rangle - \langle\Omega|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\Omega\rangle\Big)\\
&=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^\infty pdp\left(\frac{1}{e^{\beta p}-1}\right)\left(2-\sin(\sqrt{p^2+f}t)^2\frac{f}{p^2+f}+\sin(\sqrt{p^2-f}t)^2\frac{f}{p^2-f}\right)
\end{aligned}\tag{5.26}$$

und

$$\begin{aligned}
&\lim_{y\to x}\Big(\langle\beta,\beta+\Delta\beta|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\beta,\beta+\Delta\beta\rangle - \langle\beta,\beta|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\beta,\beta\rangle\Big)\\
&=-\frac{\Delta\beta}{(2\pi)^2}\int_0^\infty p^2dp\left(\frac{e^{\beta p}}{(e^{\beta p}-1)^2}\right)\frac{1}{2}\left(2-\sin(\sqrt{p^2+f}t)^2\frac{f}{p^2+f}+\sin(\sqrt{p^2-f}t)^2\frac{f}{p^2-f}\right.\\
&\left.-2\cos(\sqrt{p^2+f}t)\cos(\sqrt{p^2-f}t)-\frac{2\sin(\sqrt{p^2+f}t)\sin(\sqrt{p^2-f}t)p^2}{\sqrt{p^2+f}\sqrt{p^2-f}}\right)+O(\Delta\beta^2)
\end{aligned}\tag{5.27}$$

5.2.1 Verhalten für kleine Zeiten

Bestimmung von $\lim_{y\to x}\Big(\langle\beta,\beta|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\beta,\beta\rangle-\langle\Omega|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\Omega\rangle\Big)$**:**

Gleichung (5.26) möchten wir für kleine Zeiten t auswerten. Wir entwickeln die beiden Sinusfunktionen:

$$\begin{aligned}
&\lim_{y\to x}\Big(\langle\beta,\beta|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\beta,\beta\rangle-\langle\Omega|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\Omega\rangle\Big)\approx\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^\infty pdp\left(\frac{1}{e^{\beta p}-1}\right)\\
&\left(2-\left(\sqrt{p^2+f}t-\frac{1}{6}\left(\sqrt{p^2+f}\right)^3t^3\right)^2\frac{f}{p^2+f}+\left(\sqrt{p^2-f}t-\frac{1}{6}\left(\sqrt{p^2-f}\right)^3t^3\right)^2\frac{f}{p^2-f}\right)\\
&=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^\infty pdp\left(\frac{1}{e^{\beta p}-1}\right)\left(2+\frac{2}{3}f^2t^4+O(t^6)\right)=\frac{1}{12\beta^2}\left(1+\frac{1}{3}f^2t^4+O(t^6)\right)
\end{aligned}\tag{5.28}$$

Für kurze Zeiten erhalten wir also:

$$\boxed{\lim_{y\to x}\Big(\langle\beta,\beta|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\beta,\beta\rangle-\langle\Omega|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\Omega\rangle\Big)\approx\frac{1}{12\beta^2}\left(1+\frac{1}{3}f^2t^4+O(t^6)\right)}\tag{5.29}$$

Man sieht, dass im Fall verschwindender Kopplung Gleichung (2.6) reproduziert wird.

Bestimmung von $\lim_{y\to x}\Big(\langle\beta,\beta+\Delta\beta|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\beta,\beta+\Delta\beta\rangle-\langle\beta,\beta|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\beta,\beta\rangle\Big)$**:**

Es soll jetzt Gleichung (5.27) für kleine Zeiten ausgewertet werden. Die trigonometrischen Funktionen werden in eine Reihe entwickelt:

$$\begin{aligned}
&\lim_{y\to x}\Big(\langle\beta,\beta+\Delta\beta|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\beta,\beta+\Delta\beta\rangle-\langle\beta,\beta|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\beta,\beta\rangle\Big)\\
&=-\frac{\Delta\beta}{(2\pi)^2}\int_0^\infty p^2dp\left(\frac{e^{\beta p}}{(e^{\beta p}-1)^2}\right)\frac{1}{2}\Bigg(2-\sin(\sqrt{p^2+f}t)^2\frac{f}{p^2+f}+\sin(\sqrt{p^2-f}t)^2\frac{f}{p^2-f}\\
&-2\cos(\sqrt{p^2+f}t)\cos(\sqrt{p^2-f}t)-\frac{2\sin(\sqrt{p^2+f}t)\sin(\sqrt{p^2-f}t)p^2}{\sqrt{p^2+f}\sqrt{p^2-f}}\Bigg)+O(\Delta\beta^2)\\
&\approx-\frac{\Delta\beta}{(2\pi)^2}\int_0^\infty p^2dp\left(\frac{e^{\beta p}}{(e^{\beta p}-1)^2}\right)\frac{1}{2}\left(2+\frac{2}{3}f^2t^4-2+\frac{1}{3}f^2t^4+O(t^6)\right)\approx-\frac{\Delta\beta f^2t^4}{8\pi^2}\frac{\pi^2}{3\beta^3}
\end{aligned}\tag{5.30}$$

Wir erhalten also folgendes Kurzzeitverhalten:

$$\boxed{\lim_{y\to x}\Big(\langle\beta,\beta+\Delta\beta|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\beta,\beta+\Delta\beta\rangle-\langle\beta,\beta|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\beta,\beta\rangle\Big)\approx-\frac{\Delta\beta f^2t^4}{24\beta^3}}\tag{5.31}$$

Wir addieren die Gleichungen (5.31), (5.29) und (5.18) und erhalten das Kurzzeitverhalten des Wickquadrates des masselosen gekoppelten Feldes ϕ für kleine Zeiten:

$$\begin{aligned}&\lim_{y\to x}\Big(\langle\beta,\beta+\Delta\beta|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\beta,\beta+\Delta\beta\rangle-\langle\Omega|\,\phi(0,x)\phi(0,y)\,|\Omega\rangle\Big)\\&\approx\boxed{-\frac{\Delta\beta f^2t^4}{24\beta^3}+\frac{1}{12\beta^2}\left(1+\frac{1}{3}f^2t^4\right)+\frac{f^2t^2}{8\pi^2}}\end{aligned}\tag{5.32}$$

5.2.2 Verhalten für große Zeiten

Bestimmung von $\lim_{y\to x}\Big(\langle\beta,\beta|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\beta,\beta\rangle-\langle\Omega|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\Omega\rangle\Big)$**:**

Um Gleichung (5.26) für große Zeiten auszuwerten, teilen wir das Integral in drei Teile:

$$\begin{aligned}&\lim_{y\to x}\Big(\langle\beta,\beta|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\beta,\beta\rangle-\langle\Omega|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\Omega\rangle\Big)\\&=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^\infty pdp\left(\frac{1}{e^{\beta p}-1}\right)\left(2-\sin(\sqrt{p^2+f}t)^2\frac{f}{p^2+f}+\sin(\sqrt{p^2-f}t)^2\frac{f}{p^2-f}\right)\\&=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^\infty pdp\left(\frac{1}{e^{\beta p}-1}\right)\left(2-\sin(\sqrt{p^2+f}t)^2\frac{f}{p^2+f}\right)\\&+\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{\sqrt{f}} pdp\left(\frac{1}{e^{\beta p}-1}\right)\left(\frac{e^{-\sqrt{f-p^2}t}-e^{\sqrt{f-p^2}t}}{2i}\right)^2\frac{f}{p^2-f}\\&+\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\sqrt{f}}^\infty pdp\left(\frac{1}{e^{\beta p}-1}\right)\sin(\sqrt{p^2-f}t)^2\frac{f}{p^2-f}\end{aligned}\tag{5.33}$$

Das erste Integral besitzt als Majorante das konvergente, zeitunabhängige Integral:

$$\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^\infty pdp\left(\frac{2}{e^{\beta p}-1}\right)$$

Für das dritte Integral lässt sich die Majorante

$$\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\sqrt{f}}^\infty pdp\left(\frac{1}{e^{\beta p}-1}\right)t^2f$$

finden. Dieser Ausdruck ist konvergent und quadratisch in t. Wir werden später sehen, dass das zweite Integral exponentiell in der Zeit wächst, deshalb vernachlässigen wir das erste und dritte Integral. Mit der Substitution $u=\frac{p}{\sqrt{f}}$ erhalten wir:

$$\begin{aligned}&\lim_{y\to x}\Big(\langle\beta,\beta|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\beta,\beta\rangle-\langle\Omega|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\Omega\rangle\Big)\\&\approx\frac{f}{(2\pi)^2}\int_0^1 udu\left(\frac{1}{e^{\beta\sqrt{f}u}-1}\right)\left(\frac{e^{-t\sqrt{f}\sqrt{1-u^2}}-e^{t\sqrt{f}\sqrt{1-u^2}}}{2}\right)^2\frac{1}{1-u^2}\end{aligned}\tag{5.34}$$

Dieses Integral hat folgende Minorante, die wir unter Ausnutzung der Bedingung $t >> 1$ auswerten:

$$\frac{f}{(2\pi)^2}\int_0^1 du \frac{e^{-\beta\sqrt{f}u}}{\beta\sqrt{f}}\left(\frac{e^{-t\sqrt{f}\sqrt{1-u^2}}-e^{t\sqrt{f}\sqrt{1-u^2}}}{2}\right)^2 \approx \frac{f}{(2\pi)^2}\int_0^1 du \frac{e^{-\beta\sqrt{f}u}}{\beta\sqrt{f}}\frac{e^{2t\sqrt{f}\left(1-\frac{u^2}{2}\right)}}{4}$$
$$\approx \frac{f}{(2\pi)^2}\frac{\sqrt{\pi}}{8\sqrt{t}\beta f^{3/4}}e^{\frac{\sqrt{f}\left(8t^2+\beta^2\right)}{4t}} \approx \frac{1}{32\pi^{3/2}}\frac{f^{1/4}}{\sqrt{t}\beta}e^{2t\sqrt{f}} \tag{5.35}$$

Als Majorante des Integrals finden wir:

$$\frac{f}{(2\pi)^2}\int_0^1 du \frac{1}{\beta\sqrt{f}}t^2 f e^{2t\sqrt{f}\sqrt{1-u^2}} \approx \frac{f^{3/2}}{(2\pi)^2}\frac{t^2}{\beta}\int_0^1 du\; e^{2t\sqrt{f}\left(1-\frac{u^2}{2}\right)} \approx \frac{f^{3/2}}{(2\pi)^2}\frac{t^2}{\beta}e^{2t\sqrt{f}}\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t\sqrt{f}}} \tag{5.36}$$

Es gilt also für große Zeiten folgende Abschätzung:

$$\boxed{\frac{1}{32\pi^{3/2}}\frac{f^{1/4}}{\sqrt{t}\beta}e^{2t\sqrt{f}} < \lim_{y\to x}\Big(\langle\beta,\beta|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\beta,\beta\rangle - \langle\Omega|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\Omega\rangle\Big) < \frac{1}{8\pi^{3/2}}\frac{f^{5/4}t^{3/2}}{\beta}e^{2t\sqrt{f}}} \tag{5.37}$$

Damit ist gezeigt, dass Gleichung (5.26) im masselosen Fall exponentiell mit der Zeit wächst und nicht wie im massiven Fall konvergiert.

Bestimmung von $\lim_{y\to x}\Big(\langle\beta,\beta+\Delta\beta|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\beta,\beta+\Delta\beta\rangle - \langle\beta,\beta|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\beta,\beta\rangle\Big)$**:**

Auch Gleichung (5.27) wird in mehrere Teile aufgespalten:

$$
\begin{aligned}
&\lim_{y\to x}\Big(\langle\beta,\beta+\Delta\beta|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\beta,\beta+\Delta\beta\rangle - \langle\beta,\beta|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\beta,\beta\rangle\Big)\\
&\approx -\frac{\Delta\beta}{(2\pi)^2}\int_0^\infty p^2dp\left(\frac{e^{\beta p}}{(e^{\beta p}-1)^2}\right)\frac{1}{2}\Bigg(2-\sin(\sqrt{p^2+f}t)^2\frac{f}{p^2+f}+\sin(\sqrt{p^2-f}t)^2\frac{f}{p^2-f}\\
&-2\cos(\sqrt{p^2+f}t)\cos(\sqrt{p^2-f}t)-\frac{2\sin(\sqrt{p^2+f}t)\sin(\sqrt{p^2-f}t)p^2}{\sqrt{p^2+f}\sqrt{p^2-f}}\Bigg)\\
&=-\frac{\Delta\beta}{(2\pi)^2}\int_0^\infty p^2dp\left(\frac{e^{\beta p}}{(e^{\beta p}-1)^2}\right)\frac{1}{2}\left(2-\sin(\sqrt{p^2+f}t)^2\frac{f}{p^2+f}\right)\\
&-\frac{\Delta\beta}{(2\pi)^2}\int_0^{\sqrt{f}} p^2dp\left(\frac{e^{\beta p}}{(e^{\beta p}-1)^2}\right)\frac{1}{2}\left(\frac{e^{-\sqrt{f-p^2}t}-e^{\sqrt{f-p^2}t}}{2i}\right)^2\frac{f}{p^2-f}\\
&-\frac{\Delta\beta}{(2\pi)^2}\int_0^{\sqrt{f}} p^2dp\left(\frac{e^{\beta p}}{(e^{\beta p}-1)^2}\right)\frac{1}{2}\\
&\left(-2\cos(\sqrt{p^2+f}t)\frac{e^{-\sqrt{f-p^2}t}+e^{\sqrt{f-p^2}t}}{2}-\frac{2\sin(\sqrt{p^2+f}t)p^2}{\sqrt{p^2+f}\sqrt{p^2-f}}\frac{e^{-\sqrt{f-p^2}t}-e^{\sqrt{f-p^2}t}}{2i}\right)\\
&-\frac{\Delta\beta}{(2\pi)^2}\int_{\sqrt{f}}^\infty p^2dp\left(\frac{e^{\beta p}}{(e^{\beta p}-1)^2}\right)\frac{1}{2}\Bigg(\sin(\sqrt{p^2-f}t)^2\frac{f}{p^2-f}\\
&-2\cos(\sqrt{p^2+f}t)\cos(\sqrt{p^2-f}t)-\frac{2\sin(\sqrt{p^2+f}t)\sin(\sqrt{p^2-f}t)p^2}{\sqrt{p^2+f}\sqrt{p^2-f}}\Bigg)
\end{aligned}
\tag{5.38}
$$

Das konvergente, zeitunabhängige Integral

$$\frac{\Delta\beta}{(2\pi)^2}\int_0^\infty p^2dp\left(\frac{e^{\beta p}}{(e^{\beta p}-1)^2}\right)$$

ist größer als der Betrag des ersten Integrals. Als Majorante des dritten Integrals finden wir:

$$\frac{\Delta\beta}{(2\pi)^2}\int_0^{\sqrt{f}} p^2dp\left(\frac{e^{\beta p}}{(e^{\beta p}-1)^2}\right)\left(e^{\sqrt{f-p^2}t}+t^2p^2e^{\sqrt{f-p^2}t}\right)$$

Dieses Integral wächst exponentiell mit der Zeit, jedoch mit dem Faktor $e^{t\sqrt{f}}$, deshalb verschwindet es im Vergleich zum zweiten Integral, welches mit $e^{2t\sqrt{f}}$ wächst. Das vierte Integral lässt sich vernachlässigen, da das konvergente Integral

$$\frac{\Delta\beta}{(2\pi)^2}\int_{\sqrt{f}}^\infty p^2dp\left(\frac{e^{\beta p}}{(e^{\beta p}-1)^2}\right)\frac{1}{2}\big(t^2f+2+2t^2p^2\big)$$

welches in führender Ordnung proportional zu t^2 ist, größer als der Betrag des vierten Integrals ist. Das verbleibende zweite Integral bekommt nach der Substitution $u = \frac{p}{\sqrt{f}}$ folgende Form:

$$-\frac{f^{3/2}\Delta\beta}{(2\pi)^2}\int_0^1 u^2 du\left(\frac{e^{\beta\sqrt{f}u}}{\left(e^{\beta\sqrt{f}u}-1\right)^2}\right)\frac{1}{2}\left(\frac{e^{-t\sqrt{f}\sqrt{1-u^2}}-e^{t\sqrt{f}\sqrt{1-u^2}}}{2}\right)^2\frac{1}{1-u^2} \tag{5.39}$$

Der Betrag dieses Ausdrucks hat die Minorante:

$$\boxed{\frac{f^{3/2}\Delta\beta}{(2\pi)^2}\int_0^1 \frac{udu}{\beta\sqrt{f}}\left(\frac{1}{e^{\beta\sqrt{f}u}-1}\right)\frac{1}{2}\left(\frac{e^{-t\sqrt{f}\sqrt{1-u^2}}-e^{t\sqrt{f}\sqrt{1-u^2}}}{2}\right)^2\frac{1}{1-u^2}}$$

Sie stimmt bis auf den Faktor $\frac{\Delta\beta}{2\beta}$ mit Gleichung (5.34) überein. Aus diesem Grund wächst $\lim_{y\to x}\left(\langle\beta,\beta+\Delta\beta|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\beta,\beta+\Delta\beta\rangle - \langle\beta,\beta|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\beta,\beta\rangle\right)$ auch exponentiell mit der Zeit.

5.2.3 Interpretation des Langzeitverhaltens

Aus Gleichung (5.34) bestimmen wir das Phiquadrat des Systems im Fall $\beta_1 = \beta_2 = \beta + \frac{\Delta\beta}{2}$. Der Ausdruck wird in eine Reihe entwickelt und nach der linearen Ordnung in $\Delta\beta$ abgebrochen.

$$\begin{aligned}
&\lim_{y\to x}\left(\left\langle\beta+\frac{\Delta\beta}{2},\beta+\frac{\Delta\beta}{2}\right|\phi(t,x)\phi(t,y)\left|\beta+\frac{\Delta\beta}{2},\beta+\frac{\Delta\beta}{2}\right\rangle - \langle\Omega|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\Omega\rangle\right)\\
&\approx \frac{f}{(2\pi)^2}\int_0^1 udu\left(\frac{1}{e^{(\beta+\frac{\Delta\beta}{2})\sqrt{f}u}-1}\right)\left(\frac{e^{-t\sqrt{f}\sqrt{1-u^2}}-e^{t\sqrt{f}\sqrt{1-u^2}}}{2}\right)^2\frac{1}{1-u^2}\\
&= \frac{f}{(2\pi)^2}\int_0^1 udu\left(\frac{1}{e^{\beta\sqrt{f}u}-1}\right)\left(\frac{e^{-t\sqrt{f}\sqrt{1-u^2}}-e^{t\sqrt{f}\sqrt{1-u^2}}}{2}\right)^2\frac{1}{1-u^2}\\
&- \frac{f^{3/2}\Delta\beta}{(2\pi)^2}\int_0^1 u^2 du\left(\frac{e^{\beta\sqrt{f}u}}{\left(e^{\beta\sqrt{f}u}-1\right)^2}\right)\frac{1}{2}\left(\frac{e^{-t\sqrt{f}\sqrt{1-u^2}}-e^{t\sqrt{f}\sqrt{1-u^2}}}{2}\right)^2\frac{1}{1-u^2}+O\left(\Delta\beta^2\right)
\end{aligned} \tag{5.40}$$

Nach Gleichung (5.34) und (5.39) stimmt diese Größe mit dem Langzeitverhalten des Erwartungswertes $\lim_{y\to x}\left(\langle\beta,\beta+\Delta\beta|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\beta,\beta+\Delta\beta\rangle - \langle\Omega|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\Omega\rangle\right)$ überein. Auch wenn der Ausdruck für $t\to\infty$ nicht wie im massiven Fall konvergiert, sieht man doch, dass auch hier bei eingeschalteter Kopplung die Erwartungswerte der Temperaturenobservablen beider masseloser Felder sich langsam angleichen.

Kapitel 6

Kopplung eines Feldes unter Randbedingungen mit einem freien Feld

In diesem Kapitel werden zwei Skalarfelder gekoppelt. Das Feld ϕ unterliegt keinen Randbedingungen, ψ hingegen ist auf einen Halbraum beschränkt. Wie in Kapitel 4 sind beide Felder durch einen Kopplungsparameter f gekoppelt. Bei $t < 0$ ist dieser Parameter Null, bei $t = 0$ wird die Kopplung eingeschaltet. Es gilt weiterhin Gleichung (4.8), für ψ ist jetzt jedoch Gleichung (3.1) einzusetzen. Die Rechnung zur Bestimmung von $\phi(t,p)$ wird analog zu der Rechnung in Kapitel 3 durchgeführt. Gleichung (4.12) wird zu:

$$
\begin{aligned}
\phi(t,p) = {} & \frac{\cos(\omega_{m_1}(p)t)}{2\sqrt{2\omega_m(p)}}\Big(a_\phi(p) + a_\phi^*(-p)\Big) - \frac{i\sin(\omega_{m_1}(p)t)\sqrt{\omega_m(p)}}{2\sqrt{2}\omega_{m_1}(p)}\Big(a_\phi(p) - a_\phi^*(-p)\Big) \\
& + \frac{\cos(\omega_{m_1}(p)t)}{2\sqrt{2\omega_m(p)}}\Big(\frac{a_\psi(p) + a_\psi^*(-p) - a_\psi(S_3p) - a_\psi^*(-S_3p)}{\sqrt{2}}\Big) \\
& - \frac{i\sin(\omega_{m_1}(p)t)\sqrt{\omega_m(p)}}{2\sqrt{2}\omega_{m_1}(p)}\Big(\frac{a_\psi(p) - a_\psi^*(-p) - a_\psi(S_3p) + a_\psi^*(-S_3p)}{\sqrt{2}}\Big) \\
& + \frac{\cos(\omega_{m_2}(p)t)}{2\sqrt{2\omega_m(p)}}\Big(a_\phi(p) + a_\phi^*(-p)\Big) - \frac{i\sin(\omega_{m_2}(p)t)\sqrt{\omega_m(p)}}{2\sqrt{2}\omega_{m_2}(p)}\Big(a_\phi(p) - a_\phi^*(-p)\Big) \\
& - \frac{\cos(\omega_{m_2}(p)t)}{2\sqrt{2\omega_m(p)}}\Big(\frac{a_\psi(p) + a_\psi^*(-p) - a_\psi(S_3p) - a_\psi^*(-S_3p)}{\sqrt{2}}\Big) \\
& + \frac{i\sin(\omega_{m_2}(p)t)\sqrt{\omega_m(p)}}{2\sqrt{2}\omega_{m_2}(p)}\Big(\frac{a_\psi(p) - a_\psi^*(-p) - a_\psi(S_3p) + a_\psi^*(-S_3p)}{\sqrt{2}}\Big)
\end{aligned}
\tag{6.1}
$$

Es gelten wie zuvor die Relationen $[a(p), a^*(p')] = (2\pi)^3\delta(p-p')$, $[a(p), a(p')] = 0 = [a^*(p), a^*(p')]$. Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}
&\langle\Omega|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\Omega\rangle = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3p\Big(e^{-ip_j(x^j-y^j)} - e^{-ip_j(x^j-S_3y^j)}\Big)\frac{1}{8}\\
&\left(\frac{\cos(\omega_{m_1}(p)t)^2}{\omega_m(p)} + \frac{\cos(\omega_{m_2}(p)t)^2}{\omega_m(p)} + \frac{\sin(\omega_{m_1}(p)t)^2\omega_m(p)}{\omega_{m_1}(p)^2} + \frac{\sin(\omega_{m_2}(p)t)^2\omega_m(p)}{\omega_{m_2}(p)^2}\right.\\
&\left. - \frac{2\cos(\omega_{m_1}(p)t)\cos(\omega_{m_2}(p)t)}{\omega_m(p)} - \frac{2\sin(\omega_{m_1}(p)t)\sin(\omega_{m_2}(p)t)\omega_m(p)}{\omega_{m_1}(p)\omega_{m_2}(p)}\right)\\
&+ \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3p e^{-ip_j(x^j-y^j)}\frac{1}{8}\\
&\left(\frac{\cos(\omega_{m_1}(p)t)^2}{\omega_m(p)} + \frac{\cos(\omega_{m_2}(p)t)^2}{\omega_m(p)} + \frac{\sin(\omega_{m_1}(p)t)^2\omega_m(p)}{\omega_{m_1}(p)^2} + \frac{\sin(\omega_{m_2}(p)t)^2\omega_m(p)}{\omega_{m_2}(p)^2}\right.\\
&\left. + \frac{2\cos(\omega_{m_1}(p)t)\cos(\omega_{m_2}(p)t)}{\omega_m(p)} + \frac{2\sin(\omega_{m_1}(p)t)\sin(\omega_{m_2}(p)t)\omega_m(p)}{\omega_{m_1}(p)\omega_{m_2}(p)}\right)
\end{aligned} \tag{6.2}$$

Die ersten sechs Terme werden von den Vertauschungsrelationen der Operatoren a^*_ϕ und a_ϕ erzeugt, die letzten Terme von denen der Operatoren a^*_ψ und a_ψ. Zusammenfassen ergibt:

$$\begin{aligned}
&\langle\Omega|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\Omega\rangle = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3p e^{-ip_j(x^j-y^j)}\frac{1}{4}\\
&\left(\frac{\cos(\omega_{m_1}(p)t)^2}{\omega_m(p)} + \frac{\cos(\omega_{m_2}(p)t)^2}{\omega_m(p)} + \frac{\sin(\omega_{m_1}(p)t)^2\omega_m(p)}{\omega_{m_1}(p)^2} + \frac{\sin(\omega_{m_2}(p)t)^2\omega_m(p)}{\omega_{m_2}(p)^2}\right)\\
&- \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3p e^{-ip_j(x^j-S_3y^j)}\frac{1}{8}\\
&\left(\frac{\cos(\omega_{m_1}(p)t)^2}{\omega_m(p)} + \frac{\cos(\omega_{m_2}(p)t)^2}{\omega_m(p)} + \frac{\sin(\omega_{m_1}(p)t)^2\omega_m(p)}{\omega_{m_1}(p)^2} + \frac{\sin(\omega_{m_2}(p)t)^2\omega_m(p)}{\omega_{m_2}(p)^2}\right.\\
&\left. - \frac{2\cos(\omega_{m_1}(p)t)\cos(\omega_{m_2}(p)t)}{\omega_m(p)} - \frac{2\sin(\omega_{m_1}(p)t)\sin(\omega_{m_2}(p)t)\omega_m(p)}{\omega_{m_1}(p)\omega_{m_2}(p)}\right)
\end{aligned} \tag{6.3}$$

Das zweite Integral wäre nicht vorhanden, wenn ψ keine Randbedingungen hätte. Die Differenz des Erwartungswertes von ϕ^2 mit freiem ϕ und auf einen Halbraum beschränkten ψ und des Erwartungswertes von ϕ^2 im Fall ohne Randbedingungen an beide Felder soll jetzt berechnet werden, um herauszufinden, wie die Beschränkung des Feldes ψ das freie Feld ϕ beeinflusst. Analog zu den Rechnungen, die durchgeführt wurden, um Gleichung (4.46) zu bestimmen, wird unser Ausdruck jetzt umgeformt.

$$\lim_{y\to x}\Big(\langle\Omega|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\Omega\rangle^{\phi:MR}_{\psi:HR}-\langle\Omega|\,\phi(t,x)\phi(t,y)\,|\Omega\rangle^{\phi:MR}_{\psi:MR}\Big)=-\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3p e^{-i2p_3x^3}\frac{1}{8}$$
$$\left(\frac{\cos(\omega_{m_1}(p)t)^2}{\omega_m(p)}+\frac{\cos(\omega_{m_2}(p)t)^2}{\omega_m(p)}+\frac{\sin(\omega_{m_1}(p)t)^2\omega_m(p)}{\omega_{m_1}(p)^2}+\frac{\sin(\omega_{m_2}(p)t)^2\omega_m(p)}{\omega_{m_2}(p)^2}\right.$$
$$\left.-\frac{2\cos(\omega_{m_1}(p)t)\cos(\omega_{m_2}(p)t)}{\omega_m(p)}-\frac{2\sin(\omega_{m_1}(p)t)\sin(\omega_{m_2}(p)t)\omega_m(p)}{\omega_{m_1}(p)\omega_{m_2}(p)}\right)$$
$$\approx\frac{-1}{(2\pi)^3}\int d^3p e^{-i2p_3x^3}\frac{1}{8}\left(\frac{f}{\omega_m(p)^3}\sin(2\omega_m(p)t)\sin\Big(\frac{ft}{\omega_m(p)}\Big)+\frac{4}{\omega_m(p)}\sin\Big(\frac{ft}{2\omega_m(p)}\Big)^2\right.$$
$$\left.+\frac{f^2}{\omega_m(p)^5}\sin(\omega_m(p)t)^2\right) \tag{6.4}$$

Jetzt führen wir die Substitution $d^3p=2\pi\omega d\omega dp_3$ durch:

$$=\frac{-1}{(2\pi)^2}\int_m^\infty d\omega\int_{-\sqrt{\omega^2-m^2}}^{\sqrt{\omega^2-m^2}}dp_3e^{-i2p_3x^3}\frac{1}{8}\left(\frac{f}{\omega^2}\sin(2\omega t)\sin\Big(\frac{ft}{\omega}\Big)+4\sin\Big(\frac{ft}{2\omega}\Big)^2+\frac{f^2}{\omega^4}\sin(\omega t)^2\right)$$
$$=\frac{-1}{(2\pi)^2}\int_m^\infty d\omega\frac{\sin(2\sqrt{\omega^2-m^2}x^3)}{x^3}\frac{1}{8}\left(\frac{f}{\omega^2}\sin(2\omega t)\sin\Big(\frac{ft}{\omega}\Big)+4\sin\Big(\frac{ft}{2\omega}\Big)^2+\frac{f^2}{\omega^4}\sin(\omega t)^2\right) \tag{6.5}$$

Eine analytische Berechnung dieses Integrals ist nicht möglich, jedoch zeigt eine numerische Auswertung unter den bisher vorausgesetzten Vereinfachungen von kleinen Zeiten und schwacher Kopplung, dass das Integral einen negativen Wert besitzt. Die Beschränkung von ψ auf einen Halbraum bewirkt also, dass der Erwartungswert von ϕ^2 nach Einschalten der Kopplung kleiner als im gleichen Fall mit unbeschränktem ψ wird. Da der Erwartungswert des Quadrates des auf einen Halbraum beschränkten Feldes ψ kleiner als der Erwartungswert von ϕ^2 ist, können wir hier die Schlussfolgerung ziehen, dass sich die Erwartungswerte beider Felder nach Einschalten der Kopplung einander annähern.

Kapitel 7

Zusammenfassung und Ausblick

7.1 Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurden Erwartungswerte mehrerer thermischer Observablen eines skalaren Quantenfeldes unter verschiedenen Bedingungen untersucht. Besonderer Wert wurde dabei auf das formal unendliche Quadrat des Feldoperators gelegt, das durch Vergleich mit seinem Erwartungswert im ungekoppelten Fall bei $T = 0$ im Minkowskiraum renormiert wurde und so einen endlichen Wert bekam. Diese Observable ist besonders einfach zu behandeln, da sie keine Ableitungen enthält. Sie ist ein Maß für die lokale Temperatur des Systems. Das Wickquadrat, welches im Fall eines masselosen Feldes auf dem Minkowskiraum den Wert $\frac{1}{12\beta^2}$ hat, wurde durch geeignete Näherungen auch für massive Felder bestimmt. Dabei stellte sich heraus, dass die Größe nicht mehr proportional zum Quadrat der Temperatur ist, jedoch immer noch mit steigender Temperatur anwächst. Deshalb ist das Wickquadrat auch für massive Skalarfelder eine geeignete Temperaturobservable.
Des Weiteren wurden flache Geometrien, die von der Geometrie des Minkowskiraumes abweichen, betrachtet. Randbedingungen wie die Beschränkung des Feldes auf einen Halbraum und die Beschränkung zwischen zwei Kondensatorplatten wurden untersucht. Dabei erhält das Quantenfeld ortsabhängige Terme, auch der Erwartungswert des Quadrates des Feldoperators ist nicht länger translationsinvariant. Diese Größe, die im Minkowskiraum für das masselose Feld proportional zur Temperatur war, bekommt hier in der Nähe der Platten einen negativen Wert, was die Interpretation als thermische Observable schwierig macht. Durch Linearkombination verschiedener Erwartungswerte wurden Größen gefunden, die Funktionen der Temperatur sind, jedoch nicht vom Ort abhängen.
Ein weiteres Gebiet war die Untersuchung von zwei gekoppelten skalaren Quantenfeldern unterschiedlicher Temperatur. Die Kopplung wurde durch einen Kopplungsterm in der Klein-Gordon-Gleichung eingeführt, welcher linear in den Feldern ist. Dieser Kopplungsparameter wurde so gewählt, dass er vor Einschalten der Kopplung Null ist, die Felder also im Anfangszustand frei sind. Durch eine geeignete Linearkombination erhielten wir zwei neue Felder, die durch entkoppelte Klein-Gordon-Gleichungen mit verschiedenen Massen beschrieben werden. Um die Zeitentwicklung der ursprünglichen Felder zu bestimmen, wurden sie als Linearkombination der neuen ungekoppelten Felder ausgedrückt und die Zeitentwicklung für diese durchgeführt. Es wurde wie zuvor das Quadrat des Feldoperators als thermische Observable untersucht. Um diese Größe zu renormieren, wurde es als

Produkt von zwei Feldoperatoren an den Orten x und y geschrieben und davon das gleiche Produkt von Operatoren im Grundzustand zur Zeit $t = 0$ subtrahiert. Dann haben wir den Grenzwert $y \to x$ gebildet. Da die resultierenden Integrale sehr kompliziert sind, war es nötig, mehrere Näherungen zu machen. So wurde vorausgesetzt, dass der Kopplungsterm klein gegenüber dem Quadrat der Masse sei. Des Weiteren haben wir die Temperaturdifferenz zwischen beiden Feldern klein gegenüber der Temperatur gewählt und die Masse groß verglichen mit der Temperatur. Mit diesen Näherungen wurde die Temperaturobservable sowohl für kleine als auch für große Zeiten berechnet. Insbesondere die Langzeitbetrachtung führte auf ein interessantes Resultat: Die Temperaturobservablen eines Systems aus zwei gekoppelten Feldern mit unterschiedlicher Anfangstemperatur gleichen sich im Limes großer Zeiten denen eines Systems zweier gekoppelter Felder mit gleicher Temperatur, nämlich dem Mittelwert der Temperaturen des ersten Systems, an. Dieses Resultat lässt die Interpretation zu, dass wie im Fall zweier gekoppelter klassischer Systeme unterschiedlicher Temperatur Energie von dem wärmeren zum kälteren System fließt und die Temperaturen sich so angleichen. Aufgrund der Näherung $m^2 >> f$, der Näherung schwacher Kopplung, war es für ein masseloses Feld nicht einfach möglich, in den bisherigen Resultaten den Grenzwert $m \to 0$ zu bilden. Eines der beiden neuen Felder, die durch Linearkombination der ursprünglichen Felder entstehen, erhält eine imaginäre Masse, die dazu führt, dass der Erwartungswert der Temperaturobservable, anders als im massiven Fall, im Grenzfall $t \to \infty$ nicht konvergiert, sondern exponentiell mit der Zeit wächst. Trotzdem ist auch hier die Interpretation des Angleichens beider Temperaturen möglich, da die führenden divergenten Terme in den beiden zu vergleichenden Termen identisch sind.
Im letzten Kapitel wurden die Resultate aus den vorherigen Kapiteln kombiniert: Ein unbeschränktes Feld wurde mit einem auf einen Halbraum beschränkten Feld gekoppelt. Es stellte sich heraus, dass das Feld mit Randbedingungen, dessen Wickquadrat einen kleineren Wert als das unbeschränkte Feld hat, das unbeschränkte Feld in der Form beeinflusst, dass sein Wickquadrat nach Einschalten der Kopplung kleiner wird, als es im Fall von zwei unbeschränkten Feldern der Fall wäre. Die Kopplung führt also dazu, dass sich die Wickquadrate der beiden unterschiedlichen Felder annähern.

7.2 Ausblick

In dieser Arbeit wurden spinlose Skalarfelder untersucht. Es wäre interessant, ähnliche Rechnungen auch für Teilchen mit halbzahligem Spin durchzuführen, um zu sehen, wie sich die Temperaturobservablen von Fermionfeldern unter den betrachteten Umständen verhalten. Man könnte auch Kopplungen zwischen einem Bosonen- und einem Fermionenfeld untersuchen. In einem solchen Fall ist es jedoch nicht möglich, eine Bewegungsgleichung aufzustellen, die in allen Feldern linear ist. Wegen der Drehimpulserhaltung tauchen Dreier- oder höhere Vertizes in den Feynmandiagrammen auf. Es ist nicht möglich, die Felder wie im betrachteten Fall von zwei gekoppelten Skalarfeldern durch eine Linearkombination zu entkoppeln und das Problem auf die Zeitentwicklung freier Felder zurückzuführen. Außerdem könnte man andere Observablen als das Quadrat des Feldoperators untersuchen. Der Energie-Impuls-Tensor wurde in Gleichung (3.38) bereits für ein auf einen Halbraum beschränktes Skalarfeld endlicher Temperatur bestimmt, die Übertragung dieses Tensors

auf andere in dieser Arbeit behandelte Situationen ist leicht möglich.
Eine andere interessante Fragestellung ist das Verhalten von Temperaturobservablen gekoppelter Felder auf gekrümmten Raumzeiten, ähnlich wie Jörgen Samson es in [11] für ungekoppelte Skalarfelder untersucht hat.

Literaturverzeichnis

[1] R. Brunetti, K. Fredenhagen and R. Verch, "The generally covariant locality principle: A new paradigm for local quantum physics," Commun. Math. Phys. **237** (2003) 31 [arXiv:math-ph/0112041].

[2] D. Buchholz, I. Ojima and H. Roos, "Thermodynamic properties of non-equilibrium states in quantum field theory," Annals Phys. **297** (2002) 219 [arXiv:hep-ph/0105051].

[3] M. Demetrian, "Casimir effect in four simple situations - including a noncommutative two-sphere," FizikaB **11** (2002) 175 [arXiv:hep-th/0204020].

[4] K. Fredenhagen, "Locally covariant quantum field theory", 2004, arXiv:hep-th/0403007.

[5] K. Fredenhagen, "Quantenfeldtheorie", Vorlesungsskript, 2001

[6] K. Fredenhagen, "Quantenfeldtheorie in gekrümmter Raumzeit", Vorlesungsskript, 1999

[7] A. Knauf und R. Seiler "Vorlesung Mathematische Physik II Statistische Mechanik", Vorlesungsskript, 2004

[8] K. A. Milton, "Physical Manifestations of Zero-Point Energy, The Casimir Effect", World Scientific, 2001

[9] V. M. Mostepanenko and N. N. Trunov, "The Casimir Effect and its Applications", Oxford Science Publications, 1997

[10] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, "An Introduction to Quantum Field Theory", Addison-Wesley, 1995

[11] J. Samson, "Untersuchung thermischer Observablen auf Robertson-Walker-Raumzeiten", Diplomarbeit, 2003

[12] Wolfram Research, "Mathworld", Mathematiklexikon im Internet, http://mathworld.wolfram.com

Danksagung

Ich möchte mich bei Herrn Fredenhagen für die Auswahl des interessanten und spannenden Diplomarbeitsthemas, die hervorragende Betreuung und seine Geduld in vielen Gesprächen bedanken. Außerdem danke ich allen Mitgliedern der Arbeitsgruppe für die schöne Arbeitsatmosphäre und die Beantwortung vieler Fragen. Besonders Jörgen Samson hat mir in der Anfangsphase meiner Arbeit durch zahlreiche Erläuterungen sehr geholfen. Vielen Dank auch an Ferdinand Brennecke, Marcel Kossow und Lutz Osterbrink für viele fachliche und nichtfachliche Gespräche.

Mein ganz besonderer Dank geht an meine Eltern und meine Schwester, die mich immer unterstützen und ohne die meine Diplomarbeit nicht möglich gewesen wäre!