

QCD-Instantonen am LHC

Theoretische Aspekte

Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades
des Fachbereichs Physik
der Universität Hamburg

vorgelegt von

Maik Petermann

aus Bad Oldesloe

Hamburg

2007

Gutachter der Dissertation:	Dr. F. Schrempp Prof. Dr. J. Bartels
Gutachter der Disputation:	Dr. F. Schrempp Prof. Dr. B. Kniehl
Datum der Disputation:	12. 06. 2007
Vorsitzender des Prüfungsausschusses:	Dr. H. D. Rüter
Vorsitzender des Promotionsausschusses:	Prof. Dr. G. Huber
Dekan der Fakultät MIN:	Prof. Dr. A. Frühwald

QCD-Instantonen am LHC

Theoretische Aspekte

Instantonen sind nichtperturbative, topologisch nichttriviale Feldkonfigurationen, die in jeder nichtabelschen Eichtheorie auftreten. Sie können als Tunnelprozesse zwischen Vakua unterschiedlicher topologischer Quantenzahl interpretiert werden. Obwohl Instantonen ein grundlegender theoretischer Bestandteil des Standardmodells sind, steht ein direkter experimenteller Nachweis ihrer Existenz bisher noch aus. In dieser Arbeit wird das generelle Entdeckungspotential von QCD-Instantonen am LHC mit Hilfe der Instanton-Störungsrechnung studiert. Hierbei kommt dem Übergang vom führenden Instantonprozess bei HERA zum entsprechenden Prozess am LHC besondere Bedeutung zu. Wesentliche Aspekte und Unterschiede zur tief-inelastischen Streuung erschließen sich bereits bei der Untersuchung des einfachsten Instanton-induzierten Prozesses. Aufbauend auf den dabei gewonnenen Erkenntnissen wird anschließend die Emission von Endzustandsgluonen bei der Berechnung inklusiver Wirkungsquerschnitte mit einbezogen. Im Vergleich zur tief-inelastischen Streuung wird hierbei eine erhebliche Anhebung des Wirkungsquerschnittes festgestellt.

QCD-Instantons at LHC

Theoretical Aspects

Instantons are nonperturbative, topologically nontrivial field configurations, which occur in every nonabelian gauge theory. They can be understood as tunneling processes between topologically distinct vacua. Although being a basic theoretical aspect of the Standard Model, a direct experimental verification of instanton processes is still lacking. In this thesis the general discovery potential for QCD-instantons at the LHC is studied in detail by means of instanton perturbation theory. In this context the close correspondence between the leading instanton induced processes at HERA and at LHC becomes important. Essential aspects and differences to deep inelastic scattering can already be revealed by studying the simplest process. Based on these results inclusive cross sections are calculated including the emission of final state gluons. Compared to deep inelastic scattering, a large enhancement of the cross section is found.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	vii
1 Grundlagen der Instantonphysik	1
1.1 Vakuumstrukturen von Yang-Mills-Theorien	1
1.1.1 Topologie und Eichtheorien	1
1.1.2 Die axiale Anomalie	5
1.1.3 Feldkonfigurationen	9
1.2 Perturbative Methoden	12
1.2.1 Die Dichteverteilung	13
1.2.2 Externe Felder	15
1.2.3 Die Valley-Wirkung	20
2 Instantonen und der LHC	25
2.1 Zusammenbruch der Valley-Wirkung	25
2.2 Instantonen in tief-inelastischer Streuung	27
2.3 Neue Wege: Instantonen am LHC	30
2.3.1 Allgemeine Aspekte	30
2.3.2 Ereignis-Signatur	32
3 Exklusives: Der einfachste Prozess	35
3.1 Definition des Prozesses	35
3.1.1 Amplitude bei Emission eines virtuellen Photons	36
3.1.2 Integration über die Instantongröße	38
3.1.3 Analytische Fortsetzung	39
3.1.4 Amplitudenquadrat	40
3.1.5 Hierarchische Strukturen	43
3.1.6 Interferenzen und W -Emission	45
3.2 Gruppen-Integration	47
3.2.1 Allgemeine Regeln	48
3.2.2 Rekursives Lösungsverfahren	50
3.3 Wirkungsquerschnitte	52
3.3.1 Parametrisierung des Phasenraum	52
3.3.2 Kontraktion des Amplitudenquadrates	54
3.3.3 Dominanter Beitrag	55

3.3.4	W -Emission	58
3.3.5	Unterdrückung der Interferenzen	59
3.4	Faktorisierung und die Crossing-Symmetrie	61
3.4.1	Fundamentaler Subprozess	62
3.4.2	Bezug zum tief-inelastischen Fall	64
4	Inklusives: Über den Sattelpunkt	67
4.1	Inklusive Instanton-induzierte gg -Streuung	67
4.1.1	Eingrenzung der Problemstellung	68
4.1.2	Einteilchen-inklusive Wirkungsquerschnitt	69
4.1.3	Vorwärtsstreuamplitude	71
4.2	Sattelpunktsnäherung	74
4.2.1	Vorbereitungen	75
4.2.2	Sattelpunktslösung	77
4.2.3	Vergleich zwischen zeitartiger und raumartiger Lösung	82
4.2.4	Wirkungsquerschnitte	85
4.3	Diskussion	89
5	Zusammenfassung	95
A	Konventionen und Identitäten	99
A.1	Eichfelder und Wirkung in Minkowskimetrik	99
A.2	Sigma- und Gamma-Matrizen in Minkowskimetrik	99
A.3	Sigma-Matrizen in euklidischer Metrik	100
A.4	Spinoren und Polarisationsvektoren	100
B	Gruppenintegration	101
	Literaturverzeichnis	103
	Danksagung	113

Einleitung

Seit ihrer Formulierung vor über 30 Jahren hat sich die Quantenchromodynamik (QCD) als nichtabelsche Eichtheorie zur Beschreibung der starken Wechselwirkung inzwischen außerordentlich erfolgreich etabliert. So besteht längst weitestgehende Einigkeit darüber, dass Hadronen aus Quarks aufgebaut sind, welche neben ihrem *Flavor* auch *Color*-Freiheitsgrade aufweisen, die die Ursache für den Austausch starker Wechselwirkungen über Gluonen sind. Das gewonnene Vertrauen in die Theorie beruht nicht zuletzt darauf, dass sich harte Streuprozesse mit kurzen Zeit- bzw. hohen Impulsskalen wegen der asymptotischen Freiheit der QCD in einer Störungsreihe bezüglich der Eichkopplung berechnen lassen. Die so vielfach bis in höhere Ordnungen berechneten Wirkungsquerschnitte und Zerfallsraten stimmen in beeindruckender Genauigkeit mit den experimentellen Befunden überein.

Trotz der unbestreitbaren Erfolge der perturbativen QCD lassen sich auch viele hadronische Phänomene, wie das Quark-Confinement, die Generierung einer dynamischen Quarkmasse oder der Hadronisierungsprozess selbst, mit störungstheoretischen Methoden allein nicht erklären. Das liegt zum Teil daran, dass für diese *nichtperturbativen* Prozesse Impulsskalen relevant sind, bei denen die Eichkopplung α_s nicht länger klein genug ist, um als perturbativer Entwicklungsparameter zu dienen. Als komplementäre Methode dazu hat sich die inzwischen nicht mehr wegzudenkende Gitter-QCD etabliert. Sie stellt derzeit in vielen Fällen das einzig adequate Mittel zur Behandlung nichtperturbativer Phänomene dar und hat sehr zu deren Verständnis beigetragen.

Abgesehen davon werden in der QCD aber auch Prozesse vorhergesagt, die sich *unabhängig* von der Größe der Eichkopplung prinzipiell nicht im Rahmen einer normalen Störungsreihe berechnen lassen. Diese Prozesse werden durch topologische Fluktuationen des Gluonenfeldes verursacht und stehen in engem Zusammenhang zur axialen Anomalie [1], die in masseloser QCD die Chiralität verletzen [2]. Ähnliche Fluktuationen des Eichfeldes existieren auch in der elektroschwachen Theorie und sind dort für $B + L$ -verletzende Prozesse verantwortlich.

Ein wichtiger und einfacher Vertreter solcher Eichfeldfluktuationen sind sogenannte *Instantonen* [3], die in jeder nichtabelschen Eichtheorie auftreten. Hierbei handelt es sich um semiklassische Feldkonfigurationen mit topologischer Ladung $Q_T = 1$, die in euklidischer Metrik die Wirkung lokal minimieren. In Minkowskimetrik können Instantonen als *Tunnelübergänge* zwischen benachbarten, topologisch unterschiedlichen Vakua interpretiert werden [2, 4–6], deren Tunnelamplitude $T^{(I)} \sim \exp\left(-\frac{2\pi}{\alpha}\right)$ exponentiell unterdrückt ist [2, 5, 6]. Wegen der axialen Anomalie werden in masseloser QCD durch Instantonen

linkshändige Quarknullmoden vernichtet und rechtshändige erzeugt.¹ Als ein wesentlicher nichtperturbativer Aspekt der QCD sind Instantonen zudem ein vielversprechender Kandidat für verschiedene QCD-Phänomene, die sich mit rein perturbativen Methoden nicht erklären lassen. So konnte beispielsweise das berühmte $U(1)$ -Problem, welches in direktem Zusammenhang mit der axialen Anomalie steht, von 't Hooft [2, 5, 7] gelöst werden. Desweiteren spielen Instantonen eine wichtige Rolle im Hadronisierungsprozess [8–10] von Quarks und Gluonen und gelten insbesondere als eine der Ursachen für die spontane chirale Symmetriebrechung in der QCD und die Erzeugung dynamischer Quarkmassen [11, 12]. In tief-inelastischer Streuung sind sie ferner mitverantwortlich für die Saturation der Gluonenverteilung bei kleinem Bjorken- x_{Bj} [13–18].

Obwohl Instantonen damit ein wesentlicher Bestandteil jeder nichtabelschen Eichtheorie sind und als Kandidat zur Erklärung vieler Phänomene der QCD gelten, gibt es dennoch bislang keinen gesicherten experimentellen Beleg für ihre Existenz. Der Nachweis Instanton-induzierter Prozesse stellt somit eine noch ausstehende wichtige Bestätigung dafür dar, dass *nichtabelsche Eichtheorien* das richtige theoretische Konzept zur Beschreibung fundamentaler Wechselwirkungen sind, insbesondere derjenigen des Standardmodells der Elementarteilchenphysik. Zudem wäre ihr allgemeiner Nachweis, als wichtiges Indiz für die topologische Natur des Vakuums der elektroschwachen Vektorbosonen, eine phänomenologische Grundlage für die $B + L$ -Verletzung durch Sphaleronprozesse [19–22], die in der Kosmologie als einer der wesentlichen Mechanismen zur Erzeugung der Baryonenasymmetrie gehandelt werden [23–26].

Die Frage, ob Instantonen in hochenergetischen Streuprozessen beobachtbar sind, wurde zunächst im Rahmen der elektroschwachen Theorie diskutiert [27–32]. Wegen der kleinen Eichkopplung sind diese Prozesse allerdings extrem stark unterdrückt und es sieht eher nicht danach aus, als ob sich $B + L$ -verletzende Prozesse an Beschleunigern nachweisen lassen werden.

Inzwischen hat sich das Interesse mehr auf QCD-Instantonen verlagert, deren exponentielle Unterdrückung wegen der größeren Eichkopplung α_s erheblich schwächer ausfällt. Dabei lag der Fokus in der Vergangenheit vor allem bei Instanton-induzierten Prozessen in tief-inelastischer Streuung. So wurden am DESY von Ringwald und Schrempp [33–46] ausgiebige theoretische Untersuchungen zur Vorhersage Instanton-induzierter Ereignisse bei HERA durchgeführt. Dabei wurde u.a. die Instanton-Störungsrechnung, die einer perturbativen Entwicklung vor einem Instanton-Hintergrund entspricht, in Impulsdarstellung formuliert [34]. Hierdurch konnten erstmals essentielle Schnitte im Phasenraum, beispielsweise zur Kontrolle über die Virtualität, berücksichtigt und dadurch Infrarotdivergenzen eliminiert werden. Bei den Untersuchungen stellte sich heraus, dass die für die Instanton-perturbativen Methoden notwendige Impulsskala in tief-inelastischer Streuung gerade in der für HERA wichtigen Region liegt [37]. Ferner wurde der Instanton-induzierte Wirkungsquerschnitt für HERA, in Abhängigkeit der angelegten kinematischen Schnitte, zu $\sigma_{\text{HERA}}^{(I)} \approx \mathcal{O}(10 \div 100)$ pb bestimmt [37, 42]. Auf Grundlage der theoretischen Vorhersagen, insbesondere mit Hilfe des Monte-Carlo-Generators QCDINS [43], wurden bei

¹Bei Antiinstantonen mit $Q_T = -1$ werden rechtshändige Nullmoden vernichtet und linkshändige erzeugt.

H1 [47] und ZEUS [48] entsprechende Experimente zum Nachweis von Instantonen durchgeführt. Hierbei konnte eine signifikante Anhebung des Signals gegenüber den Standard-Monte-Carlo-Simulationen, sowie eine positive Korrelation zwischen dem Datenüberschuss und der Instanton-Separation-Power festgestellt werden [43, 45, 47, 48]. Allerdings waren die Ergebnisse noch zu stark modellabhängig, als dass eine eindeutige Bestätigung eines Instanton-Signals festgestellt werden konnte.

Komplementär zur tief-inelastischen Streuung stellen PP -Kollisionen eine weitere interessante Möglichkeit dar, um Untersuchungen über QCD-Instantonen anzustellen. So ergaben Untersuchungen von Brandenburg, Utermann und Ringwald [49], die während der Anfertigung dieser Arbeit stattfanden, dass die Winkelverteilung des Leptonen-Paares in Instanton-induzierten Drell-Yang-Prozessen die in gewöhnlicher Störungstheorie gültige Lam-Tung-Relation verletzen. Im Hinblick auf den bald anlaufenden LHC handelt es sich hierbei allerdings eher um einen Niederenergieeffekt. Zudem wurden bislang die Auswirkungen durch vom Instanton erzeugte Gluonen im Endzustand nicht mitberücksichtigt.

Zielsetzung der Arbeit

In Analogie zu den Untersuchungen für HERA soll in dieser Arbeit das generelle *Entdeckungspotential von QCD-Instantonen am LHC* studiert werden, wobei der für die tief-inelastische Streuung entwickelte Kalkül der Instanton-Störungsrechnung weiterverwendet werden kann. Im Unterschied zu [49] kommt hierbei dem Übergang vom führenden Instanton-induzierten Prozess bei HERA zum entsprechend führenden Prozess am LHC, der gg -Streuung, besondere Bedeutung zu.

Der wesentliche Unterschied zur tief-inelastischen Streuung besteht darin, dass die benötigte Virtualität, die dort über ein virtuelles Photon γ^* durch einen raumartigen Impulsübertrag vom Elektron zum Proton eingespeist wird, nun über einen s -Kanal des Endzustands präpariert wird und daher *zeitartig* ist. Zu diesem Zweck werde von einer der vom Instanton erzeugten Quarknullmoden ein virtuelles Photon oder ein W -Boson mit Impuls q emittiert.² Die zu betrachtenden Prozesse sind daher durch

$$g + g \rightarrow \gamma^*(q) + 2n_f (\bar{q}_R + q_R) + n_g g$$

$$g + g \rightarrow W(q) + \bar{q}'_R + q_R + (2n_f - 1) (\bar{q}_R + q_R) + n_g g$$

gegeben, wobei n_f hier die Anzahl der leichten Quarkflavors sei, die wegen der axialen Anomalie als Nullmoden vom Instanton emittiert werden und „demokratisch“ vertreten sind. Im realistischen Fall beträgt $n_f = 3$ mit $q \in \{u, d, s\}$. Bei einem emittierten W -Boson ist die Endzustandskonfiguration entsprechend anzupassen, wobei wegen des bei der Emission auftretenden Flavorwechsels die Flavordemokratie gebrochen wird.

Der Einfachheit halber werde in dieser Arbeit durchgehend sowohl die Virtualität des emittierten Photons als auch die Masse des W -Bosons mit

$$Q \equiv \sqrt{q^2} \geq 0$$

²Das virtuelle Photon werde wiederum durch leptonische Paarerzeugung präpariert.

bezeichnet, wobei q der Impuls des jeweiligen Vektorbosons sei. Ferner werde die *interne* Impulsskala, die durch die Ankopplung des jeweiligen Vektorbosons an ein virtuelles Quark in den noch zu definierenden Instantonsubprozess eingespeist wird, mit

$$Q' \equiv \sqrt{q'^2} \geq Q$$

bezeichnet. Hierbei sei q' der Impuls eines virtuellen Quarks, von dem das entsprechende Vektorboson emittiert werde. Für den Fall, dass diese Zuordnung nicht eindeutig ist, sind entsprechend weitere interne Virtualitäten zu berücksichtigen.

Neben der übergeordneten Fragestellung, mit welchen Instantonraten am LHC potentiell zu rechnen ist, definieren die folgenden Fragen den allgemeinen Ablauf der Arbeit:

- Wie wirkt sich das zusätzliche Gluon im Anfangszustand auf die Struktur der Übergangsamplitude aus?
- Inwiefern lässt sich die allgemeine Vorgehensweise durch analytische Fortsetzung von der raumartigen in die zeitartige Region vom tief-inelastischen Fall übertragen?
- Welche Auswirkungen hat insbesondere die Zeitartigkeit der Impulse q und q' auf die einzelnen Bereiche der anzuwendenden Instanton-Störungsrechnung?
- Welche weiteren Konsequenzen zieht der Umstand nach sich, dass die Virtualität nun über den Endzustand präpariert wird?
- Und schließlich: Wie lässt sich der Prozess durch einen virtuellen Instanton-Subprozess, wie beispielsweise

$$g + g \rightarrow \bar{q}_R^*(q') + (2n_f - 1) \bar{q}_R + 2n_f q_R + n_g g,$$

und den anschließenden Instanton-induzierten Zerfall eines virtuellen Quarks unter Emission eines Vektorbosons

$$\bar{q}_R^*(q') \rightarrow V(q) + \bar{q}'_R$$

faktoriell beschreiben?

Konkret gliedert sich die Arbeit dabei wie folgt:

In Kapitel 1 werden die relevanten Grundlagen der Instantonphysik behandelt. Dabei werden zunächst eher allgemeine, aber wichtige Aspekte angeschnitten, wie die topologischen Eigenschaften nichtabelscher Eichtheorien und der Zusammenhang zwischen Instantonen und der axialen Anomalie. Desweiteren wird auf die Methoden der Instanton-Störungsrechnung eingegangen, welche die Grundlage der Berechnungen in dieser Arbeit bilden.

Anschließend wird über Kapitel 2 zum eigentlichen Thema der Arbeit – die Suche nach QCD-Instantonen am LHC – übergeleitet. Hierbei soll dem Leser die Motivation der Fragestellung näher gebracht und insbesondere erläutert werden, warum der LHC eine vielversprechende Maschine zur Suche nach Instantonen darstellt. Desweiteren wird

ein kurzer Überblick auf bisher erfolgte Untersuchungen zur Rate von Instantonprozessen gegeben, insbesondere solche in tief-inelastischer eP -Streuung.

Nach diesen Vorabüberlegungen folgt der eigentliche Teil der Arbeit. Hierbei wird zunächst in Kapitel 3 der einfachstmögliche Instanton-induzierte Prozess in gg -Streuung unter Emission eines virtuellen Photons γ^* oder alternativ eines W -Bosons in semiklassischer Näherung berechnet, wobei insbesondere von den Erfahrungen aus Ref. [34] profitiert werden kann. Der einfachste Prozess zeichnet sich dadurch aus, dass lediglich die beiden Nullmoden eines einzelnen Quarkflavors direkt vom Instanton emittiert und neben den beiden Gluonen im Anfangszustand keine weiteren berücksichtigt werden. Obwohl dieser Prozess nur einen sehr kleinen Beitrag zur gesamten Instantonrate beisteuert, bietet er den Vorteil, dass er sich weitestgehend analytisch berechnen lässt und sich bereits wesentliche Aspekte der kinematischen Situation in verhältnismäßig einfacher Umgebung eröffnen.

In Kapitel 4 wird schließlich die quantitative Bestimmung der Instantonrate in gg -Streuung über die Berechnung inklusiver Wirkungsquerschnitte angegangen. Dabei wird der zuvor berechnete einfachste Prozess dahingehend erweitert, dass nun auch Instanton-induzierte Gluonemissionen im Endzustand berücksichtigt werden. Um dabei den Blick auf das Wesentliche zu fokussieren, wird auch hier nur von einem einzelnen Nullmodenflavor ausgegangen, wodurch im Falle der W -Emission störende Interferenzterme entfallen. Infolge dessen lässt sich der Prozess faktorisiert betrachten. Für den Subprozess kann schließlich der Wirkungsquerschnitt für die virtuelle Quarknullmode berechnet werden. Die dabei anfallende Integration über die kollektiven Koordinaten des Instantons wird über eine Sattelpunktsnäherung ausgeführt, wobei auf Erfahrungen aus Ref. [37] aufgebaut werden kann.

Die Arbeit schließt mit Kapitel 5 in einer Zusammenfassung über die gewonnenen Ergebnisse. Ferner wird ein Ausblick über noch ausstehende Untersuchungen gegeben, die das Thema der Arbeit betreffen. Desweiteren wird kurz auf Fragestellungen eingegangen, die sich während der Arbeit ergeben haben, in deren Rahmen aber nicht weiter verfolgt werden.

1 Grundlagen der Instantonphysik

In diesem Kapitel werden die Grundlagen der Instanton-Physik zusammengefasst. Dabei gliedert es sich in zwei Bereiche. In Abschnitt 1.1 wird zunächst auf die grundlegende topologische Struktur des Vakuums nichtabelscher Eichtheorien und dessen Bezug zu Instantonen eingegangen. Desweiteren wird der Zusammenhang zur axialen Anomalie in Verbindung mit Fermionen hergestellt und die klassischen Instanton-Feldkonfigurationen im euklidischen Ortsraum aufgeführt. Abschnitt 1.2 befasst sich mit dem Kalkül der Instanton-Störungsrechnung. Dabei wird zunächst das allgemeine perturbative Verfahren vorgestellt und die Instantondichteverteilung eingeführt. Anschließend wird das Verfahren in semiklassischer Näherung auf externe Felder im Impulsraum ausgeweitet und schließlich auf das optische Theorem in Bezug zur Gluonenresummation eingegangen.

1.1 Vakuumstrukturen von Yang-Mills-Theorien

Eine wesentliche Eigenschaft nichtabelscher Eichtheorien ist die Periodizität der potentiellen Energie ihrer Eichfelder bezüglich ihrer topologischen Quantenzahl, die als Windungszahl aufgefasst werden kann [4]. Insbesondere ist das klassische Yang-Mills-Vakuum nicht eindeutig und es können Tunnelprozesse zwischen topologisch unterschiedlichen Vakua auftreten, welche sich in euklidischer Metrik als die Wirkung minimierende klassische Lösungen der Yang-Mills-Gleichungen herausstellen. Diese werden Instantonen genannt. Im Zusammenspiel mit Fermionen besteht dabei ein tiefer Zusammenhang zwischen solchen Tunnelprozessen mit topologischer Ladung und der axialen Anomalie, die sich in masseloser QCD in Form von chiralitätsverletzenden Prozessen bzw. im Falle der elektroschwachen Wechselwirkung in der $B + L$ -Verletzung äußert.

1.1.1 Topologie und Eichtheorien

Es sollen zunächst einige wichtige Größen aus der Topologie eingeführt werden, die für das weitere Verständnis erforderlich sind. Anschließend wird skizziert, inwiefern das Yang-Mills-Vakuum periodisch ist. Die anstehenden Betrachtungen werden, so nicht anders vermerkt, in euklidischer Metrik ausgeführt.

Die grundlegende Größe in diesem Zusammenhang stellt die *topologische Ladung*

$$Q_T = \int d^4x \partial_\mu K_\mu \equiv \frac{g^2}{32\pi^2} \int d^4x F_{\mu\nu}^a \tilde{F}_{\mu\nu}^a, \quad \tilde{F}_{\mu\nu}^a \equiv \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}^a, \quad (1.1)$$

dar, die auch als Pontryagin-Index bezeichnet wird, wobei $\tilde{F}_{\mu\nu}^a$ der duale Tensor des Feldstärketensors

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g C_{bc}^a A_\mu^b A_\nu^c \quad (1.2)$$

ist. Die zugehörige topologische Stromdichte, auch Chern-Simons-Strom genannt, ist für den im folgenden betrachteten Spezialfall einer $SU(2)$ -Eichgruppe durch

$$K_\mu = \frac{g^2}{16\pi^2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \left(A_\nu^a \partial_\rho A_\sigma^a + \frac{g}{3} \epsilon_{abc} A_\nu^a A_\rho^b A_\sigma^c \right) \quad (1.3)$$

gegeben. Das räumliche Integral über die topologische Ladungsdichte wird dabei als Chern-Simons-Zahl

$$N_{\text{CS}}(t) \equiv \int d^3x K_4 \quad (1.4)$$

bezeichnet. Geht man davon aus, dass die Felder A_μ im räumlich Unendlichen hinreichend schnell verschwinden, so lässt sich mit Hilfe von Gl. (1.4) die topologische Ladung als Differenz

$$Q_T = N_{\text{CS}}(\infty) - N_{\text{CS}}(-\infty) \quad (1.5)$$

der Chern-Simons-Zahlen von unendlicher Zukunft und unendlicher Vergangenheit verstehen.

Die Chern-Simons-Zahl ist, im Gegensatz zur topologischen Ladung, keine eichinvariante Größe. Unter einer lokalen, zeitunabhängigen Eichtransformation

$$A_i \rightarrow U A_i U^\dagger + \frac{i}{g} U \partial_i U^\dagger \quad (1.6)$$

transformiert sie sich vielmehr wie

$$N_{\text{CS}} \rightarrow N_{\text{CS}} + N_W, \quad (1.7)$$

wobei

$$N_W = \frac{1}{24\pi^2} \epsilon_{ijk} \int d^3x \operatorname{tr} [(U \partial_i U^\dagger)(U \partial_j U^\dagger)(U \partial_k U^\dagger)] \quad (1.8)$$

die ganzzahlige Windungszahl von $U(x)$ ist. Ihre Bedeutung lässt sich noch am einfachsten in *einer* Dimension verstehen. Hierzu betrachte man die Funktion

$$U_n : [0, 2\pi] \rightarrow S^1, \quad U_n(\varphi) = \exp(in\varphi + ia), \quad (1.9)$$

wobei $n \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{R}$ seien. Offensichtlich wird das Intervall $[0, 2\pi]$, unabhängig von a , n -mal auf den Einheitskreis abgebildet. Bei einem vollen Durchlauf des Intervalls $[0, 2\pi]$ wird dieser dabei n -mal umlaufen, so dass n als Windungszahl der Funktion U_n aufgefasst werden kann. Man überzeugt sich nun sehr leicht davon, dass diese durch das eindimensionale Pendant zu (1.8)

$$n \equiv \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi U_n \partial_\varphi U_n^\dagger \quad (1.10)$$

wiedergegeben wird. Analog zum eindimensionalen Fall bilden die $U(x)$ nun ihrer Windungszahl entsprechend oft den kompaktifizierten dreidimensionalen Ortsraum auf den dreidimensionalen Parameterraum der $SU(2)$ ab.

Um nun die Periodizität der potentiellen Energie nichtabelscher Eichtheorien einzusehen, sollte die Wirkung in einen kinetischen und einen potentiellen Beitrag unterteilt werden. Eine entsprechende Zuordnung wird besonders in der sogenannten Weil-Eichung mit $A_0^a \equiv 0$ offenbar, in welcher die Wirkung, hier in Minkowskimetrik dargestellt, in einen elektrischen und einen magnetischen Beitrag zerfällt

$$S_M = \int d^4x \left(\frac{1}{2} (E_i^a)^2 - \frac{1}{2} (B_i^a)^2 \right), \quad (1.11)$$

mit

$$E_i^a \equiv \frac{1}{2} \partial_t A_i^a \quad B_i^a \equiv \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} F_{jk}^a. \quad (1.12)$$

Offensichtlich ist der kinetische Anteil durch die elektrische Feldstärke E_i^a und der potentielle durch die magnetische Feldstärke B_i^a gegeben, so dass sich für die potentielle Energie der *eichinvariante* Ausdruck

$$V[A] = \frac{1}{2} \int d^3x (B_i^a)^2 = \frac{1}{2} \int d^3x \operatorname{tr}(F_{ij}F_{ij}) \quad (1.13)$$

ergibt.

Unter einer Eichtransformation, bei der sich die Chern-Simons-Zahl N_{CS} um die Windungszahl N_W ändert, nimmt die Wirkung und insbesondere deren potentieller Anteil wieder denselben Wert an. Eine Feldkonfiguration mit minimaler potentieller Energie, entsprechend dem klassischen Vakuum, welches bei verschwindender Feldstärke $F_{ij} = 0$ bzw. im Falle einer reinen Eichung $A_i = \frac{i}{g} U \partial_i U^\dagger$ angenommen wird, transformiert sich somit wieder in eine Vakuumkonfiguration gleicher Energie, aber mit unterschiedlicher Chern-Simons-Zahl $N_{CS} + N_W$. Die potentielle Energie muss somit periodisch entlang der durch N_{CS} definierten Koordinate im Konfigurationsraum sein. Die Entartung des klassischen Vakuums wird hierbei durch die Windungszahl aufgehoben.

Ein klassisch energetisch erlaubter Prozess über die Potentialbarriere zwischen zweier Vakua, bei dem eine Windungszahl von $N_W = \pm 1$ aufgenommen wird, ist ein sogenanntes *Sphaleron* [19] (vgl. Abb. 1.1). Die Barrierenhöhe ist die Sphaleronenergie oder Sphaleronmasse

$$M_{\text{sph}} \sim \begin{cases} \frac{M_W}{\alpha_W} & \text{QFD [19]} \\ \frac{3\pi}{4} \frac{1}{\alpha_s \rho_{\text{eff}}} & \text{QCD [50]} \Leftrightarrow \text{Potentielle Energie bei } N_{CS} = \frac{1}{2} \\ \mathcal{Q} & \text{QCD [33]} \Leftrightarrow \text{Virtualität eines harten Inst.-Prozesses,} \end{cases} \quad (1.14)$$

wobei ρ_{eff} eine für den Prozess relevante Längenskala ist.¹ Quantenmechanisch ist ebenso eine Durchtunnelung der Barriere möglich. In semiklassischer Näherung ist die Amplitude

¹Hierbei handelt es sich um den effektiven Wert der Instanton-Größe ρ , eine der sogenannten kollektiven Koordinaten, die später eingeführt werden.

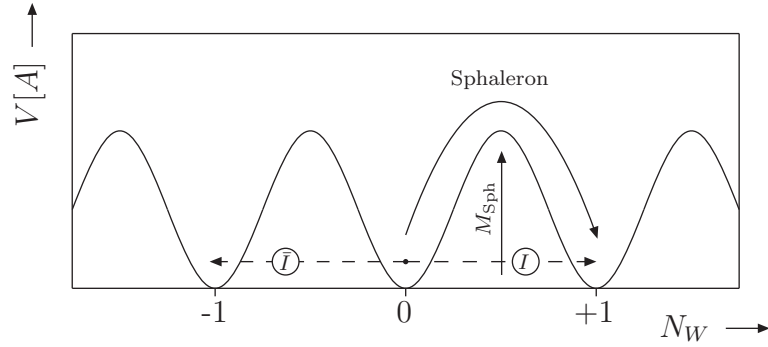


Abbildung 1.1: Die Abbildung zeigt die potentielle Energie $V[A]$ einer Yang-Mills-Theorie. Entlang der Abszisse ist die Chern-Simons-Mode des Feldes aufgetragen, in deren Richtung die potentielle Energie periodisch ist. Die Vakua unterscheiden sich dabei um ganzzahlige Windungszahlen N_W . Klassisch erlaubte Prozesse über die Potentialbarriere werden Sphaleron- und deren Durchtunnelung Instantonprozesse genannt.

für einen Tunnelprozess durch eine Potentialbarriere nach der WKB-Methode proportional zu

$$\langle \Omega' | T | \Omega \rangle \sim \exp(-S/\hbar), \quad (1.15)$$

wobei S die Wirkung der zugehörigen Feldkonfiguration in euklidischer Metrik ist und das planksche Wirkungsquantum \hbar explizit mit angegeben wurde um den Bezug zur semiklassischen Näherung herzustellen.

Die Übergangswahrscheinlichkeit eines solchen Tunnelprozesses wird bei minimaler Wirkung maximiert, was im Euklidischen gerade einer klassisch erlaubten Feldkonfiguration entspricht. Aufgrund der positiven Metrik in euklidischer Raumzeit lässt sich die Wirkung mit Hilfe der Relation

$$0 \leq \left(F_{\mu\nu}^a \pm \tilde{F}_{\mu\nu}^a \right)^2 = 2 \left(\underbrace{F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a}_{\geq 0} \pm F_{\mu\nu}^a \tilde{F}_{\mu\nu}^a \right) \quad (1.16)$$

durch die topologische Ladung Q_T aus Gl. (1.1) nach unten abschätzen

$$S \geq \frac{8\pi^2}{g^2} |Q_T|. \quad (1.17)$$

Offensichtlich wird bei gegebener topologischer Ladung die Wirkung minimiert, wenn der zugehörige Feldstärketensor selbstdual oder antiselbstdual ist, also

$$\tilde{F}_{\mu\nu}^a = \pm F_{\mu\nu}^a \quad (1.18)$$

erfüllt. Solche Feldkonfigurationen werden für $Q_T = 1$ *Instantonen* und für $Q_T = -1$ *Antiinstantonen* genannt [2, 3, 5].² Da die Minkowskimetrik nicht positiv ist, hat die Ungl.

²Es sei angemerkt, dass in der QED die Eichgruppe zu klein ist, um die Eichtransformationen, welche dort $S^3 \rightarrow S^1$ Abbildungen entsprechen, in unterschiedliche Homotopieklassen zu unterteilen, so dass in der QED keine Instantonen vorkommen.

(1.16) dort keine Gültigkeit. Die euklidische Instantonlösung ist also keine klassische Feldkonfiguration in Minkowskiraumzeit. Vielmehr können sie dort als Tunnelübergänge zwischen zwei Vakua, die sich um die Windungszahl $N_W = Q_T = \pm 1$ unterscheiden, betrachtet werden [2, 5, 6]. Die Übergangsamplitude für Instanton-Prozesse ist schließlich proportional zu

$$\langle \Omega_{N_{CS} \pm 1} | T | \Omega_{N_{CS}} \rangle \sim \exp\left(-\frac{2\pi}{\alpha}\right), \quad \alpha = \frac{g^2}{4\pi}. \quad (1.19)$$

1.1.2 Die axiale Anomalie

Die besondere Rolle, die Instantonen in der Physik spielen, wird erst ersichtlich, wenn Wechselwirkungen mit Fermionen berücksichtigt werden. Es soll hier kurz skizziert werden, inwiefern sich QCD-Instantonen auf die Dynamik von *leichten* Quarks auswirken. Ein umfassender Überblick findet sich bei Coleman [51], weiterhin bei Schäfer und Shuryak [10] sowie bei Diakonov [12].

Betrachtet man die QCD mit einem idealisierten Satz von n_f masselosen Quarks, so ist die klassische Theorie symmetrisch unter globalen $U(n_f) \times U(n_f)$ -Transformationen von rechts- und linkshändigen Quarks. Dies wird als *chirale* Symmetrie bezeichnet. Alternativ lässt sich die Symmetrie auch in vektorielle und axiale Transformationen aufspalten.³ In der Realität zeigt sich, dass die axiale Symmetrie spontan stark gebrochen ist, was sich beispielsweise durch das Quark-Confinement bemerkbar macht. Betrachtet man lediglich up- und down-Quarks als näherungsweise masselos, so können die Pionen als die drei Goldstone-Bosonen der axialen $SU(2)$ -Transformationen identifiziert werden. Nimmt man zusätzlich das strange-Quark als masselos hinzu, so lässt sich ein Oktett leichter Mesonen den Goldstone-Bosonen der axialen $SU(3)$ -Transformationen zuordnen. In beiden Fällen fehlt das Goldstone-Boson zur axialen $U(1)_A$.

Die Abwesenheit des axialen Goldstone-Bosons liegt letztlich an der von Adler, Bell und Jackiw [1] entdeckten axialen Anomalie⁴

$$\partial^\mu j_\mu^5 = n_f \frac{g^2}{16\pi^2} F_{\mu\nu}^a \tilde{F}_a^{\mu\nu}. \quad (1.20)$$

Sie entsteht durch Quantenkorrekturen, die von Dreiecksdiagrammen stammen, die eine axiale Kopplung, sowie zwei vektorielle Kopplungen enthalten.⁵ Es zeigt sich, dass Gl. (1.20) durch Korrekturen höherer Ordnung nicht weiter modifiziert wird und sie somit den Status einer Ward-Identität einnimmt.

Aufgrund dieser Anomalie ist die axiale Stromdichte

$$j_\mu^5 = \bar{\psi} \gamma_\mu \gamma^5 \psi \quad (1.21)$$

³Die axialen $SU(N)$ -Transformationen bilden, im Gegensatz zu den vektoriellen, allerdings keine Gruppe.

⁴Sie wird auch chirale Anomalie oder nach ihren Entdeckern ABJ-Anomalie genannt. Sie wurde hier in Minkowskimetrik angegeben.

⁵Im Rahmen der dimensional Regularisierung kommt die Anomalie dadurch zustande, dass γ^5 , als Generator der axialen $U(1)_A$ -Symmetrie, mit den Dirac-Matrizen γ_μ für $\mu \notin \{1, 2, 3, 4\}$ kommutiert.

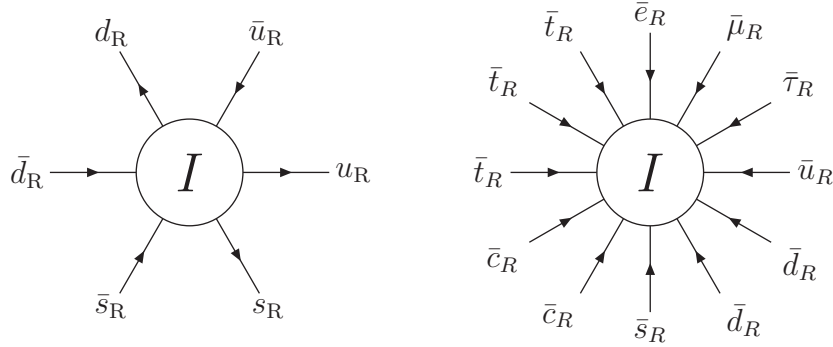


Abbildung 1.2: Dargestellt ist links ein generischer QCD-Instanton-Prozess mit drei leichten Quarkflavors, wobei die Impulse sämtlich als auslaufend zu verstehen sind. Die Chiralitätsverletzung beträgt $\Delta Q_5 = 6$. Rechts ist ein analoger elektroschwacher Prozess abgebildet, welcher die $B + L$ -Symmetrie mit $\Delta(B + L) = -6$ unter $B - L$ -Erhaltung verletzt.

auf dem Niveau der Quantentheorie keine Erhaltungsgröße mehr und die axiale $U(1)_A$ scheint nicht länger eine Symmetrie der Theorie zu sein. Allerdings lässt sich die rechte Seite nach Gl. (1.1) als Divergenz der topologischen Stromdichte K_μ darstellen, so dass ein kombinierter Strom von axialer und topologischer Ladung unter einer axialen Transformation erhalten bleibt

$$\partial_\mu J_\mu^5 = 0, \quad J_\mu^5 \equiv j_\mu^5 - 2n_f K_\mu. \quad (1.22)$$

Trotz der vorliegenden, aber spontan gebrochenen axialen Symmetrie existiert kein entsprechendes Goldstone-Boson. Dies hängt damit zusammen, dass in Gl. (1.22) die topologische Stromdichte (im Gegensatz zur axialen Stromdichte) nicht eichinvariant ist. Eine umfassende Lösung dieses sogenannten *axialen $U(1)$ -Problems* gelang schließlich 't Hooft [2,5,7], indem er zeigte, dass die axiale $U(1)_A$ durch sogenannte Goldstone-Dipole spontan gebrochen wird. Weitere wichtige Arbeiten hierzu sind [4, 52–54].

Durch Gl. (1.22) wird bereits auf den engen Zusammenhang zwischen axialer Symmetrie der QCD und ihrer topologischen Eigenschaften hingewiesen. Der bei axialen Transformationen nicht erhaltene axiale Strom chiraler Quarks wird gewissermaßen durch eine Veränderung des topologischen Zustands des Systems kompensiert. Dies wird im Bild der Integraldarstellung

$$\Delta Q_5 = 2n_f Q_T \quad (1.23)$$

noch deutlicher:

Die Verletzung der Chiralität geht einher mit dem Übergang von einem klassischen Vakuum zu einem anderen mit verschiedener Chern-Simons-Zahl. Die Chiralitätsänderung entspricht dabei der doppelten topologischen Ladung pro masselosem Quarkflavor.

Konkret äußert sich dies durch die Gleichung [55, 56]

$$\Delta Q_5 = 2(n_R - n_L) \quad \Rightarrow \quad n_R - n_L = n_f Q_T, \quad (1.24)$$

die sich aus dem Atiyah-Singer-Index-Theorem [57] ableiten lässt. Hierbei bezeichnen n_R und n_L die Gesamtzahl der rechts- bzw. linkshändigen fermionischen Nullmoden des Dirac-Operators $i\mathcal{D} = i\cancel{\partial} + g\mathcal{A}$ bei n_f masselosen Quarkflavors. Die doppelte Verletzung der Chiralität pro Nullmode bedeutet dabei nichts weiter, als dass zu jedem Teilchen noch das zugehörige Antiteilchen zu berücksichtigen ist. Zur Veranschaulichung ist in Abb. 1.2 ein generischer QCD-Instantonprozess dargestellt.

Die axiale Anomalie wirkt sich auch auf den elektroschwachen Sektor aus, da dessen Instantonen ebenfalls fermionische Nullmoden aufweisen. Da es nur linkshändige Isospin-Duplets gibt, ist die chirale Symmetrie bereits gebrochen. Allerdings trägt jede Generation eine leptonische und wegen der Color-Freiheitsgrade drei Quark-Nullmoden bei. Entsprechende Prozesse, wie beispielsweise

$$u_L + d_L \xrightarrow{I} \bar{d}_R + \bar{s}_R + 2\bar{c}_R + 3\bar{t}_R + \bar{e}_R + \bar{\mu}_R + \bar{\tau}_R, \quad (1.25)$$

verletzen somit die Baryonen- und Leptonenzahl gleichermaßen, so dass insgesamt zwar $\Delta(B - L) = 0$, nicht aber die Summe $B + L$ erhalten ist. Die beteiligten Flavors hängen dabei von der Orientierung des Instantons ab. Als elektroschwaches Pendant zu Gl. (1.23) erhält man schließlich

$$\Delta(B + L) = -2n_g Q_T, \quad (1.26)$$

wobei n_g die Zahl der Fermiongenerationen ist. Der entsprechende generische elektroschwache Prozess ist ebenfalls in Abb. 1.2 dargestellt. Da die elektroschwache Eichsymmetrie durch den Higgs-Mechanismus spontan gebrochen ist, unterscheidet sich die Instantonphysik der elektroschwachen Theorie in einigen Details von derjenigen in der QCD. So ist beispielsweise die Sphaleronmasse wegen der fehlenden Skaleninvarianz eine feste Größe (s. Gl. (1.14)). Die $B + L$ -Verletzung durch elektroschwache Instantonprozesse stellt einerseits einen weitaus drastischeren Effekt dar, als die chirale Verletzung in der QCD, andererseits ist die semiklassische Tunnelwahrscheinlichkeit mit $\mathcal{P}^{(I)} \sim 10^{-169}$ wegen der kleinen elektroschwachen Kopplung extrem stark unterdrückt [2], was die Beobachtbarkeit solcher Prozesse bei niedrigen Energien $E < M_{\text{sph}}$ quasi unmöglich macht.

Es soll nun die Herleitung von Gl. (1.24) nach Coleman [51] skizziert werden. Hierzu wird ein zunächst massives Quark betrachtet, welches sich in der Fundamentaldarstellung der $SU(N_c)$ befinde und über ein entsprechendes Hintergrund-Eichfeld A interagiere. Die zugehörige euklidische Wirkung sei durch

$$S = -i \int d^4x \bar{\psi} (\mathcal{D} - m) \psi \quad (1.27)$$

gegeben. Später wird, um die chirale Symmetrie wieder herzustellen, der Limes $m \rightarrow 0$ gezogen.

Über die Variation einer normierten Greensfunktion

$$\delta \langle \mathcal{O}[\bar{\psi}, \psi] \rangle^A \equiv \frac{\delta \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{O}[\bar{\psi}, \psi] e^{-S}}{\int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{-S}} \quad (1.28)$$

von Quarkfeldern ψ und $\bar{\psi}$ im Hintergrund-Eichfeld A unter einer infinitesimalen axialen Transformation $\psi \rightarrow (1 - i\gamma_5 \delta\alpha)\psi$ und $\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}(1 - i\gamma_5 \delta\alpha)$ erhält man aufgrund der axialen

Anomalie Gl. (1.20)

$$-i \int d^4x \left(\partial_\mu \langle j_\mu^5 \rangle^A + 2m \langle \bar{\psi} \gamma^5 \psi \rangle^A \right) = 2Q_T. \quad (1.29)$$

Der erste Term auf der linken Seite verschwindet, da er in ein Oberflächenintegral umgewandelt werden kann, welches nur für masselose Quarkfelder einen nichtverschwindenden Beitrag liefert.

Für die weitere Rechnung werden nun die Grassmannfunktionen ψ und $\bar{\psi}$ nach orthonormierten Eigenzuständen ψ_r und ψ_r^\dagger , mit $\int d^4x \psi_r^\dagger \psi_s = \delta_{rs}$, des Dirac-Operators entwickelt,

$$\psi = \sum_r a_r \psi_r, \quad \bar{\psi} = \sum_r \bar{a}_r \psi_r^\dagger, \quad \text{mit} \quad i\mathcal{D} \psi_r = \lambda_r \psi_r, \quad (1.30)$$

wobei a_r und \bar{a}_r den Grassmanncharakter übernehmen, so dass das Funktionalintegral über $\mathcal{D}\psi \equiv \prod_r da_r$ definiert werden kann.⁶ Die Integration über die Grassmannzahlen ist nicht weiter problematisch und für Gl. (1.29) ergibt sich

$$-im \sum_r \int d^4x \frac{\psi_r^\dagger \gamma^5 \psi_r}{\lambda_r - im} = Q_T. \quad (1.31)$$

Wegen $\{\gamma_\mu, \gamma^5\} = 0$ ist $\gamma^5 \psi_r$ mit

$$i\mathcal{D} \gamma^5 \psi_r = -\lambda_r \gamma^5 \psi_r \quad (1.32)$$

ebenfalls Eigenzustand des Dirac-Operators. Wegen der Orthonormiertheit der Eigenzustände können also ausschließlich solche mit verschwindenden Eigenwerten, sogenannte Nullmoden, einen Beitrag liefern. Man erhält schließlich

$$\sum_{r:\lambda_r=0} \int d^4x \psi_r^\dagger \gamma^5 \psi_r = Q_T. \quad (1.33)$$

Gl. (1.33) hängt nicht mehr von der Masse des Quarks ab, sie ist also auch für den interessanten chiralen Limes $m \rightarrow 0$ gültig. Die Nullmoden lassen sich nun wegen

$$[i\mathcal{D}, \gamma^5] \psi_r = 0, \quad \text{für } \lambda_r = 0, \quad (1.34)$$

zu Eigenzuständen von γ^5 wählen,

$$\gamma^5 \psi_r = \chi \psi_r, \quad \text{für } \lambda_r = 0. \quad (1.35)$$

Da dieser rechts- und linkshändiger Chiralität entsprechend die Eigenwerte $\chi = \pm 1$ aufweist, ergibt sich wegen der Normierung der Eigenzustände automatisch Gl. (1.24), wenn man von n_f masselosen Quarks ausgeht.

⁶Die hier verwendete Notation erweckt den falschen Eindruck, dass der Dirac-Operator ein diskretes Spektrum hätte. Es muss wie üblich der Kontinuumsimes betrachtet werden.

Es lässt sich zeigen, dass der Dirac-Operator mit einem Instantoneichfeld keine linkshändigen Nullmoden besitzt und somit genau einen rechtshändigen Eigenzustand mit verschwindendem Eigenwert aufweist. Analog dazu findet man für Antiinstantonen genau eine linkshändige Nullmode und keine rechtshändige.⁷ Der Beweis beruht darauf, dass $-\mathcal{D}^2$ ein positiver Operator ist (s. beispielsweise [10, 12, 51, 58]).

1.1.3 Feldkonfigurationen

Die Feldkonfiguration eines $SU(2)$ Instantons wurde erstmals von Belavin et al. [3] angegeben, die sie zunächst als Pseudoteilchen-Lösung der euklidischen Yang-Mills-Gleichungen bezeichneten. Der Begriff *Instanton* wurde später von 't Hooft geprägt. In der sogenannten regulären Eichung sind die $SU(2)$ -Feldkonfigurationen für ein Instanton bzw. Antiinstanton durch

$$A_\mu^{(I)\text{reg}} = \frac{\tau_a}{2} \eta_{\mu\nu}^a \frac{2}{g} \frac{x_\nu}{x^2 + \rho^2} \quad \text{bzw.} \quad A_\mu^{(\bar{I})\text{reg}} = \frac{\tau_a}{2} \bar{\eta}_{\mu\nu}^a \frac{2}{g} \frac{x_\nu}{x^2 + \rho^2} \quad (1.36)$$

gegeben [2, 5]. Dabei seien τ_a die üblichen Pauli-Matrizen als Generatoren der Eichgruppe und $\eta_{\mu\nu}^a$ und $\bar{\eta}_{\mu\nu}^a$ die sogenannten 't Hooft-Symbole, welche gewissermaßen die Verknüpfung zwischen dem Ortsraum und dem $SU(2)$ -Gruppenraum herstellen. Definition und Eigenschaften der 't Hooft-Symbole sind im Anhang zu finden. Bei ρ handelt es sich um einen Skalenparameter, der oft als Instantongröße bezeichnet wird. Der Feldstärketensor nimmt in der regulären Eichung eine besonders einfache Gestalt an

$$F_{\mu\nu}^{(I)\text{reg}} = -\frac{\tau_a}{2} \eta_{\mu\nu}^a \frac{4}{g} \frac{\rho^2}{(x^2 + \rho^2)^2} \quad \text{bzw.} \quad F_{\mu\nu}^{(\bar{I})\text{reg}} = -\frac{\tau_a}{2} \bar{\eta}_{\mu\nu}^a \frac{4}{g} \frac{\rho^2}{(x^2 + \rho^2)^2}. \quad (1.37)$$

Es lässt sich leicht nachprüfen, dass die entsprechend zugehörige topologische Ladung (1.1) $Q_T = 1$ bzw. $Q_T = -1$ beträgt. Die angegebene Lösung lässt sich in größere Gruppen als die $SU(2)$ einbetten [59], so dass sich für diese entsprechende Instantonkonfigurationen ergeben.

Außer einer Variation des Skalenparameters $\rho \rightarrow \lambda\rho$ lässt ebenso eine Translation $x \rightarrow x - z$, sowie eine globale Eichtransformation $A \rightarrow U_0 A U_0^\dagger$, welche die Ausrichtung im Gruppenraum festlegt, das Wirkungsintegral unverändert. Die zugehörigen Parameter werden als *kollektive Koordinaten* bezeichnet, deren Anzahl von der Größe der Eichgruppe abhängt [59]. Von den $N_c^2 - 1$ Generatoren einer $SU(N_c)$ verhält sich die eingebettete $SU(2)$ invariant gegenüber $(N_c - 2)^2$, so dass sich insgesamt eine Anzahl von

$$1(\text{Dilatation}) + 4(\text{Position}) + (4N_c - 5)(\text{Orientierung}) = 4N_c \quad (1.38)$$

kollektiven Koordinaten ergibt [12]. Die reine $SU(2)$ -Ausrichtung des Instantons ist wegen der Abbildung $S^3 \rightarrow S^3$ durch die Eichgruppe äquivalent zu dessen Orientierung im Ortsraum. Weiterhin ist das Wirkungsintegral invariant unter einer Koordinatenspiegelung (Inversion) $x_\mu \rightarrow \frac{\rho^2}{x^2} x_\mu$ am Radius ρ . Zum allgemeinen Verhalten von Instantonen

⁷Je nach Konvention der Definition des dualen Feldstärketensors \tilde{F} kann diese Aussage auch umgedreht werden.

bei konformen Transformationen oder zu den Freiheitsgraden von Instantonfeldern siehe [59–62], sowie [45, 63, 64].

Für die Darstellung von Fermionen im Limes masseloser Quarks ist es sinnvoll, den vierkomponentigen Dirac-Spinor durch zwei zweikomponentige chirale oder Weyl-Spinoren auszudrücken:

$$\psi = \psi_R + \psi_L, \quad \psi_{R\dot{\alpha}} = \begin{pmatrix} \kappa_{\dot{\alpha}} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_L^\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ \phi^\alpha \end{pmatrix}. \quad (1.39)$$

Hierbei leben die gepunkteten griechischen Indices im rechtshändigen und die ungepunkteten im linkshändigen zweidimensionalen Spinorraum. Es ist ferner üblich, die drei Pauli-Matrizen zu einem Vierervektor zu erweitern. In euklidischer Metrik seien diese durch

$$\sigma \equiv (-i\vec{\tau}, \mathbb{1}) \quad \text{und} \quad \bar{\sigma} \equiv (i\vec{\tau}, \mathbb{1}) \quad (1.40)$$

gegeben,^{8 9} um durch diese die Dirac-Matrizen in der chiralen Basis

$$\gamma_\mu = \begin{pmatrix} 0 & \bar{\sigma}_\mu \\ \sigma_\mu & 0 \end{pmatrix} \quad (1.41)$$

darzustellen. Der fermionische Anteil der Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_{\text{ferm}} = \bar{\phi}_i^{\dot{\alpha}} \bar{\sigma}_{\dot{\alpha}\alpha} \cdot (\partial - igA)^i_j \phi^{\alpha j} + \bar{\kappa}_{\alpha i} \sigma^{\alpha\dot{\alpha}} \cdot (\partial - igA)^i_j \kappa_{\dot{\alpha}}^j \quad (1.42)$$

gliedert sich nun in einen links- und einen rechtshändigen Anteil auf. Hierbei wurden neben den griechischen Spinor-Indices auch die lateinischen Indices der Eichgruppe explizit aufgeführt um die formale Struktur klar hervorzuheben.

Die fermionischen Nullmoden sind nun einfach die Lösungen der Weyl-Gleichungen mit einem Hintergrundeichfeld aus Gl. (1.36), die sich aus Gl. (1.42) ergeben. Für weitere Rechnungen bietet es sich an, zunächst die $SU(2)$ -Generatoren und die 't Hooft-Symbole ebenfalls durch die vier σ -Matrizen auszudrücken, so dass man für diese

$$\eta_{\mu\nu}^a \frac{\tau_a}{2} = \frac{1}{4i} (\bar{\sigma}_\mu \sigma_\nu - \bar{\sigma}_\nu \sigma_\mu) \quad \bar{\eta}_{\mu\nu}^a \frac{\tau_a}{2} = \frac{1}{4i} (\sigma_\mu \bar{\sigma}_\nu - \sigma_\nu \bar{\sigma}_\mu) \quad (1.43)$$

erhält.¹⁰ Für die Lösung der Nullmodengleichung lassen sich nun diverse Identitäten für die σ -Matrizen (s. Anhang) ausnutzen. In regulärer Eichung erhält man schließlich

$$\kappa^{(I)\dot{\alpha}}_{\dot{\alpha}} = \frac{1}{\pi} \frac{\rho^{3/2}}{(x^2 + \rho^2)^{3/2}} U_0^{i\dot{\beta}} \epsilon_{\dot{\beta}\dot{\alpha}} \quad \kappa^{(I)\dagger\dot{\alpha}}_i = \frac{1}{\pi} \frac{\rho^{3/2}}{(x^2 + \rho^2)^{3/2}} U_0^{\dagger\dot{\beta}i} \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \quad (1.44)$$

⁸Die σ -Matrizen erfüllen einige sehr nützliche Identitäten wie $\bar{\sigma}_\mu \sigma_\nu + \bar{\sigma}_\nu \sigma_\mu = \sigma_\mu \bar{\sigma}_\nu + \sigma_\nu \bar{\sigma}_\mu = 2\delta_{\mu\nu}$, von denen weitere im Anhang aufgeführt sind. In Minkowskimetrik sind die σ -Matrizen durch $\sigma = (\mathbb{1}, \vec{\tau})$ bzw. $\bar{\sigma} = (\mathbb{1}, -\vec{\tau})$ gegeben, $\delta_{\mu\nu}$ ist dort durch den entsprechenden metrischen Tensor $g_{\mu\nu}$ zu ersetzen.

⁹Im Folgenden wird weiterhin die Notation $x^{\alpha\dot{\alpha}} = x \cdot \sigma^{\alpha\dot{\alpha}}$ bzw. $\bar{x}_{\dot{\alpha}\alpha} = x \cdot \bar{\sigma}_{\dot{\alpha}\alpha}$ verwendet, wobei die Spinorindices $\alpha, \dot{\alpha} \in \{1, 2\}$ meist unterdrückt werden.

¹⁰Oftmals wird auch die sehr kompakte Abkürzung $\sigma_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{4i} (\bar{\sigma}_\mu \sigma_\nu - \bar{\sigma}_\nu \sigma_\mu)$ bzw. $\bar{\sigma}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{4i} (\sigma_\mu \bar{\sigma}_\nu - \sigma_\nu \bar{\sigma}_\mu)$ eingeführt. In dieser Arbeit wird hiervon allerdings kein Gebrauch gemacht.

für ein Instanton und

$$\phi^{(\bar{I})\alpha,i} = \frac{1}{\pi} \frac{\rho^{3/2}}{(x^2 + \rho^2)^{3/2}} U_0^i{}_{\beta} \epsilon^{\beta\alpha} \quad \phi^{(\bar{I})\dagger}{}_{\alpha,i} = \frac{1}{\pi} \frac{\rho^{3/2}}{(x^2 + \rho^2)^{3/2}} U_0^{\dagger\beta}{}_{i} \epsilon_{\alpha\beta} \quad (1.45)$$

für ein Antiinstanton, entsprechend der Eichfeldkonfiguration aus Gl. (1.36), mit einer globalen Ausrichtung U_0 im Gruppenraum.¹¹ Durch die Wahl des Vorfaktors wurden die Nullmoden hierbei zu

$$\int d^4x \psi_{R/L}^{\dagger} \psi_{R/L} = \rho \quad (1.46)$$

normiert.

Während Feldkonfiguration, Feldstärketensor und fermionische Nullmoden in der regulären Eichung besonders einfache Formen annehmen, so hat diese den Nachteil, dass die topologischen Effekte durch Oberflächenterme im Unendlichen hervorgerufen werden, was bei Betrachtungen im Rahmen der Instanton-Störungsrechnung von Nachteil ist. Wegen der Invarianz der Wirkung gegenüber einer Koordinateninversion lässt sich die Singularität allerdings an eine Position im Endlichen transformieren. Vektorfelder transformieren sich hierbei wie

$$A_{\mu}(x) \rightarrow A'_{\mu}(x') = \frac{\partial x'_{\mu}}{\partial x_{\nu}} A_{\nu}(x'), \quad x'_{\mu} = \frac{\rho^2}{x^2} x_{\mu}, \quad (1.47)$$

und Tensorfelder entsprechend ihres Grades. Es ist dabei sehr instruktiv, Gl. (1.47) einmal auf einen selbstdualen Tensor $F_{\mu\nu} = \tilde{F}_{\mu\nu}$ zweiten Grades anzuwenden

$$F_{\mu\nu} \rightarrow F'_{\mu\nu} = \frac{\partial x'_{\mu}}{\partial x_{\rho}} \frac{\partial x'_{\nu}}{\partial x_{\sigma}} F_{\rho\sigma} = \frac{\rho^4}{x^4} \left(F_{\mu\nu} - \frac{2}{x^2} (x_{\nu} x_{\rho} F_{\mu\rho} + x_{\mu} x_{\rho} F_{\rho\nu}) \right) \quad (1.48)$$

und den dualen Tensor des transformierten Tensors zu betrachten:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \tilde{F}'_{\mu\nu} &= \frac{\rho^4}{x^4} \left(F_{\mu\nu} - \frac{2}{x^2} x_{\rho} x_{\tau} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F_{\tau\sigma} \right) \\ &= \frac{\rho^4}{x^4} \left(F_{\mu\nu} - \frac{1}{x^2} x_{\rho} x_{\tau} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon_{\tau\lambda\kappa\sigma} F_{\lambda\kappa} \right) \\ &= \frac{\rho^4}{x^4} \left(F_{\mu\nu} - 2F_{\mu\nu} + \frac{2}{x^2} (x_{\nu} x_{\rho} F_{\mu\rho} + x_{\mu} x_{\rho} F_{\rho\nu}) \right) = -F'_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (1.49)$$

Das Ergebnis ist offensichtlich antiselbstdual. In der Tat wird durch die Koordinateninversion aus einem Instanton in regulärer Eichung ein Antiinstanton in der sogenannten *singulären* Eichung erzeugt und umgekehrt. Die Singularität wird dabei vom Unendlichen

¹¹Die Matrix U_0 mit griechischem und lateinischem Index verknüpft formal die Spinorindices der σ -Matrizen aus Gl. (1.43) mit den Indices der Gruppengeneratoren. Für den Fall einer $SU(2)$ -Eichgruppe ist diese formale Unterscheidung – bis auf die vorgegebene Oben- und Untenstellung bzw. die Punktierung der Spinorindices – trivial. Bei der Einbettung in größere Gruppe muss beachtet werden, dass beide Indexgruppen unterschiedliche Laufweiten haben. Formal sollte in diesem Fall eine nichtquadratische Matrix zwischengeschoben werden, so dass die Gruppenorientierung stets durch quadratische Matrizen definiert wird.

auf die Instantonposition invertiert, im einfachsten Fall also auf den Koordinatenursprung. Um die topologischen Oberflächeneffekte zu erfassen, muss in dieser Eichung also lediglich über eine Oberfläche, die die Instantonposition einschließt, integriert werden.

Zwischen regulärer und singulärer Eichung vermittelt die singuläre Eichtransformation

$$A_\mu^{\text{reg}}(x) \rightarrow A_\mu^{\text{sing}}(x) = U(x) \left(\frac{i}{g} \partial + A_\mu(x) \right) U^\dagger(x), \quad U(x) = \frac{\sigma \cdot x}{\sqrt{x^2}}. \quad (1.50)$$

Hierbei handelt es sich gerade um die inverse Transformation derjenigen, durch die die reguläre Eichung im Limes der reinen Eichung definiert ist (vgl. Gl. (1.36)):

$$\frac{i}{g} U^\dagger \partial_\mu U(x) = \frac{i}{g} \frac{\bar{x}}{\sqrt{x^2}} \left(\frac{\sigma_\mu}{\sqrt{x^2}} - \frac{xx_\mu}{(x^2)^{3/2}} \right) = \frac{i}{2g} \frac{\bar{x}\sigma_\mu - \bar{\sigma}_\mu x}{x^2} = \lim_{x^2 \rightarrow \infty} A_\mu^{(I)\text{reg}}(x). \quad (1.51)$$

Die Feldkonfiguration für ein Instanton bzw. Antiinstanton in der singulären Eichung ist schließlich durch [34]

$$A_\mu^{(I)} = \frac{\rho^2}{2ig} U \frac{\sigma_\mu \bar{x} - x \bar{\sigma}_\mu}{x^4} U^\dagger \frac{1}{\Pi_x} \quad \text{bzw.} \quad A_\mu^{(\bar{I})} = \frac{\rho^2}{2ig} \bar{U} \frac{\bar{\sigma}_\mu x - \bar{x} \sigma_\mu}{x^4} \bar{U}^\dagger \frac{1}{\Pi_x} \quad (1.52)$$

gegeben, wobei von der Abkürzung $\Pi_x \equiv 1 + \frac{\rho^2}{x^2}$ Gebrauch gemacht wurde und die globale Gruppenorientierung durch U bzw. \bar{U} gegeben sei. Die fermionischen Nullmoden für ein Instanton ergeben sich entsprechend zu [34]

$$\kappa^{(I)\dot{\alpha}i} = \frac{\rho^{3/2}}{\pi} \epsilon^{\alpha\beta} U^i_\beta \frac{\bar{x}_{\dot{\alpha}\alpha}}{x^4} \frac{1}{\Pi_x^{3/2}} \quad \bar{\phi}^{(I)\dot{\alpha}}_i = \frac{\rho^{3/2}}{\pi} \epsilon_{\beta\alpha} U^{\dagger\beta}_i \frac{x^{\alpha\dot{\alpha}}}{x^4} \frac{1}{\Pi_x^{3/2}} \quad (1.53)$$

und für ein Antiinstanton zu

$$\phi^{(\bar{I})\alpha,i} = \frac{\rho^{3/2}}{\pi} \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{U}^{i\dot{\beta}} \frac{x^{\alpha\dot{\alpha}}}{x^4} \frac{1}{\Pi_x^{3/2}} \quad \bar{\kappa}^{(\bar{I})i,\alpha} = \frac{\rho^{3/2}}{\pi} \epsilon^{\dot{\beta}\dot{\alpha}} \bar{U}^{\dagger\dot{\beta}i} \frac{\bar{x}_{\dot{\alpha}\alpha}}{x^4} \frac{1}{\Pi_x^{3/2}}, \quad (1.54)$$

wobei die Notation $\kappa^\dagger = \bar{\phi}$ und $\phi^\dagger = \bar{\kappa}$ üblich ist.

1.2 Perturbative Methoden

In gewöhnlicher Störungstheorie werden üblicherweise kleine Quantenfluktuationen eines klassischen Vakuums betrachtet, was sich durch eine Störungsreihe in Potenzen der Kopplungskonstante äußert. Da die Tunnelamplitude (vgl. Gl. (1.19)) in α_s nicht analytisch ist, können Tunnelübergänge zwischen topologisch unterschiedlichen klassischen Vakua nicht mit Hilfe einer normaler Störungsreihe um ein solches Minimum berechnet werden. Nimmt man allerdings den semiklassischen Limes des Prozesses, der bereits den nichtanalytischen Anteil der Amplitude enthält, als Entwicklungsbasis, so lässt sich eine Störungsreihe um den semiklassischen Tunnelprozess herum entwickeln. Diese Vorgehensweise wird als Instanton-Störungsrechnung bezeichnet und es soll im folgenden Abschnitt ein Überblick darüber vermittelt werden.

1.2.1 Die Dichteverteilung

Die Feldkonfiguration, die einen Instanton-Tunnelprozess in semiklassischer Näherung beschreibt, ist eine Lösung der euklidischen Yang-Mills-Gleichungen. Die zugehörige Tunnelamplitude ist durch Gl. (1.19) gegeben. Zur Berechnung des Vorfaktors der Amplitude können kleine Quantenfluktuationen in einer Störungsreihe um die semiklassische Lösung herum berechnet werden.¹² Erste Pionierarbeiten hierzu wurden von 't Hooft [5] sowie von Andrei und Gross [66] geleistet.

Das allgemeine Erzeugendenfunktional zur Berechnung der Übergangsamplitude sei durch

$$\langle 0|0\rangle = \frac{1}{N} \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{-S[A,\bar{\psi},\psi]} \quad (1.55)$$

gegeben, wobei N ein Normierungsfaktor sei und externe Ströme unterdrückt wurden. Für die folgenden Betrachtungen werden der Einfachheit wegen die Fermionfelder ψ und $\bar{\psi}$ ignoriert. Um instantoninduzierten Prozessen in einer *geeigneten* Störungsreihe Rechnung zu tragen, werden die Eichfelder A nun zunächst in einen klassischen Anteil, der Instantonkonfiguration, und einen Anteil für die Quantenfluktuationen zerlegt

$$A_\mu = A_\mu^{\text{cl}} + \delta A_\mu \quad (1.56)$$

und anschließend das Wirkungsintegral um die klassische Lösung herum entwickelt

$$S[A] = S[A^{\text{cl}} + \delta A] = S^{\text{cl}} + \sum_i \frac{\delta S^{\text{cl}}}{\delta A_i} \delta A_i + \frac{1}{2} \sum_{ij} \delta A_i \left(\frac{\delta^2 S^{\text{cl}}}{\delta A^2} \right)_{ij} \delta A_j + \mathcal{O}(\delta A^3). \quad (1.57)$$

Der lineare Entwicklungsoperator $\delta S^{\text{cl}}/\delta A$ entspricht hierbei den Yang-Mills-Gleichungen und verschwindet, so dass erst durch den quadratischen Entwicklungsoperator Korrekturbeiträge anfallen.

Aufgrund der Symmetrie der klassischen Wirkung bezüglich Translation, Dilatation und Rotation im Gruppenraum (vgl. Abschnitt 1.1.3) gibt es Feldfluktuationen, die die Wirkung unverändert lassen und daher Nullmoden des quadratischen Operators $\delta^2 S^{\text{cl}}/\delta A^2$ sind. Da in ihrer Richtung das Funktionalintegral divergiert, ist es üblich, durch eine Faddeev-Popov-Regularisierung die Quantenfluktuationen δA in der Entwicklung der Wirkung Gl. (1.57) orthogonal zu den Nullmoden zu halten und das Funktionalintegral über den durch die Nullmoden aufgespannten Unterraum gesondert zu behandeln. Das Ergebnis dieser Regularisierung, ist eine Integration über die kollektiven Koordinaten [67–69], und wird als Methode der kollektiven Koordinaten bezeichnet. Unter Vernachlässigung der gaußschen Moden ergibt sich die differentielle Tunnelamplitude zunächst zu [5, 70]

$$dn^{(I)} = D \, d\rho \, d^4z \, dU \sim \rho^{-5} \left(\frac{2\pi}{\alpha} \right)^{2N_c} e^{-\frac{2\pi}{\alpha}} d\rho \, d^4z \, dU, \quad (1.58)$$

wobei D als Instantondichte bezeichnet wird. Hierbei steuert jede Nullmode bzw. kollektive Koordinate einen Faktor $\sqrt{S^{\text{cl}}} = \sqrt{2\pi/\alpha}$ bei, der Faktor ρ^{-5} ist dimensionsbedingt.

¹²Hierbei handelt es sich formal um eine Störungsrechnung mit Hintergrundfeld. Zur Hintergrundfeld-Methode allgemein siehe Abbott [65].

Das auf Eins normierte haarsche Maß $\int dU$ bezeichnet die Integration über die globale Orientierung im Gruppenraum und sei hier der Vollständigkeit halber mit aufgeführt.

Der verbleibende Unterraum der Feldfluktuationen lässt sich nun durch orthonormierte Eigenzustände des quadratischen Operators entwickeln

$$\delta A_{\text{nzm}} = \sum'_n \alpha_n A_n \quad \text{mit} \quad \frac{\delta^2 S^{\text{cl}}}{\delta A^2} A_n = \lambda_n A_n, \quad (1.59)$$

so dass das Funktionalintegral über die Nichtnullmoden durch ein Gauß-Integral approximiert werden kann und sich zu

$$\prod'_n \int d\alpha_n e^{-\frac{1}{2} \lambda_n C_n^2} = \frac{\prod'_n \sqrt{2\pi}}{\sqrt{\det' \left(\frac{\delta^2 S^{\text{cl}}}{\delta A^2} \right)}} \quad (1.60)$$

ergibt. Hierbei fallen Ultraviolett-Divergenzen an, die zu regularisieren sind

$$\det \left(\frac{\delta^2 S^{\text{cl}}}{\delta A^2} \right) \rightarrow \frac{\det \left(\frac{\delta^2 S^{\text{cl}}}{\delta A^2} \right)}{\det \left(\frac{\delta^2 S^{\text{cl}}}{\delta A^2} + \mu_r^2 \right)}. \quad (1.61)$$

Wegen der zuvor herausgezogenen Nullmoden fällt in der Amplitude dadurch jeweils ein Faktor $\mu_r \rho$ an. Hinzu kommt im Exponenten durch die logarithmischen Divergenzen noch ein Korrekturterm [71, 72] von $\delta S_{\text{nzm}} = N_c/3 \ln(\mu_r \rho)$, so dass sich insgesamt ein Renormierungsfaktor von $(\mu_r \rho)^{11N_c/3}$ für die Amplitude ergibt, dessen Exponent gerade dem Einschleifenkoeffizienten der β -Funktion entspricht. Später wurde von Morris et al. [73] die Renormierungsgruppeninvarianz noch auf Zweischleifenniveau verbessert.

Zusammenfassend erhält man schließlich unter der Berücksichtigung von n_f beteiligten leichten Quarkflavors in der QCD für die Instantondichte [34, 37]

$$D(\rho, \mu_r) = d \rho^{-5} \left(\frac{2\pi}{\alpha_s(\mu_r)} \right)^6 e^{-\frac{2\pi}{\alpha_s(\mu_r)}} (\rho \mu_r)^b, \quad (1.62)$$

wobei der Exponent b in Zweischleifen-Renormierungsgruppeninvarianz nicht mehr genau den Koeffizienten der β -Funktion entspricht, sondern durch [34, 37]

$$b = \beta_0 \Delta_1 - \Delta_2, \quad \Delta_1 = 1 + \frac{\beta_1}{\beta_0} \frac{\alpha_s}{4\pi}, \quad \Delta_2 = 12\beta_0 \frac{\alpha_s}{4\pi} \quad (1.63)$$

gegeben ist. Die Form für Einschleifen-Renormierungsgruppeninvarianz ergibt sich dabei für $\Delta_1 \equiv 1$ und $\Delta_2 \equiv 0$. Der endliche Vorfaktor d wurde von 't Hooft und Bernard et al. [5, 7, 70] in Einschleifengenauigkeit berechnet. Im $\overline{\text{MS}}$ -Schema ergibt sich [37]

$$d = \frac{C_1}{2} e^{-3C_2 + n_f C_3}, \quad C_1 = 0.46628, \quad C_2 = 1.51137, \quad C_3 = 0.29175. \quad (1.64)$$

Der Vollständigkeit sei noch die laufende Kopplung in Zweischleifenform angegeben:

$$\alpha_s(\mu_r) = \frac{4\pi}{\beta_0 \ln \left(\frac{\mu_r^2}{\Lambda^2} \right)} \left(1 - \frac{\beta_1}{\beta_0^2} \frac{\ln \left(\ln \left(\frac{\mu_r^2}{\Lambda^2} \right) \right)}{\ln \left(\frac{\mu_r^2}{\Lambda^2} \right)} \right) \quad (1.65)$$

mit den Koeffizienten der β -Funktion $\beta_0 = 11 - \frac{2}{3}n_f$ und $\beta_1 = 102 - \frac{38}{3}n_f$.

1.2.2 Externe Felder

Nach der eher allgemeinen Betrachtung im letzten Abschnitt soll nun darauf aufbauend skizziert werden, wie sich exklusive Instanton-induzierte Prozesse mit Hilfe perturbativer Methoden berechnen lassen [27, 28, 34, 37, 58, 66, 74, 75]. Der wesentliche Unterschied besteht darin, dass nun Operatorprodukte oder Greensfunktionen bezüglich externer Teilchen betrachtet werden, die um die klassische Lösung herum entwickelt werden. Während die im letzten Abschnitt diskutierte Instantondichte D einer Renormierungsgruppeninvarianz auf Zweischleifenniveau genügt, sollen die externen Teilchen hingegen nur in semiklassischer Näherung betrachtet werden.

Es soll zunächst formal die Übergangsamplitude \mathcal{T} für einen gegebenen Prozess mit Eingangsimpulsen p_i und Ausgangsimpulsen k_j definiert werden. Diese wird wie üblich aus dem nichttrivialen Anteil der Streumatrix $S = \mathbb{1} + T$ durch Abspaltung der die Impulserhaltung gewährleistenden Delta-Funktion gewonnen

$$\langle k_1 \dots k_n | T | p_1 \dots p_m \rangle = (2\pi)^4 \delta^4 \left(\sum k_f - \sum p_i \right) \mathcal{T}. \quad (1.66)$$

Der Wirkungsquerschnitt eines Streuprozesses zweier Teilchen im Anfangszustand mit den Impulsen p_1 und p_2 ist dann in Minkowskimetrik durch

$$d\sigma = \frac{1}{4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - p_1^2 p_2^2}} \prod_f \frac{d^3 k_f}{(2\pi)^3} \frac{|\mathcal{T}|^2}{2k_f^0} (2\pi)^4 \delta^4 \left(p_1 + p_2 - \sum k_i \right) \quad (1.67)$$

gegeben.

Die Übergangsamplitude, die im Folgenden in euklidischer Metrik formuliert werden soll, lässt sich mit Hilfe der LSZ-Reduktionsformel bestimmen

$$\begin{aligned} \langle q_1 \dots q_n | T | p_1 \dots p_m \rangle &= \prod_{i,j,k,l} \int d^4 x_i d^4 y_j d^4 z_k d^4 z_l e^{i(k_j \cdot y_j + k_k \cdot z_k + k_l \cdot z_l - p_i \cdot x_i)} \\ &\varepsilon_{\mu_i}(p_i) \partial_{x_i}^2 \varepsilon_{\nu_j}^*(k_j) \partial_{y_j}^2 \chi_R^\dagger(k_k) \partial_{z_k} \left\langle 0 \left| A_{\mu_1} \dots A_{\nu_1} \dots \psi_1^\dagger \dots \psi_{n_f} \right| 0 \right\rangle \overleftarrow{\partial}_{z_l} \chi_L(k_l), \end{aligned} \quad (1.68)$$

wobei die Quarks als chiral angenommen wurden, da das Interesse bei der Berechnung Instanton-induzierter Prozesse liegt.¹³ Die $2n_f$ beteiligten Quarks und Antiquarks wurden der Einfachheit halber sämtlich als auslaufend betrachtet, wobei alternativ einlaufende Quarks mit der Wellenfunktion χ_L und einlaufende Antiquarks mit der Wellenfunktion χ_R^\dagger zu berücksichtigen wären. In der Impulssumme sind Quarks und Antiquarks im Anfangszustand jeweils mit umgekehrtem Vorzeichen zu berücksichtigen. Die Gluonen, deren Farbindices unterdrückt wurden, seien beliebig auf Anfangs- und Endzustand verteilt, wobei mit ε die Polarisationsvektoren der einlaufenden und mit ε^* die der auslaufenden Gluonen bezeichnet werden.

¹³Man beachte, dass die Ableitungen bzgl. der Quarkfelder wie $\partial = \sigma \cdot \partial$ und $\overleftarrow{\partial} = \overleftarrow{\sigma} \cdot \partial$ zu lesen sind. Es wird die für chirale Fermionen angemessene zweikomponentige Spinornotation verwendet.

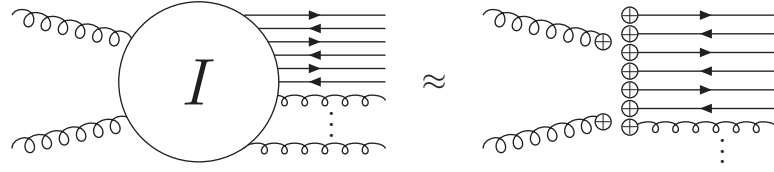


Abbildung 1.3: Diagrammatische Darstellung der semiklassischen Näherung eines generischen QCD-Instantonprozesses mit $2n_f = 6$ leichten Quarks und Antiquarks ($u, \bar{u}, d, \bar{d}, s, \bar{s}$) und mehreren Gluonen. Linien deren Enden mit einem \oplus versehen sind entsprechen dabei Quarknullmoden bzw. Instanton-Eichfeldern.

Das Operatorprodukt kann wie üblich als Erwartungswert über die Zustandssumme der Felder

$$\langle 0 | A_{\mu_1} \dots \psi_1^\dagger \dots \psi_{n_f} | 0 \rangle^{(I)} = \frac{1}{N} \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\psi^\dagger A_{\mu_1} \dots \psi_1^\dagger \dots \psi_{n_f} e^{-S[A, \psi^\dagger, \psi]} \quad (1.69)$$

bestimmt werden. Wegen der axialen Anomalie tragen bei einer störungstheoretischen Betrachtung hierbei ausschließlich solche Entwicklungsreihen zur Übergangsamplitude bei, die um eine Instantonlösung herum entwickelt werden. Der Normierungsfaktor N ist durch die reine Zustandssumme, die um die triviale klassische Lösung $A^{\text{cl}} = 0$ herum entwickelt wird, gegeben. Bei der Berechnung des Funktionalintegrals Gl. (1.69) lässt sich, wie im letzten Abschnitt skizziert, die Nullmodenintegration separat als Integration über die kollektiven Koordinaten behandeln. Ausgehend von den klassischen euklidischen Feldkonfigurationen lassen sich die Quantenfluktuationen nun orthogonal zum Unterraum der Nullmoden entwickeln. Im Folgenden soll allerdings lediglich die semiklassische Näherung betrachtet und somit weitere Quantenfluktuationen ignoriert werden. In dieser Näherung reduziert sich das Funktionalintegral auf die Integration über die kollektiven Koordinaten

$$\langle 0 | A_{\mu_1} \dots \bar{\psi}_1 \dots \psi_{n_f} | 0 \rangle^{(I)} \approx \int d^4R \int d\rho \int dU D(\rho, \mu_r) A_{\mu_1}^{(I)}(x_1 - R) \dots \psi_1^{\dagger(I)}(z_1 - R) \dots \psi^{(I)}(y_{n_f} - R), \quad (1.70)$$

wobei für die Felder die entsprechenden klassischen Lösungen einzusetzen sind,¹⁴ in singularer Eichung also das Eichfeld $A^{(I)}$ aus Gl. (1.52) und für die Fermionnullmoden $\psi^{\dagger(I)} = \bar{\phi}^{(I)}$ und $\psi^{(I)} = \kappa^{(I)}$ aus Gl. (1.53).

Nach Einsetzen von Gl. (1.70) in Gl. (1.68) lässt sich zunächst die R -Integration durch entsprechende Substitution der einzelnen Koordinaten als Delta-Funktion

$$\int d^4R e^{i \sum (k_f - p_i) \cdot R} = (2\pi)^4 \delta^4 \left(\sum k_f - \sum p_i \right) \quad (1.71)$$

¹⁴Tatsächlich erhält man in semiklassischer Näherung für die Quark-Antiquark-Paare $\psi\bar{\psi}$ zunächst den Quarkpropagator im Instantonhintergrund $S^{(I)}(y, z) = \kappa^{(I)}(y) \bar{\kappa}^{(I)}(z) - im \sum'_\lambda \frac{\kappa_\lambda^{(I)}(y) \bar{\kappa}_\lambda^{(I)}(z)}{\lambda - im}$. Hierbei wurden die Nullmoden aus der Summe herausgezogen, so dass diese nur noch über die Nichtnullmoden mit $\lambda \neq 0$ läuft, deren Beitrag im Limes $m \rightarrow 0$ verschwindet.

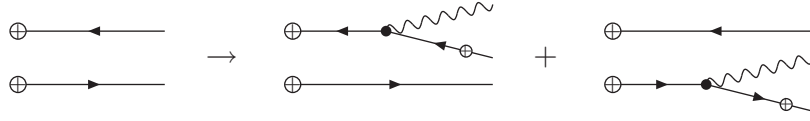


Abbildung 1.4: Zur Einführung einer harten Skala, die sowohl für eine Entwicklung nach α_s als auch für eine dynamische Unterdrückung großer Instantonen notwendig ist, wird durch Radiation eines elektroschwachen Vektorbosons eine der Quarknullmoden virtuell gesetzt. Die auslaufende Quarklinie mit einem mittig versehenen \oplus entspricht dabei einer Nicht-Nullmode.

faktorisieren. Nach Streichung von Gl. (1.71) und entsprechenden Fouriertransformationen wie

$$A(p) \equiv \int d^4x e^{-ip \cdot x} A(x) \quad (1.72)$$

ergibt sich nach Gl. (1.66) die Übergangsamplitude in semiklassischer Näherung schließlich zu [34, 76]

$$\mathcal{T} \approx \int d\rho \int dU D(\rho, \mu_r) \prod_i \left[(-p_i^2) \varepsilon(p_i) \cdot A^{(I) a_i}(p_i) \right] \prod_j \left[(-k_j^2) \varepsilon^*(q_j) \cdot A^{(I) a_j}(-k_j) \right] \\ \prod_k \left[\chi_R^\dagger(k_k) (ik_k) \kappa^{i k}(-k_k) \right] \prod_l \left[\bar{\phi}_{j_l}(-k_l) (-i\bar{k}_l) \chi_L(k_l) \right]. \quad (1.73)$$

Die semiklassische Näherung in der Instanton-Störungsreihe lässt sich diagrammatisch darstellen. Der allgemeine, soeben diskutierte Prozess mit zwei Gluonen im Anfangszustand ist in Abbildung 1.3 dargestellt.

Die LSZ-Reduktion ist prinzipiell für Teilchen definiert, die sich auf ihrer Massenschale befinden. Im Falle der QCD mit masselosen Quarks entspricht dies dem Limes $p_i^2 \rightarrow 0$ und $k_f^2 \rightarrow 0$. Allerdings ist hierfür eine perturbative Entwicklung aus zweierlei Gründen nicht durchführbar:

- (i) Die laufende Kopplung α_s muss, wie auch in der normalen Störungstheorie, definiert und hinreichend klein sein.
- (ii) Hinzu kommt ein wichtiges Charakteristikum der Instantonphysik. Dem Instantonprozess kann über den Skalenparameter ρ eine Ausdehnung zugeordnet werden. Bei der störungstheoretischen Entwicklung wurde nun lediglich ein einzelnes Instanton berücksichtigt, was bei $\rho \rightarrow \infty$ sicher keine haltbare Annahme ist. Die Störungsreihe muss für große ρ also irgendwann zusammenbrechen. Dies spiegelt sich direkt in der perturbativ berechneten Dichteverteilung $D(\rho, \mu)$ wieder, die mit ρ ansteigt und das Integral hierüber im Infraroten divergiert. Durch externe Gluonen und Quarks, die jeweils einen Faktor ρ^2 bzw. $\rho^{3/2}$ mitbringen, wird dies noch zusätzlich verstärkt.

Der erste Punkt lässt sich in der QCD natürlich durch die Einführung einer künstlichen Impulsskala $Q \gg \Lambda_{\text{QCD}}$, wie beispielsweise die Virtualität in tief-inelastischer Streuung,

realisieren. Eine ähnliche Skala Q' lässt sich in dem hier betrachteten Prozess dadurch einbringen, indem eine der externen Quarknullmoden durch einen entsprechenden effektiven Vertex [34]

$$\bar{\phi}(-k) \rightarrow \varepsilon^*(q) \cdot \mathcal{V}^{(I)}(-q, -k) = \varepsilon_\mu^*(q) \int d^4x e^{iq \cdot x} \bar{\phi}(x) \bar{\sigma}_\mu S^{(I)}(x, -k) \quad (1.74)$$

$$\kappa(-k) \rightarrow \varepsilon^*(q) \cdot \bar{\mathcal{V}}^{(I)}(-q, -k) = \varepsilon_\mu^*(q) \int d^4x e^{iq \cdot x} \bar{S}^{(I)}(-k, x) \sigma_\mu \kappa(x) \quad (1.75)$$

ersetzt und unter Abstrahlung eines elektroschwachen Vektorbosons mit Polarisationsvektor ε^* und Impuls q , $Q^2 = |q^2|$ virtuell mit $Q'^2 = |(k + q)^2|$ wird. Man vergleiche hierzu auch Abb. 1.4. Hierbei sind

$$S^{(I)}(x, -k) \equiv \int d^4y e^{ik \cdot y} S^{(I)}(x, y) \quad (1.76)$$

und entsprechend $\bar{S}^{(I)}(-k, x)$ die Einbein-Fouriertransformierten [34] des jeweiligen Nichtnullmoden-Fermionpropagators [58]

$$S^{(I)}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\Pi_x \Pi_y}} \left[S^{(0)}(x - y) \left(1 + \rho^2 \frac{Ux\bar{y}U^\dagger}{x^2 y^2} \right) + \frac{\rho^2 \sigma_\mu}{4\pi^2} \frac{Ux(\bar{x} - \bar{y})\sigma_\mu \bar{y}U^\dagger}{x^2(x - y)^2 y^4 \Pi_y} \right] \quad (1.77)$$

bzw.

$$\bar{S}^{(I)}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\Pi_x \Pi_y}} \left[\bar{S}^{(0)}(x - y) \left(1 + \rho^2 \frac{Ux\bar{y}U^\dagger}{x^2 y^2} \right) + \frac{\rho^2 \bar{\sigma}_\mu}{4\pi^2} \frac{Ux\bar{\sigma}_\mu(x - y)\bar{y}U^\dagger}{\Pi_x x^4 (x - y)^2 y^2} \right] \quad (1.78)$$

im Instantonhintergrund, wobei $S^{(0)}(x) = \frac{x}{2\pi^2 x^4}$ und $\bar{S}^{(0)} = \frac{\bar{x}}{2\pi^2 x^4}$ die freien chiralen Fermionpropagatoren sind.

Für $Q^2 > 0$ und $Q'^2 > 0$ konvergiert nun das ρ -Integral, da große Instantonen durch den effektiven Vertex exponentiell unterdrückt werden [34].¹⁵ Hierdurch ergibt sich ein Q - oder Q' -abhängiges Maximum in ρ . Die Virtualitäten sind dabei groß genug zu wählen, dass das Maximum bei hinreichend kleinen Instantonen liegt, um im Gültigkeitsbereich der Instantondichte (1.62) zu bleiben [37, 42, 45].

Instanton-Feynman-Regeln in Impulsdarstellung

Abschließend sollen noch die amputierten Felder in Impulsdarstellung angegeben werden [34]. Die Fouriertransformation der Quarknullmoden und der Instanton-Felder in singulärer Eichung ist nicht weiter problematisch. Deutlich komplizierter hingegen ist die Fouriertransformation des effektiven Vertices.

¹⁵Moch, Ringwald und Schrempp [34] zeigen dies für tief-inelastische Streuung, wo das virtuelle Quark an ein virtuelles Photon koppelt. In diesem Fall ist es üblicher, q und q' als einlaufend zu betrachten und $q' = q - k$ zu setzen. Auf das Konvergenzverhalten der ρ -Integration wird später noch ausführlicher eingegangen.

Quarknullmoden In euklidischer Metrik erhält man für die amputierten Nullmoden mit Farbindex i und j in Impulsdarstellung [34]

$$\lim_{k^2 \rightarrow 0} \chi_R^\dagger(k) ik \kappa^i(-k) = 2\pi\rho^{3/2} \chi_{R\alpha}^\dagger(k) \epsilon^{\alpha\beta} U^i_\beta \quad (1.79)$$

bzw.

$$\lim_{k^2 \rightarrow 0} \bar{\phi}_j(-k) (-i\bar{k}) \chi_L(k) = 2\pi\rho^{3/2} U^{\dagger\beta}_j \epsilon_{\beta\alpha} \chi_L^\alpha(k). \quad (1.80)$$

Gluonen im Instantonhintergrund Für ein amputiertes Gluon im Instantonhintergrund mit Farbindex a ergibt sich auf der Massenschale im euklidischen Impulsraum [34]

$$\lim_{p^2 \rightarrow 0} (-p^2) \varepsilon(p) \cdot A^{(I)a}(p) = \frac{\pi^2 \rho^2}{g_s} \text{tr} [\lambda^a U (\varepsilon\bar{p} - p\bar{\varepsilon}) U^\dagger]. \quad (1.81)$$

Effektiver Vertex Die Fouriertransformation des effektiven elektroschwachen Vertices \mathcal{V} ergibt nach hartnäckiger und langer Rechnung [34]

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{k^2 \rightarrow 0 \\ k \cdot q \neq 0}} \varepsilon^*(q) \cdot \mathcal{V}^{(I)}(-q, -k) (-i\bar{k}) &= -2\pi i \rho^{3/2} \\ U^\dagger \left[\frac{\epsilon k \bar{\varepsilon}^*}{2k \cdot q} f(\rho\sqrt{q^2}) + \left(\frac{\epsilon(q+k)\bar{\varepsilon}^*}{(q+k)^2} - \frac{\epsilon k \bar{\varepsilon}^*}{2k \cdot q} \right) f(\rho\sqrt{(q+k)^2}) \right] & \quad (1.82) \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{k^2 \rightarrow 0 \\ k \cdot q \neq 0}} ik \bar{\mathcal{V}}^{(I)}(-q, -k) \cdot \varepsilon^*(q) &= -2\pi i \rho^{3/2} \\ \left[\frac{\varepsilon^* \bar{k} \epsilon}{2k \cdot q} f(\rho\sqrt{q^2}) + \left(\frac{(\varepsilon^* \bar{q} + \bar{k}) \epsilon}{(q+k)^2} - \frac{\varepsilon^* \bar{k} \epsilon}{2k \cdot q} \right) f(\rho\sqrt{(q+k)^2}) \right] U & \quad (1.83) \end{aligned}$$

Hierbei tritt der Formfaktor

$$f(\omega) \equiv \omega K_1(\omega) = \sqrt{\frac{\pi\omega}{2}} \exp(-\omega) \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega}\right) \right) \quad (1.84)$$

auf, so dass der Vertex bei nichtverschwindendem Q und Q' in ρ asymptotisch exponentiell abfällt und die entsprechende ρ -Integration konvergiert.

Damit stehen prinzipiell alle wichtigen Bausteine der Instanton-Störungsrechnung im Impulsraum zur Verfügung.

1.2.3 Die Valley-Wirkung

Bisher wurden ausschließlich exklusive Prozesse betrachtet. Bei der Vorhersage der Rate von Instanton-Prozessen ist allerdings die vollständige Konfiguration des Endzustands weniger interessant. Dies trifft insbesondere auf die genaue Anzahl der Endzustandsgluonen zu, so dass eine Summation über Endzustände mit verschiedener Gluonzahl notwendig wird. Hierbei wäre eine exklusive Behandlung jedes einzelnen Beitrags äußerst mühsam [77]. Dem Problem deutlich angepasster ist eine inklusive Betrachtung des Endzustands über das optische Theorem, bei welcher eine Gluonresummation bereits berücksichtigt wird.

Wegen der Unitarität der Streumatrix $S^\dagger S = \mathbb{1}$ lässt sich die Summe des Amplitudenquadrates über alle möglichen Endzustände¹⁶ mit Hilfe des optischen Theorems auch als Vorwärtsstreuamplitude

$$\sum_f (2\pi)^4 \delta^4(P_i - K_f) |\langle f | \mathcal{T} | i \rangle|^2 = 2 \Im \langle i | \mathcal{T} | i \rangle \quad (1.85)$$

der Teilchen des Anfangszustands auffassen, wobei $P_i = p_1 + p_2 + \dots$ der Gesamtimpuls des Anfangszustands und K_f der des Endzustands ist. Der totale Wirkungsquerschnitt, beispielsweise für die Streuung zweier Teilchen, ist daher durch

$$\sigma_{\text{tot}} = \frac{\Im \langle i | \mathcal{T} | i \rangle}{2\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - p_1^2 p_2^2}} \quad (1.86)$$

gegeben.

Die komplexkonjugierte Amplitude zu einem Instantonprozess entspricht der Amplitude eines Antiinstantonprozesses. Es liegt also nahe, bei der Anwendung des optischen Theorems die Vorwärtsstreuung vor dem Hintergrund eines Instanton-Antiinstanton-Paares heranzuziehen und die Gluonen und Quarks des Endzustandes als Austauscheteilchen zwischen beiden zu betrachten [29, 78] (vergl. Abb. 1.5).

Während die Anzahl der Endzustandsquarks durch die axiale Anomalie vorgegeben ist, können prinzipiell beliebig viele Gluonen emittiert werden. Eine explizite Aufsummierung der Einzelbeiträge kann umgangen werden, indem man den Gluonenaustausch regelrecht als *Wechselwirkung* im semiklassischen Sinne zwischen Instanton und Antiinstanton interpretiert. Das Problem hierbei ist, dass die Summe der beiden einzelnen Konfigurationen $A^{(I+\bar{I})} = A^{(I)} + A^{(\bar{I})}$ keine Lösung der euklidischen Feldgleichungen ist, also auch keiner Konfiguration minimaler Wirkung entspricht. Die gesuchte Wirkung S , die einen Instanton-Antiinstanton-artigen Prozess semiklassisch vollständig beschreiben würde, ist bisher nicht bekannt und wird gemeinhin auch einfach als *Holy-Grail-Funktion* bezeichnet. Es ist üblich, sie in Einheiten der doppelten Instantonwirkung zu normieren

$$F_{\text{hg}} \equiv \frac{\alpha_s}{4\pi} S. \quad (1.87)$$

¹⁶Bei gegebener Teilchenkonfiguration im Endzustand ist dies das invariante Phasenraumintegral und eine eventuell anfallende Spinsummation.

$$\sum_{n_g} \left| \text{Forward Scattering Amplitude for } I \right|^2 = \text{Disc} \left(\text{Forward Scattering Amplitude for } I \text{ and } \bar{I} \right)$$

Abbildung 1.5: Das optische Theorem lässt sich mit einer Gluonresummation kombinieren. Der totale Wirkungsquerschnitt für beliebig viele Endzustandsgluonen mit einem einfachen Instantonhintergrund lässt sich dabei durch die Vorwärtsstreuamplitude vor dem Hintergrund eines mit einem Antiinstanton wechselwirkenden Instantons ausdrücken.

Die Holy-Grail-Funktion lässt sich perturbativ durch das sogenannte *Valley-Verfahren*¹⁷ berechnen [30, 69, 75, 79–88], siehe auch die Reviews [50, 89–91], und wird in dieser Näherung als *Valley-Wirkung* $S^{(I\bar{I})}$ bezeichnet. Hierbei wird ausgenutzt, dass die Summe der beiden einzelnen Feldkonfigurationen mit entsprechenden Skalenparametern ρ und $\bar{\rho}$, die sich an den Positionen z bzw. \bar{z} befinden mögen, bei hinreichend grossem Abstand $R^2 \gg \rho\bar{\rho}$ den Feldgleichungen genügen, so dass zunächst von dem Ansatz

$$\lim_{\frac{R^2}{\rho\bar{\rho}} \rightarrow \infty} A^{(I\bar{I})} = A^{(I)}(x, \rho, U_0) + A^{(\bar{I})}(x - R, \bar{\rho}, \bar{U}_0) \quad (1.88)$$

ausgegangen wird. Die Valley-Wirkung ist dann im asymptotischen Grenzfall über die Summe der beiden einzelnen Wirkungen gegeben

$$\lim_{\frac{R^2}{\rho\bar{\rho}} \rightarrow \infty} S^{(I\bar{I})} = 1, \quad (1.89)$$

was bedeutet, dass zwischen Instanton und Antiinstanton bei unendlichem Abstand keine Wechselwirkungen mehr auftreten. Dieser Grenzfall wird auch als *Dilute-Gas-Approximation* bezeichnet, die bereits bei der perturbativen Betrachtung in Abschnitt 1.2.1 im einfachen Instantonhintergrund implizit angenommen wurde.

Ausgehend von der asymptotisch klassischen Lösung Gl. (1.88) findet man bei der Berechnung von Quantenfluktuationen der Wirkung eine negative Mode, die auch als Quasinullmode bezeichnet wird. Ihre Richtung hängt vom Wert der kollektiven Koordinaten ζ_i ab. Entlang der Trajektorie der Quasinullmode $A_{\text{qzm}}^{(I\bar{I})}(\zeta)$ bildet die Wirkung dabei den mit flacher Neigung verlaufenden Grund einer Schlucht oder eines langgestreckten *Tals*, wie in Abb. 1.6 dargestellt, an deren Seiten die steilen Wände der gaußschen Nichtnullmoden hinaufragen. Eine Gaußintegration entlang der Trajektorie ist also wenig sinnvoll. Bei dem von Balisky und Yung [69, 80, 81] vorgeschlagenen Valley-Verfahren wird zunächst mit Hilfe der Strömungsliniengleichung

$$\sum_i c_i(\zeta) \frac{\partial A_{\text{qzm}}^{(I\bar{I})}(x, \zeta)}{\partial \zeta_i} = \frac{\delta S_{\text{qzm}}^{(I\bar{I})}}{\delta A(x, \zeta)} \quad (1.90)$$

¹⁷Das Valley-Verfahren wird auch Streamline-Verfahren genannt.

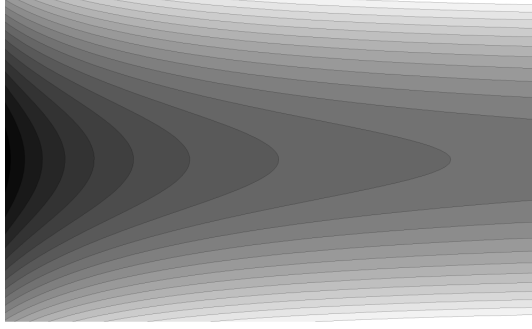


Abbildung 1.6: Abgebildet ist die Topographie der Valley-Wirkung im Funktionenraum. Die Konturen markieren Bereiche konstanter Wirkung. Die Valley-Trajektorie ist hier über den konformen Parameter ξ parametrisiert und verläuft mittig von rechts (asymptotisches Dilute-Gas) nach links (triviales, perturbatives Vakuum). Orthogonal zur Trajektorie verlaufen die gaußschen Nichtnullmoden.

die Trajektorie bestimmt, welche den steilsten Abstieg im Tal bedeutet und entlang derer das System durch die Attraktion getrieben wird [92]. Bei festgehaltenen kollektiven Koordinaten definiert sie somit stets die Konfiguration mit minimaler Wirkung – die Valley-Wirkung. Die Lagrange-Multiplikatoren c_i sind hierbei ein Maß für die Steigung der Wirkung entlang der Trajektorie. Anschließend wird bei gegebenem ζ über die gaußschen Moden, die orthogonal zum Tal verlaufen, integriert und schließlich die exakte Integration über die kollektiven Koordinaten durchgeführt.

Unter Ausnutzung der konformen Invarianz lässt sich die Differentialgleichung Gl. (1.90) mit der asymptotischen Randbedingung, Gl. (1.88),¹⁸ exakt lösen [30, 82]. Die Trajektorie wird dabei nur über den konformen Parameter

$$\xi = \frac{R^2 + \rho^2 + \bar{\rho}^2}{\rho\bar{\rho}} \quad (1.91)$$

parametrisiert, so dass die Dilute-Gas-Approximation nun dem Limes $\xi \rightarrow \infty$ entspricht. Es ist üblich, von der Valley-Wirkung die *Wechselwirkung* $\Omega^{(I\bar{I})}$ zu separieren

$$S^{(I\bar{I})}(\xi, u) = 1 + \Omega^{(I\bar{I})}(\xi, u). \quad (1.92)$$

Neben dem konformen Parameter hängt diese noch von der relativen Gruppenorientierung $u^{\alpha\dot{\alpha}} = U^\dagger{}^\alpha{}_i \bar{U}^{i\dot{\alpha}}$ des Antiinstantons zum Instanton ab. Alternativ lässt sich die Gruppenorientierung auch durch einen komplexen Vektor $u_\mu \equiv \frac{1}{2} \text{tr}(u\bar{\sigma})$, mit $u = u_\mu \sigma_\mu$,

¹⁸Hinzu kommt die vorgegebenen Richtung der Quasinullmode im asymptotischen Limes.

bestimmen.¹⁹ Man erhält schließlich [30, 42, 82]

$$\Omega(\xi, u) = 2 \left(|u|^2 - 4|u \cdot \hat{R}|^2 \right) \Sigma_1 + \left(\left(|u|^2 - 4|u \cdot \hat{R}|^2 \right)^2 + |u|^4 + 2u^2 u^{*2} \right) \Sigma_2, \quad (1.93)$$

wobei $\hat{R}_\mu = R_\mu / \sqrt{R^2}$ der normierte Abstandsvektor ist und

$$\Sigma_1 = \frac{\lambda^4 - 1 + 4\lambda^2 \ln \lambda}{(\lambda^2 - 1)^3}, \quad \Sigma_2 = \frac{1 - \lambda^2 + (1 + \lambda^2) \ln \lambda}{(\lambda^2 - 1)^3}, \quad (1.94)$$

mit $\lambda \equiv \frac{1}{2}(\xi + \sqrt{\xi^2 - 4})$ für $\xi \geq 2$ oder allgemeiner $\lambda + 1/\lambda = \xi$.

Die Wechselwirkung wird in der Ausrichtung mit der größten Attraktivität minimiert. Diese Konfiguration wird bei paralleler Ausrichtung von Instanton und Antiinstanton $u = \hat{R}$, der Dipolkonfiguration, angenommen, so dass die minimale Wechselwirkung sich zu

$$\Omega^{(I\bar{I})}(\xi) = -6 \Sigma_1(\xi) + 12 \Sigma_2(\xi), \quad (1.95)$$

mit $\Omega^{(I\bar{I})} \in [-1, 0]$ für $\xi \in [2, \infty]$, ergibt. Abbildung 1.6 zeigt die Topographie der Wirkung in der Nähe der Dipol-Valley-Wirkung mit quadratischem Anstieg in Richtung der Nichtnullmoden.

Abschließend soll als Beispiel die Vorwärtsstreuamplitude für zwei Gluonen formal konstruiert werden (vgl. dazu Ref. [34, 37, 76, 86]), wobei hier der Klarheit wegen auf Quarknullmoden oder die Einbindung einer Virtualität verzichtet werden soll. Beides wird im späteren Verlauf der Arbeit mit berücksichtigt.

Bei der Integration über die kollektiven Koordinaten sind nun der relative Abstand R , die relative Ausrichtung u , sowie die beiden Skalenparameter ρ und $\bar{\rho}$ zu berücksichtigen.²⁰ Für jedes der beiden Instantonen geht eine entsprechende Dichteverteilung D ein, wobei die Wirkung durch die Valley-Wirkung zu ersetzen ist

$$e^{-\frac{4\pi}{\alpha_s}} \rightarrow e^{-\frac{4\pi}{\alpha_s} S^{(I\bar{I})}} = e^{-\frac{4\pi}{\alpha_s} (1 + \Omega^{(I\bar{I})})}. \quad (1.96)$$

Die Amplitude ergibt sich schließlich zu

$$\mathcal{T}^{(I\bar{I})}(p_1, p_2) = \int d^4 R \int d\rho \int d\bar{\rho} \int dU e^{i(p_1 + p_2) \cdot R} \mathcal{R}_g(p_1; \rho, \bar{\rho}, U) \mathcal{R}_g(p_2; \rho, \bar{\rho}, u) \\ D(\rho, \mu_r) D(\bar{\rho}, \mu_r) e^{-\frac{4\pi}{\alpha_s} \Omega^{(I\bar{I})}(\xi, u)} (\rho \bar{\rho} \mu_r^2)^{\beta_0 \Delta_1 \Omega^{(I\bar{I})}(\xi, u)}, \quad (1.97)$$

wobei mit

$$R_g(p; \rho, \bar{\rho}, u) = \lim_{p^2 \rightarrow 0} \frac{1}{16} \sum_{r,a} p^2 \text{tr} \left(\lambda^a \varepsilon_r^* \cdot A^{(I\bar{I})}(-p) \right) p^2 \text{tr} \left(\lambda^a \varepsilon_r \cdot A^{(I)}(p) \right) \quad (1.98)$$

¹⁹Für den Spezialfall einer $SU(2)$ ist u reell und wegen der Unitarität auf $u^2 = 1$ normiert. Bei einer Einbettung in eine $SU(N)$, mit $N > 2$, wird u komplex und wegen zusätzlicher Winkel, die die Einbettung in die größere Gruppe parametrisieren, dann entsprechend $|u|^2 \leq 1$. Man beachte weiterhin, dass für $|u|^2 < 1$ U nicht mehr unitär ist, also $u^{\alpha\dot{\alpha}} u^\dagger_{\dot{\alpha}\beta} \neq \delta_\beta^\alpha$.

²⁰Hinzu kommt die Integration über die Schwerpunktskoordinate, welche durch die Impulserhaltung der Vorwärtsstreuung eliminiert wird, sowie ein triviales Integral über die absolute Gruppenorientierung.

jeweils die vorwärtsgestreuten LSZ-amputierten Gluonen berücksichtigt werden.

Gl. (1.98) ergibt sich unmittelbar aus den Regeln für den exklusiven Fall. Der Faktor $1/16$ kommt hierbei durch die Mittelung von Polarisation r und Farbindex a zustande. In Gl. (1.97) wurde nur der inklusive instantoninduzierte Prozess berücksichtigt. Die entsprechende Amplitude, die einen Prozess für ein Antiinstanton beschreibt, ist entsprechend identisch mit Gl(1.97). Üblicherweise werden beide Amplituden addiert, da eine messtechnische Unterscheidung zwischen beiden Fällen kaum möglich ist.

2 Instantonen und der LHC

Bislang liegt kein gesicherter experimenteller Befund vor, der die Existenz Instanton-induzierter Prozesse und somit die topologische Struktur des Yang-Mills-Vakuums eindeutig belegen würden. Andererseits handelt es sich hierbei um einen wesentlichen theoretischen Bestandteil jeder nichtabelschen Eichtheorie [2–5, 10, 12, 51, 53, 59, 60, 70, 72]. Sofern es sich also bei der QCD und QFD um geeignete Quantenfeldtheorien zur Beschreibung der elementaren Wechselwirkungen handelt, so muss es auch Instanton-induzierte Prozesse geben ('t Hooft [2]).

Insgesamt stellt sich die Frage nach der Messbarkeit von Instanton-artigen Prozessen in der QFD oder QCD, also nach Ereignisraten und der Abgrenzung zum Untergrund. In der Vergangenheit wurden bereits intensive Anstrengungen unternommen, um Aussagen diesbezüglich zu treffen. Als besonders vielversprechend und fruchtbar erwiesen sich dabei die Untersuchungen von Ringwald und Schrempp [33–46] zu Instantonen in tief-inelastischer Streuung bei HERA, auf deren Grundlage schließlich auch Experimente der H1- und ZEUS-Kollaborationen [47, 48] stattfanden. Eine komplementäre Umgebung zur tief-inelastischen Streuung bei HERA stellt die PP -Streuung am LHC dar. Dieses Kapitel soll nun qualitativ motivieren, warum die Suche nach Instantonen dort als eine interessante Alternative erscheint.

2.1 Zusammenbruch der Valley-Wirkung

Grundsätzlich liefern Instantonereignisse eine Reihe äußerst spektakulärer Effekte, die mit der anomalen Ward-Identität (1.20) im Zusammenhang stehen und auf die es im üblichen störungstheoretischen Rahmen keine Antworten gibt. Von seinen physikalischen Auswirkungen her ist der elektroschwache Sektor mit $B + L$ -verletzenden Prozessen wie in Gl. (1.26) potentiell sicherlich sehr spektakulär. Allerdings gibt es verschiedene Argumente [33, 50, 93–95] dafür, dass die Holy-Grail-Funktion nur etwa bis

$$F_{\text{hg}} \gtrsim \frac{1}{2} \quad (2.1)$$

abfallen sollte. Da der Tunnelfaktor mit

$$e^{-\frac{4\pi}{\alpha_W}} \approx 10^{-169} \quad \rightarrow \quad e^{-\frac{4\pi}{\alpha_W} F_{\text{hg}}} \lesssim 10^{-84} \quad (2.2)$$

in der QFD extrem klein ausfällt, würde dies bei weitem nicht ausreichen, um die starke Tunnelunterdrückung aufzuheben.

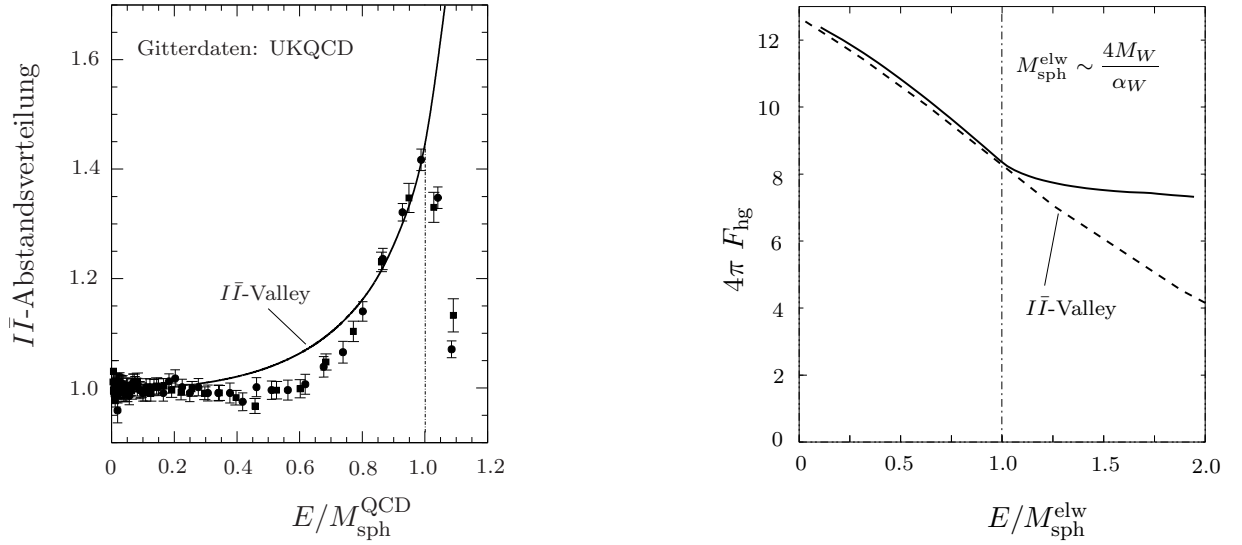


Abbildung 2.1: Gültigkeitsbereich der Valley-Wirkung.

(a) Zur Linken wird die normierte $I\bar{I}$ -Abstandsverteilung (2.3) unter Verwendung der Valley-Wirkung und der Dichteverteilung vom Gitter D_{Gitter} mit reinen Gittersimulationen verglichen [42, 44, 45]. Die Gitterdaten stammen dabei von UKQCD [96].

(b) Rechts ist eine numerische Simulation von Rubakov et al. [97] der Holy-Grail-Funktion für Prozesse mit einfacher $B + L$ -Verletzung im Vergleich mit der Valley-Wirkung dargestellt.

Erste konkrete Hinweise darauf, dass diese Vermutungen zutreffen, wurden von Ringwald und Schrempf [42, 44, 45] mit Hilfe von UKQCD-Daten [96] gefunden. Hierzu wurde die $I\bar{I}$ -Abstandsverteilung

$$\frac{dn^{(I\bar{I})}}{d^4z d^4R} = \int d\rho \int d\bar{\rho} D_{\text{latt}}(\rho) D_{\text{latt}}(\bar{\rho}) \int dU e^{-\frac{4\pi}{\alpha_s} \Omega^{(I\bar{I})}}, \quad (2.3)$$

berechnet, wobei statt der störungstheoretisch berechneten Dichteverteilung (1.62) die durch Gitterdaten gestützte Dichteverteilung D_{latt} , ansonsten aber die Valley-Wechselwirkung aus Gl. (1.93) verwendet wurde. Ein direkter Vergleich mit reinen Gitterdaten erlaubt es nun, den Gültigkeitsbereich der Valley-Wechselwirkung $\Omega^{(I\bar{I})}(\xi)$ abzuschätzen.

Die Abhängigkeit vom konformen Parameter ξ bzw. des Verhältnisses von Instanton-Antinstanton-Abstand R zu deren mittlerer Größe $\langle \rho \rangle$ lässt sich über einen Sattelpunkt in R in Relation zum Verhältnis zwischen Prozessenergie und Sphaleronmasse (1.14)

$$\frac{R}{\langle \rho \rangle} \Leftrightarrow \frac{E}{M_{\text{sph}}} \quad (2.4)$$

bringen [14, 17]. Das Ergebnis ist Abbildung 2.1 (a) zu entnehmen. Wie man sehen kann, stimmt Gl. (2.3) mit den Gitterdaten bis $E \lesssim M_{\text{sph}}$ entsprechend $R \gtrsim \langle \rho \rangle$ überein. Dieser Punkt markiert somit die Grenze des Gültigkeitsbereiches der Valley-Wirkung.

Dieser Trend wurde später unabhängig von Rubakov et al. [97] durch numerische Untersuchungen der Valley-Wirkung bestätigt, wobei schließlich auch der weitere Verlauf der

Holy-Grail-Funktion bei höheren Energien $E > M_{\text{sph}}$ genauer geklärt werden konnte. Wie Abb. 2.1 (b) gut zu entnehmen ist, stimmen Valley-Wirkung und Holy-Grail-Funktion in der Tat bis zur Sphaleronmasse sehr genau miteinander überein und fallen dabei bis zu diesem Punkt etwa auf ihren halben ursprünglichen Wert ab. Während die Valley-Wirkung für höhere Energien quasi ungebremst weiter abfällt, flacht die eigentliche Holy-Grail-Funktion stattdessen sehr schnell aus.

Wie bereits zu Beginn des Abschnitts angedeutet wurde, lassen diese Ergebnisse also darauf schließen, dass im elektroschwachen Sektor die extreme exponentielle Unterdrückung nicht hinreichend stark aufgehoben wird und $B + L$ -verletzende Instanton-Prozesse auch im Multi-TeV-Bereich kaum messbar sein sollten. In der QCD ist die Eichkopplung dagegen erheblich größer und die Tunnelunterdrückung entsprechend schwächer. Eine Reduktion des Tunnelfaktors zu

$$e^{-\frac{4\pi}{\alpha_s}} \rightarrow e^{-\frac{4\pi}{\alpha_s} S(I\bar{I})} \approx e^{-\frac{2\pi}{\alpha_s}} \quad (2.5)$$

hat in der QCD daher wesentlich größere Auswirkungen als in der QFD.

2.2 Instantonen in tief-inelastischer Streuung

Für den kinematischen Sektor der tief-inelastischen Streuung wurde die Instantonsuche schließlich intensiv von Ringwald und Schrempf [33–46] vorangetrieben. Hierbei wurde insbesondere die Instanton-Störungsrechnung in den Impulsraum übertragen [34], was erst die Einbeziehung kinematischer Schnitte ermöglichte. Im Folgenden sollen kurz die wichtigsten Eigenschaften Instanton-induzierter Prozesse in tief-inelastischer Streuung vorgestellt werden.

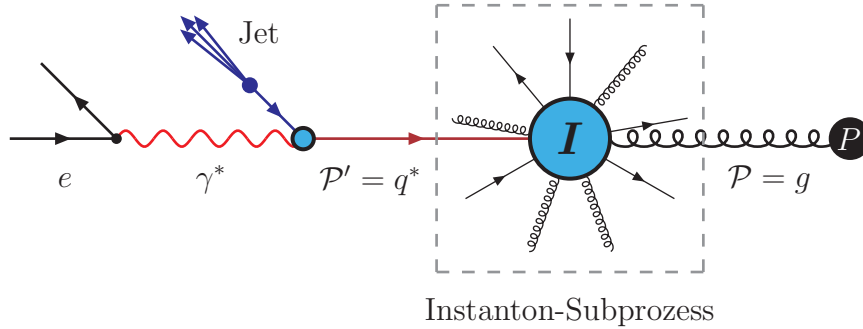


Abbildung 2.2: Instanton-Prozesses in tief-inelastischer eP -Streuung.

Abbildung 2.2 zeigt eine schematische Darstellung eines typischen Instanton-Prozesses in tief-inelastischer Streuung. In semiklassischer Näherung ist wegen der axialen Anomalie (1.20) jedes leichte Quarkflavor u , d und s mit jeweils zwei Nullmoden-Quarks beteiligt [66], ferner ist die Gluonenmultiplizität typischerweise von der Ordnung $\langle n_g \rangle \sim 1/\alpha_s$ [33]. Die gestrichelte Box markiert den eigentlichen punktförmigen Instanton-Subprozess, dessen Signal eine isotrope Impulsverteilung und somit in der Rapiditätsverteilung einen stark

konzentrierten Peak aufweisen sollte. Bei niedrigem α_s und entsprechend hoher Multiplizität kann somit von einem feuerballartigen Ereignis gesprochen werden. Der eigentliche Subprozess koppelt dabei über ein virtuelles Quark q^* an das virtuelle Photon γ^* , wodurch ein Quarkjet abseits des Feuerballpeaks in der Rapiditätsverteilung entsteht [40, 43, 45].

Damit der Prozess mit dem Kalkulus der Instanton-Störungsrechnung berechnet werden kann, wird über die Quark-Photon Kopplung die Virtualität $Q' = \sqrt{-q'^2}$ über den t -Kanal in den Subprozess eingespeist. Es ist üblich, neben der Skalierungsvariable x , der Virtualität des Photons $Q = \sqrt{-q^2}$ und der Schwerpunktsenergie $\sqrt{s} \equiv \sqrt{(q+p)^2}$ des übergeordneten Photon-Parton-Streuprozesses entsprechende Variablen für den eingebetteten Instanton-Subprozess zu definieren

$$x' \equiv \frac{Q'^2}{s' + Q'^2} \leq 1 \quad Q'^2 \equiv -q'^2 > 0 \quad s' \equiv (q' + p)^2. \quad (2.6)$$

Hierbei seien q' der raumartige Impuls des virtuellen Quarks und p der des reellen Partons des Protons, im Falle des führenden Prozesses also der des Gluons. Die Kinematik des Instanton-induzierten Photon-Gluon Streuprozesses ist zur besseren Übersicht in Abbildung 2.3 zusammengefasst.

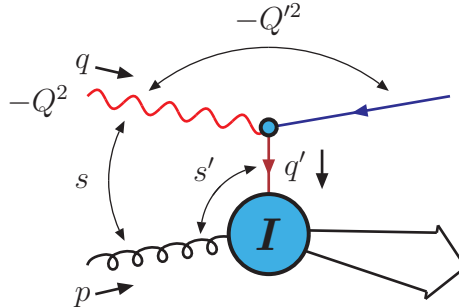


Abbildung 2.3: Dargestellt ist die Kinematik des virtuellen Instanton-induzierten Photon-Gluon Streuprozesses. Die Virtualität Q' des eigentlichen Subprozesses wird über den t -Kanal in diesen eingespeist.

Im Bjorken-Limes faktorisiert der Wirkungsquerschnitt des Instanton-induzierten Prozesses zu [37]

$$\frac{d\sigma_{eP}^{(I)}}{dx'dQ'^2} \approx \sum_{\mathcal{P}', \mathcal{P}} \frac{d\mathcal{L}_{\mathcal{P}'\mathcal{P}}^{(I)}}{dx'dQ'^2} \sigma_{\mathcal{P}'\mathcal{P}}^{(I)}(x', Q'^2), \quad \mathcal{P}' \in \{q, \bar{q}\}, \quad \mathcal{P} \in \{q, g\}, \quad (2.7)$$

wobei die Summe hierbei über die jeweils möglichen Partonen läuft. Der Wirkungsquer-

schnitt für den führenden Subprozess ist ferner durch [37]

$$\sigma_{\mathcal{P}'g}(q', p) \approx \int d^4 R \int d\rho \int d\bar{\rho} D(\rho, \mu_r) D(\bar{\rho}, \mu_r) (\rho\bar{\rho}\mu_r^2)^{\beta_0\Delta_1\Omega^{(I\bar{I})}(\xi)} e^{i(p+q')\cdot R} e^{-\frac{4\pi}{\alpha_s}\Omega^{(I\bar{I})}(\xi)}$$

$$\underbrace{\frac{2}{3} \frac{\pi^5}{\alpha_s} \frac{Q'^2}{s'^{3/2}} \frac{p \cdot q'}{(\rho\bar{\rho})^{7/2}} f(Q'\rho) f(Q'\bar{\rho})}_{\text{externe Quarknullmoden und Gluonen}} \underbrace{\omega(\xi)^{2n_f-1}}_{\text{int. Quarknullmoden}} \underbrace{\frac{1}{9\sqrt{\pi}} \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \frac{6}{\tilde{\Omega}^{(I\bar{I})}(\xi)} \right)^{7/2}}_{\text{Sattelpunkt Gruppenint.}} \quad (2.8)$$

gegeben. Die differentielle $\mathcal{P}'\mathcal{P}$ -Luminosität für eP -Streuung im Instanton-Hintergrund lässt sich schließlich als Produkt von Flussfaktoren für die einzelnen Teilprozesse auffassen [37]

$$\frac{d\mathcal{L}_{\mathcal{P}'\mathcal{P}}^{(I)}}{dx'dQ'^2} = \frac{2\pi\alpha_s^2}{s_{eP}} \frac{e_{\mathcal{P}'}}{x'^2} \int^{x'} \frac{dx}{x} \int \frac{dx_{Bj}}{x_{Bj}} \int \frac{dy_{Bj}}{y_{Bj}} P_{\gamma^*} P_{\mathcal{P}'}^{(I)} \left(\frac{x}{x'}, x, \frac{Q'^2}{Q^2} \right) f_{\mathcal{P}}. \quad (2.9)$$

Bei $\sqrt{s_{eP}}$ handelt es sich hierbei um die durch den Beschleuniger vorgegebene eP -Schwerpunktsenergie. Weiterhin ist $P_{\gamma^*}(y_{Bj})$, mit $y_{Bj} = Q^2/(s_{eP}x_{Bj})$, der übliche Weizsäcker-Williams-Fluss für die Abstrahlung eines virtuellen Photons und $f_{\mathcal{P}}(x_{Bj}/x, \dots)$ die entsprechende Partonendichte im Proton, mit $x_{Bj} \equiv Q^2/(2P \cdot q)$ und dem Protonenimpuls P . Zu diesen beiden Faktoren, die auch in gewöhnlicher tief-inelastischer Streuung auftreten, kommt noch ein weiterer Instanton-spezifischer Faktor hinzu, der Flussfaktor [37]

$$P_{\mathcal{P}'}^{(I)} \left(\frac{x}{x'}, x, \frac{Q'^2}{Q^2} \right) \approx \frac{3}{16\pi^3} \frac{x}{x'} \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x'} - \frac{Q'^2}{Q^2} \right) \quad (2.10)$$

für die $\bar{q}q^*$ -Erzeugung durch Zerfall des virtuellen Photons im Hintergrund eines Instantons.

Der Wirkungsquerschnitt für den q^*g -Subprozess ist schließlich in Abbildung 2.4 dargestellt. Bei konstant gehaltener Virtualität Q' steigt die Schwerpunktsenergie des Sub-

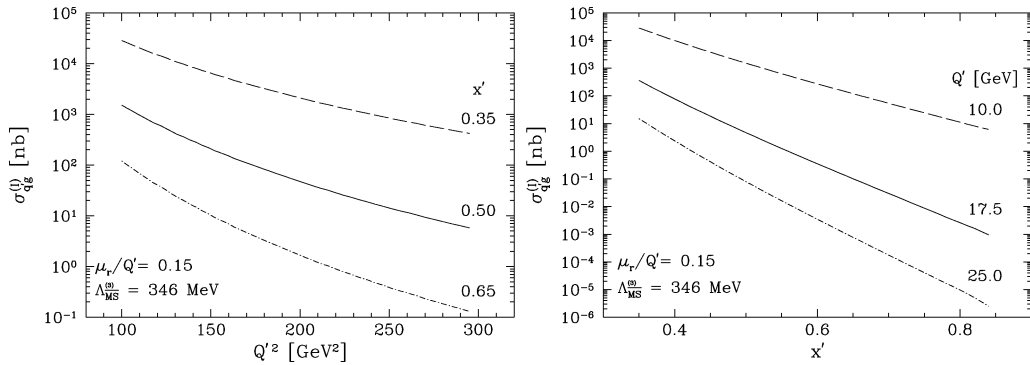


Abbildung 2.4: Dargestellt ist der totale Wirkungsquerschnitt des führenden Instanton-Subprozesses bei HERA [43]. Die Abbildung links zeigt dabei für verschiedene Werte von x' den Verlauf über Q'^2 . Rechts ist entsprechend der x' -Verlauf für verschiedene Q'^2 angegeben.

prozesses

$$s'(x') = Q'^2 \left(\frac{1}{x'} - 1 \right) \quad (2.11)$$

mit abnehmendem x' an. Man erkennt also deutlich den Anstieg des Wirkungsquerschnittes mit zunehmender Energie. Unter Berücksichtigung der weiteren Flussfaktoren, insbesondere dem für die $\bar{q}q^*$ -Erzeugung, und nach Integration über die einzelnen kinematischen Variablen erhält man nach Summation über die einzelnen Partonen-Beiträge den totalen Wirkungsquerschnitt für Instanton-induzierte tief-inelastische eP -Streuung bei HERA. Hierbei ist zu beachten, dass für Q' , x' und die übrigen Variablen Integrationsgrenzen anzusetzen sind, um den Gültigkeitsbereich der Valley-Wirkung nicht zu verlassen.

2.3 Neue Wege: Instantonen am LHC

Komplementär zur tief-inelastischen Streuung erscheint nun die Instantonsuche am LHC. Ein typischer Instantonprozess, wie er in PP -Streuung stattfinden sollte, ist in Abbildung 2.5 dargestellt. Charakteristisch ist der aus zwei Gluonen bestehende partonische Anfangszustand, sowie die ausgeprägte isotrope Feuerballsignatur. Das emittierte Vektorboson und der Quark-Jet dienen dabei der Präparation der Virtualität des Subprozesses.

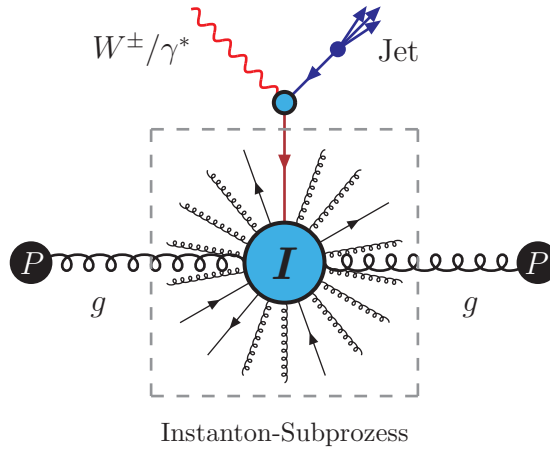


Abbildung 2.5: Typischer Instanton-Prozess am LHC.

2.3.1 Allgemeine Aspekte

Die stark vorgegebene Kinematik in tief-inelastischer eP -Streuung liefert im Vergleich zu reinen Protonenbeschleunigern den Vorteil einer verhältnismäßig klaren, übersichtlichen Prozessstruktur. Wegen einiger besonderer Charakteristika von Instantonprozessen bieten Hadronenbeschleuniger allerdings dennoch einige entscheidende Vorteile gegenüber eP -Beschleunigern. So zeichnen sich Instantonprozesse dadurch aus, dass

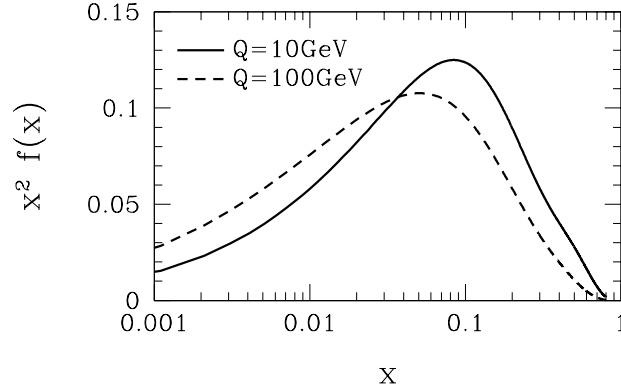


Abbildung 2.6: Gluonverteilung bei einer Skala von $Q = 10 \text{ GeV}$ und $Q = 100 \text{ GeV}$, nach MRST2004NNLO.

- jedes nichtperturbative Gluon, im Gegensatz zu Quarks, einen Faktor von $1/\alpha_s$ zum Wirkungsquerschnitt beiträgt,
- die Gluonenmultiplizität von der Größenordnung $\langle n_g \rangle \approx 1/\alpha_s$ ist [33],
- aufgrund der axialen Anomalie (1.20) sämtliche leichten Quarkflavors u, d, s , sowie ihre Antimoden $\bar{u}, \bar{d}, \bar{s}$ mit definierter Chiralität am Subprozess beteiligt sind [2] und
- der exklusive Wirkungsquerschnitt bei insgesamt n_f leichten Quark-Flavors und n_g Gluonen unterhalb der Sphaleronmasse mit einer charakteristischen Potenz der Schwerpunktsenergie ansteigt [28]

$$\sigma^{(I)} \sim s^{3n_f + 2n_g - 5}. \quad (2.12)$$

Das Energieverhalten lässt sich durch einige Dimensionsbetrachtungen verstehen [98]. Fasst man den Instanton-Prozess als punktförmig auf mit entsprechendem Vertex in einer effektiven Lagrangedichte, so ist jedem Gluon die Impulsdimension $[F_{\mu\nu}] = 2$ und jedem Quark $[q] = 3/2$ zuzuordnen. Bei $2n_f$ Quarks und n_g Gluonen hätte die effektive Kopplung somit die Dimension $d = 3n_f + 2n_g - 4$. Die quadratisch in den Wirkungsquerschnitt eingehende Kopplung ist nun durch eine entsprechende Potenz der Schwerpunktsenergie \sqrt{s} zu kompensieren. Der zusätzliche Faktor $1/s$ in Gl. (2.12) bringt schließlich den Wirkungsquerschnitt auf die Dimension einer Fläche.¹

Der wesentliche Vorteil bei Protonenbeschleunigern liegt nun klar auf der Hand. Im Vergleich zur eP -Streuung kann nun ohne weiteres auch ein zweites Gluon im Anfangszustand hinzugezogen werden, was im naiven Vergleich einen Faktor von $1/\alpha_s \sim 10$ im Wirkungsquerschnitt bedeutet und somit potentiell die Rate um eine Größenordnung anheben sollte.

¹Der Beitrag zur Potenz von $3/2$ durch jedes Quark und 2 durch jedes Gluon entspricht dabei genau der jeweiligen Potenz in ρ .

Zudem steht mit dem LHC in Kürze ein Beschleuniger mit einer sehr hohen Schwerpunktsenergie von

$$\sqrt{s_{PP}} \sim 14 \text{ TeV} \quad (2.13)$$

zur Verfügung. Die beiden den Protonen zuzuordnenden Gluonen tragen, wie Abbildung 2.6 zu entnehmen ist, üblicherweise einen Impulsanteil von $x_i = 0.01 \dots 0.1$. Die effektiv zur Verfügung stehende Schwerpunktsenergie des partonischen Subprozesses liegt somit typischerweise bei

$$\sqrt{s} = \sqrt{x_1 x_2 s_{PP}} = 140 \text{ GeV} \dots 1.4 \text{ TeV}, \quad (2.14)$$

also gut eine Größenordnung über den typischen $20 \dots 60 \text{ GeV}$ der γ^*g -Fusion bei HERA.

Hinzu kommt, dass wegen der größeren Schwerpunktsenergie auch die typische Impulsskala nach oben wandern sollte, was eine kleinere laufende Kopplung und somit eine höhere Gluonenmultiplizität zur Folge hätte. Die Feuerballsignatur von Instanton-Ereignissen sollte am LHC also ausgeprägter sein als bei HERA.

2.3.2 Ereignis-Signatur

Das besondere an typischen Instantonsignalen ist die Isotropie in der inklusiven Impulsverteilung [33] im Schwerpunktsystem des Instantons. Dies führt zu einer stark konzentrierten Verteilung

$$\frac{d\Phi}{d\Omega} \approx \text{konst.} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\Phi}{d\eta} \sim \frac{1}{\cosh^2 \eta} \quad (2.15)$$

in der Pseudorapidität

$$\eta = -\ln \left(\tan \frac{\vartheta_p}{2} \right), \quad (2.16)$$

wie in Abbildung 2.7 dargestellt, wobei ϑ_p der zugehörige Polarwinkel sei. Wegen der Symmetrie des hadronischen Anfangszustands bei PP -Beschleunigern wie dem LHC sollte sich der Peak des Instanton-Signals im wesentlichen also in der Nähe von $\eta \sim 0$ befinden.

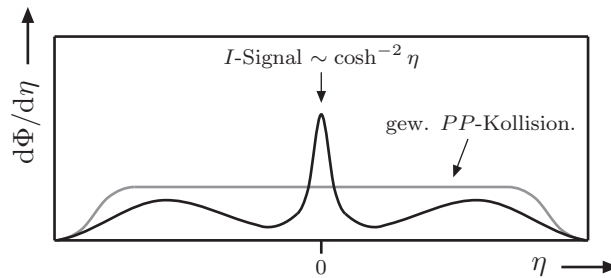


Abbildung 2.7: Dargestellt ist die inklusive Pseudorapiditätsverteilung für einen typischen Instantonprozess. Wegen der isotropen Winkelverteilung ist das Signal in der Rapidität stark konzentriert. Die inklusive Pseudorapiditätsverteilung eines gewöhnlichen hochenergetischen PP -Streuprozesses ist hingegen relativ flach mit einem breiten Plateau.

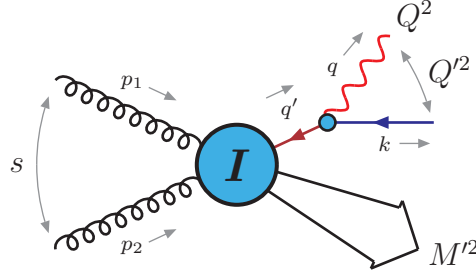


Abbildung 2.8: Dargestellt ist die Kinematik eines Instanton-induzierten gg -Streuprozesses. Die Virtualität $Q' = \sqrt{q'^2}$ des Subprozesses wird über einen s -Kanal des Endzustandes eingebracht, so dass der zugehörige Impuls *zeitartig* ist.

Im Gegensatz dazu ist die inklusive Pseudorapiditätsverteilung einer gewöhnlichen hoch-energetischen PP -Kollision weitestgehend flach und weist ein ausgeprägtes Plateau auf (Limited-Fragmentation-Hypothese [99]).

Damit Instanton-Prozesse in PP -Streuung mittels des Kalküls der Instanton-Störungsrechnung berechenbar bleiben, bedarf es noch einer harten Impulsskala Q' im eigentlichen Subprozess. Während diese in tief-inelastischer eP -Streuung durch ein virtuelles Photon über den t -Kanal präpariert wird (vergl. hierzu Abbildung 2.3), bietet sich nun die Emission eines elektroschwachen Vektorbosons über einen s -Kanal des Endzustands an, wie dies in Abbildung 2.8 dargestellt ist. Der Impuls q' der hierdurch erzeugten Virtualität ist dabei *zeitartig*, wie sich leicht einsehen lässt. Setzt man q mit $q^2 \geq 0$ als Impuls des emittierten Vektorbosons und k mit $k^2 = 0$ für das resultierende Quark oder Antiquark nach der Emission, so lässt sich die Virtualität des Subprozesses über

$$Q'^2 = (q + k)^2 \geq 2q \cdot k = 2q^0 k^0 \left(1 - \underbrace{|\vec{q}|/q^0}_{\leq 1} \cos \vartheta_{q,k}\right) \geq 0 \quad (2.17)$$

abschätzen. Die untere Grenze ist dabei prinzipiell durch die Masse bzw. Virtualität des emittierten Vektorbosons gegeben

$$Q'^2 \geq Q^2 = q^2 \geq 0. \quad (2.18)$$

Für die Emission des Vektorbosons bieten sich schließlich prinzipiell mehrere Varianten an, die im Folgenden kurz angesprochen werden sollen:

1. Emission eines virtuellen Photons, mit anschließendem Zerfall in ein Lepton-Antilepton-Paar

$$g + g \rightarrow \gamma^* + n_f(q + \bar{q}) + n_g g, \quad \gamma^* \rightarrow l + \bar{l} \quad (2.19)$$

2. Photoproduktion mit hohem Transversalimpuls

$$g + g \rightarrow \gamma + n_f(q + \bar{q}) + n_g g \quad (2.20)$$

3. Emission eines W^\pm -Bosons

$$g + g \rightarrow W/Z + q + \bar{q}' + (n_f - 1)(q + \bar{q}) + n_g g \quad (2.21)$$

Der erste Fall stellt das Analogon zum Instanton-induzierten virtuellen γ^*g -Prozess in tief-inelastischer Streuung dar und kann gewissermaßen als Referenzprozess verstanden werden. Der effektive Vertex der Ankopplung des virtuellen Photons an das virtuelle Quark aus den Untersuchungen für HERA lässt sich quasi direkt übernehmen. Das virtuelle Photon könnte durch Lepton-Paarzeugung präpariert werden, wobei sich hier besonders die Frage nach dem perturbativen Untergrund stellt.

Der zweite Fall ist sicher sehr interessant, insbesondere was die zu erwartende Rate anbelangt. Allerdings wirft er technische Probleme wegen der fehlenden Photonenmasse auf, wodurch zunächst Infrarotdivergenzen entstehen und der sonst für virtuelle Photonen gültige effektive Vertex nicht ohne weiteres anwendbar ist.

Besonders interessant erscheint die Möglichkeit einer W - oder Z -Emission. So bieten beide durch ihre Masse automatisch eine ausreichend hohe Impulsskala und können ohne weitere Schnitte bezüglich ihrer Virtualität betrachtet werden. Durch ihre hohe Masse besteht allerdings u.U. die Gefahr, dass sich die Rate extrem reduziert, worauf in den folgenden Kapiteln im Detail einzugehen sein wird. Andererseits sollte sich das Signal für W^\pm - und Z -Produktion leichter von potentiellen Untergrundsignalen unterscheiden lassen als bei der Emission eines virtuellen Photons.

3 Exklusives: Der einfachste Prozess

In den folgenden Kapiteln sollen nun erste quantitative Untersuchungen zu Instanton-induzierten Prozessen am LHC angegangen werden. Um hierbei zunächst einen Überblick der Auswirkungen durch die Besonderheiten im Vergleich zum tief-inelastischen Fall zu gewinnen, wird in diesem Kapitel zunächst mit den in [34] entwickelten Methoden der Instanton-Störungsrechnung in Impulsdarstellung der einfachst mögliche Prozess berechnet. Dieser zeichnet sich dadurch aus, dass lediglich ein einzelnes Quark-Flavor als Nullmode direkt an das Instanton koppelt und neben den beiden Gluonen des Anfangszustand keine weiteren berücksichtigt werden.

3.1 Definition des Prozesses

Lässt man sämtliche Gluonen im Endzustand unberücksichtigt und setzt die Anzahl der Nullmodenflavors, die direkt an das Instanton koppeln, zu $n_f = 1$, so ergeben sich die beiden zu betrachtenden Prozesse

$$g + g \xrightarrow{I} \gamma^* + \bar{q} + q \quad (3.1)$$

und

$$g + g \xrightarrow{I} W + \bar{q}' + q. \quad (3.2)$$

Beide lassen sich völlig analog berechnen, wobei es einen entscheidenden Unterschied gibt:

Das virtuelle Photon γ^ kann sowohl vom Quark als auch vom Antiquark emittiert werden, während das W -Boson ausschließlich an das rechtshändige Antiquark koppelt.*

Bei der Emission des virtuellen Photons sind also Interferenzen zwischen den beiden entsprechenden Amplituden zu berücksichtigen, während bei der Emission des W -Bosons lediglich eine Amplitude beiträgt und Interferenzen demnach entfallen. Um nun nicht jeden Schritt doppelt durchführen zu müssen, werden die folgenden Rechnungen zunächst am Beispiel der Emission eines virtuellen Photons durchgeführt und anschließend auf den sich hieraus ergebenden, einfacheren Fall der Emission eines W -Bosons übertragen.

3.1.1 Amplitude bei Emission eines virtuellen Photons

Die anstehende Aufgabe ist die Berechnung der Amplitude für den einfachsten Prozess unter Emission eines virtuellen Photons in semiklassischer Näherung¹

$$i \left(\mathcal{T}_{\gamma^*}^{(I) a,b} \right)_{j_1}^{i_1} \approx \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} \quad (3.3)$$

Hierbei seien a und b die Farbindices der beiden Gluonen und i_1 und j_1 die der Quarks. Weiterhin seien p_1, p_2, k_1, k_2 , sowie q die jeweiligen Impulse der ein und auslaufenden Teilchen. Diagrammatisch repräsentieren Linien, die in einem „ \oplus “ enden, Quarknullmoden bzw. Instantonfelder, während eine ein „ \oplus “ tragende Linie ein Nichtnullmoden-Quarkpropagator im Instantonhintergrund darstellt. Die Amplitude sei ferner über Gl. (1.67) definiert.

In führender Ordnung der Instanton-Störungsrechnung findet man in Impulsdarstellung nach den Regeln von Ref. [34] für den einfachsten Prozess (3.1) in gg -Streuung die Amplitude (3.3)

$$i \left(\mathcal{T}_{\gamma^*}^{(I) a,b} \right)_{j_1}^{i_1} = ie_q \int_0^\infty d\rho D(\rho, \mu_r) \int dU \quad (3.4)$$

$$p_1^2 \varepsilon(p_1) \cdot A^{(I)a}(p_1, \rho, U) p_2^2 \varepsilon(p_2) \cdot A^{(I)b}(p_2, \rho, U)$$

$$\varepsilon_\gamma^{*\mu} \left\{ \left[\chi_R^\dagger(k_2) i k_2 \kappa^{(I)}(-k_2) \right]^{i_1} \left[\mathcal{V}_\mu^{(I)}(-q, -k_1) (-i \bar{k}_1) \chi_L(k_1) \right]_{j_1} \right.$$

$$\left. + \left[\chi_R^\dagger(k_2) i k_2 \bar{\mathcal{V}}_\mu^{(I)}(-q, -k_2) \right]^{i_1} \left[\bar{\phi}^{(I)}(-k_1) (-i \bar{k}_1) \chi_L(k_1) \right]_{j_1} \right\}.$$

Die Definition der einzelnen Faktoren findet sich in Abschnitt 1.2, daher soll an dieser Stelle nur eine knappe Zuordnung erfolgen:

- In der ersten Zeile finden sich die Integration über die Instantongröße ρ mit der zugehörigen Dichte $D(\rho, \mu_r)$, die in Gl. (1.62) definiert ist, sowie die Integration mittels des haarschen Maßes dU über die globale Gruppenorientierung U .
- Bei den Termen der zweiten Zeile handelt es sich um die beiden einlaufenden LSZ-amputierten Gluonen im Instantonhintergrund $p_i^2 A^{(I)}$ (1.81) mit ihren zugehörigen Impulsen p_i und den entsprechenden Polarisationsvektoren $\varepsilon(p_i)$.
- Schließlich folgen die amputierten Quark Nullmoden $k_2 \kappa^{(I)}$ (1.79) bzw. $\bar{\phi}^{(I)} k_1$ (1.80) mit den zugehörigen auslaufenden Weyl-Spinoren χ_R^\dagger und χ_L , sowie die effektiven Vertices $\mathcal{V}^{(I)}$ und $\bar{\mathcal{V}}^{(I)}$ (siehe Gl. (1.82) und (1.83)), die die Ankopplung an das auslaufende, virtuelle Photon beschreiben, mit dessen Polarisationsvektor ε_γ^* .

¹Zum Kalkül der hier angewandten Instanton-Störungsrechnung vergl. Abschnitt 1.2 und Ref. [34].

Durch das Einsetzen der einzelnen Terme erhält man in *euklidischer* Metrik für die Amplitude den Ausdruck

$$\begin{aligned}
 \left(\mathcal{T}_{\gamma^*}^{(I) a,b} \right)_{j_1}^{i_1} &= i \frac{4\pi^6 e_q}{g_s^2} \int_0^\infty d\rho \rho^7 D(\rho, \mu_r) \int dU U^{i_1}_{\alpha_1} U^{i_2}_{\alpha_2} U^{i_3}_{\alpha_3} U^{\dagger\beta_1}_{j_1} U^{\dagger\beta_2}_{j_2} U^{\dagger\beta_3}_{j_3} \\
 &\quad (\lambda^a)^{j_2}_{i_2} (\lambda^b)^{j_3}_{i_3} (\varepsilon_1 \bar{p}_1 - p_1 \bar{\varepsilon}_1)^{\alpha_2}_{\beta_2} (\varepsilon_2 \bar{p}_2 - p_2 \bar{\varepsilon}_2)^{\alpha_3}_{\beta_3} \chi_{R\alpha}^\dagger(k_2) \chi_L^\beta(k_1) \\
 &\quad \left\{ \epsilon^{\alpha\alpha_1} \left[\frac{\epsilon k_1 \bar{\varepsilon}_{\gamma^*}^*}{2k_1 \cdot q} f(\rho\sqrt{q^2}) + \left(\frac{\epsilon q' \bar{\varepsilon}_{\gamma^*}^*}{q'^2} - \frac{\epsilon k_1 \bar{\varepsilon}_{\gamma^*}^*}{2k_1 \cdot q} \right) f(\rho\sqrt{q'^2}) \right]_{\beta_1\beta} \right. \\
 &\quad \left. - \left[\frac{\varepsilon_{\gamma^*}^* \bar{k}_2 \epsilon}{2k_2 \cdot q} f(\rho\sqrt{q^2}) + \left(\frac{\varepsilon_{\gamma^*}^* \bar{q}'' \epsilon}{q''^2} - \frac{\varepsilon_{\gamma^*}^* \bar{k}_2 \epsilon}{2k_2 \cdot q} \right) f(\rho\sqrt{q''^2}) \right]^{\alpha\alpha_1} \epsilon_{\beta_1\beta} \right\}, \quad (3.5)
 \end{aligned}$$

wobei der Kürze und der besseren Übersicht halber die beiden virtuellen Impulse $q' \equiv q + k_1$ und $q'' \equiv q + k_2$, sowie die Abkürzungen $\varepsilon_i \equiv \varepsilon(p_i)$ eingeführt wurden.

Es soll nun zunächst die Transversalität bezüglich der Gluonen und des virtuellen Photons gezeigt werden, um die Eichinvarianz der Amplitude (3.22) sicherzustellen. Für die Gluonen ist dies sofort einzusehen. Ersetzt man deren Polarisationsvektoren durch die zugehörigen Impulse, $\varepsilon_1 \rightarrow p_1$ bzw. $\varepsilon_2 \rightarrow p_2$, so verschwinden die Faktoren

$$(\varepsilon_i \bar{p}_i - p_i \bar{\varepsilon}_i) \xrightarrow{\varepsilon_i \rightarrow p_i} (p_i \bar{p}_i - p_i \bar{p}_i) = 0 \quad (3.6)$$

ganz offensichtlich. Ein wenig mehr Arbeit bedarf es, die Transversalität bezüglich des virtuellen Photons zu zeigen. Hierzu betrachte man den Ausdruck in den geschweiften Klammern in Gl. (3.5) und ersetze den Polarisationsvektor des Photons durch dessen Impuls, $\varepsilon_{\gamma^*}^* \rightarrow q$. Für die einzelnen relevanten Terme aus Gl. (3.5) ergibt sich nun

$$\left(\frac{\epsilon(q + k_1)\bar{q}}{q'^2} - \frac{\epsilon k_1 \bar{q}}{2k_1 \cdot q} \right) \chi_L(k_1) = \left(\frac{\epsilon(q^2 + 2q \cdot k_1)}{q'^2} - \frac{\epsilon 2k_1 \cdot q}{2k_1 \cdot q} \right) \chi_L(k_1) = 0 \quad (3.7)$$

und entsprechend

$$\chi_{R\alpha}^\dagger(k_2) \left(\frac{q(\bar{q} + k_2)\epsilon}{q''^2} - \frac{q\bar{k}_2\epsilon}{2k_2 \cdot q} \right) = \chi_{R\alpha}^\dagger(k_2) \left(\frac{(q^2 + 2q \cdot k_2)\epsilon}{q''^2} - \frac{2q \cdot k_2\epsilon}{2k_2 \cdot q} \right) = 0, \quad (3.8)$$

wobei $k_i^2 = 0$, sowie die Algebra (A.13) der Sigma-Matrizen und die Weyl-Gleichungen (A.21) ausgenutzt wurden. Unter der Wirkung der Weyl-Spinoren reduziert sich somit der Inhalt der geschweiften Klammern der dritten und vierten Zeile aus Gl. (3.5) zu

$$\begin{aligned}
 &\chi_{R\alpha}^\dagger(k_2) \left\{ \epsilon^{\alpha\alpha_1} \left[\frac{\epsilon k_1 \bar{q}}{2k_1 \cdot q} f(\rho\sqrt{q^2}) \right]_{\beta_1\beta} - \left[\frac{q\bar{k}_2\epsilon}{2k_2 \cdot q} f(\rho\sqrt{q^2}) \right]^{\alpha\alpha_1} \epsilon_{\beta_1\beta} \right\} \chi_L^\beta(k_1) \\
 &= \chi_{R\alpha}^\dagger(k_2) \left\{ \epsilon^{\alpha\alpha_1} \left[\frac{\epsilon 2k_1 \cdot q}{2k_1 \cdot q} \right]_{\beta_1\beta} - \left[\frac{2q \cdot k_2\epsilon}{2k_2 \cdot q} \right]^{\alpha\alpha_1} \epsilon_{\beta_1\beta} \right\} \chi_L^\beta(k_1) f(\rho\sqrt{q^2}) = 0, \quad (3.9)
 \end{aligned}$$

so dass schließlich die Amplitude Gl. (3.5) unter $\varepsilon_{\gamma^*}^* \rightarrow q$ verschwindet. Essentiell hierbei ist die identische Kopplung von Quark und Antiquark an das emittierte Photon, so dass sich die Terme, die den beiden effektiven Vertices zuzuordnen sind, gegenseitig wegheben können.

3.1.2 Integration über die Instantongröße

Als nächster Schritt steht die Integration über die Instantongröße ρ an.

Mit der Definition des Formfaktors $f(\omega) = \omega K_1(\omega)$ aus Gl. (1.84), wobei K_1 eine modifizierte Besselfunktion zweiter Art sei, und der Instanton-Dichte D aus Gl. (1.62) reduziert sich die Integration auf Ausdrücke der Art

$$\mathcal{R}_{\mu_r}^{(n)}(\mathcal{Q}) \equiv \int_0^\infty d\rho \rho^{n+4} D(\rho, \mu_r) f(\rho \mathcal{Q}). \quad (3.10)$$

Hierbei hat das ρ -Moment $\mathcal{R}^{(n)}$ die Dimension eines n -dimensionalen Volumens. Das Integral lässt sich ohne weiteres analytisch lösen und man erhält für $\mathcal{Q} > 0$ das Ergebnis

$$\mathcal{R}_{\mu_r}^{(n)}(\mathcal{Q}) = D(\mathcal{Q}^{-1}, \mu_r) \frac{2^{n-1+b}}{\mathcal{Q}^{n-5}} \Gamma\left(\frac{n+b}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n+b}{2} + 1\right), \quad (3.11)$$

welches bei verschwindendem \mathcal{Q} divergiert.

In der Amplitude aus Gl. (3.5) geht das dritte Moment $\mathcal{R}_{\mu_r}^{(3)}(\mathcal{Q})$ mit den Variablen $\mathcal{Q} \in \left\{ \sqrt{q^2}, \sqrt{q'^2} = \sqrt{(k_1 + q)^2}, \sqrt{q''^2} = \sqrt{(k_2 + q)^2} \right\}$ ein, welches die Dimension eines Instanton-Volumens hat. Dies ist spezifisch für den vorliegenden Prozess mit insgesamt zwei Gluonen und zwei Quarks. So reduziert sich beim einfachsten Prozess in tief-inelastischer Streuung die ρ -Potenz um zwei, da dort ein Gluon weniger beteiligt ist und es tritt das erste Moment $\mathcal{R}^{(1)}$ auf, welches die Dimension einer Länge aufweist [34]. Allgemein erhält man für die ρ -Integration eines Prozesses mit insgesamt $2n_f$ Quarks und n_g Gluonen das ρ -Moment $\mathcal{R}^{(n)}$ mit

$$n = 3n_f + 2n_g - 4, \quad (3.12)$$

was gerade der Dimension der effektiven Kopplung eines entsprechenden Punktprozesses in einer effektiven Lagrangedichte entspricht (vergl. Abschnitt 2.3.1).

Wie sich leicht nachprüfen lässt, erfüllen die ρ -Momente die Skalierungsrelation

$$\mathcal{R}_{\mu_r}^{(n)}(\mathcal{Q}') = \left(\frac{\mathcal{Q}}{\mathcal{Q}'}\right)^{n+b} \mathcal{R}_{\mu_r}^{(n)}(\mathcal{Q}), \quad (3.13)$$

so dass sich ein gemeinsamer Faktor für die verschiedenen Formfaktoren herausziehen lässt. Nach Durchführung der ρ -Integration erhält man somit für die invariante Amplitude in euklidischer Metrik

$$\begin{aligned} \left(\mathcal{T}_{\gamma^*}^{(I) a,b}\right)_{j_1}^{i_1} &= i \frac{4\pi^6 e_q}{g_s^2} \mathcal{R}_{\mu_r}^{(3)}(\sqrt{q^2}) \int dU U^{i_1}_{\alpha_1} U^{i_2}_{\alpha_2} U^{i_3}_{\alpha_3} U^{\dagger\beta_1}_{j_1} U^{\dagger\beta_2}_{j_2} U^{\dagger\beta_3}_{j_3} \\ &\quad (\lambda^a)^{j_2}_{i_2} (\lambda^b)^{j_3}_{i_3} (\varepsilon_1 \bar{p}_1 - p_1 \bar{\varepsilon}_1)^{\alpha_2}_{\beta_2} (\varepsilon_2 \bar{p}_2 - p_2 \bar{\varepsilon}_2)^{\alpha_3}_{\beta_3} \\ &\quad \chi_{R\alpha}^\dagger(k_2) \epsilon^{\alpha\alpha_1} \left\{ \left[\frac{\epsilon k_1 \bar{\varepsilon}_{\gamma^*}^*}{2k_1 \cdot q} + \left(\frac{\epsilon q' \bar{\varepsilon}_{\gamma^*}^*}{q'^2} - \frac{\epsilon k \bar{\varepsilon}_{\gamma^*}^*}{2k_1 \cdot q} \right) \left(\frac{\sqrt{q^2}}{\sqrt{q'^2}} \right)^{3+b} \right]_{\beta_1\beta} \right. \\ &\quad \left. - \left[\frac{\varepsilon_{\gamma^*}^* \bar{k}_2 \epsilon}{2k_2 \cdot q} + \left(\frac{\varepsilon_{\gamma^*}^* \bar{q}'' \epsilon}{q''^2} - \frac{\varepsilon_{\gamma^*}^* \bar{k}_2 \epsilon}{2k_2 \cdot q} \right) \left(\frac{\sqrt{q^2}}{\sqrt{q''^2}} \right)^{3+b} \right]^{\alpha\alpha_1} \epsilon_{\beta_1\beta} \right\} \chi_L^\beta(k_1). \end{aligned} \quad (3.14)$$

3.1.3 Analytische Fortsetzung

Bis hierhin wurden sämtliche Rechnungen in euklidischer Metrik durchgeführt. An dieser Stelle bietet sich für eine weitere Analyse die analytische Fortsetzung zur Minkowskimetrik an. Hierbei ist zu beachten, dass die Impulse q und $q + k_i$ zeitartig sind

$$q_E^2 \rightarrow -q_M^2 < 0. \quad (3.15)$$

Dies erfordert im Vergleich zum tief-inelastischen Fall mit raumartigen Impulsen eine gewisse Sorgfalt, um die Konvergenz des ρ -Integrals (3.10) auch nach der analytischen Fortsetzung in den Minkowskiraum zu gewährleisten. Hierzu hilft ein Blick auf die asymptotische Form der Besselfunktion des Formfaktors

$$K_1(\rho\sqrt{q^2}) \propto \sqrt{\frac{\pi}{2\rho\sqrt{q^2}}} \exp(-\rho\sqrt{q^2}). \quad (3.16)$$

Für die Konvergenz des ρ -Integrals ist dabei die exponentielle Unterdrückung bei großem ρ wesentlich. Diese bleibt bei einer analytischen Fortsetzung $\sqrt{q^2} \rightarrow Q \exp(i\varphi)$ solange erhalten, wie der Realteil von $\rho\sqrt{q^2}$ positiv bleibt.

Da ρ positiv ist, bietet es sich zunächst an, bei einer Wickrotation im Uhrzeigersinn wie in Abbildung 3.1, die analytische Fortsetzung zur Minkowskimetrik mittels eines Regularisierungstermes $i\varepsilon$, wie

$$\sqrt{q_E^2} \rightarrow \sqrt{-q_M^2 + i\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0, \quad (3.17)$$

und entsprechend für $q + k_i$ durchzuführen. Die Indizierung durch E und M dient hierbei lediglich zur Unterscheidung zwischen den Metriken.

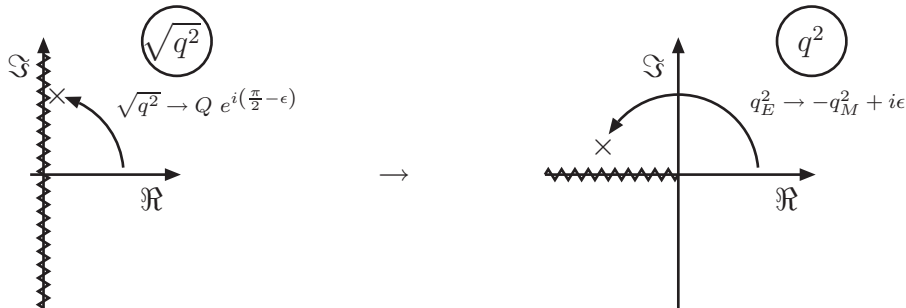


Abbildung 3.1: Bei der analytischen Fortsetzung der Impulse von der euklidischen Metrik zur Minkowskimetrik ist darauf zu achten, dass der Realteil von $\sqrt{q^2}$ positiv bleibt.

Eine elegante Alternative, die zum selben Resultat führt, besteht darin, statt der Regularisierung mittels des $i\varepsilon$ -Termes den Kontur der ρ -Integration so zu deformieren, dass das Produkt $\rho\sqrt{q^2}$ reell bleibt, also

$$\arg(\rho) = -\arg(\sqrt{q^2}) \quad \Rightarrow \quad \rho\sqrt{q_E^2} \rightarrow \rho\sqrt{q_M^2} = \rho Q, \quad (3.18)$$

was gerade einer Fortsetzung

$$\rho \rightarrow -i\rho \quad (3.19)$$

entspricht. Die ρ -Momente lassen sich nun leicht in der Minkowskimetrik berechnen. Unter Verwendung von Gl. (3.18) und (3.19) erhält man für Gl. (3.10) somit

$$\mathcal{R}_{\mu_r}^{(n)}(\mathcal{Q}) \rightarrow (-i)^{n+b} \int_0^\infty d\rho \rho^{n+4} D(\rho, \mu_r) f(\rho\mathcal{Q}) = (-i)^{n+b} \mathcal{R}_{\mu_r}^{(n)}(\mathcal{Q}). \quad (3.20)$$

Wie sich später in Kapitel 4 zeigen wird, wirkt sich die bei *zeitartigen* Impulsen q bzw. q' zusätzlich erforderliche analytische Fortsetzung (3.19) entscheidend auf die Berechnung inklusiver Wirkungsquerschnitte aus. Hierdurch entstehen wesentliche Unterschiede zwischen Instantonprozessen bei HERA und dem LHC.

3.1.4 Amplitudenquadrat

Da die folgenden Betrachtungen in Minkowskimetrik stattfinden, kann von der expliziten Metrik-Indizierung im weiteren Verlauf abgesehen werden. Es ist also, so nicht anders angegeben, $q^2 = q_M^2$ zu lesen. Gleiches gilt auch für die übrigen Impulse. Um die Amplitude etwas übersichtlicher zu gestalten, werden ferner die reellen Vektoren

$$V(k_i, q) \equiv \frac{k_i}{2k_i \cdot q} + \left(\frac{q + k_i}{(q + k_i)^2} - \frac{k_i}{2k_i \cdot q} \right) \left(\frac{\sqrt{q^2}}{\sqrt{(q + k_i)^2}} \right)^{3+b} \quad (3.21)$$

eingeführt.

Für die Amplitude aus Gl. (3.14) erhält man in *Minkowskimetrik* nun

$$\begin{aligned} \left(\mathcal{T}_{\gamma^*}^{(I) a,b} \right)_{j_1}^{i_1} &= (-i)^{4+b} \frac{4\pi^6 e_q}{g_s^2} \mathcal{R}_{\mu_r}^{(3)}(Q) \\ &\quad \chi_{R\alpha}^\dagger(k_2) \left\{ \epsilon^{\alpha\alpha_1} [\epsilon V(k_1, q) \bar{\epsilon}_{\gamma^*}^*]_{\beta_1\beta} - [\epsilon_{\gamma^*}^* \bar{V}(k_2, q) \epsilon]^{\alpha\alpha_1} \epsilon_{\beta_1\beta} \right\} \chi_L^\beta(k_1) \\ &\quad (\lambda^a)^{j_2}_{i_2} (\lambda^b)^{j_3}_{i_3} (\epsilon_1 \bar{p}_1 - p_1 \bar{\epsilon}_1)^{\alpha_2}_{\beta_2} (\epsilon_2 \bar{p}_2 - p_2 \bar{\epsilon}_2)^{\alpha_3}_{\beta_3} \\ &\quad \int dU U^{i_1}_{\alpha_1} U^{i_2}_{\alpha_2} U^{i_3}_{\alpha_3} U^{\dagger\beta_1}_{j_1} U^{\dagger\beta_2}_{j_2} U^{\dagger\beta_3}_{j_3}, \end{aligned} \quad (3.22)$$

deren komplexe Konjugation sich zu

$$\begin{aligned} \left(\mathcal{T}_{\gamma^*}^{(I) a,b} \right)_{j'_1}^{*i'_1} &= (i)^{4+b} \frac{4\pi^6 e_q}{g_s^2} \mathcal{R}_{\mu_r}^{(3)}(Q) \\ &\quad \chi_L^{\dagger\dot{\alpha}}(k_1) \left\{ [\bar{\epsilon}_{\gamma^*} V(k_1, q) \epsilon]_{\dot{\alpha}\dot{\alpha}_1} \epsilon^{\dot{\beta}_1\dot{\beta}} - \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\alpha}_1} [\epsilon \bar{V}(k_2, q) \epsilon_{\gamma^*}^*]^{\dot{\beta}_1\dot{\beta}} \right\} \chi_{R\dot{\beta}}(k_2) \\ &\quad (\lambda^a)^{j'_2}_{i'_2} (\lambda^b)^{j'_3}_{i'_3} (\bar{p}_1 \epsilon_1^* - \bar{\epsilon}_1^* p_1)_{\dot{\alpha}_2}^{\dot{\beta}_2} (\bar{p}_2 \epsilon_2^* - \bar{\epsilon}_2^* p_2)_{\dot{\alpha}_3}^{\dot{\beta}_3} \\ &\quad \int dU U^{i'_1\dot{\alpha}_1}_{j'_1} U^{i'_2\dot{\alpha}_2}_{j'_2} U^{i'_3\dot{\alpha}_3}_{j'_3} U^{\dagger}_{\dot{\beta}_1 j'_1} U^{\dagger}_{\dot{\beta}_2 j'_2} U^{\dagger}_{\dot{\beta}_3 j'_3} \end{aligned} \quad (3.23)$$

ergibt. Hierbei wurde die Notation $\sqrt{q^2} = Q$ verwendet. Das Ergebnis der Gruppenintegration spielt für die Berechnung des Amplitudenquadrates keine wesentliche Rolle und wird nachträglich in Abschnitt 3.2 behandelt.

Als nächstes kann das Amplitudenquadrat gebildet werden, wobei über Farbindizierungen und Polarisierungen des Anfangszustands zu mitteln und bezüglich des Endzustands zu summieren ist

$$\left| \mathcal{T}_{\gamma^*}^{(I)} \right|^2 \equiv \sum_r \sum_{i_1, j_1} \frac{1}{4} \sum_{s, s'} \frac{1}{64} \sum_{a, b} \left| \left(\mathcal{T}_{\gamma^*}^{a, b} \right)_{j_1}^{i_1} \right|^2. \quad (3.24)$$

Hierbei indizieren s und s' die Polarisation der Gluonen im Anfangszustand, sowie r die des virtuellen Photons, während i_1 und j_1 die Farbindices der Quarks, sowie a und b die der Gluonen sind. Da im hier zunächst betrachteten Fall eines Instanton-Hintergrunds ausschließlich rechtshändige Quarks erzeugt werden, entfällt die Summe über die Quark-Helizitäten.

Unter Verwendung der Normierungsrelationen für die Weyl-Spinoren

$$\chi_L^\alpha(k) \chi_L^{\dagger \dot{\alpha}}(k) = k^{\alpha \dot{\alpha}} \quad \chi_{R\dot{\alpha}}(k) \chi_{R\alpha}^\dagger(k) = \bar{k}_{\dot{\alpha}\alpha}, \quad (3.25)$$

sowie der Summen-Identität für die Gell-Man-Matrizen

$$\sum_a (\lambda^a)^{j_2}_{i_2} (\lambda^a)^{j'_2}_{i'_2} = 2 \left(\delta_{i'_2}^{j_2} \delta_{i_2}^{j'_2} - \frac{1}{3} \delta_{i_2}^{j_2} \delta_{i'_2}^{j'_2} \right) \quad (3.26)$$

und der Vollständigkeitsrelation für die Polarisationsvektoren des Photons

$$\sum_r \varepsilon_\mu^{(r)}(q) \varepsilon_{\mu'}^{*(r)}(q) = - \left(g_{\mu\mu'} - \frac{q_\mu q_{\mu'}}{q^2} \right), \quad (3.27)$$

und entsprechend für die Gluonen,² erhält man für das Amplitudenquadrat (3.24) schließ-

²Der zu den Impulsen proportionale Anteil verschwindet dabei aufgrund der Transversalität der Amplitude.

lich

$$\begin{aligned}
 \left| \mathcal{T}_{\gamma^*}^{(I)} \right|^2 &= \frac{1}{256} \left(\frac{4\pi^6 e_q}{g_s^2} \mathcal{R}_{\mu_r}^{(3)}(Q) \right)^2 \left(-g^{\mu\mu'} + \frac{q^\mu q^{\mu'}}{q^2} \right) \\
 &\quad \left\{ [\bar{V}(k_1, q) \sigma_{\mu'} \bar{k}_1 \sigma_\mu \bar{V}(k_1, q)]_{\dot{\alpha}_1 \beta_1} k_2^{\alpha_1 \dot{\beta}_1} \right. \\
 &\quad - [\bar{V}(k_1, q) \sigma_{\mu'} \bar{k}_1]_{\dot{\alpha}_1 \beta_1} [V(k_2, q) \bar{\sigma}_\mu k_2]_{\alpha_1 \dot{\beta}_1} \\
 &\quad - [\bar{k}_1 \sigma_\mu \bar{V}(k_1, q)]_{\dot{\alpha}_1 \beta_1} [k_2 \bar{\sigma}_{\mu'} V(k_2, q)]_{\alpha_1 \dot{\beta}_1} \\
 &\quad \left. + \bar{k}_1^{\dot{\alpha}_1 \beta_1} [V(k_2, q) \bar{\sigma}_\mu k_2 \bar{\sigma}_{\mu'} V(k_2, q)]_{\alpha_1 \dot{\beta}_1} \right\} \\
 &\quad 2 \left(\delta_{i_2'}^{j_2} \delta_{i_2}^{j_2'} - \frac{1}{3} \delta_{i_2}^{j_2} \delta_{i_2'}^{j_2'} \right) 2 \left(\delta_{i_3'}^{j_3} \delta_{i_3}^{j_3'} - \frac{1}{3} \delta_{i_3}^{j_3} \delta_{i_3'}^{j_3'} \right) \\
 &\quad \left(\sigma_\nu \bar{p}_1 - p_1 \bar{\sigma}_\nu \right)_{\beta_2}^{\alpha_2} \left(\bar{p}_1 \sigma^\nu - \bar{\sigma}^\nu p_1 \right)_{\dot{\alpha}_2}^{\dot{\beta}_2} \\
 &\quad \left(\sigma_{\nu'} \bar{p}_2 - p_2 \bar{\sigma}_{\nu'} \right)_{\beta_3}^{\alpha_3} \left(\bar{p}_2 \sigma^{\nu'} - \bar{\sigma}^{\nu'} p_2 \right)_{\dot{\alpha}_3}^{\dot{\beta}_3} \\
 &\quad \int dU U^{i_1}_{\alpha_1} U^{i_2}_{\alpha_2} U^{i_3}_{\alpha_3} U^{\dagger \beta_1}_{j_1} U^{\dagger \beta_2}_{j_2} U^{\dagger \beta_3}_{j_3} \\
 &\quad \delta_{j_1'}^{i_1'} \delta_{i_1}^{j_1'} \int dU U^{i_1'}_{\dot{\alpha}_1} U^{i_2'}_{\dot{\alpha}_2} U^{i_3'}_{\dot{\alpha}_3} U^{\dagger \dot{\beta}_1}_{j_1'} U^{\dagger \dot{\beta}_2}_{j_2'} U^{\dagger \dot{\beta}_3}_{j_3'}.
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

Der Vollständigkeit halber wurde dabei der verschwindende longitudinale Anteil der Photon-Polarisation aus Gl. (3.27) explizit mit aufgeführt. Weiterhin wurden die Identitäten (A.15) angewendet, um die Levi-Civita-Symbole in den geschweiften Klammern zu eliminieren.

In Gl. (3.28) wurde ausschließlich der Beitrag eines Instanton-induzierten Tunnelübergangs berücksichtigt. Solange eine Messung der Helizität der Endzustandsquarks nicht vorgesehen ist, kann allerdings zwischen Instanton- und Antiinstanton-Prozessen nicht unterschieden werden. Somit sind für den später zu berechnenden Wirkungsquerschnitt beide Beiträge zu berücksichtigen

$$\left| \mathcal{T}_{\gamma^*}^{(I, \bar{I})} \right|^2 = \left| \mathcal{T}_{\gamma^*}^{(I)} \right|^2 + \left| \mathcal{T}_{\gamma^*}^{(\bar{I})} \right|^2. \tag{3.29}$$

Die Übergangsamplitude für den betrachteten einfachsten Prozess vor dem Hintergrund eines *Antiinstantons* ist identisch zur komplex konjugierten Amplitude Gl. (3.23) unter Vertauschung der Quark-Impulse. Somit ist das summierte und gemittelte Amplitudenquadrat des korrespondierenden Antiinstantonprozesses identisch zu Gl. (3.28) unter Vertauschung der Quarkimpulse

$$\left| \mathcal{T}_{\gamma^*}^{(\bar{I})} \right|^2(k_1, k_2) = \left| \mathcal{T}_{\gamma^*}^{(I)} \right|^2(k_2, k_1). \tag{3.30}$$

Der Ausdruck (3.28) ist noch recht kompliziert und eine analytische Auswertung von Hand erscheint quasi unmöglich oder zumindest extrem aufwändig. Dies liegt vor allem

an den zahlreichen Index-Kontraktionen. Da die Gruppenintegrale für den vorliegenden Prozess verhältnismäßig umfangreich sind, bringt auch deren Ausintegration zunächst keine weitere strukturelle Einfachheit. Die einzige reelle Chance, das Amplitudenquadrat (3.28) analytisch weiterzuverarbeiten und auf handhabbare, von wenigen kinematischen Variablen abhängige Terme zu reduzieren, scheint in der Verwendung von Computerprogrammen wie *Form* [100] zu bestehen, die die automatisierte Bearbeitung symbolischer Ausdrücke ermöglichen.

3.1.5 Hierarchische Strukturen

Bevor das Quadrat der invarianten Amplitude in kontrahierter Form durch lorentzinvariante Variablen angegeben wird, soll noch ein prüfender Blick auf die einzelnen Terme von Gl. (3.28) geworfen werden, genauer auf die Vektoren $V(k_i, q)$, die in Gl. (3.21) eingeführt wurden und die über den effektiven Vertex der elektroschwachen Kopplung des Quarks bzw. Antiquarks eingehen.

Hierbei soll zunächst ein Rechenschritt zurückgegangen werden. Zieht man die ρ -Momente wieder in die Vertex-Vektoren hinein, so erhält man für diese

$$\begin{aligned} V(k_i, q) \mathcal{R}_{\mu_r}^{(3)}(Q) &= R_{\mu_r}^{(3)}(Q) \left[\frac{k_i}{2k_i \cdot q} + \left(\frac{q + k_i}{(q + k_i)^2} - \frac{k_i}{2k_i \cdot q} \right) \left(\frac{Q}{\sqrt{(q + k_i)^2}} \right)^{3+b} \right] \\ &= \int d\rho \rho^7 D(\rho, \mu_r) \left[\frac{k_i}{2k_i \cdot q} f(\rho Q) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{q + k_i}{(q + k_i)^2} - \frac{k_i}{2k_i \cdot q} \right) f\left(\rho \sqrt{(q + k_i)^2}\right) \right]. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Der Formfaktor (1.84) bewirkt bei großem Argument eine asymptotisch exponentielle Unterdrückung

$$f(\rho Q) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\rho Q} \exp(-\rho Q), \quad \rho Q \gg 1. \quad (3.32)$$

Diese wirkt sich natürlich umso stärker aus, je größer die jeweilige Impulsskala Q ist.

Für den hier betrachteten Fall des einfachsten Prozesses in gg -Streuung sind potentiell drei Impulsskalen relevant:

- $Q = \sqrt{q^2}$ als Virtualität des emittierten Photons, sowie
- $Q' = \sqrt{q'^2} = \sqrt{(q + k_1)^2}$ als Virtualität des virtuellen Antiquarks und
- $Q'' = \sqrt{q''^2} = \sqrt{(q + k_2)^2}$ als Virtualität des virtuellen Quarks des entsprechenden Subprozesses.

Wie bereits erwähnt, sind die drei zugehörigen Impulse zeitartig. Die beiden Virtualitäten des Subprozesses Q' und Q'' werden somit nach unten durch die des Vektorbosons be-

schränkt

$$Q'^2 = Q^2 + \underbrace{2q \cdot k_1}_{\geq 0} \geq Q^2 \geq 0 \quad Q''^2 = Q^2 + \underbrace{2q \cdot k_2}_{\geq 0} \geq Q^2 \geq 0. \quad (3.33)$$

Durch diese Hierarchie fällt die exponentielle Unterdrückung durch den Formfaktor für die beiden *internen* Impulsskalen Q' und Q'' im betrachteten Fall stärker aus als für die *externe* Skala Q und die entsprechenden Terme des Vertex-Vektors sind vernachlässigbar

$$f(\rho Q') \ll f(\rho Q) \quad f(\rho Q'') \ll f(\rho Q), \quad (3.34)$$

falls Q' bzw. Q'' nur hinreichend größer sind als Q . Diese Unterdrückung äußert sich nach der Ausintegration der ρ -Momente durch eine hohe Potenz von $(Q/Q')^{3+b}$ bzw. $(Q/Q'')^{3+b}$, mit welcher der jeweils rechte der beiden Summanden des Vektors $V(k_i, q)$ im Verhältnis unterdrückt ist, so dass sich V entsprechend zu

$$V(k_1, q) = \left[\frac{k_1}{Q'^2 - Q^2} + \left(\frac{q + k_1}{Q'^2} - \frac{k_1}{Q'^2 - Q^2} \right) \left(\frac{Q}{Q'} \right)^{3+b} \right] \approx \frac{k_1}{Q'^2 - Q^2} \quad (3.35)$$

bzw.

$$V(k_2, q) = \left[\frac{k_2}{Q''^2 - Q^2} + \left(\frac{q + k_2}{Q''^2} - \frac{k_2}{Q''^2 - Q^2} \right) \left(\frac{Q}{Q''} \right)^{3+b} \right] \approx \frac{k_2}{Q''^2 - Q^2} \quad (3.36)$$

vereinfacht. Für $Q' \rightarrow Q$ und $Q'' \rightarrow Q$ bricht diese Näherung natürlich zusammen. Allerdings liegt dieser Grenzwert am kinematischen Rand des Phasenraumes und der entsprechende Beitrag zum Wirkungsquerschnitt sollte unerheblich sein, wie noch zu überprüfen ist.

Durch die in der gg -Streuung auftretende kinematisch bedingte Hierarchie zwischen der äußeren Skala Q und den beiden inneren Skalen Q' bzw. Q'' unterscheidet sich dieser Prozess wesentlich zu seinem Pendant in γ^*g -Streuung. Da dort die Impulsskalen über den t -Kanal in den Prozess eingespeist werden, dient die äußere Virtualität Q dort nicht als untere Grenze für die internen Skalen. Im Bjorken-Limes dreht sich die Relation sogar um

$$f(\rho Q) \ll f(\rho Q') \quad \text{Bj.-Limes in DIS}, \quad (3.37)$$

so dass im relevanten tief-inelastischen Fall gerade die interne Impulsskala Q' , die dort von Hand durch geeignete Phasenraumschnitte nach unten begrenzt werden muss, für die Konvergenz der ρ -Integration relevant wird, während beim LHC die externe Skala Q als natürliche untere Grenze diese Rolle übernimmt.

3.1.6 Interferenzen und W -Emission

Bevor das Amplitudenquadrat (3.28) für die Berechnung von Wirkungsquerschnitten weiterverarbeitet wird, soll zuvor noch auf einige strukturelle Besonderheiten eingegangen werden. Zugrundegelegt wurde bisher die Übergangsamplitude für den einfachsten Instanton-induzierten gg -Streuprozess unter Emission eines virtuellen Photons. Da neben diesem noch der ähnliche Prozess unter Emission eines W -Bosons anstelle eines virtuellen Photons von Interesse ist, soll bei dieser Gelegenheit auch hierauf eingegangen werden.

Das summierte und gemittelte Quadrat (3.28) der Übergangsamplitude lässt sich in die Beiträge

$$\begin{aligned}
 \left| \mathcal{T}_{\gamma^*}^{(I)} \right|_{\text{mint}}^2 &= \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} \\
 &= \left(\dots \right) \left\{ \left[\bar{V}(k_1, q) \sigma_{\mu'} \bar{k}_1 \sigma_{\mu} \bar{V}(k_1, q) \right]_{\dot{\alpha}_1 \beta_1} k_2^{\alpha_1 \dot{\beta}_1} \right. \\
 &\quad \left. + \bar{k}_{1 \dot{\alpha}_1 \beta_1} \left[V(k_2, q) \bar{\sigma}_{\mu} k_2 \bar{\sigma}_{\mu'} V(k_2, q) \right]^{\alpha_1 \dot{\beta}_1} \right\} \left(-g^{\mu\mu'} + \frac{q^{\mu} q^{\mu'}}{q^2} \right)
 \end{aligned} \tag{3.38}$$

und

$$\begin{aligned}
 \left| \mathcal{T}_{\gamma^*}^{(I)} \right|_{\text{int}}^2 &= \text{Diagram 3} + \text{Diagram 4} \\
 &= \left(\dots \right) \left\{ - \left[\bar{V}(k_1, q) \sigma_{\mu'} \bar{k}_1 \right]_{\dot{\alpha}_1 \beta_1} \left[V(k_2, q) \bar{\sigma}_{\mu} k_2 \right]^{\alpha_1 \dot{\beta}_1} \right. \\
 &\quad \left. - \left[\bar{k}_1 \sigma_{\mu} \bar{V}(k_1, q) \right]_{\dot{\alpha}_1 \beta_1} \left[k_2 \bar{\sigma}_{\mu'} V(k_2, q) \right]^{\alpha_1 \dot{\beta}_1} \right\} \left(-g^{\mu\mu'} + \frac{q^{\mu} q^{\mu'}}{q^2} \right)
 \end{aligned} \tag{3.39}$$

aufteilen, wobei in Gln. (3.38) und (3.39) nur die für die Diskussion relevanten Faktoren explizit aufgeführt wurden. Hierbei stammen erstere von den jeweiligen Quadraten der beiden einzelnen Amplituden aus Gl. (3.3), während letztere durch die Interferenzterme der beiden Teilamplituden zustande kommen.

Sollen allgemeinere Prozesse als der einfachste behandelt werden, so kann es nützlich sein, beispielsweise bei der Einbindung in Monte-Carlo-Modelle, den Prozess in einen zugrundeliegenden Instanton-Subprozess mit einem virtuellen Quark und der anschließenden Emission eines virtuellen Photons oder eines anderen, massiven Vektorbosons im Instantonhintergrund aufzuteilen. Eine solche faktorisierte Betrachtung ist allerdings nur dann sinnvoll möglich, wenn das emittierte Vektorboson in den Einzelbeiträgen einem der Quarks eindeutig zuzuordnen ist, wie es in Gl. (3.38) der Fall ist. Bei den Interferenztermen (3.39) hingegen koppelt das Photon an beide Quarks. Der Prozess lässt sich also in faktorisierter Form betrachten, wenn die Interferenzen im Vergleich zu den übrigen Beiträgen zu vernachlässigen sind. Damit stellt sich die Frage, ob es kinematische Regionen

gibt, in denen dies der Fall ist, worauf nach der Berechnung des Wirkungsquerschnittes noch zurückzukommen sein wird.

In den Gln. (3.38) und (3.39) wurden die longitudinalen Beiträge $q_\mu q_{\mu'}/q^2$ des emittierten Photons explizit mit aufgeführt. Wie bereits erwähnt, ist die gesamte Amplitude transversal, so dass diese Beiträge insgesamt verschwinden. Hierzu wurden allerdings, wie man in Abschnitt 3.1.1 sehen konnte, beide Vektoren $V(k_1, q)$ und $V(k_2, q)$ gleichzeitig benötigt damit sich deren longitudinalen Beiträge gegenseitig wegheben konnten. Betrachtet man nun das Amplitudenquadrat, so stellt man fest, dass die longitudinalen Anteile in Gl. (3.38) erst durch die longitudinalen Anteile der Interferenzterme (3.39) aufgehoben werden. Die Interferenzen zwischen beiden Teilamplituden – genauer die äquivalenten Kopplungen des Photons an Quark und Antiquark – sind somit essentiell für die Transversalität und somit für die Eichinvarianz der Gesamtamplitude.

Dieser Aspekt wirkt sich nun charakteristisch auf die Amplitude für den Fall der Emission eines W -Bosons anstelle eines virtuellen Photons aus. Da das W -Boson ausschließlich an *linkshändige Quarks* und *rechtshändige Antiquarks* koppelt, treten beim betrachteten einfachsten Prozess keine Interferenzterme auf, die für die Aufhebung der longitudinalen Anteile des Amplitudenquadrates sorgen könnten. Im hier diskutierten Spezialfall mit lediglich einem Quarkflavor kann das W -Boson vor dem Hintergrund eines *Instantons* somit nur vom rechtshändigen Antiquark emittiert werden

$$i \left(\mathcal{T}_W^{(I)} \right)_{j_1}^{a,b} \approx \text{Diagram (3.40)} \quad (3.40)$$

und im Falle eines durch ein Antiinstanton induzierten Prozesses ausschließlich vom linkshändigen Quark

$$i \left(\mathcal{T}_W^{(\bar{I})} \right)_{j_1}^{a,b} \approx \text{Diagram (3.41)} \quad (3.41)$$

Für die Ankopplung des W -Bosons an das Antiquark lässt sich derselbe effektive Vertex verwenden, wie bereits bei der Emission des virtuellen Photons. Wobei natürlich die unterschiedliche Kopplung zu berücksichtigen ist. Das Amplitudenquadrat für den einfachsten

Fall der Instanton-induzierten Emission eines W -Bosons ergibt sich somit schließlich zu

$$\begin{aligned}
 \left| \mathcal{T}_W^{(I)} \right|^2 &\approx \text{Diagram} \\
 &= \frac{1}{256} \left(\frac{4\pi^6 g_W}{g_s^2} \mathcal{R}_{\mu_r}^{(3)}(Q) \right)^2 \left(-g^{\mu\mu'} + \frac{q^\mu q^{\mu'}}{q^2} \right) \\
 &\quad \left\{ [\bar{V}(k_1, q) \sigma_{\mu'} \bar{k}_1 \sigma_\mu \bar{V}(k_1, q)]_{\dot{\alpha}_1 \beta_1} k_2^{\alpha_1 \dot{\beta}_1} \right\} \\
 &\quad 2 \left(\delta_{i_2'}^{j_2} \delta_{i_2}^{j_2'} - \frac{1}{3} \delta_{i_2}^{j_2} \delta_{i_2'}^{j_2'} \right) 2 \left(\delta_{i_3'}^{j_3} \delta_{i_3}^{j_3'} - \frac{1}{3} \delta_{i_3}^{j_3} \delta_{i_3'}^{j_3'} \right) \\
 &\quad \left(\sigma_\nu \bar{p}_1 - p_1 \bar{\sigma}_\nu \right)_{\beta_2}^{\alpha_2} \left(\bar{p}_1 \sigma^\nu - \bar{\sigma}^\nu p_1 \right)_{\dot{\alpha}_2}^{\dot{\beta}_2} \\
 &\quad \left(\sigma_{\nu'} \bar{p}_2 - p_2 \bar{\sigma}_{\nu'} \right)_{\beta_3}^{\alpha_3} \left(\bar{p}_2 \sigma^{\nu'} - \bar{\sigma}^{\nu'} p_2 \right)_{\dot{\alpha}_3}^{\dot{\beta}_3} \\
 &\quad \int dU U^{i_1}_{\alpha_1} U^{i_2}_{\alpha_2} U^{i_3}_{\alpha_3} U^{\dagger \beta_1}_{j_1} U^{\dagger \beta_2}_{j_2} U^{\dagger \beta_3}_{j_3} \\
 &\quad \delta_{j_1'}^{i_1'} \delta_{i_1}^{j_1'} \int dU U^{i_1'}_{\dot{\alpha}_1} U^{i_2'}_{\dot{\alpha}_2} U^{i_3'}_{\dot{\alpha}_3} U^{\dagger \dot{\beta}_1}_{j_1'} U^{\dagger \dot{\beta}_2}_{j_2'} U^{\dagger \dot{\beta}_3}_{j_3'}.
 \end{aligned} \tag{3.42}$$

Das Amplitudenquadrat für den entsprechenden Antiinstanton-induzierten Prozess ergibt sich einfach aus Gl. (3.42) durch Vertauschung der beiden Quark-Impulse $k_1 \leftrightarrow k_2$ und der Konjugation $\sigma \leftrightarrow \bar{\sigma}$.

3.2 Gruppen-Integration

Nach der Aufstellung des Amplitudenquadrates für den jeweils einfachsten Instanton-induzierten gg -Streuprozess unter Emission eines virtuellen Photons oder eines W -Bosons, soll nun die Integration

$$\mathcal{I}^{(3,3)}_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3, j_1 j_2 j_3}^{i_1 i_2 i_3, \beta_1 \beta_2 \beta_3} \equiv \int dU U^{i_1}_{\alpha_1} U^{i_2}_{\alpha_2} U^{i_3}_{\alpha_3} U^{\dagger \beta_1}_{j_1} U^{\dagger \beta_2}_{j_2} U^{\dagger \beta_3}_{j_3} \tag{3.43}$$

über die Gruppenorientierung nachgeholt werden. Hierbei sei dU das haarsche Maß der betrachteten Lie-Gruppe mit der Normierung

$$\int dU = 1. \tag{3.44}$$

Die Integration von Gl. (3.43) über eine beliebige $SU(N)$ lässt sich prinzipiell nach der Methode von Creutz [101] durchführen, ist allerdings mit einem gewissen Aufwand verbunden.

Die relevante Lie-Gruppe für die Amplitude ist die $SU(3)$ der QCD. Die einzelnen Faktoren U^i_α und $U^{\dagger\beta}_j$ sind selbst jedoch keine Elemente der Gruppe, sondern parametrisieren lediglich die Einbettung und Orientierung des zugrundeliegenden $SU(2)$ -Instantons (griechische Indices) in die $SU(3)$ oder allgemeiner $SU(N)$ (lateinische Indices). Erweitert man diese zu

$$U^i_\alpha = \tilde{\delta}_\alpha^k U^i_k, \quad \tilde{\delta}_\alpha^k = \begin{cases} \delta_\alpha^k & k \in \{1, 2\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \quad (3.45)$$

wobei die U^i_k Elemente der $SU(N)$ seien, so lässt sich das allgemeine Integral zu

$$\int dU U^{i_1}_{\alpha_1} \dots U^{\dagger\beta_1}_{j_1} \dots = \tilde{\delta}_{\alpha_1}^{k_1} \dots \tilde{\delta}_{l_1}^{\beta_1} \dots \int dU U^{i_1}_{k_1} \dots U^{\dagger l_1}_{j_1} \dots \quad (3.46)$$

umformulieren. Das Integral wird nun über gewöhnliche Gruppenelemente ausgeführt und kann nach den üblichen Regeln nach Creutz [101] berechnet werden. Anschließend werden die lateinischen Indices k und l über die modifizierten Kronecker-Deltas $\tilde{\delta}$ wieder kontrahiert und so wieder durch die griechischen Indices ersetzt. Somit wird die Erweiterung (3.45) der Elemente effektiv überflüssig und das Integral (3.43) lässt sich so behandeln, als ob die Faktoren des Integranden echte Gruppenelemente wären, was im Folgenden auch getan werden soll.

3.2.1 Allgemeine Regeln

Die Lösung von Integralen der Art wie in Gl. (3.43) lassen sich auf einige Basis-Integrale zurückführen. Da der Integrationsbereich über die gesamte Gruppe läuft, kann das Ergebnis ausschließlich aus Invarianten, also letztlich aus Kronecker-Deltas und Levi-Civita-Symbolen bestehen. So ist ein Basis-Integral für eine $SU(N)$ durch

$$\int dU U^{i_1}_{j_1} \dots U^{i_N}_{j_N} = \frac{1}{N!} \epsilon^{i_1 \dots i_N} \epsilon_{j_1 \dots j_N} \quad (3.47)$$

gegeben [101]. Ferner lässt sich das Adjungierte eines $SU(N)$ -Elementes durch

$$U^{\dagger i}_j = \frac{1}{(N-1)!} \epsilon^{ij_1 \dots j_{N-1}} \epsilon_{j_1 \dots j_{N-1} i_{N-1}} U^{i_1}_{j_1} \dots U^{i_{N-1}}_{j_{N-1}} \quad (3.48)$$

ausdrücken. Kombiniert man nun Gl. (3.47) mit Gl. (3.48), so ergibt sich sofort das nächste Basis-Integral

$$\begin{aligned} \int dU U^i_j U^{\dagger k}_l &= \frac{1}{(N-1)!} \epsilon^{kj_1 \dots j_{N-1}} \epsilon_{li_1 \dots i_{N-1}} \int dU U^i_j U^{i_1}_{j_1} \dots U^{i_{N-1}}_{j_{N-1}} \\ &= \frac{1}{N!} \frac{1}{(N-1)!} \underbrace{\epsilon^{ii_1 \dots i_{N-1}} \epsilon_{li_1 \dots i_{N-1}}}_{(N-1)! \delta_l^i} \underbrace{\epsilon^{kj_1 \dots j_{N-1}} \epsilon_{jj_1 \dots j_{N-1}}}_{(N-1)! \delta_j^k} \\ &= \frac{1}{N} \delta_l^i \delta_j^k. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Gl. (3.47) lässt sich zu einem Integral über ein ganzzahliges Vielfaches p von N Elementen U verallgemeinern. Wesentlich hierfür ist, dass es sich wie (3.47) ausschließlich aus p Produkten von N Levi-Civita-Symbolen und allen möglichen Permutationen handelt. Das genaue Ergebnis lautet nach Creutz [101]

$$\int dU \prod_{n=1}^p U_{j_n^1}^{i_n^1} \dots U_{j_n^N}^{i_n^N} = \frac{2! \dots (N-1)!}{(p+1)! \dots (p+N-1)!} \prod_{n=1}^p \epsilon_{j_n^1 \dots j_n^N}^{i_n^1 \dots i_n^N} + \text{Perm.} \quad (3.50)$$

Das Auftreten und die Anzahl der Permutationen setzt sich dabei wie folgt zusammen: Das Integral ist insgesamt invariant unter beliebigen Permutationen der einzelnen Faktoren $U_{j_n^c}^{i_n^c}$. Somit müssen auch alle möglichen paarweisen Permutationen $(i_n^c, j_n^c) \leftrightarrow (i_{n'}^c, j_{n'}^c)$ im Ergebnis auftreten, wobei es insgesamt $(Np)!$ Möglichkeiten gibt, die Np Index-Paare anzuordnen. Einige der Permutationen liefern allerdings identische Terme. So führen Vertauschungen der p vollständigen Index-Gruppen eines Levi-Civita-Symbols zu identischen Termen. Gleiches gilt für die $N!$ möglichen paarweisen Permutationen der Indices innerhalb der p Index-Gruppen. Somit gibt es insgesamt $(Np)!/(p!(N!)^p)$ Summanden mit *unterschiedlichen* Kombinationen von Indices, die zu berücksichtigen sind. Der Spezialfall Gl. (3.47) ergibt sich dann schließlich aus $p = 1$.

Mit Hilfe von Gl. (3.50) und der Identität (3.48) lassen sich nun die für Instanton-Prozesse interessanten Integrale der Art

$$\mathcal{I}^{(p,p)}_{j_1 \dots j_p, l_1 \dots l_p}^{i_1 \dots i_p, k_1 \dots k_p} \equiv \int dU U_{j_1}^{i_1} \dots U_{j_p}^{i_p} U^{\dagger k_1}_{l_1} \dots U^{\dagger k_p}_{l_p} \quad (3.51)$$

lösen. Drückt man sämtliche adjungierte Elemente U^\dagger durch die Identität (3.48) aus, so erhält man zunächst

$$\mathcal{I}^{(p,p)}_{j_1 \dots j_p, l_1 \dots l_p}^{i_1 \dots i_p, k_1 \dots k_p} = \frac{1}{((N-1)!)^p} \prod_{n=1}^p \epsilon_{k_n k_n^1 \dots k_n^{N-1}} \epsilon_{l_n l_n^1 \dots l_n^{N-1}} \int dU \prod_{n=1}^p U_{j_n}^{i_n} U_{k_n^1}^{l_n^1} \dots U_{k_n^{N-1}}^{l_n^{N-1}}. \quad (3.52)$$

Einsetzen von Gl. (3.50) ergibt schließlich die allgemeine Lösung

$$\mathcal{I}^{(p,p)}_{j_1 \dots j_p, l_1 \dots l_p}^{i_1 \dots i_p, k_1 \dots k_p} = \frac{2! \dots (N-1)!}{(p+1)! \dots (p+N-1)!} \frac{1}{((N-1)!)^p} \prod_{n=1}^p \epsilon_{k_n k_n^1 \dots k_n^{N-1}} \epsilon_{l_n l_n^1 \dots l_n^{N-1}} \left(\prod_{n=1}^p \epsilon_{j_n k_n^1 \dots j_n^{N-1}}^{i_n l_n^1 \dots i_n^{N-1}} + \text{Perm.} \right). \quad (3.53)$$

Die auftretenden Kontraktionen zwischen den Levi-Civita-Symbolen lassen sich nun prinzipiell mit Programmen wie *Form* [100] ausführen. Die Schwierigkeit besteht hierbei im Wesentlichen darin, sämtliche Permutationen zu erfassen, was sich für grössere p am besten programmieretechnisch lösen lässt.

3.2.2 Rekursives Lösungsverfahren

Das Ergebnis in der Form (3.53) lässt sich alternativ auch durch Symmetrieüberlegungen stark vereinfachen und anschließend in einem rekursiven Verfahren auswerten. Dazu nutze man zunächst aus, dass sich Kontraktionen von Levi-Civita-Symbolen stets durch Summen von Produkten aus Kronecker-Deltas ausdrücken lassen. Der Ansatz besteht also zunächst darin, das Integral (3.51) durch alle möglichen Permutationen von Produkten von Kronecker-Deltas auszudrücken.

Führt man die Notation

$$\delta_{l_1 \dots l_p}^{i_1 \dots i_p} \equiv \delta_{l_1}^{i_1} \dots \delta_{l_p}^{i_p} \quad (3.54)$$

ein, so lässt sich die Lösung von Gl. (3.51) zunächst ganz allgemein durch

$$\begin{aligned} \mathcal{I}^{(p,p)}_{j_1 \dots j_p, l_1 \dots l_p}^{i_1 \dots i_p, k_1 \dots k_p} &= \sum_{m=1}^{p!} \sum_{n=1}^{p!} \tilde{a}_{mn}^{(p,p)} \delta_{P_m(l_1 \dots l_p)}^{i_1 \dots i_p} \delta_{j_1 \dots j_p}^{P_n(k_1 \dots k_p)} \\ &= \sum_{m=1}^{p!} \sum_{n=1}^{p!} a_{mn}^{(p,p)} \delta_{P_n(P_m(l_1 \dots l_p))}^{i_1 \dots i_p} \delta_{j_1 \dots j_p}^{P_n(k_1 \dots k_p)} \end{aligned} \quad (3.55)$$

ansetzen, wobei $\tilde{a}_{mn}^{(p,p)}$ und $a_{mn}^{(p,p)}$ beliebige reelle, noch zu bestimmende Vorfaktoren und $P_m(k_1 \dots k_p)$ Permutationen der Indices $k_1 \dots k_p$ seien. Im letzten Schritt wurde ausgenutzt, dass die Permutationen eine Gruppe bilden.

Offensichtlich ist das Integral (3.51) invariant bezüglich der Anordnung der einzelnen Faktoren $U^{i_{j_l}}$ oder $U^{\dagger k_l}$, was gerade den paarweisen Permutationen von (i_l, j_l) oder (k_l, l_l) entspricht. Es muss also das Ergebnis invariant unter diesen paarweisen Permutationen der Indices sein, so dass die entsprechenden Vorfaktoren sämtlich identisch sind

$$a_{mn}^{(p,p)} = a_{mn'}^{(p,p)} \equiv a_m^{(p,p)}. \quad (3.56)$$

Hierdurch reduziert sich die Anzahl der potentiell unterschiedlichen Vorfaktoren von $(p!)^2$ auf $p!$ und Gl. (3.55) vereinfacht sich zu

$$\mathcal{I}^{(p,p)}_{j_1 \dots j_p, l_1 \dots l_p}^{i_1 \dots i_p, k_1 \dots k_p} = \sum_{m=1}^{p!} a_m^{(p,p)} \sum_{n=1}^{p!} \delta_{P_n P_m(l_1 \dots l_p)}^{i_1 \dots i_p} \delta_{j_1 \dots j_p}^{P_n(k_1 \dots k_p)}. \quad (3.57)$$

Die verschiedenen Vorfaktoren lassen sich nun rekursiv durch Kontraktion aus dem Integral $\mathcal{I}^{(p-1,p-1)}$ berechnen. Durch Kontraktion eines Index-Paares

$$\begin{aligned} \mathcal{I}^{(p,p)}_{j_1 \dots j_p, l_1 \dots l_p}^{i_1 \dots i_p, k_1 \dots k_p} \delta_{k_p}^{j_p} &= \int dU U^{i_1}_{j_1} \dots U^{i_p}_{j_p} U^{\dagger k_1}_{l_1} \dots U^{\dagger k_p}_{l_p} \delta_{k_p}^{j_p} \\ &= \int dU U^{i_1}_{j_1} \dots U^{i_{p-1}}_{j_{p-1}} U^{\dagger k_1}_{l_1} \dots U^{\dagger k_{p-1}}_{l_{p-1}} \delta_{l_p}^{i_p} \\ &= \mathcal{I}^{(p-1,p-1)}_{j_1 \dots j_{p-1}, l_1 \dots l_{p-1}}^{i_1 \dots i_{p-1}, k_1 \dots k_{p-1}} \delta_{l_p}^{i_p} \end{aligned} \quad (3.58)$$

erhält man die Gleichung

$$\sum_{m=1}^{p!} a_m^{(p,p)} \sum_{n=1}^{p!} \delta_{P_n P_m(l_1 \dots l_p)}^{i_1 \dots i_p} \delta_{j_1 \dots j_p}^{P_n(k_1 \dots k_p)} \delta_{k_p}^{j_p} = \sum_{m'=1}^{(p-1)!} a_{m'}^{(p-1,p-1)} \sum_{n'=1}^{(p-1)!} \delta_{P_{n'} P_{m'}(l_1 \dots l_{p-1})}^{i_1 \dots i_{p-1}} \delta_{j_1 \dots j_{p-1}}^{P_{n'}(k_1 \dots k_{p-1})} \delta_{l_p}^{i_p}, \quad (3.59)$$

woraus sich durch Koeffizientenvergleich ein lineares System aus $p!$ Gleichungen für die Vorfaktoren $a_m^{(p)}$ gewinnen lässt. Für $p = 2$ erhält man so auf diese Weise die Koeffizienten [101]

$$a_1^{(2,2)} = \frac{1}{N^2 - 1} \quad \text{und} \quad a_2^{(2,2)} = -\frac{1}{(N^2 - 1)N}. \quad (3.60)$$

Lösung für $p = 3$

Abschließend soll nun die Lösung für das Integral (3.43) angegeben werden. Die detaillierte Rechnung mit Hilfe des rekursiven Verfahrens findet sich im Anhang. Dabei stellt sich heraus, dass lediglich drei unterschiedliche Vorfaktoren auftreten. Als Ergebnis für Gl. (3.43) erhält man schließlich

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3, j_1 j_2 j_3}^{i_1 i_2 i_3, \beta_1 \beta_2 \beta_3} &= a_1^{(3,3)} \sum_{n=1}^{3!} \delta_{P_n(j_1 j_2 j_3)}^{i_1 i_2 i_3} \delta_{P_n(\beta_1 \beta_2 \beta_3)}^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} \\ &+ a_2^{(3,3)} \sum_{n=1}^{3!} \delta_{P_n(j_1 j_2 j_3)}^{i_1 i_2 i_3} \left(\delta_{P_n(\beta_2 \beta_1 \beta_3)}^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} + \delta_{P_n(\beta_1 \beta_3 \beta_2)}^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} + \delta_{P_n(\beta_3 \beta_2 \beta_1)}^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} \right) \\ &+ a_3^{(3,3)} \sum_{n=1}^{3!} \delta_{P_n(j_1 j_2 j_3)}^{i_1 i_2 i_3} \left(\delta_{P_n(\beta_3 \beta_1 \beta_2)}^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} + \delta_{P_n(\beta_2 \beta_3 \beta_1)}^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} \right), \end{aligned} \quad (3.61)$$

wobei die drei Vorfaktoren sich zu

$$a_1^{(3,3)} = \frac{N^2 - 2}{N(N^2 - 1)(N^2 - 4)} \stackrel{N=3}{=} \frac{7}{120} \quad (3.62)$$

$$a_2^{(3,3)} = -\frac{1}{(N^2 - 1)(N^2 - 4)} \stackrel{N=3}{=} -\frac{1}{40} \quad (3.63)$$

$$a_3^{(3,3)} = \frac{2}{N(N^2 - 1)(N^2 - 4)} \stackrel{N=3}{=} \frac{2}{120} \quad (3.64)$$

ergeben.

Als einfacher Sicherheitscheck für die Richtigkeit von Gl. (3.61) bietet sich eine vollständige Indexkontraktion an.

3.3 Wirkungsquerschnitte

Nachdem auch die Gruppenintegration durchgeführt ist, kann nun zur Berechnung von Wirkungsquerschnitten übergegangen werden. Der erste Schritt wird es sein, die Indices des Amplitudenquadrates (3.28) zu kontrahieren und dieses durch einen geeigneten Satz kinematischer Variablen zu beschreiben.

3.3.1 Parametrisierung des Phasenraum

Kinematisch betrachtet handelt es sich bei den beiden diskutierten Prozessen (3.1) und (3.2) um die Streuung zweier Teilchen im Anfangszustand mit $n_{\text{fin}} = 3$ Teilchen im Endzustand. Der zugehörige Wirkungsquerschnitt lässt sich wie üblich über das Phasenraumintegral und das Amplitudenquadrat

$$\sigma \left(gg \xrightarrow{(I, \bar{I})} q\bar{q}\gamma^*/W \right) = \frac{(2\pi)^4}{4 \sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2}} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2E_q} \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3 2E_{k_1}} \frac{d^3k_2}{(2\pi)^3 2E_{k_2}} \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - q - k_1 - k_2) \left(\left| \mathcal{T}_{\gamma^*/W}^{(I)} \right|^2 + \left| \mathcal{T}_{\gamma^*/W}^{(\bar{I})} \right|^2 \right) \quad (3.65)$$

angeben. Durch die über die Delta-Funktion eingebrachte Impulserhaltung reduziert sich die Anzahl der Freiheitsgrade des Phasenraumes auf $n_{\text{fin}} \times (4 - 1) - (4) = 5$. Da der Prozess symmetrisch bezüglich Rotationen um die Strahlachse ist, lässt sich allerdings das Phasenraumintegral über den absoluten Azimutwinkel φ trivial ausführen. Die verbleibenden vier essentiellen Freiheitsgrade lassen sich, analog zu den Mandelstam-Variablen s, t, u eines $2 \rightarrow 2$ Prozesses, lorentzinvariant formulieren. Diese setzen sich aus zwei t -artigen Variablen, die die Impulsüberträge beschreiben, und zwei s -artigen Variablen im Endzustand zusammen.³

Für die Wahl der vier invarianten Phasenraumkoordinaten bieten sich für die betrachteten Prozesse zwei Varianten an, wie sie in Abbildung 3.2 dargestellt und in Tabelle 3.1 definiert sind. In der symmetrischen Wahl werden die beiden t -artigen Variablen t' und t'' bzgl. der Gluonen und der Quarks formuliert und die s -artigen Q'^2 und Q''^2 zwischen je einem Quark und dem emittierten Vektorboson. In der asymmetrischen Variante hingegen nehmen die beiden Quarks unterschiedliche Rollen ein. Einer der Impulsüberträge t wird zwischen einem der Gluonen und dem Vektorboson und die zweite s -artige Variable M^2 zwischen den beiden Quarks definiert.

Spannt man den Phasenraum durch einen der beiden Variablensätze auf, so erhält man für den Wirkungsquerschnitt das Integral

$$\sigma \left(gg \xrightarrow{(I, \bar{I})} q\bar{q}\gamma^*/W \right) = \frac{1}{64s^2} \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{dt_1 dt_2 ds_1 ds_2}{\sqrt{-\Delta_4}} \left(\left| \mathcal{T}_{\gamma^*/W}^{(I)} \right|^2 + \left| \mathcal{T}_{\gamma^*/W}^{(\bar{I})} \right|^2 \right), \quad (3.66)$$

wobei für den symmetrischen Variablensatz $t_1 = t'', s_1 = Q'^2, s_2 = Q''^2$, sowie $t_2 = t'$ und für den asymmetrischen Satz entsprechend $t_1 = t$ und $s_2 = M^2$ seien. Weiterhin sei $-\Delta_4$

³Zur Kinematik von Drei- und Mehrteilchen-Endzuständen siehe beispielsweise Ref. [102].

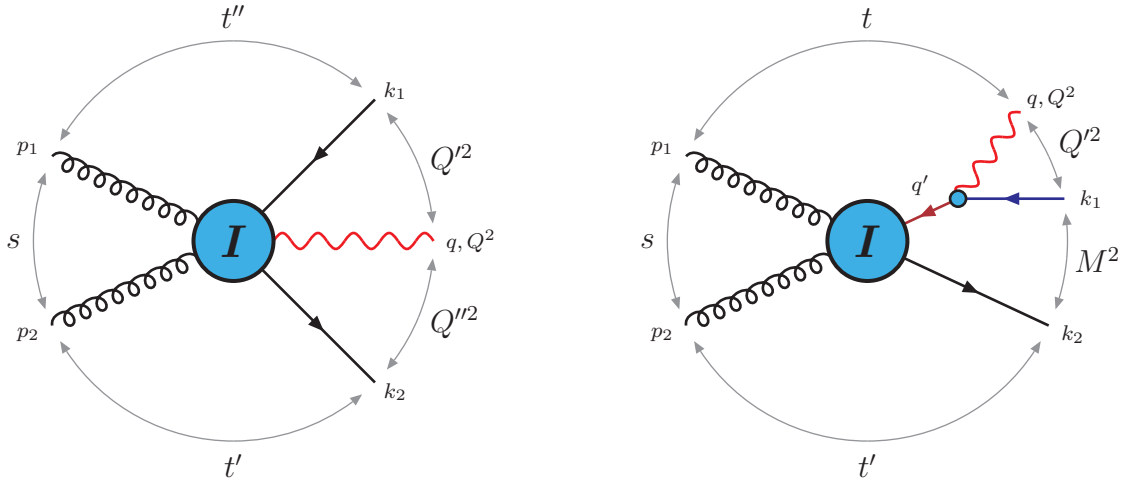


Abbildung 3.2: Kinematische Struktur des führenden einfachsten Instanton-induzierten Prozesses am LHC.

(a) Links wurde eine symmetrische Wahl der lorentzinvarianten Variablen gewählt. Diese bietet sich für eine gleichzeitige Untersuchung beider internen Virtualitäten Q' und Q'' an.

(b) Bei der rechts dargestellten alternativen asymmetrischen Wahl der Variablen nimmt eines der Quarks eine besondere Rolle ein, wie es bei der Emission eines W -Bosons der Fall ist. Diese Wahl ist bei der Untersuchung von Winkelvariablen und Impulsüberträgen günstiger.

Symmetrischer Satz	Asymmetrischer Satz
$s = (p_1 + p_2)^2$ $t'' = (p_1 - k_1)^2$ $Q'^2 = (q + k_1)^2 \geq q^2 = Q^2 \geq 0$ $Q''^2 = (q + k_2)^2 \geq q^2 = Q^2 \geq 0$ $t' = (p_2 - k_2)^2$ $-\Delta_4 =$	$s = (p_1 + p_2)^2$ $t = (p_1 - q)^2$ $Q'^2 = (q + k_1)^2 \geq q^2 = Q^2 \geq 0$ $M^2 = (k_1 + k_2)^2$ $t' = (p_2 - k_2)^2$ $-\Delta_4 =$
$\frac{1}{16} \begin{vmatrix} 0 & Q^2 & Q''^2 & t'' & 0 & 1 \\ Q^2 & 0 & 0 & t' & Q'^2 & 1 \\ Q''^2 & 0 & 0 & 0 & s & 1 \\ t'' & t' & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & Q'^2 & s & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$	$\frac{1}{16} \begin{vmatrix} 0 & 0 & M^2 & t & Q^2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & t' & Q'^2 & 1 \\ M^2 & 0 & 0 & 0 & s & 1 \\ t & t' & 0 & 0 & 0 & 1 \\ Q^2 & Q'^2 & s & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

Tabelle 3.1: Aufgelistet sind die Definitionen der lorentzinvarianten Variablen, die in Abbildung 3.2 diagrammatisch dargestellt sind. Zusätzlich ist die jeweilige Gram-Determinante angegeben.

die symmetrische Gram-Determinante für fünf Teilchen, die jeweils für den gewählten Variablensatz in Tabelle 3.1 mit angegeben ist (siehe auch Ref. [102]). Ihre Nullstellen definieren dabei die physikalischen Grenzen des Phasenraumes.

Zur Integration des Phasenraumes bietet sich eine der zyklischen, nach den Nullstellen faktorisierten Formen der Gram-Determinante an, wie beispielsweise

$$-\Delta_4 = \begin{cases} \frac{1}{16} \lambda(s, Q'^2, 0) (t'_{\max} - t') (t' - t'_{\min}), & \text{symmetrischer Satz} \\ \frac{1}{16} \lambda(Q'^2, s, 0) (t_{\max} - t) (t - t_{\min}), & \text{asymmetrischer Satz,} \end{cases} \quad (3.67)$$

mit

$$\Delta_4(t'_{\max}) = \Delta_4(t'_{\min}) = 0 \quad \text{bzw.} \quad \Delta_4(t_{\max}) = \Delta_4(t_{\min}) = 0. \quad (3.68)$$

Weiterhin sei λ die bekannte Dreiecksfunktion mit

$$\lambda(s_1, s_2, s_3) = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 - 2s_1s_2 - 2s_2s_3 - 2s_3s_1. \quad (3.69)$$

Die Integration des Phasenraumes beginnt hierbei also mit der entsprechend ausgewählten Variable t' bzw. t über den in Gl. (3.68) definierten Bereich. Eine genauere Diskussion der Abhängigkeiten der physikalischen Grenzen des Phasenraumes und somit der Integrationsgrenzen in Gl. (3.66) soll an dieser Stelle nicht erfolgen. Für ausführliche Details sei daher auf den Anhang, sowie auf die entsprechende Fachliteratur, wie beispielsweise Ref. [102], verwiesen.

3.3.2 Kontraktion des Amplitudenquadrates

Die Indexkontraktionen für das entsprechende Amplitudenquadrat (3.28) bzw. (3.42) lassen sich am leichtesten mit *Form* durchführen. Hierzu wurde das Ergebnis der Gruppenintegration generisch mit einem c-Programm erstellt und als Basis in ein Form-Skript geschrieben. Die einzelnen Terme des Amplitudenquadrates wurden dann in das Skript von Hand übertragen. Das vollständige Ergebnis für das Amplitudenquadrat wäre zu umfangreich, um es hier explizit widerzugeben,⁴ das Ergebnis wurde in Maple weiterverwendet.

Unter Vernachlässigung der unterdrückten Formfaktoren (3.34), und somit unter der Approximation (3.35) und (3.36), erhält man für das gemittelte und summierte Amplitudenquadrat (3.28) für den einfachsten Instanton-induzierten gg -Prozess unter Emission eines virtuellen Photons den relativ kompakten Ausdruck

$$\left| \mathcal{T}_{\gamma^*}^{(I)} \right|^2 \approx \frac{e_q^2}{256} \left(\frac{4\pi^6}{4\pi\alpha_s} \right)^2 (\mathcal{R}_{\mu r}^{(3)}(Q))^2 \cdot \frac{128}{15} \frac{sM^2}{(s - Q'^2 - M^2)(Q'^2 - Q^2)} \\ (8M^2s - 5Q'^2M^2 + 5st' - 5st + 5Q'^2t + 5t'M^2 + 10t'^2 + 5t'Q'^2 - 10t'Q'^2 - 10t't). \quad (3.70)$$

⁴Es handelt sich, je nach Sortierung und Wahl der lorentzinvarianten Größen, um einige 100 bis 1000 Terme.

Das Amplitudenquadrat für den analogen Antiinstanton-induzierten Prozess ist identisch, so dass sich der Gesamtbeitrag zu

$$\left| \mathcal{T}_{\gamma^*}^{(I)} \right|^2 + \left| \mathcal{T}_{\gamma^*}^{(\bar{I})} \right|^2 = 2 \left| \mathcal{T}_{\gamma^*}^{(I)} \right|^2 \quad (3.71)$$

ergibt.⁵

Das Amplitudenquadrat (3.42) für den entsprechenden Prozess unter Emission eines W -Bosons ergibt sich nach Durchführung der Indexkontraktionen und unter Vernachlässigung des entsprechend unterdrückten Formfaktors aus Gl. (3.34) zu

$$\begin{aligned} \left| \mathcal{T}_W^{(I)} \right|^2 &\approx \frac{g_W^2}{256} \left(\frac{4\pi^6}{4\pi\alpha_s} \right)^2 (\mathcal{R}_{\mu_r}^{(3)}(Q))^2 \cdot \frac{64}{15} \frac{s}{Q^2} \\ &(8M^2s - 5Q'^2M^2 + 5st' - 5st + 5Q'^2t + 5t'M^2 + 10t'^2 + 5t'Q^2 - 10t'Q'^2 - 10t't). \end{aligned} \quad (3.72)$$

Wegen der Chiralitätsbrechung durch das W -Boson ist das Amplitudenquadrat zum entsprechenden Antiinstantonprozess nicht identisch mit dem zum Instantonprozess. Es stellt sich allerdings heraus, dass die Differenz proportional zum Quadrat der unterdrückten Formfaktoren (3.34) ist bzw.

$$\left| \mathcal{T}_W^{(I)} \right|^2 - \left| \mathcal{T}_W^{(\bar{I})} \right|^2 = \mathcal{O} \left(\left(\frac{Q^2}{Q^2} \right)^{3+b} \right), \quad \mathcal{Q} \in \{Q', Q''\}, \quad (3.73)$$

und somit in der gewählten Näherung verschwindet. Somit ergibt sich wenigstens approximativ

$$\left| \mathcal{T}_W^{(I)} \right|^2 + \left| \mathcal{T}_W^{(\bar{I})} \right|^2 \approx 2 \left| \mathcal{T}_W^{(I)} \right|^2. \quad (3.74)$$

3.3.3 Dominanter Beitrag

Es soll nun für den einfachsten Prozess zunächst untersucht werden, ob die Vernachlässigung der unterdrückten Formfaktoren (3.34) gerechtfertigt ist und in welchem kinematischen Bereich es sich um eine angemessene Approximation handelt. Hierbei ist darauf zu achten, dass beide relevanten Skalen Q' und Q'' hinreichend groß gegen Q sind, um die vernachlässigten Terme klein genug zu halten. Es bietet sich hierfür demnach der symmetrische Variablensatz an. Die Untersuchung bezieht sich dabei auf den Prozess mit einem emittierten Photon, wobei stets die Summe der Instanton- und Antiinstanton-induzierten Beiträge addiert werden. Im Falle eines emittierten W -Bosons sind die Ergebnisse vergleichbar.

Der Wirkungsquerschnitt für den Prozess mit einem emittierten virtuellen Photon ist

⁵Dies trifft auch dann zu, wenn sämtliche Terme mitgenommen werden.

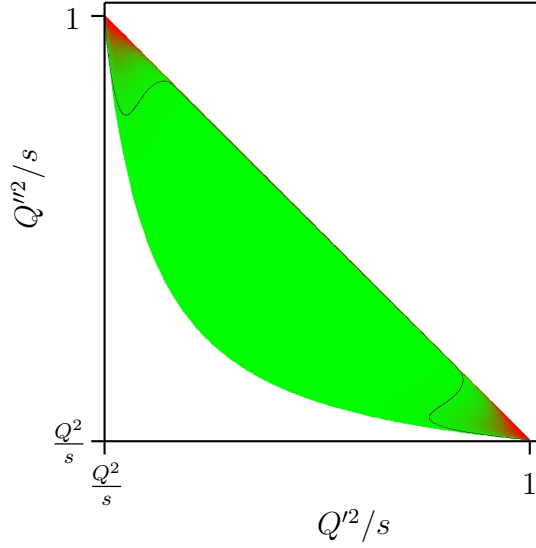


Abbildung 3.3: Dalitz-Plot von Q'^2 und Q''^2 für $s/Q^2 = 10$. Der Farbverlauf zeigt die Qualität von $d\sigma/dQ'^2 dQ''^2$ aus Gl. (3.76) im Verhältnis zur ungenäherten Lösung. Die Konturlinie markiert eine 5%ige Abweichung der Approximation zur exakten Lösung. Für $Q'^2 \rightarrow s$ bzw. $Q''^2 \rightarrow s$ nimmt die Abweichung jeweils zu.

im symmetrischen Variablensatz durch

$$\sigma_{\gamma^*}^{(I,\bar{I})} = \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{8}{64s^2} \int_{Q^2}^s dQ'^2 \int_{s \frac{Q^2}{Q'^2}}^{s+Q^2-Q'^2} dQ''^2 \int_{Q'^2-s}^0 dt'' \int_{t'_{\min}}^{t'_{\max}} dt' \frac{1}{\sqrt{\lambda(s, Q'^2, 0)}} \frac{|\mathcal{T}_{\gamma^*}^{(I)}|^2}{\sqrt{t'_{\max} - t'} \sqrt{t' - t'_{\min}}} \quad (3.75)$$

gegeben. Die ersten beiden Integrale lassen sich unproblematisch mit Maple analytisch durchführen. Der dominante Anteil des Amplitudenquadrates (3.70) führt zu dem differentiellen Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d\sigma_{\gamma^*}^{(I,\bar{I})}}{dQ'^2 dQ''^2} \approx \frac{e_q^2}{256} \left(\frac{4\pi^6}{4\pi\alpha_s} \right)^2 (\mathcal{R}_{\mu_r}^{(3)}(Q))^2 \frac{(s - Q'^2 - Q''^2 + Q^2)}{45\pi^3 s (Q'^2 - Q^2) (Q''^2 - Q^2)} [19s (s - Q'^2 - Q''^2 + Q^2) + 5 (Q'^2 Q''^2 - sQ^2)]. \quad (3.76)$$

Die explizite Angabe unter Mitberücksichtigung der unterdrückten Terme würde hier zu weit führen.

Es lohnt sich zunächst einen Blick auf den verbleibenden durch Q'^2 und Q''^2 aufgespannten Phasenraum zu werfen, dessen Begrenzungen

$$Q'^2 \in [Q^2, s] \quad \text{und} \quad Q''^2 \in \left[s \frac{Q^2}{Q'^2}, s + Q^2 - Q'^2 \right] \quad (3.77)$$

durch einen Dalitz-Plot in Abbildung 3.3 dargestellt sind. Hieran sieht man, dass zu kleine Werte für eine der beiden Variablen große Werte für die andere erzwingt und umgekehrt. Eine Beschränkung von Q' schränkt also automatisch auch Q'' ein. Somit reicht im Grunde eine Untersuchung des differentiellen Wirkungsquerschnittes bezüglich einer der beiden Variablen aus, um zu prüfen, ob die verwendete Approximation gerechtfertigt ist oder nicht. Der Plot gibt außerdem die Qualität des Verhältnisses des approximierten differentiellen Wirkungsquerschnittes (3.76), bei dem die unterdrückten Formfaktoren vernachlässigt wurden, zu demjenigen ohne diese Vernachlässigung an. Der Plot zeigt bereits sehr gut, dass die Näherung in sehr weiten Bereichen deutlich über 90% genau ist.

Für die Integration von Gl. (3.76) über Q''^2 lässt sich die Identität

$$\int_0^\infty d\phi \frac{Q''^2 - Q^2}{Q^2} e^{-\frac{Q''^2 - Q^2}{Q^2} \phi} = 1 \quad (3.78)$$

ausnutzen. Man erhält schließlich approximativ den differentiellen Wirkungsquerschnitt

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{\gamma^*}^{(I,\bar{I})}}{dQ'^2} \approx & \frac{e_q^2}{256} \left(\frac{4\pi^6}{4\pi\alpha_s} \right)^2 (\mathcal{R}_{\mu_r}^{(3)}(Q))^2 \frac{(s - Q'^2)^2}{90\pi^3 s Q'^4 (Q'^2 - Q^2)} \\ & \left\{ 19s \left[2Q'^4 \ln \left(\frac{Q'^2}{Q^2} \right) - 3Q'^4 - Q^4 + 4Q'^2 Q^2 \right] \right. \\ & \left. + 5Q'^2 \left[Q'^4 - Q^4 - 2Q'^2 Q^2 \ln \left(\frac{Q'^2}{Q^2} \right) \right] \right\}. \quad (3.79) \end{aligned}$$

Sein aufs Maximum normierter Verlauf ist in Abbildung (3.4) dargestellt. Ein Vergleich mit dem entsprechenden differentiellen Wirkungsquerschnitt unter voller Berücksichtigung der zuvor vernachlässigten Terme zeigt sehr eindrucksvoll, dass die Approximation über fast den gesamten Definitionsbereich von Q'^2 eine sehr gute Näherung bedeutet. Der besseren Übersichtlichkeit wegen wurde allerdings darauf verzichtet, die analytische Form hier explizit anzugeben. Dieselbe Untersuchung lässt sich in ähnlicher Form für den Prozess mit einem emittierten W -Boson durchführen, wobei die Resultate vergleichbar sind.

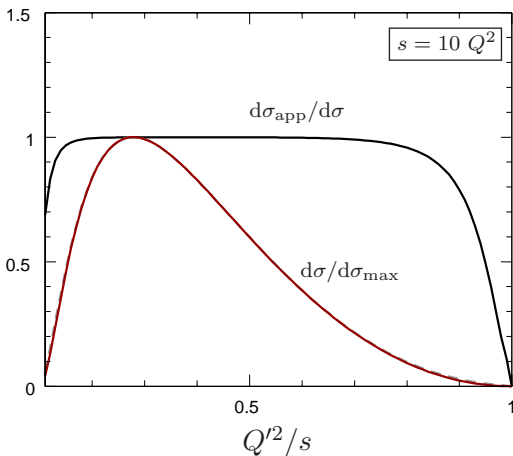


Abbildung 3.4: Der Plot zeigt die Güte der Approximation unter Vernachlässigung der unterdrückten Formfaktoren. Die durchgezogene untere Linie (rot) stellt dabei den normierten *approximierten* differentiellen Wirkungsquerschnitt $d\sigma/dQ'^2$ aus Gl. (3.79) dar. Die gestrichelte, graue Linie, die den entsprechenden *nichtapproximierten* Wirkungsquerschnitt wiedergibt, wird dabei fast komplett verdeckt. Das Verhältnis beider Linien wird durch die durchgezogene obere Linie (schwarz) angezeigt. Offensichtlich stellt die verwendete Approximation für den relevanten Bereich von Q' eine exzellente Näherung dar.

Abschließend sei noch das letzte Integral über Q'^2 ausgeführt, deren Grenzen von $Q'^2 = Q^2 \dots s$ laufen. Für den Wirkungsquerschnitt des einfachsten Instanton-induzierten Prozess in gg -Streuung unter Emission eines virtuellen Photons erhält man somit schließlich unter Vernachlässigung der unterdrückten Terme

$$\begin{aligned} \sigma_{\gamma^*}^{(I,\bar{I})}(s; Q) \approx & \frac{e_q^2}{256} \left(\frac{4\pi^6}{4\pi\alpha_s} \right)^2 (\mathcal{R}_{\mu_r}^{(3)}(Q))^2 \\ & \frac{s^2}{\pi^3} \left\{ \left[\frac{259}{135} - \frac{19}{45} \operatorname{dilog} \left(\frac{s}{Q^2} \right) - \frac{19}{15} \ln \left(\frac{s}{Q^2} \right) \right] \right. \\ & - \left[\frac{43}{15} - \frac{43}{45} \operatorname{dilog} \left(\frac{s}{Q^2} \right) - \frac{2}{9} \ln \left(\frac{s}{Q^2} \right) \right] \frac{Q^2}{s} \\ & + \left[\frac{17}{15} - \frac{29}{45} \operatorname{dilog} \left(\frac{s}{Q^2} \right) - \frac{1}{9} \ln \left(\frac{s}{Q^2} \right) \right] \frac{Q^4}{s^2} \\ & \left. - \left[\frac{5}{27} - \frac{1}{9} \operatorname{dilog} \left(\frac{s}{Q^2} \right) \right] \frac{Q^6}{s^3} \right\}, \end{aligned} \quad (3.80)$$

wobei der Dilogarithmus durch $\operatorname{dilog}(x) = \int_1^x dt \frac{\ln(t)}{1-t}$ definiert ist. Wie erwartet (vergl. Gl. (2.12)) steigt der führende Term des Wirkungsquerschnittes mit der zweiten Potenz des Quadrates der Schwerpunktsenergie an.

3.3.4 W -Emission

Es soll nun noch der Wirkungsquerschnitt für den einfachsten Prozess (3.2) unter Emission eines W -Bosons berechnet werden. Dieser ist durch

$$\begin{aligned} \sigma_W^{(I,\bar{I})} = & \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{8}{64s^2} \int_{Q^2}^s dQ'^2 \int_{-s+Q'^2}^0 dt' \int_0^{\frac{(Q'^2-Q^2)(s-Q'^2)}{Q'^2}} dM^2 \int_{t_{\min}}^{t_{\max}} dt \\ & \frac{1}{\sqrt{\lambda(Q'^2, s, 0)}} \frac{|\mathcal{T}_W^{(I)}|^2}{\sqrt{t_{\max} - t} \sqrt{t - t_{\min}}} \end{aligned} \quad (3.81)$$

gegeben, wobei für das Amplitudenquadrat dessen Approximation (3.72) verwendet wird.

Die ersten beiden Integrationssschritte lassen sich ohne weiteres mit Hilfe von Maple oder Mathematica lösen, so dass man zunächst den differentiellen Wirkungsquerschnitt

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_W^{(I,\bar{I})}}{dQ'^2 dt'} \approx & \frac{g_W^2}{256} \left(\frac{4\pi^6}{4\pi\alpha_s} \right)^2 (\mathcal{R}_{\mu_r}^{(3)}(Q))^2 \\ & \frac{(Q'^2 - Q^2)^2}{60Q'^4} \frac{(4s^2 - 5t'Q'^2 - 4Q'^2s + 5t'^2 + 5st')}{\pi^3 s Q^2} \end{aligned} \quad (3.82)$$

erhält. Die Integration über t' liefert weiterhin

$$\frac{d\sigma_W^{(I,\bar{I})}}{dQ'^2} \approx \frac{g_W^2}{256} \left(\frac{4\pi^6}{4\pi\alpha_s} \right)^2 (\mathcal{R}_{\mu_r}^{(3)}(Q))^2 \frac{(Q'^2 - Q^2)^2 (s - Q'^2)^2}{360\pi^3 s Q'^4 Q^2} (19s + 5Q'^2) \quad (3.83)$$

und schließlich erhält man

$$\begin{aligned} \sigma_W^{(I,\bar{I})}(\hat{s}; Q) \approx & \frac{g_W^2}{256} \left(\frac{4\pi^6}{4\pi\alpha_s} \right)^2 (\mathcal{R}_{\mu_r}^{(3)}(Q))^2 \\ & \frac{1}{2\pi^3} \left\{ \frac{3}{80} \frac{s^3}{Q^2} + \left[\frac{161}{540} - \frac{19}{90} \ln \left(\frac{s}{Q^2} \right) \right] s^2 \right. \\ & \left. - \frac{1}{60} \left[11 \ln \left(\frac{s}{Q^2} \right) + 19 \right] Q^2 s - \frac{1}{60} Q^4 - \frac{1}{432} \frac{Q^6}{s} \right\} \quad (3.84) \end{aligned}$$

für den Wirkungsquerschnitt des einfachsten Prozesses mit einem emittierten W -Boson.

Ein Vergleich mit dem Wirkungsquerschnitt (3.80) des einfachsten Prozesses mit einem emittierten Photon zeigt, dass der Prozess mit einem W -Boson ein stärkeres Potenzverhalten in s aufweist. Der Extrafaktor beim W -Prozess kommt dabei durch den nichtverschwindenden Longitudinalanteil $\sim qq/Q^2$ zustande,⁶ welcher über diverse Kontraktionen zwischen q und anderen Impulsen die Ursache für das Auftauchen eines zusätzlichen Faktors s/Q^2 ist. Im Falle der Emission eines virtuellen Photons wird wegen der Transversalität der longitudinale Anteil durch die Interferenzbeiträge exakt aufgehoben. Im Falle des Prozesses mit emittiertem W -Boson gibt es diese Interferenzen nicht und die Transversalität ist verletzt.

3.3.5 Unterdrückung der Interferenzen

Es soll nun untersucht werden, ob kinematische Regionen existieren, in denen die Beiträge der Interferenzterme (3.39) zum Wirkungsquerschnitt (3.80) mit einem emittierten virtuellen Photon vernachlässigbar sind. Diese Fragestellung wird relevant, wenn der Prozess in einen virtuellen Subprozess und den anschließenden Zerfall einer virtuellen Quarknullmode unter Emission eines virtuellen Photons faktorisiert werden soll, worauf in Abschnitt 3.4 näher eingegangen wird.

Ein Vergleich von Gl. (3.84) mit (3.80) ergibt für den führenden Term des Interferenzanteils bei hohem s/Q^2

$$\frac{\left(\sigma_{\gamma^*}^{(I,\bar{I})} \right)_{\text{Interf.}}}{\sigma_{\gamma^*}^{(I,\bar{I})}} \propto -\frac{135}{259} \cdot \frac{3}{80} \frac{s}{Q^2} \sim -\frac{1}{50} \frac{s}{Q^2}. \quad (3.85)$$

Hieraus lässt sich schließen, dass die Interferenzen für hohe Energien zwar einen recht großen (destruktiven) Beitrag zum Wirkungsquerschnitt beisteuern, aber wegen des kleinen Vorfaktors bei niedrigen Energien u.U. vernachlässigbar sind. Im Hinblick auf kinematische Schnitte stellt sich also die Frage, ob es für niedrige Energien Bereiche gibt, in denen der Interferenzanteil hinreichend klein ausfällt.

Dies ist, zumindest für ein einzelnes leichtes Nullmodenflavor, tatsächlich der Fall, wie ein Blick auf Abbildung 3.5 zeigt. Der Graph stellt den auf sein Maximum normierten

⁶Man vergl. hierzu Gl. (3.27).

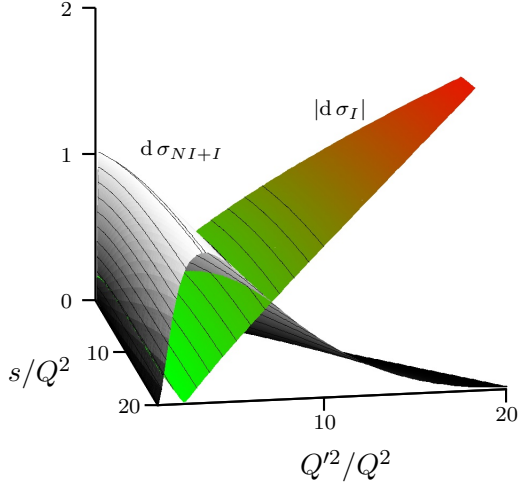


Abbildung 3.5: Dargestellt ist der auf sein Maximum normierte differentielle Wirkungsquerschnitt $d\sigma_{NI+I}$ in Abhängigkeit von s/Q^2 und Q'^2/Q^2 , sowie dessen Interferenzanteil $d\sigma_I$. Das Maximum von $d\sigma_{NI+I}$ liegt bei einem relativ kleinem Wert für Q'^2/Q^2 und wandert bei zunehmendem s/Q^2 leicht zu größeren Q' . Der Interferenzanteil steigt hingegen mit Q'^2 etwa linear an, bis er bei ca. $Q'^2 \sim 10 Q^2$ den gesamten differentiellen Wirkungsquerschnitt übersteigt.

Zur Unterdrückung der Interferenzen bietet sich also ein Schnitt von $Q'^2 \leq Q'^2_{\max}$ an.

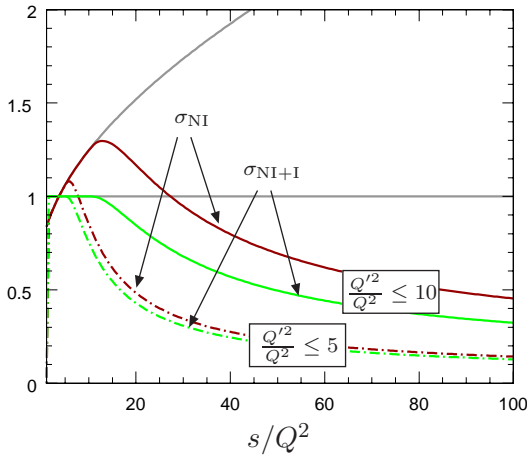


Abbildung 3.6: Die einzelnen Linien zeigen den Verlauf in s/Q^2 des normierten Wirkungsquerschnittes (3.87) $\sigma_{NI+I}^{\text{cut}}$ und dessen Nichtinterferenzanteil σ_{NI}^{cut} für verschiedene Integrationschnitte $Q'^2 \leq Q'^2_{\max}$. Bei großen Energien fallen die Verluste je nach Schnitt recht groß aus. Bei hinreichend kleinen Energien sind die Verluste im Wirkungsquerschnitt dagegen zu vernachlässigen. Bei stärkeren Schnitten, z.B. $Q'^2 \leq 5 Q^2$, stellt der Nichtinterferenzanteil eine gute Approximation des entsprechend geschnittenen Wirkungsquerschnittes (3.87) dar, so dass der Interferenzanteil fast verlustfrei unterdrückt wird.

differentiellen Wirkungsquerschnitt

$$d\sigma_{NI+I} \equiv \frac{d\sigma_{\gamma^*}^{(I,\bar{I})}(Q'^2; s)}{d\sigma_{\gamma^*}^{(I,\bar{I})}(Q'^2_{\text{peak}}; s)}, \quad (3.86)$$

sowie den Betrag des entsprechenden Interferenzanteils $d\sigma_I$ in Abhängigkeit von s/Q^2 dar. Während der Hauptbeitrag von $d\sigma_{NI+I}$ zum Wirkungsquerschnitt sich bei eher kleinen Q'^2/Q^2 konzentriert, steigt $d\sigma_I$ etwa linear mit Q'^2/Q^2 an. Bei zu großem Q' werden die Longitudinalanteile hierbei immer größer, so dass der Betrag des Interferenzanteils schließlich bei etwa $Q'^2 \sim 10 Q^2$ über den gesamten differentiellen Wirkungsquerschnitt hinaus wächst. Bei kleinem Q' ist der Beitrag durch $d\sigma_I$ hingegen vernachlässigbar.

Um die Interferenzen effektiv zu unterdrücken, bietet sich bei der Integration über Q'^2 ein kinematischer Schnitt bei $Q'^2 \leq Q'^2_{\max}$ an. Das Ergebnis ist Abbildung 3.6 zu entnehmen. Hierbei wird der normierte, geschnittene Wirkungsquerschnitt

$$\sigma_{NI+I}^{\text{cut}} \equiv \frac{1}{\sigma_{\gamma^*}^{(I,\bar{I})}} \int_{Q^2}^{\min(s, Q'^2_{\max})} dQ'^2 \frac{d\sigma_{\gamma^*}^{(I,\bar{I})}}{dQ'^2}, \quad (3.87)$$

sowie dessen *Nicht*-Interferenzanteil σ_{NI}^{cut} für verschiedene Werte von $Q_{\text{max}}'^2$ in Abhängigkeit von s/Q^2 gezeigt. Man sieht zunächst, dass bei einem hinreichend starken Einschnitt (in Abbildung 3.6 für $Q_{\text{max}}'^2 = 5 Q^2$) die Nichtinterferenzbeiträge σ_{NI} eine gute Approximation des entsprechend geschnittenen Wirkungsquerschnittes σ_I darstellen. Desweiteren ist festzustellen, dass der durch den Schnitt unerwünschte Verlust an Wirkungsquerschnitt bei zunehmendem s/Q^2 recht groß wird.

Resumee Für den einfachsten Instanton-induzierten Prozess (3.1) mit einem emittierten virtuellen Photon ist also festzuhalten, dass eine wirkungsvolle Unterdrückung der Interferenzen durch hinreichend starke Einschnitte $Q'^2 \leq Q_{\text{max}}'^2$ durchaus möglich ist und der geschnittene Wirkungsquerschnitt durch die Nichtinterferenzanteile in guter Näherung approximiert werden kann. Bei zunehmender Energie \sqrt{s} werden dabei allerdings die Verluste immer größer. Eine faktorisierte Betrachtung des einfachsten Prozesses (3.1) mit virtuellem Photon ist also eher bei kleineren Schwerpunktsenergien von etwa $s \lesssim 10 Q^2$ sinnvoll. Es bleibt zu Untersuchen, wie sich die Berücksichtigung mehrerer Nullmodenflavors hierauf auswirkt.

3.4 Faktorisierung und die Crossing-Symmetrie

In diesem Abschnitt soll der einfachste Prozess für den Fall untersucht werden, dass die Interferenzen (3.38) vernachlässigbar sind, wie bereits in Abschnitt 3.3.5 diskutiert wurde, oder gar nicht auftreten, wie bei der Emission eines W -Bosons. Vom letzteren Fall soll der Einfachheit halber ausgegangen werden. Der gesamte Prozess faktorisiert dann in einen $2 \rightarrow 2$ Subprozess mit einem virtuellen Quark im Endzustand und dessen anschließenden Zerfall unter Emission eines W -Bosons, wie in Abbildung 3.7 dargestellt. Der Wirkungs-

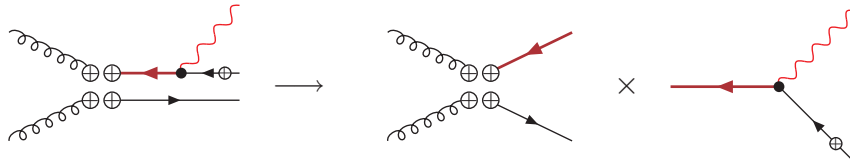


Abbildung 3.7: Faktorisierung des einfachsten Prozesses in einen $2 \rightarrow 2$ Subprozess und den Zerfall eines virtuellen Quarks unter Emission eines W -Bosons.

querschnitt des vollen Prozesses lässt sich dann in einen Zerfallsfaktor $\mathcal{P}^{(I)}$ für den Zerfall des virtuellen Quarks unter Emission des W -Bosons und den Wirkungsquerschnitt $\hat{\sigma}^{(I)}$ des zugrundeliegenden Instanton-Subprozesses zerlegen

$$\sigma_W^{(I)}(Q^2; s) = g_W^2 \int_{Q^2}^s \frac{dQ'^2}{Q^2} \mathcal{P}^{(I)}\left(\frac{Q'^2}{Q^2}\right) \hat{\sigma}^{(I)}(s; Q'^2). \quad (3.88)$$

Es wird sich zeigen, dass \mathcal{P} in einem gewissen Zusammenhang zu seinem Pendant (2.10) aus der tief-inelastischen Streuung steht.

Da der Zerfallsfaktor unabhängig vom Subprozess sein sollte, besteht der wesentliche Sinn dieses Abschnittes darin, $\mathcal{P}^{(I)}$ auch für komplexere als den einfachsten Prozess zu gewinnen, um diese später in einer faktorisierten Form behandeln zu können. Die Berechnung über den einfachsten Prozess bietet sich an, da diese sich hier noch relativ einfach gestaltet.

3.4.1 Fundamentaler Subprozess

Es soll nun zunächst der einfachste virtuelle Subprozess

$$g(p_1) + g(p_2) \xrightarrow{I} \bar{q}_R^*(q') + q_R(k') \quad (3.89)$$

berechnet werden, wobei p_1, p_2 und k' die reellen Impulse der entsprechenden Teilchen und q' der zeitartige Impuls des virtuellen Antiquarks sei.⁷ Die invariante Amplitude hierfür ist formal durch

$$i \left(\hat{\mathcal{T}}^{(I) a,b} \right)_{j_1}^{i_1} = \int_0^\infty d\rho D(\rho, \mu_r) \int dU p_1^2 \varepsilon_1 \cdot A^{(I)a}(p_1) p_2^2 \varepsilon_2 \cdot A^{(I)b}(p_2) \\ \left[\chi_R^\dagger(k') i k' \kappa^{(I)}(-k') \right]^{i_1} \left[\bar{\phi}^{(I)}(-q') (-i \bar{q}') \chi_L(q') \right]_{j_1} \quad (3.90)$$

gegeben.

Im Unterschied zum vollen $2 \rightarrow 3$ Prozess ist nun eine der Quarknullmoden, in diesem Fall $\bar{\phi}^{(I)}$ für das auslaufende Antiquark, virtuell. Die naive Fourier-Transformation der entsprechenden Nullmode aus Gl. (1.53) würde in euklidischer Metrik

$$\bar{\phi}_{j_1}^{(I)\dot{\alpha}}(-q') (-i \bar{q}')_{\dot{\alpha}\alpha} = 2\pi \rho^{\frac{3}{2}} U^{\dagger\beta_1}_{j_1} \epsilon_{\beta_1\alpha} r_q \left(\frac{1}{2} \rho \sqrt{q'^2} \right) \quad (3.91)$$

ergeben, mit dem Formfaktor

$$r_q(\omega) = -\omega \frac{\partial}{\partial \omega} (I_0(\omega)K_0(\omega) - I_1(\omega)K_1(\omega)) \quad (3.92)$$

für virtuelle Quarks [34, 76, 103]. Im Limes $q'^2 \rightarrow 0$ strebt $r_q \rightarrow 1$, so dass Gl. (3.91) im Grenzwert auf der Massenschale die korrekte Form annimmt. Allerdings weist Gl. (3.92) das falsche asymptotische Verhalten für große ω auf, so dass das ρ -Integral nicht konvergiert.

Da es sich beim betrachteten Subprozess lediglich um einen virtuellen Prozess handelt, der letztlich über Gl. (3.88) definiert ist, besteht bei der Wahl des Formfaktors allerdings eine gewisse Wahlfreiheit. Schaut man auf den entsprechenden Formfaktor, der im vollständigen Prozess bei der Ankopplung des Vektorbosons auftritt, so scheint zunächst die Ersetzung [37, 103] durch Gl. (1.84)

$$r_q \left(\frac{1}{2} \rho \sqrt{q'^2} \right) \rightarrow f \left(\rho \sqrt{q'^2} \right) \quad (3.93)$$

⁷Das W -Boson kann anschließend nur vom rechtshändigen Antiquark emittiert werden.

als natürlich.

Die Wahl von $\sqrt{q'^2}$ bzw. Q' nach der analytischen Fortsetzung im Argument erscheint zunächst plausibel, da dies vom Gesichtspunkt des Subprozesses die einzige relevante Skala ist, die involviert ist. Allerdings treten bei der Ankopplung des Vektorbosons zwei Formfaktoren auf, $f(\rho Q')$ und $f(\rho Q)$. Wie in den Abschnitten 3.1.5 und 3.3.3 diskutiert, dominiert hiervon nun der Formfaktor mit $Q \leq Q'$ im Argument. Unter der Substitution (3.93) wäre also das Resultat der ρ -Integration $\mathcal{R}_{\mu_r}^{(3)}(Q')$ durch den Skalierungsfaktor $(Q'/Q)^{3+b}$ zu ergänzen.⁸ Die Alternative besteht darin, gleich die *externe* Virtualität Q im Argument zu verwenden und somit Q' durch dessen untere Grenze zu ersetzen.

In der Wahl der *externen* Virtualität Q des vollständigen Prozesses anstelle der internen Virtualität Q' des Subprozesses besteht somit ein entscheidender Unterschied zur entsprechenden Faktorisierung im tief-inelastischen Fall. Eine kinematisch streng vorgegebene Hierarchie zwischen beiden Virtualitäten existiert dort nicht. Im Bjorken-Limes dominiert dort hingegen der Formfaktor mit Q' anstelle von Q im Argument. Der wesentliche Unterschied besteht nun darin, dass Q' im t -Kanal, vom Gesichtspunkt des Instanton-Prozesses, keine natürliche untere Grenze in Form einer anderen Virtualität gegeben ist, die den Instanton-Prozess beeinflussen könnte. Diese tritt nun aber im s -Kanal in Form der Virtualität Q des Vektorbosons auf.

Eine Auswertung der Amplitude (3.90) mit dem Formfaktor $f(\rho Q)$ statt r_q führt schließlich zu

$$\begin{aligned}
 |\hat{T}^{(I)}|^2 &= \frac{1}{256} \left(\frac{4\pi^6}{4\pi\alpha_s} \right)^2 (\mathcal{R}_{\mu_r}^{(3)}(Q))^2 \cdot \left[\mathcal{I}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3,j_1j_2j_3}^{i_1i_2i_3,\beta_1\beta_2\beta_3} \delta_{i'_1}^{j_1} \delta_{i_1}^{j'_1} \mathcal{I}_{\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2\dot{\beta}_3,j'_1j'_2j'_3}^{i'_1i'_2i'_3,\dot{\alpha}_1\dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_3} \right] \\
 &2 \left(\delta_{i'_2}^{j_2} \delta_{i_2}^{j'_2} - \frac{1}{3} \delta_{i_2}^{j_2} \delta_{i'_2}^{j'_2} \right) 2 \left(\delta_{i'_3}^{j_3} \delta_{i_3}^{j'_3} - \frac{1}{3} \delta_{i_3}^{j_3} \delta_{i'_3}^{j'_3} \right) \\
 &(\sigma_\nu \bar{p}_1 - p_1 \bar{\sigma}_\nu)_{\beta_2}^{\alpha_2} (\bar{p}_1 \sigma^\nu - \bar{\sigma}^\nu p_1)_{\dot{\alpha}_2}^{\dot{\beta}_2} \\
 &(\sigma_{\nu'} \bar{p}_2 - p_2 \bar{\sigma}_{\nu'})_{\beta_3}^{\alpha_3} (\bar{p}_2 \sigma^{\nu'} - \bar{\sigma}^{\nu'} p_2)_{\dot{\alpha}_3}^{\dot{\beta}_3} \\
 &k'^{\alpha_1 \dot{\beta}_1} \bar{q}'_{\dot{\alpha}_1 \beta_1}
 \end{aligned} \tag{3.94}$$

als gemittelt und summiertes Amplitudenquadrat. Die Indexkontraktion des Amplitudenquadrates (3.94) über Form [100] führt zunächst zum differentiellen Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d\hat{\sigma}^{(I)}}{dt'} = \frac{4}{3\pi s} \left[\frac{1}{256} \left(\frac{4\pi^6}{4\pi\alpha_s} \right)^2 (\mathcal{R}_{\mu_r}^{(3)}(Q))^2 \right] \left[t' s - Q'^2 t' + t'^2 + \frac{4}{5} (s^2 - Q'^2 s) \right] \tag{3.95}$$

und die Integration über t' liefert schließlich den Wirkungsquerschnitt

$$\hat{\sigma}^{(I)} = \frac{4}{3\pi} \left[\frac{1}{256} \left(\frac{4\pi^6}{4\pi\alpha_s} \right)^2 (\mathcal{R}_{\mu_r}^{(3)}(Q))^2 \right] \left[\frac{19}{30} s^2 - \frac{11}{10} Q'^2 s + \frac{3}{10} Q'^4 + \frac{1}{6} \frac{Q'^6}{s} \right] \tag{3.96}$$

⁸Man vergleiche hierzu Abschnitt 3.1.2 und 3.1.3.

für den einfachsten virtuellen Instanton-Subprozess in gg -Streuung. Man beachte, dass der führende Term die richtige Potenz s^2 hat, wie bei einem Punktprozess bestehend aus je zwei Gluonen und zwei Fermionen.

Vergleicht man den Wirkungsquerschnitt des virtuellen Subprozesses (3.96) über Gl. (3.83) mit dem differentiellen Wirkungsquerschnitt $d\sigma_W^{(I)}/dQ^2$ für den vollen W -Boson emittierenden Prozess,⁹ so ergibt sich über Gl. (3.88) der Instanton-induzierte Zerfallsfaktor

$$\mathcal{P}^{(I)}\left(\frac{Q'^2}{Q^2}\right) = \frac{1}{32\pi^2} \left(1 - \frac{Q^2}{Q'^2}\right)^2. \quad (3.97)$$

Dieser lässt sich nun nicht nur im Falle des einfachsten Prozesses anwenden, sondern mag auch in komplexeren Fällen als Zerfallsfaktor dienen, in denen der Prozess also wie in (3.88) faktorisiert. Gl. (3.96) ist in diesem Sinne lediglich der Wirkungsquerschnitt des einfachsten Subprozesses. Insbesondere wird Gl. (3.97) im nächsten Kapitel, wo es um die Berechnung inklusiver Wirkungsquerschnitte zur Abschätzung von Instanton-Raten geht, unmittelbar Verwendung finden.

3.4.2 Bezug zum tief-inelastischen Fall

Es ist nun interessant, den Zerfallsfaktor (3.97) mit dem Flussfaktor

$$P_q^{(I)}\left(\frac{x}{x'}, x, \frac{Q'^2}{Q^2}\right) \approx \frac{1}{16\pi^3} \frac{x}{x'} \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x'} - \frac{Q'^2}{Q^2}\right) \quad (1 \text{ Flavor DIS}) \quad (3.98)$$

für ein einzelnes Quarkflavor für die $q^*\bar{q}$ -Erzeugung aus einem virtuellen Photon in tief-inelastischer Streuung zu vergleichen. Hierbei seien x und x' die Bjorken-artigen Skalierungsvariablen

$$x = \frac{Q^2}{s + Q^2} \quad \text{und} \quad x' = \frac{Q'^2}{s' + Q'^2} \quad (3.99)$$

in tief-inelastischer Streuung. Beide Prozesse, der Zerfall des virtuellen Quarks unter Emission eines Vektorbosons und die Paarerzeugung eines virtuellen und eines reellen Quarks durch Zerfall eines virtuellen Photons, jeweils vor dem Hintergrund eines Instantons, lassen sich durch Crossing ineinander überführen.

Man betrachte hierfür zunächst den einfachsten Prozess in tief-inelastischer Streuung unter Hinzunahme eines Gluons im Endzustand

$$\gamma^* + g \rightarrow \bar{q} + q + g. \quad (3.100)$$

Dabei werde der Einfachheit halber angenommen, dass das virtuelle Photon ausschließlich an das Antiquark kopple. Die relevanten kinematischen Variablen werden in Abbildung 3.8 veranschaulicht. Durch Crossing des virtuellen Photons mit dem Gluon im Endzustand, was effektiv einer Drehung des Prozess-Diagramms um 90° im Uhrzeigersinn entspricht,

⁹Hierbei ist ein Faktor $\sigma_W^{(I,\bar{I})}/\sigma_W^{(I)} = 2$ zu beachten.

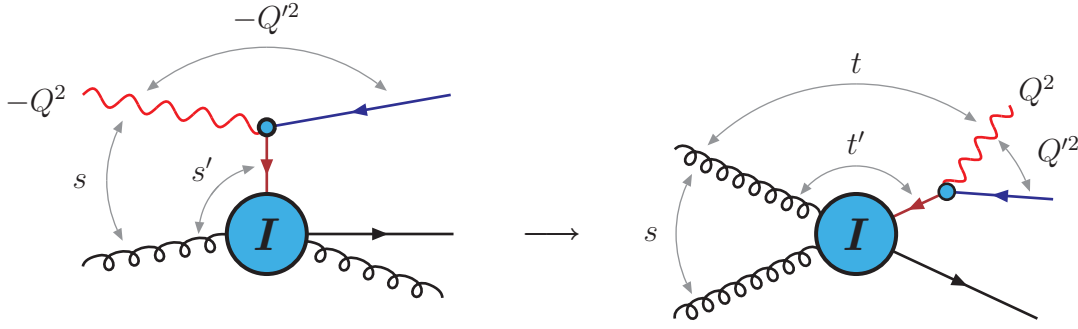


Abbildung 3.8: Links ist der um ein Endzustandsgluon erweiterte einfachste Instanton-Prozess aus tief-inelastischer Streuung dargestellt. Durch Crossing des zusätzlichen Gluons mit dem virtuellen Photon erhält man den einfachsten Instanton-induzierten Prozess in gg -Streuung.

erhält man schließlich den einfachsten Prozess in gg -Streuung. Die hierbei relevanten kinematischen Variablen sind dabei wie folgt zu ersetzen

$$s \rightarrow t \quad s' \rightarrow t' \quad -Q^2 \rightarrow Q^2 \quad -Q'^2 \rightarrow Q'^2, \quad (3.101)$$

wobei die Vorzeichenänderung von Q^2 und Q'^2 dadurch zustande kommt, dass die zugehörigen Impulse q und q' im t -Kanal *raumartig* und im s -Kanal *zeitartig* sind. Die beiden Skalierungsvariablen (3.99) sind nach dem Crossing schließlich durch

$$x = \frac{Q^2}{s + Q^2} \rightarrow \frac{Q^2}{Q^2 - t} \quad \text{und} \quad x' = \frac{Q'^2}{s + Q'^2} \rightarrow \frac{Q'^2}{Q'^2 - t'} \quad (3.102)$$

zu ersetzen.

Man betrachte nun den Flussfaktor (3.98), der die $q^*\bar{q}$ -Erzeugung aus einem virtuellen Photon vor einem Instanton-Hintergrund beschreibt. Durch das Crossing wird aus der Paarerzeugung ein \bar{q}^* -Zerfall unter Emission eines Vektorbosons

$$\gamma^* \rightarrow q^* + \bar{q} \quad \longrightarrow \quad \bar{q}^* \rightarrow \gamma^* + q. \quad (3.103)$$

Da es sich prinzipiell um denselben Prozess handelt, nur in einem modifizierten Ablauf, sollte der Flussfaktor (3.98) diesen ebenfalls beschreiben. Allerdings nehmen die einzelnen Variablen x und x' bzw. Q^2 und Q'^2 nun vertauschte Rollen ein. Man erhält also in diesem Sinne den Zerfallsfaktor

$$\tilde{P}_q^{(I)} \left(\frac{x}{x'}, x, \frac{Q'^2}{Q^2} \right) \equiv P_q^{(I)} \left(\frac{x'}{x}, x', \frac{Q^2}{Q'^2} \right) \approx \frac{1}{16\pi^3} \frac{x'}{x} \left(1 + \frac{1}{x'} - \frac{1}{x} - \frac{Q^2}{Q'^2} \right). \quad (3.104)$$

Integriert man diesen über x und x' , so ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx'}{x'} \int_{x_{\min}}^{x'} \frac{dx}{x} \tilde{P}_q^{(I)} &= \int_0^1 \frac{dx'}{x'} \frac{x'}{32\pi^3} \left(1 - \frac{Q^2}{Q'^2} \right)^2 \\ &= \frac{1}{32\pi^3} \left(1 - \frac{Q^2}{Q'^2} \right)^2 = \frac{1}{\pi} \mathcal{P}^{(I)}. \end{aligned} \quad (3.105)$$

Dies entspricht, bis auf einen definitionsbedingten Faktor $1/\pi$, gerade dem Zerfallsfaktor (3.97), wie er bereits durch Vergleich des Wirkungsquerschnitts des Instanton-Subprozesses mit dem des vollen Prozesses berechnet wurde. Hierbei wurde x_{\min} so gewählt, dass $\tilde{F}_q^{(I)}$ über den gesamten Definitionsbereich keine negativen Werte annimmt. Die obere Grenze $x \leq x'$ ist kinematisch begründet.

4 Inklusives: Über den Sattelpunkt

Im vorangegangenen Kapitel wurde der einfachste Instanton-induzierte Prozess in gg -Streuung unter Emission eines virtuellen Photons der Virtualität $Q = \sqrt{q^2}$ bzw. eines W -Bosons in aller Ausführlichkeit diskutiert. Dabei konnten wichtige Erkenntnisse über die Eigenschaften von Instanton-Prozessen in der hier untersuchten kinematischen Region herausgearbeitet werden. Diese zeichnet sich dadurch aus, dass die Virtualität $Q' = \sqrt{q'^2}$ des Subprozesses über einen s -Kanal des Endzustands präpariert wird, deren Impuls q' *zeitartig* ist. Hier seien insbesondere die Notwendigkeit der analytischen Fortsetzung der ρ -Integration bei deren Auswertung in Minkowskimetrik, die Auswirkungen durch die Skalenhierarchie $Q' > Q$, sowie die Faktorisierung in einen Instanton-Subprozess und den anschließenden Zerfall des virtuellen Quarks unter Emission eines Vektorbosons genannt.

Darauf aufbauend soll in diesem Kapitel die Untersuchung der Rate von Instantonereignissen in gg -Streuung unter Emission eines Vektorbosons, insbesondere eines W -Bosons, vorangetrieben werden. Dabei nimmt die Berücksichtigung von Gluonen im Endzustand, deren Beiträge mit Hilfe der in Abschnitt 1.2.3 vorgestellten Valley-Methode resummiert werden, eine zentrale Rolle ein, da hierdurch die exponentielle Tunnelunterdrückung des Instantonereignisses erheblich reduziert wird [27–29, 37, 86, 87, 89–91].

Das Kapitel gliedert sich dabei wie folgt: Zunächst soll in Abschnitt 4.1 die Problemstellung näher definiert und eingegrenzt werden. Ferner wird der zu berechnende Wirkungsquerschnitt definiert und die einzelnen Terme, aus denen dieser sich zusammensetzt, angegeben. In Abschnitt 4.2 erfolgt anschließend dessen eigentliche Berechnung. Die Integration über die kollektiven Koordinaten, die im einfachsten Fall (s. Kapitel 3) noch analytisch erfolgte, wird nun über eine Sattelpunktsnäherung durchgeführt. Hierbei wird auch auf die Gemeinsamkeiten zum tief-inelastischen Fall [37] und die kinematisch bedingten Unterschiede bei der Berechnung eingegangen. In Abschnitt 4.3 werden abschließend die gewonnenen Resultate in direkten Vergleich mit dem tief-inelastischen Fall gesetzt und die Ursache für die beobachteten Abweichungen näher analysiert.

4.1 Inklusive Instanton-induzierte gg -Streuung

Bei den hier zu betrachtenden Prozessen handelt es sich um Instanton-induzierte gg -Streuungen, bei denen der Endzustand aus insgesamt $2n_f$ Quarks, einer beliebigen Anzahl an Gluonen, sowie einem emittierten Vektorboson bestehe. Hierbei sei n_f die Anzahl der leichten Quark-Flavors, die direkt als Nullmoden an das Instanton koppeln. Wie auch bereits im Falle des einfachsten Prozesses, mit nur einem Quarkflavor und ohne zusätzli-

cher Gluonen, dient das emittierte Vektorboson der Virtualität Q dazu, eine nach unten beschränkte Virtualität $Q' \geq Q$ in den Instantonsubprozess einzuspeisen, um so die Integration über die Instantongröße ρ im Rahmen der Instanton-Störungsrechnung konvergent zu halten.

4.1.1 Eingrenzung der Problemstellung

Die wesentliche Neuerung gegenüber dem einfachsten Prozess besteht darin, die Wirkung durch die zusätzlichen Gluonen im Endzustand zu berücksichtigen. Um hierbei das Problem auf das Wesentliche zu reduzieren, wird dabei von folgenden Einschränkungen ausgegangen:

- Die Anzahl der leichten Quarkflavors, die als Nullmoden direkt vom Instanton emittiert werden, wird, wie auch schon beim einfachsten Prozess im vorangegangenen Kapitel, auf $n_f = 1$ gesetzt.
- Das emittierte Vektorboson sei ein reelles W -Boson, und kopple somit ausschließlich an linkshändige Quarks bzw. rechtshändige Antiquarks.¹

Hierdurch lässt sich das emittierte Vektorboson, je nachdem ob der Prozess durch ein Instanton oder Antiinstanton induziert wird, eindeutig dem Antiquark oder dem Quark zuordnen. Beim Quadrieren der Amplituden werden somit jegliche Interferenzen, die sonst durch die mögliche Ankopplung des Vektorbosons an verschiedene Quarks entstehen würden, vermieden.

Die gesamte Prozessstruktur lässt sich nun, wie in der analogen Situation des einfachsten Prozesses (vergl. Abschnitt 3.4), in einen virtuellen Instanton-Subprozess und den anschließenden Zerfall des virtuellen Antiquarks (Instanton) bzw. Quarks (Antiinstanton) unter Emission des W -Bosons aufspalten, wie in Abbildung 4.1 dargestellt. Der Wirkungs-

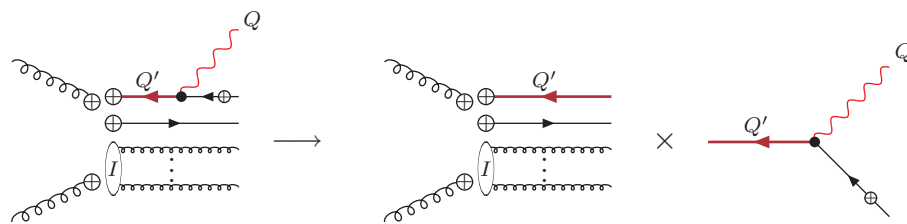


Abbildung 4.1: Dargestellt ist die Faktorisierung des hier betrachteten Instantonprozesses in gg -Streuung in einen virtuellen Instanton-Subprozess mit einem virtuellen Quark der Virtualität Q' und dessen anschließenden Zerfall unter Emission eines Vektorbosons der Virtualität Q . Linien, die in einem \oplus enden, stellen hierbei Quarknullmoden bzw. Instanton-Lösungen dar. Die verbleibende Quarklinie, die durch ein \oplus hindurchläuft, repräsentiert einen Nichtnullmodenpropagator im Instanton-Hintergrund (vergl. Gl. (1.77)).

¹Die Quarknullmode geht dabei in eine Nichtnullmode anderen Flavors über [34].

querschnitt für den hier betrachteten Prozess faktorisiert dabei zu

$$\sigma_{gg}^{(I)}(s; Q^2) = g^2 \int_{Q^2}^s \frac{dQ'^2}{Q^2} \mathcal{P}^{(I)}\left(\frac{Q'^2}{Q^2}\right) \hat{\sigma}_{gg}^{(I)}(s; Q'^2), \quad (4.1)$$

wobei g die relevante Kopplungskonstante zwischen Quark und Vektorboson, s das Quadrat der Schwerpunktsenergie, Q' die Virtualität des entsprechenden Quarks mit *zeitartigem* Impuls q' und Q die Virtualität des emittierten Vektorbosons seien.

4.1.2 Einteilchen-inklusive Wirkungsquerschnitt

Der Zerfallsfaktor \mathcal{P} für die Emission des Vektorbosons wurde bereits mittels des einfachsten Prozesses berechnet und ist Gl. (3.97) zu entnehmen. Somit reduziert sich die Berechnung des Wirkungsquerschnittes für den gesamten Prozess auf die für den virtuellen Subprozess

$$g + g \xrightarrow{I} \bar{q}_R^*(q') + q_R + n_g g, \quad (4.2)$$

mit einer virtuellen Antiquarknullmode, einer reellen Quarknullmode und einer beliebigen Anzahl n_g an Gluonen.²

Um bei der Bestimmung von Ereignisraten für Instanton-induzierte Prozesse in gg -Streuung Kontrolle über die für die Instantonstörungsrechnung relevante Prozessdynamik zu behalten, ist ggf. eine Messung des Impulses der virtuellen Quark-Nullmode aus Gl. (4.2) nötig. Der verbleibende Phasenraum kann also ausintegriert werden. Für den virtuellen Instanton-Subprozess ist somit der entsprechende *Einteilchen-inklusive* Wirkungsquerschnitt für den Instanton-induzierten Prozess

$$g + g \xrightarrow{I} \bar{q}_R^*(q') + X \quad (4.3)$$

zu bestimmen.

Hierdurch verhält sich der betrachtete Fall komplizierter als der entsprechende Subprozesses aus tief-inelastischer Streuung, $\bar{q}^* + g \rightarrow X$. Dort befindet sich das virtuelle Quark gewissermaßen im Anfangszustand. Entsprechend kann der *totale* Wirkungsquerschnitt des Subprozesses über das optische Theorem durch die Vorwärtsstreuamplitude vor dem Hintergrund eines Instantons und eines Antiinstantons berechnet werden [35, 37].

Der Einteilchen-inklusive Wirkungsquerschnitt lässt sich nun am einfachsten mit Hilfe der *Mueller-optischen Theoreme* berechnen [35, 104]. Hiernach werden n -Teilchen-inklusive Wirkungsquerschnitte, in Verallgemeinerung des optischen Theorems, als $2 + n \rightarrow 2 + n$ Vorwärtsstreuamplituden aufgefasst. Diese Theoreme sind zwar etwas weniger rigoros als das normale optische Theorem, doch hat sich die Methode bereits in vielen Untersuchungen zur Vielteilchen-Phänomenologie bewährt.

Der hier zu untersuchende Subprozess kann nun über die $3 \rightarrow 3$ Vorwärtsstreuamplitude vor dem Hintergrund eines Instanton-Antiinstanton-Paares berechnet werden, wie sie in Abbildung 4.2 dargestellt ist. Die zusätzlichen Gluonen im Endzustand werden hierbei

²Wenn das anschließend emittierte Vektorboson ein W -Boson ist, dann ist dies der einzige Beitrag vom Instantonhintergrund. Bei einem Antiinstanton sind entsprechend ein virtuelles Quark und ein reelles Antiquark zu wählen. Im Falle eines emittierten Photons, unter Vernachlässigung der Interferenzen, sind jeweils beide Beiträge zu berücksichtigen.

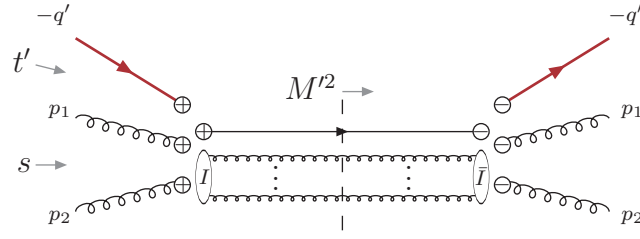


Abbildung 4.2: Dargestellt ist die über das Mueller-optische Theorem gegebene Vorwärtsstreuamplitude zum Einteilchen-inklusive Instanton-Subprozess in gg -Streuung.

mittels des in Abschnitt 1.2.3 vorgestellten Valley-Verfahren [30, 69, 75, 79–88] über die Valley-Wirkung (1.92) bzw. (1.93) als Wechselwirkung zwischen Instanton und Antiinstanton behandelt. Dieses Verfahren ersetzt die sonst nötige aufwändige Aufsummation der Einzelbeiträge durch die Prozesse mit unterschiedlicher Gluonenzahl [77].

Im Folgenden soll nun der Bezug zwischen dem Einteilchen-inklusive Wirkungsquerschnitt und der $3 \rightarrow 3$ Vorwärtsstreuamplitude hergestellt werden. Der Einteilchen-inklusive Wirkungsquerschnitt für den hier interessanten Fall ist zunächst durch [104]

$$d\hat{\sigma}_{gg}^{(I)} = \frac{1}{2s} \frac{d^3q'}{(2\pi)^3} \frac{1}{2q^{0'}} \sum_{n_g} \frac{1}{n_g!} \prod_f \frac{d^3k_f}{(2\pi)^3} \frac{|\hat{\mathcal{T}}_{n_g}^{(I)}|^2}{2k_f^0} (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - q' - k') \quad (4.4)$$

gegeben. Hierbei laufe der Index f über sämtliche nicht explizit betrachteten Teilchen, in diesem Fall also über die eine reelle Quarknullmode und n_g zusätzlicher Gluonen, über die zu summieren ist. Ferner sei $\hat{\mathcal{T}}_{n_g}^{(I)}$ die invariante Amplitude des $g + g \rightarrow \bar{q}^* + q + n_g g$ Prozesses.

Mit Hilfe der Mueller-optischen Theoreme lässt sich nun, so man bei dessen Anwendung über die Virtualität des Prozesses hinwegsieht, die zugehörige Vorwärtsstreuamplitude über [104]

$$2 \Im \left(\hat{\mathcal{T}}^{(I\bar{I})} \right) = \sum_{n_g} \frac{1}{n_g!} \prod_f \int \frac{d^3k_f}{(2\pi)^3} \frac{|\hat{\mathcal{T}}_{n_g}^{(I)}|^2}{2k_f^0} (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - q' - k') \quad (4.5)$$

mit dem Wirkungsquerschnitt (4.4) in Zusammenhang bringen. Für den Instanton-induzierten Subprozess findet man somit schließlich den inklusiven Wirkungsquerschnitt

$$\hat{\sigma}_{gg}^{(I)} = \frac{1}{s} \int \frac{d^3q'}{(2\pi)^3} \frac{1}{2q^{0'}} \Im \left(\hat{\mathcal{T}}^{(I\bar{I})} \right). \quad (4.6)$$

Bei diesem Resultat handelt es sich um einen Spezialfall, da die Zuordnung des anschließend emittierten Vektorbosons zu den vorhandenen Quarknullmoden im betrachteten Fall eindeutig ist. Bei mehreren identischen Quarks ist die rechte Seite von Gl. (4.6) durch deren mittlere Multiplizität zu dividieren. Man vergleiche hierzu auch [35, 104].

Abschließend sei noch der zugehörige Einteilchen-inklusive Wirkungsquerschnitt in den unterschiedlichen interessanten Variablensätzen angegeben

$$q'_0 \frac{d^3 \hat{\sigma}_{gg}}{dq'^3} = 2 \frac{d^3 \hat{\sigma}_{gg}}{d\phi dy' dq_T'^2} = 2s \frac{d^3 \hat{\sigma}_{gg}}{d\phi dt' du'} = 2s \frac{d^3 \hat{\sigma}_{gg}}{d\phi dt' dM'^2} = \frac{1}{2s} \frac{\Im(\hat{\mathcal{T}}^{(I\bar{I})})}{(2\pi)^3}, \quad (4.7)$$

wobei y' die Rapidität und q'_T der Transversalimpuls jeweils zum Impuls q' seien und $u' = (p_2 - q')^2$ die übliche Mandelstam-Variable neben $t' = (p_1 - q')^2$.

4.1.3 Vorwärtsstreuamplitude

Nachdem nun der allgemeine Zusammenhang zwischen dem Einteilchen-inklusive Wirkungsquerschnitt in Gl. (4.7) und der Vorwärtsstreuamplitude hergestellt wurde, steht noch deren Angabe aus. Die Aufstellung der Vorwärtsstreuamplitude verläuft dabei nach den bekannten Methoden der Instanton-Störungsrechnung [37, 76, 105] und findet zunächst in *euklidischer* Metrik statt.

Für insgesamt null Flavors ist diese bereits durch Gl. 1.97 gegeben. Fügt man noch die entsprechenden Faktoren für die virtuelle externe Nullmode, sowie die interne, zwischen den beiden Instantonen ausgetauschte Nullmode hinzu, so erhält man für die Vorwärtsstreuamplitude formal zunächst den Ausdruck

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{T}}^{(I\bar{I})}(p_1, p_2, -q') &= \int d^4 R \int d\rho \int d\bar{\rho} \int dU D(\rho, \mu_r) D(\bar{\rho}, \mu_r) e^{i(p_1+p_2-q') \cdot R} \\ &\quad e^{-\frac{4\pi}{\alpha_s} \Omega(\xi, u)} (\rho \bar{\rho} \mu_r^2)^{\beta_0 \Delta_1 \Omega(\xi, u)} \underbrace{\mathcal{Z}^{(I\bar{I})}(\rho, \bar{\rho}, R, u)}_{\text{interne Quarknullmode}} \\ &\quad \mathcal{R}_g^{(I\bar{I})}(p_1; \rho, \bar{\rho}, u) \mathcal{R}_g^{(I\bar{I})}(p_2; \rho, \bar{\rho}, u) \underbrace{\mathcal{R}_{q^*}^{(I\bar{I})}(-q', \rho, \bar{\rho}, u)}_{\text{externe Quarknullmode}}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Hierbei sei $\Omega^{(I\bar{I})}(\xi, u)$ die Valley-Wechselwirkung (1.93) durch den Gluonenaustausch zwischen Instanton und Antiinstanton. Ferner sei ξ der konforme Parameter (1.91), sowie u die relative Gruppenorientierung zwischen Instanton und Antiinstanton. Die obligatorische Mittelung über Polarisations- und Farbindices wurde dabei bereits in den LSZ-amputierten Gluon-Faktoren \mathcal{R}_g , die in Gl. (1.98) definiert sind, berücksichtigt. Auf die einzelnen Faktoren wird nun im Folgenden näher eingegangen.

Amputierte Quarknullmoden

Die externen Quarknullmoden ergeben sich direkt aus den Betrachtungen zum exklusiven Prozess. Hierbei ist formal zwischen einem Instanton-Antiinstanton-Hintergrund, welcher in der exklusiven Betrachtung einem einfachen Instanton-Hintergrund entspricht, und dem vertauschten Fall, entsprechend einem Antiinstanton-Hintergrund in exklusiver Betrachtung, zu unterscheiden. Da diese im Ergebnis, unter Vertauschung von Quark und Antiquark, identisch sind, werde hier nur der erste Fall vorgestellt.

Die Faktoren für ein LSZ-amputiertes externes Antiquark bzw. Quark in Vorwärtsstreuung mit Impuls $-q'$ sind durch

$$\mathcal{R}_{\bar{q}^*}^{(I\bar{I})}(-q') = \begin{array}{c} \xrightarrow{-q'} \\ \leftarrow \oplus \ominus \xrightarrow{-q'} \end{array} = \bar{\kappa}^{(I\bar{I})}(q') (-iq') \chi_R(q') \chi_R^\dagger(q') (iq') \kappa^{(I)}(-q'), \quad (4.9)$$

$$\mathcal{R}_{q^*}^{(I\bar{I})}(-q') = \begin{array}{c} \xrightarrow{-q'} \\ \rightarrow \oplus \ominus \rightarrow \xrightarrow{-q'} \end{array} = \bar{\phi}^{(I)}(-q') (-iq') \chi_L(q') \chi_L^\dagger(q') (iq') \phi^{(I)}(q') \quad (4.10)$$

gegeben. Mit den amputierten Quarknullmoden in *singulärer* Eichung und *euklidischer* Metrik

$$iq'^{\alpha\dot{\alpha}} \kappa_{\dot{\alpha}}^{(I)i}(-q') = 2\pi\rho^{3/2} \epsilon^{\alpha\beta} U^i{}_{\beta} f\left(\rho\sqrt{q^2}\right) \quad (4.11)$$

$$\bar{\kappa}_{i\dot{\alpha}}^{(I\bar{I})}(q') (-iq'^{\alpha\dot{\alpha}}) = 2\pi\bar{\rho}^{3/2} \bar{U}^\dagger{}_{\dot{\beta}i} \epsilon^{\beta\dot{\alpha}} f\left(\bar{\rho}\sqrt{q^2}\right) \quad (4.12)$$

$$\bar{\phi}^{(I)\dot{\alpha}}{}_j(-q') (-iq'_{\dot{\alpha}\alpha}) = 2\pi\rho^{3/2} U^{\dagger\beta}{}_j \epsilon_{\beta\alpha} f\left(\rho\sqrt{q^2}\right) \quad (4.13)$$

$$(iq'_{\dot{\alpha}\alpha}) \phi^{(I)\alpha j}(q') = 2\pi\bar{\rho}^{3/2} \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{U}^{i\dot{\beta}} f\left(\bar{\rho}\sqrt{q^2}\right) \quad (4.14)$$

erhält man somit

$$\mathcal{R}_{\bar{q}^*}^{(I\bar{I})}(-q') = -\chi_R^\dagger(q') u \chi_R(q') (2\pi)^2 (\rho\bar{\rho})^{3/2} f\left(\rho\sqrt{q^2}\right) f\left(\bar{\rho}\sqrt{q^2}\right) \quad (4.15)$$

$$\mathcal{R}_{q^*}^{(I\bar{I})}(-q') = -\chi_L^\dagger(q') \bar{u} \chi_L(q') (2\pi)^2 (\rho\bar{\rho})^{3/2} f\left(\rho\sqrt{q^2}\right) f\left(\bar{\rho}\sqrt{q^2}\right). \quad (4.16)$$

Hierbei gebe U die Gruppenorientierung des Instantons und \bar{U} die des Antiinstantons wieder. Die relative Orientierung zwischen beiden sei durch $u = U^\dagger \bar{U}$ gegeben. Weiterhin wurde der bereits in Abschnitt 3.4 diskutierte Formfaktor $f(\omega) = \omega K_1(\omega)$ gewählt, welcher das korrekte asymptotische Verhalten für große Werte von ω aufweist. Es sei daran erinnert, dass der Formfaktor f letztlich vom effektiven Vertex aus der Ankopplung eines elektroschwachen Vektorbosons an die virtuelle Quarknullmode im Instanton-Hintergrund stammt. Dieser weist allerdings zwei Formfaktoren auf, einen mit dem inneren Impuls q' im Argument und einen mit dem äußeren q . Nach analytischer Fortsetzung in die Minkowskimetrik sind beide zeitartig und genügen der Hierarchie $Q'^2 = q'^2 > Q^2 = q^2$, so dass letztlich der Formfaktor bezüglich q' unterdrückt wird. Konsequenterweise ist also auch an dieser Stelle der Impuls des Vektorbosons anstelle der des virtuellen Quarks heranzuziehen.

Für die weiteren Betrachtungen wird, wie sich an späterer Stelle erschließen wird, die relative Orientierung zwischen Instanton und Antiinstanton mit der stärksten attraktiven Ausrichtung eine wichtige Rolle einnehmen. Für hinreichend großes ξ ist diese durch die Dipolkonfiguration $u = \hat{R}$ gegeben [30, 82], wobei $\hat{R} = R/\sqrt{R^2}$ in euklidischer Metrik der normierte Einheitsvektor in R -Richtung sei (vergl. hierzu auch Abschnitt 1.2.3). Die Quarkfaktoren werden nun zur Minkowskimetrik über die Wickrotation

$$R_4 \rightarrow iR_0 \quad \vec{R} \rightarrow \vec{R} \quad (4.17)$$

$$p_4 \rightarrow -ip_0 \quad \vec{p} \rightarrow -\vec{p} \quad (4.18)$$

fortgesetzt, wobei p stellvertretend für sämtliche infrage kommenden Impulse stehe. Mit den Sigma-Matrizen $\sigma = (\mathbb{1}, \vec{\tau})$ und $\bar{\sigma} = (\mathbb{1}, -\vec{\tau})$ in Minkowskimetrik ergeben sich dabei die Transformationen $R \cdot \sigma \rightarrow iR \cdot \sigma$ bzw. $R \cdot \bar{\sigma} \rightarrow iR \cdot \bar{\sigma}$, so dass sich sämtliche Quarkfaktoren in Minkowskimetrik schließlich zu

$$\mathcal{R}_{q^*, \bar{q}^*}^{(I\bar{I})}(-q') \Big|_M = (2\pi)^2 (\rho\bar{\rho})^{3/2} \frac{-i 2R \cdot q'}{\sqrt{-R^2 + i\varepsilon R_0}} f\left(\rho\sqrt{-q^2 + i\varepsilon}\right) f\left(\bar{\rho}\sqrt{-q^2 - i\varepsilon}\right) \quad (4.19)$$

ergeben.

Hierbei ist darauf zu achten, dass das Argument der beiden Formfaktoren f , im Unterschied zum tief-inelastischen Fall, wegen des zeitartigen Impulses q imaginär ist. Zur Regularisierung wurde zu $-q^2$ jeweils ein infinitesimaler Imaginärteil $\pm i\varepsilon$ addiert, so dass dessen Quadratwurzel einen nichtverschwindenden positiven Realteil erhält, wie die auch bereits in Kapitel 3 zum einfachsten Prozess durchgeführt wurde. Da die auslaufende Nullmode der Vorwärtsstreuamplitude dem komplex Konjugierten der einlaufenden zuzuordnen ist, fällt das Vorzeichen des Regularisierungsterms jeweils entsprechend unterschiedlich aus.

Amputierte Gluonen

Die LSZ-amputierten Gluonen wurden bereits in Abschnitt 1.2.3 in Gl. (1.98) definiert. Einsetzen der entsprechenden Feldkonfiguration (1.81) für das Instanton und entsprechend für das Antiinstanton ergibt zunächst in euklidischer Metrik [34, 76]

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_g^{(I\bar{I})}(p) &= \lim_{p^2 \rightarrow 0} \frac{1}{16} \sum_{r,a} p^2 \text{tr} \left(\lambda^a \varepsilon_r^* \cdot A^{(I)}(-p) \right) p^2 \text{tr} \left(\lambda^a \varepsilon_r \cdot A^{(I)}(p) \right) \\ &= \frac{\pi^4 (\rho\bar{\rho})^2}{16g_s^2} \sum_{r,a} (\lambda^a)^j_i U^i_\alpha (\varepsilon_r \bar{p} - p \bar{\varepsilon}_r)^\alpha_\beta U^{\dagger\beta}_j (\lambda^a)^l_k \bar{U}^{k\dot{\alpha}} (\bar{p} \varepsilon_r^* - \bar{\varepsilon}_r^* p)_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} \bar{U}^{\dagger}_{\dot{\beta}l}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Unter Ausnutzung der Identitäten (3.26) für die Gell-Man-Matrizen erhält man weiterhin

$$\mathcal{R}_g^{(I\bar{I})}(p) = \frac{8\pi^4 (\rho\bar{\rho})^2}{16g_s^2} \sum_r \left[\text{tr} (\bar{u} \varepsilon_r \bar{p} u \bar{p} \varepsilon_r^*) - \frac{1}{3} \text{tr} (\varepsilon_r \bar{p}) \text{tr} (\bar{p} \varepsilon_r^*) \right], \quad (4.21)$$

wobei $\varepsilon \cdot p = 0$ verwendet wurde. Für die Summe über die Gluon-Polarisationen lässt sich in euklidischer Metrik noch die Substitution $\sum \varepsilon_\mu \varepsilon_\nu^* = \delta_{\mu\nu}$ verwenden, so dass man mit Hilfe von

$$\text{tr}(p\bar{u}) = p^{\alpha\dot{\alpha}} \bar{u}_{\dot{\alpha}\alpha} = -\epsilon^{\dot{\alpha}\beta} \bar{p}_{\dot{\beta}\beta} \epsilon^{\beta\alpha} \bar{u}_{\dot{\alpha}\alpha} = \text{tr}(\bar{p}u) \quad (4.22)$$

zunächst in euklidischer Metrik

$$\mathcal{R}_g^{(I\bar{I})}(p) = -\frac{8\pi^4 (\rho\bar{\rho})^2}{2g_s^2} (u \cdot p)^2 \quad (4.23)$$

erhält. In der Ausrichtung mit der stärksten Attraktivität ergeben sich die Gluonfaktoren schließlich nach einer Wickrotation in die Minkowskimetrik zu

$$\mathcal{R}_g^{(I\bar{I})}(p) \Big|_M = \frac{8\pi^4 (\rho\bar{\rho})^2}{2g_s^2} \frac{(R \cdot p)^2}{R^2}. \quad (4.24)$$

Interne Quarknullmoden

Die Faktoren für die intern ausgetauschten Quarknullmoden sind durch die Fermion-Überlappungs-Integrale [32, 37]

$$\mathcal{Z}^{(I\bar{I})} = \int d^4x \bar{\kappa}^{(I\bar{I})}(x - R) \partial \kappa^{(I)}(x) \quad \bar{\mathcal{Z}}^{(I\bar{I})} = \int d^4x \bar{\phi}^{(I)}(x) \bar{\partial} \kappa^{(I\bar{I})}(x - R) \quad (4.25)$$

gegeben. In der relativen Ausrichtung mit der stärksten Attraktivität $u = \hat{R}$ ergeben sich diese zu

$$\mathcal{Z}^{(I\bar{I})}(u = \hat{R}) = \bar{\mathcal{Z}}^{(I\bar{I})}(u = \hat{R}) = \omega(\xi), \quad (4.26)$$

wobei ω durch

$$\omega(\xi) = \frac{6B\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)}{\lambda^{3/2}} {}_2F_1\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}; 4; 1 - \frac{1}{\lambda^2}\right), \quad \text{mit } \lambda = \frac{1}{2} \left(\xi + \sqrt{\xi^2 - 4}\right) \quad (4.27)$$

und dem bekannten konformen Parameter ξ , gegeben ist.

4.2 Sattelpunktsnäherung

Nachdem nun sämtliche Terme des Einteilchen-inklusive Wirkungsquerschnittes zur Verfügung stehen, bleibt für dessen Auswertung noch die Integration über die kollektiven Koordinaten $\zeta_i \in \{\rho, \bar{\rho}, R, u\}$ übrig. Die Situation verhält sich dabei sehr ähnlich wie beim entsprechenden Fall aus tief-inelastischer Streuung, bei dem die Integration sehr erfolgreich über eine Sattelpunktsnäherung durchgeführt werden konnte [37]. Die dort gewonnenen Erfahrungen nutzend soll die Auswertung für den vorliegenden Fall nun über dasselbe Verfahren angegangen werden.

Die weitere Problemstellung lässt sich in etwa durch die folgende Aufgabe skizzieren: Zu berechnen sei ein mehrdimensionales Integral, welches durch den Sattelpunkt $\zeta = \zeta_{\text{sp}}$ eines effektiven Exponenten Γ_{eff} , mit $\nabla_i \Gamma_{\text{eff}}(\zeta_{\text{sp}}) = 0$, dominiert werde. Hierbei seien ζ_i die entsprechenden kollektiven Koordinaten der betrachteten Instanton-Antiinstanton-Konfiguration. Nach der Entwicklung des effektiven Exponenten um den Sattelpunkt lässt sich das Integral näherungsweise durch ein Gaußintegral

$$\int d^n \zeta f(\zeta) e^{-\Gamma_{\text{eff}}(\zeta)} \approx \frac{(2\pi)^{n/2} f(\zeta_{\text{sp}}) e^{-\Gamma_{\text{eff}}(\zeta_{\text{sp}})}}{\sqrt{\det H}} \quad (4.28)$$

bestimmen, wobei $H_{ij} = \nabla_i \nabla_j \Gamma_{\text{eff}}$ die Hessematrix des effektiven Exponenten am Sattelpunkt sei. Hierbei ist zu beachten, dass der Sattelpunkt im wesentlichen ein Maximum von $-\Gamma_{\text{eff}}$ sein sollte, also gewissermaßen auf einem Bergsattel und nicht in einer Talsohle liegt. Wie sich herausstellen wird, weist die Hessematrix zu Γ im vorliegenden, wie auch bereits im tief-inelastischen Fall in der Tat genau einen negativen und sonst nur positive Eigenwerte auf. Durch die eine negative Mode erhält die Vorwärtsstreuamplitude einen nichtverschwindenden Imaginärteil, wie im Mueller-optischen Theorem benötigt.

Abgesehen vom zusätzlichen Gluon im Anfangszustand unterscheidet sich der hier diskutierte Fall im Wesentlichen von demjenigen in tief-inelastischer Streuung dadurch, dass die zu den Virtualitäten bzw. Massen Q' und Q zugehörigen Impulse q' und q nun *zeit-* statt *raumartig* sind. Dies wird einige sehr interessante Modifikationen bei der Berechnung der Sattelpunktsnäherung zur Folge haben, welche sich nicht unerheblich auf den zu berechnenden Wirkungsquerschnitt auswirken.

4.2.1 Vorbereitungen

Ausgangsposition für das weitere Vorgehen ist nun die Vorwärtsstreuamplitude (4.8), welche noch in die Minkowskimetrik fortzusetzen ist. Bevor die eigentliche Sattelpunktsnäherung angegangen wird, sollen hierzu noch einige vorbereitende Maßnahmen getroffen werden, die das Problem auf den den hier wesentlichen Teil reduzieren.

Zunächst ist festzuhalten, dass die Integration über die Gruppenorientierung unabhängig von den übrigen kollektiven Koordinaten durchgeführt werden kann. Für einen hinreichend großen konformen Parameter ξ ist die Valley-Wechselwirkung (1.93) mit der stärksten attraktiven Ausrichtung durch die *Dipolkonfiguration* mit $u = \hat{R}$ gegeben, wobei \hat{R} der normierte Abstandsvektor zwischen Instanton und Antiinstanton sei [30, 82]. Die Sattelpunktsnäherung des Gruppenintegrals in der Dipolnäherung ergibt sich schließlich zu [37, 42, 86]

$$\int dU e^{-\frac{4\pi}{\alpha_s} \Omega^{(I\bar{I})}(U, \xi)} \approx \frac{1}{9\sqrt{\pi}} \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \frac{6}{\tilde{\Omega}^{(I\bar{I})}} \right)^{7/2} e^{-\frac{4\pi}{\alpha_s} \Omega^{(I\bar{I})}(\xi)}, \quad \tilde{\Omega}^{(I\bar{I})} \approx \xi \Omega^{(I\bar{I})}'(\xi), \quad (4.29)$$

wobei $\Omega^{(I\bar{I})}'(\xi)$ die Ableitung der Valley-Wechselwirkung nach ξ in Dipolnäherung (1.95) sei. Die Potenz des Vorfaktors $\left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right)^{7/2}$ kommt hierbei durch die $4N_c - 5 = 7$ relevanten Parameter der Gruppenorientierung zustande.³

Die verbleibenden, in Gl. (4.29) nicht aufgeführten Terme der Vorwärtsstreuamplitude (4.8) stellen nun im Sinne von Gl. (4.28) in Bezug auf die Gruppenintegration den Vorfaktor $f(\zeta)$ der Exponentialfunktion dar. Entsprechend der Sattelpunktsnäherung sind diese nach der Gruppenintegration nun am Sattelpunkt $u = \hat{R}$ auszuwerten. Die Vorwärtsstreuamplitude kann nun zur Minkowskimetrik unter den Gln. (4.17) und (4.18) fortgesetzt werden, wobei der konforme Parameter zu

$$\xi = \frac{R^2 + \rho^2 + \bar{\rho}^2}{\rho\bar{\rho}} \rightarrow \frac{-R_0^2 + i\varepsilon R_0 + \vec{R}^2 + \rho^2 + \bar{\rho}^2}{\rho\bar{\rho}} \quad (4.30)$$

fortzusetzen ist [37, 83]. Die Ersetzung $R_4^2 \rightarrow -R_0^2 + i\varepsilon R_0$ dient hierbei zur Regularisierung und zur Definition der Phase der Wurzel $\sqrt{R_4^2} \rightarrow \sqrt{-R_0^2}$.

³Man vergleiche hierzu Gl. (1.38) und Ref. [12]. Die Gruppenintegration läuft zunächst über die acht Parameter der $SU(3)$, von denen einer trivial ist, da die eingebettete $SU(2)$ des Instantons mit dem zugehörigen Generator, z.B. λ_8 , kommutiert.

Nach Auswertung der Gruppenintegration erhält man für die Vorwärtsstreuamplitude in Minkowskimetrik schließlich

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{T}}^{(I\bar{I})}(p_1, p_2, -q') \Big|_M \approx i \int d\rho \int d\bar{\rho} \int dR_0 \int d^3R d^2 \left(\frac{2\pi}{\alpha_s} \right)^{12} \sqrt{\rho\bar{\rho}} e^{-\Gamma_{\text{eff}}(\rho, \bar{\rho}, R)} \\ \left[\frac{1}{9\sqrt{\pi}} \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \frac{6}{\xi \Omega^{(I\bar{I})'}(\xi)} \right)^{7/2} \right] \frac{\pi}{2} \left(\rho\sqrt{-q^2 + i\varepsilon} \right)^{1/2} \left(\bar{\rho}\sqrt{-q^2 - i\varepsilon} \right)^{1/2} \\ [\omega(\xi)] \left[\frac{\pi^3}{\alpha_s} \frac{(R \cdot p_1)^2}{R^2} \right] \left[\frac{\pi^3}{\alpha_s} \frac{(R \cdot p_2)^2}{R^2} \right] \left[\frac{-2i(2\pi)^2 R \cdot q'}{\sqrt{-R^2 + i\varepsilon R_0}} \right]. \quad (4.31) \end{aligned}$$

Hierbei sei

$$\begin{aligned} \Gamma_{\text{eff}} = -i(p_1 + p_2 - q') \cdot R + \left[\rho\sqrt{-q^2 + i\varepsilon} + \bar{\rho}\sqrt{-q^2 - i\varepsilon} \right] \\ + \left[\frac{4\pi}{\alpha_s} - \beta_0 \Delta_1 \ln(\rho\bar{\rho}\mu_r^2) \right] \left(1 + \Omega^{(I\bar{I})}(\xi) \right) + \Delta_2 \ln(\rho\bar{\rho}\mu_r^2) \quad (4.32) \end{aligned}$$

der effektive Exponent, welcher das verbleibende Integral im Wesentlichen dominiert. Zum Vergleich sei hier noch der entsprechende effektive Exponent aus tief-inelastischer Streuung angegeben:

$$\Gamma_{\text{eff}}|_{\text{DIS}} = -i(p - q') \cdot R + [\rho + \bar{\rho}] \sqrt{-q'^2} + \dots \quad (4.33)$$

Der erste Term in Gl. (4.32) stammt unmittelbar aus der Bedingung für die Impulserhaltung und tritt bereits, ebenso wie die von $\Omega^{(I\bar{I})}$ abhängigen Terme, welche durch die Gluonenresummation über die Valley-Methode eingehen, in Gl. (4.8) auf. Der zweite Term stammt ferner von der asymptotische Näherung der Formfaktoren $f(\omega) = \omega K_1(\omega)$ aus Gl. (1.84) der virtuellen Quarknullmoden (4.19). Hierbei fällt sofort der Unterschied zwischen beiden Fällen auf, der mit der Zeit- bzw. Raumartigkeit zusammenhängt. Hinzu kommt noch der Tunnelexponent $\frac{4\pi}{\alpha_s}$ aus der Dichteverteilungen (1.62) $D(\rho)$ bzw. $D(\bar{\rho})$, sowie die Terme $\sim \ln(\rho\bar{\rho}\mu_r^2)$, welche zur Gewährleistung der Skaleninvarianz in Zweischleifennäherung dienen (vergl. hierzu auch Abschnitt 1.2.1) und für die Stabilität des Ergebnisses unabdingbar sind [37]. Die für die verwendeten Faktoren Δ_1 und Δ_2 ist die Amplitude renormierungsgruppeninvariant in Zweischleifennäherung in Gl. (1.63) angegeben, für $\Delta_1 = 1$ und $\Delta_2 = 0$ auf Einschleifenniveau [37], der Nullschleifenfall ergibt sich weiterhin für $\Delta_1 = 0$, entsprechend $\frac{4\pi}{\alpha_s} \rightarrow \infty$.

Für die weitere Berechnung der Vorwärtsstreuamplitude bietet es sich nun an, diese im Schwerpunktsystem des zwischen Instanton und Antiinstanton ausgetauschten Impulses $k' = p_1 + p_2 - q'$ mit $\vec{k}' = 0$ auszuwerten. Dies ist möglich, solange $M'^2 = k'^2 \neq 0$ gilt. Im Limes $M'^2 \rightarrow 0$ strebt der Prozess dabei gegen den Sonderfall des einfachsten Prozesses, welcher bereits in Kapitel 3 ausgiebig diskutiert wurde. Im Schwerpunktsystem vereinfacht sich der erste Term des effektiven Exponenten (4.32) zu

$$(p_1 + p_2 - q') \cdot R \stackrel{\vec{k}'=0}{=} M' R_0. \quad (4.34)$$

Dessen übrige Terme hängen nur noch ausschließlich vom konformen Parameter ξ und somit von \vec{R}^2 ab. Es stellt sich heraus (hier ohne Herleitung), dass die zugehörigen Sattelpunktsgleichungen

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial R_i} = 0 \quad (4.35)$$

eindeutig durch $\vec{R} = 0$ gelöst werden und der entsprechende Anteil des Sattelpunktsintegrals faktorisiert [37].

Die Sattelpunktslösung $\vec{R}_{\text{sp}} = 0$ im Schwerpunktsystem $\vec{k}' = 0$ bedeutet ferner, dass die Vektoren R und k' im Sattelpunkt parallel zueinander ausgerichtet sind und demnach der normierte Abstandsvektor sich durch

$$\frac{R}{\sqrt{R^2}} = \frac{k'}{M'} \quad (4.36)$$

ausdrücken lässt, so dass sich die Faktoren in der Vorwärtsstreuamplitude für die externen Teilchen entsprechend durch Impulse ausdrücken lassen.

4.2.2 Sattelpunktslösung

Nach diesen Vorbemerkungen kann nun die eigentliche Sattelpunktsintegration zur Bestimmung der Vorwärtsstreuamplitude

$$\begin{aligned} \hat{T}^{(I\bar{I})}(p_1, p_2, -q') \Big|_M &\approx -i d^2 \left(\frac{2\pi}{\alpha_s} \right)^{12} \left(\frac{\pi}{2} Q \right) \\ &\quad \left[\frac{\pi^3}{\alpha_s} \frac{u'^2}{M'^2} \right] \left[\frac{\pi^3}{\alpha_s} \frac{t'^2}{M'^2} \right] \left[(2\pi)^2 \frac{s - M'^2 - Q'^2}{M'} \right] \\ &\quad \int d\rho \int d\bar{\rho} \int dR_0 \int d^3 R \rho \bar{\rho} [\omega(\xi)]^{2n_f - 1} \frac{1}{9\sqrt{\pi}} \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \frac{6}{\xi S^{(I\bar{I})'}} \right)^{7/2} e^{-\Gamma_{\text{eff}}(\rho, \bar{\rho}, R)} \end{aligned} \quad (4.37)$$

angegangen werden. Dabei wurden in Gl. (4.37) die Valley-Wechselwirkung durch die Valley-Wirkung via $\Omega^{(I\bar{I})} = S^{(I\bar{I})} - 1$ ersetzt und die Quadratwurzeln $\sqrt{-q^2 + i\varepsilon} = iQ$ und $\sqrt{-q^2 - i\varepsilon} = -iQ$ entsprechend ihrer Phase ausgewertet. Ferner seien $s = (p_1 + p_2)^2$, $t' = (p_1 - q')^2$ und $u' = (p_2 - q')^2$ die Mandelstamvariablen des betrachteten Prozesses.

Es gilt nun den Sattelpunkt der verbleibenden kollektiven Koordinaten $\rho, \bar{\rho}$ und R_0 für den effektiven Exponenten

$$\Gamma_{\text{eff}} = -iM'R_0 + iQ(\rho - \bar{\rho}) + \left[\frac{4\pi}{\alpha_s} - \beta_0 \Delta_1 \ln(\rho \bar{\rho} \mu_r^2) \right] S^{(I\bar{I})}(\xi) + \Delta_2 \ln(\rho \bar{\rho} \mu_r^2) \quad (4.38)$$

$$\Gamma_{\text{eff}}|_{\text{DIS}} = -i\sqrt{s'}R_0 + Q(\rho + \bar{\rho}) + \dots \quad (4.39)$$

im Schwerpunktsystem von $k' = p_1 + p_2 - q'$ mit Hilfe der Sattelpunktsgleichungen

$$\frac{\partial}{\partial \zeta_i} \Gamma_{\text{eff}}(\zeta_{\text{sp}}) = 0, \quad \zeta_i \in \{\rho, \bar{\rho}, R_0, \vec{R}\} \quad (4.40)$$

zu bestimmen, wobei \vec{R} hier der Vollständigkeit halber mit aufgeführt wurde.

Bis auf die kinematische Interpretation der Skalen M' und Q ist der effektive Exponent dabei absolut identisch zu seinem Pendant (4.39) aus der tief-inelastischen Streuung aus Ref. [37] – mit einer wesentlichen Ausnahme, worauf im Folgenden einzugehen sein wird.

Qualitative Analyse für R_0

Zunächst ist festzuhalten, dass ebenso wie im tief-inelastischen Fall der Vorfaktor des ersten Terms $-iM'R_0$ im Exponenten (4.38) imaginär ist, wodurch der Sattelpunkt in R_0 auf die negative imaginäre Halbachse entfällt und demnach nicht auf dessen Integrationskontur liegt [37]. Um den Sattelpunkt trotzdem als Entwicklungspunkt für die Approximation der Integration nutzen zu können, ist der Integrationsverlauf dahingehend zu deformieren, dass dieser durch den Sattelpunkt verläuft. Hierbei ist darauf zu achten, dass der Imaginärteil des effektiven Exponenten entlang des deformierten Verlaufes durch den Sattelpunkt konstant bleibt, was im vorliegenden Fall effektiv durch eine Wickrotation zu

$$R_0 \rightarrow -iR_4 \quad (4.41)$$

erreicht werden kann.

Qualitative Analyse für ρ und $\bar{\rho}$

Für die beiden Instantongrößen ρ und $\bar{\rho}$ unterscheidet sich die vorliegende Situation dagegen zum tief-inelastischen Fall wesentlich. Der entsprechende Term $+iQ(\rho - \bar{\rho})$ im Exponenten (4.38) hat nun ebenfalls einen imaginären Vorfaktor iQ , wobei die beiden ρ s mit unterschiedlichen Vorzeichen eingehen. Dieser Unterschied kommt unmittelbar durch die *Zeitartigkeit* des Impulses q und der damit einhergehenden Phase der Quadratwurzel $\sqrt{-q^2 + i\varepsilon} = +iQ$ bzw. $\sqrt{-q^2 - i\varepsilon} = -iQ$ zustande. Da im tief-inelastischen Fall der entsprechende Impuls q' *raumartig* ist, fällt die entsprechende Quadratwurzel dort reell aus und somit auch der zu ρ und $\bar{\rho}$ jeweils gehörende Vorfaktor. Bedingt durch die unterschiedliche Phase der beiden Quadratwurzeln ist der Vorfaktor von ρ nun zudem der negative von $\bar{\rho}$.

Ohne hierauf nun im Detail eingehen zu wollen, findet man für ρ , wie zuvor auch für R_0 , einen Sattelpunkt auf der negativen imaginären Halbachse und für $\bar{\rho}$ den entsprechend komplexkonjugierten Punkt, also $\rho = -\bar{\rho}$ im Sattelpunkt. Um auch für diese Variablen den Integrationsverlauf über den Sattelpunkt zu führen, ist also auch dieser entsprechend zu deformieren, was sich in der Nähe des Sattelpunktes effektiv durch die analytische Fortsetzung

$$\rho \rightarrow -i\rho \quad \bar{\rho} \rightarrow +i\bar{\rho} \quad (4.42)$$

erreichen lässt. Diese verläuft dabei so, dass beide Faktoren $iQ\rho \rightarrow Q\rho$ und $-iQ\bar{\rho} \rightarrow Q\bar{\rho}$ die gleiche Phase $\arg(Q\rho) = \arg(Q\bar{\rho}) = 0$ erhalten, sowie die Phase von $\rho\bar{\rho} \rightarrow \rho\bar{\rho} \in \mathbb{R}$ konstant bleibt. Der Sattelpunkt für ρ und $\bar{\rho}$ ist zudem für beide nach der Fortsetzung identisch.

Die dargelegte Situation verhält sich im Übrigen völlig analog zur ρ -Integration beim einfachsten Prozess (vergl. Diskussion in Abschnitt 3.1.3), bei dem das Integral nach der Wickrotation zur Minkowskimetrik durch $\rho \rightarrow -i\rho$ analytisch fortzusetzen war. Insofern verwundert es in keinster Weise, dass der Sattelpunkt, der den Hauptbeitrag zum Integral liefert, für ρ nun auf der imaginären Achse liegt. Der Umstand, dass die Fortsetzung für $\bar{\rho}$ in entgegengesetzte Richtung zu der von ρ durchzuführen ist, erklärt sich dadurch, dass $\bar{\rho}$ letztlich über die komplex Konjugierte der Streuamplitude in die Forwärtstreuamplitude eingeht.

Analytisch fortgesetztes Sattelpunktproblem

Nach der analytischen Fortsetzung des Integrationsverlaufes der verbleibenden kollektiven Koordinaten ergibt sich der effektive Exponent zu

$$\Gamma_{\text{eff}} = -M'R_4 + Q(\rho + \bar{\rho}) + \left[\frac{4\pi}{\alpha_s} - \beta_0 \Delta_1 \ln(\rho \bar{\rho} \mu_r^2) \right] S^{(I\bar{I})}(\xi) + \Delta_2 \ln(\rho \bar{\rho} \mu_r^2) \quad (4.43)$$

$$\Gamma_{\text{eff}}|_{\text{DIS}} = -\sqrt{s'}R_4 + Q'(\rho + \bar{\rho}) + \dots, \quad (4.44)$$

ferner setzt sich der konforme Parameter im zeitartigen Fall in der Nähe des Sattelpunktes zu

$$\xi \rightarrow \frac{R^2 - \rho^2 - \bar{\rho}^2}{\rho \bar{\rho}} \quad (4.45)$$

fort. Als Zwischenlösung des Sattelpunktes erhält man für die kollektiven Koordinaten zudem

$$\bar{\rho}_{\text{sp}} = \rho_{\text{sp}} \quad R_{\text{sp}} \equiv iR_{0\text{sp}} = R_{4\text{sp}} = \rho_{\text{sp}} \sqrt{\xi_{\text{sp}} + 2} \quad \vec{R}_{\text{sp}} = 0. \quad (4.46)$$

Die Sattelpunktsform des konformen Parameters

$$\xi_{\text{sp}} = \begin{cases} \frac{R_{\text{sp}}^2}{\rho_{\text{sp}}^2} - 2 & \text{zeitartig (LHC)} \\ \frac{R_{\text{sp}}^2}{\rho_{\text{sp}}^2} + 2 & \text{raumartig (DIS)} \end{cases} \quad (4.47)$$

wird sich dabei als Ursache für wesentliche Merkmale des hier betrachteten *zeitartigen* Falles im Vergleich zu dem in tief-inelastischer Streuung herausstellen.

Bis auf den vom raumartigen Fall abweichenden Zusammenhang aus Gl. (4.47) zwischen dem konformen Parameter ξ und den Sattelpunkten R_{sp} und ρ_{sp} der kollektiven Koordinaten und die abweichende Bedeutung von M' im Zeitartigen zu $\sqrt{s'}$ im Raumartigen,⁴ ist der effektive Exponent (4.43) nun formal absolut identisch zu seinem Pendant in tief-inelastischer Streuung. Das hier diskutierte zeitartige Problem konnte somit auf das entsprechende raumartige Problem zurückgeführt werden. Das weitere formale Vorgehen kann also prinzipiell aus Ref. [37] übernommen werden.

⁴In der raumartigen Problemstellung in tief-inelastischer eP -Streuung ist $\sqrt{s'}$ die Schwerpunktsenergie des Subprozesses.

Geht man von den Lösungen (4.46) aus, so reduziert sich das Sattelpunktsproblem effektiv auf die beiden Gleichungen

$$\frac{1}{2} M' R_{\text{sp}} - Q \rho_{\text{sp}} + \beta_0 \Delta_1 S^{(I\bar{I})}(\xi_{\text{sp}}) - \Delta_2 = 0 \quad (4.48)$$

$$\frac{1}{2} M' R_{\text{sp}} - \frac{R_{\text{sp}}^2}{\rho_{\text{sp}}^2} \left(\frac{4\pi}{\alpha_s} - \beta_0 \Delta_1 \ln(\rho_{\text{sp}}^2 \mu_r^2) \right) S^{(I\bar{I})}'(\xi_{\text{sp}}) = 0. \quad (4.49)$$

Zu deren Lösung bietet es sich noch an, R_{sp} über dessen Sattelpunktsform aus Gl. (4.46) durch den konformen Parameter ξ_{sp} auszudrücken, so dass sich die beiden Gleichungen

$$\rho_{\text{sp}} Q = \frac{\beta_0 \Delta_1 S^{(I\bar{I})}(\xi_{\text{sp}}) - \Delta_2}{1 - \frac{1}{2} \tau \sqrt{\xi_{\text{sp}} + 2}} \quad (4.50)$$

$$0 = \frac{1}{2} \frac{\tau \rho_{\text{sp}} Q}{\sqrt{\xi_{\text{sp}} + 2}} - \left(\frac{4\pi}{\alpha_s} - 2\beta_0 \Delta_1 \ln(\rho_{\text{sp}} Q \kappa) \right) S^{(I\bar{I})}'(\xi_{\text{sp}}) \quad (4.51)$$

ergeben. Hierbei wurde ferner die Skalierungsvariable

$$\tau \equiv \frac{M'}{Q} \quad (4.52)$$

eingeführt, sowie die Renormierungsskala durch

$$\mu_r = \kappa Q \quad (4.53)$$

ausgedrückt. Durch Einsetzen der ersten in die zweite Gleichung erhält man schließlich die Bestimmungsgleichung für den konformen Parameter ξ_{sp} , deren Lösung nur noch von der Wahl der kinematischen Variablen τ und Q sowie von κ abhängt.

Für gegebenes Q lassen sich die beiden Gleichungen (4.50) und (4.51) nun leicht numerisch lösen (s. folgender Abschnitt), so dass sich der Imaginäranteil der Vorwärtsstreuamplitude entsprechend berechnen lässt. Hierbei stellt sich heraus, dass die Wahl der Renormierungsskala quasi keinerlei Auswirkungen auf die Sattelpunktlösung hat, so lange diese nicht zu viele Größenordnungen von Q entfernt ist bzw. noch hinreichend groß gegenüber der QCD-Skala Λ_{QCD} liegt. Bei der Lösung bietet sich für die Valley-Wechselwirkung ferner die Approximation [106]

$$S^{(I\bar{I})} \approx 1 - \frac{6}{\left(\xi + \frac{1}{2}\right)^2} \quad (4.54)$$

an, die für weite Bereiche eine exzellente Näherung darstellt, wie Abbildung 4.3 zu entnehmen ist.

Für die Auswertung des Sattelpunktsintegrals ist noch die Hessematrix

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Gamma}{\partial R_1 \partial R_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial \Gamma}{\partial R_2 \partial R_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial \Gamma}{\partial R_3 \partial R_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \Gamma}{\partial R_4 \partial R_4} & \frac{\partial \Gamma}{\partial R_4 \partial \rho} & \frac{\partial \Gamma}{\partial R_4 \partial \bar{\rho}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \Gamma}{\partial R_4 \partial \rho} & \frac{\partial \rho \partial \rho}{\partial \Gamma} & \frac{\partial \rho \partial \bar{\rho}}{\partial \Gamma} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \Gamma}{\partial R_4 \partial \bar{\rho}} & \frac{\partial \Gamma}{\partial \rho \partial \rho} & \frac{\partial \Gamma}{\partial \rho \partial \bar{\rho}} \end{pmatrix} \quad (4.55)$$

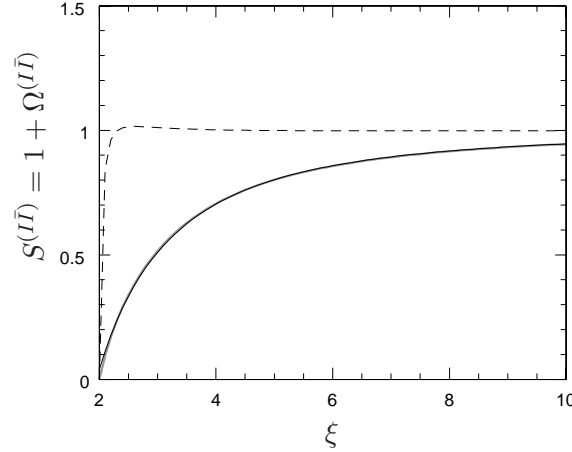


Abbildung 4.3: Approximierte Valley-Wirkung (4.54) und deren Verhältnis zur exakten Valley-Wirkung (gestrichelt).

zu bestimmen, deren Einträge sich im Sattelpunkt zu

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma}{\partial R_i \partial R_i} &= \frac{M'}{R_{\text{sp}}} \\ \frac{\partial \Gamma}{\partial R_4 \partial R_4} &= \frac{M'}{R_{\text{sp}}} \left(1 + 2 \frac{R_{\text{sp}}^2 S^{(I\bar{I})''}}{\rho_{\text{sp}}^2 S^{(I\bar{I})'}} \right) \\ \frac{\partial \Gamma}{\partial R_4 \partial \rho} &= \frac{\partial \Gamma}{\partial R_4 \partial \bar{\rho}} = -\frac{M'}{\rho_{\text{sp}}} \left(1 + \frac{R_{\text{sp}}^2 S^{(I\bar{I})''}}{\rho_{\text{sp}}^2 S^{(I\bar{I})'}} \right) - \frac{2\Delta_1 \beta_0 S^{(I\bar{I})'} R_{\text{sp}}}{\rho_{\text{sp}}^2 \rho_{\text{sp}}} \\ \frac{\partial \Gamma}{\partial \rho \partial \rho} &= \frac{\partial \Gamma}{\partial \bar{\rho} \partial \bar{\rho}} = \frac{M'}{R_{\text{sp}}} \left(\frac{1}{2} \frac{R_{\text{sp}}^4 S^{(I\bar{I})''}}{\rho_{\text{sp}}^4 S^{(I\bar{I})'}} + \frac{1}{2} \frac{R_{\text{sp}}^2}{\rho_{\text{sp}}^2} - 1 + \frac{1}{\tau} \frac{R_{\text{sp}}}{\rho_{\text{sp}}} \right) + 2\Delta_1 \beta_0 S^{(I\bar{I})'} \frac{R_{\text{sp}}^2}{\rho_{\text{sp}}^4} \\ \frac{\partial \Gamma}{\partial \rho \partial \bar{\rho}} &= \frac{M'}{R_{\text{sp}}} \left(\frac{1}{2} \frac{R_{\text{sp}}^4 S^{(I\bar{I})''}}{\rho_{\text{sp}}^4 S^{(I\bar{I})'}} + \frac{1}{2} \frac{R_{\text{sp}}^2}{\rho_{\text{sp}}^2} + 1 \right) + 2\Delta_1 \beta_0 S^{(I\bar{I})'} \frac{R_{\text{sp}}^2}{\rho_{\text{sp}}^4} \end{aligned} \quad (4.56)$$

ergeben. Ferner erhält man für die Eigenwerte der Hessematrix schließlich

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{M'}{R_{\text{sp}}} = \frac{Q}{\rho_{\text{sp}}} \frac{\tau}{\sqrt{\xi_{\text{sp}} + 2}} \quad (4.57)$$

$$\lambda_4 = \frac{Q}{\rho_{\text{sp}}} - 2 \frac{M'}{R_{\text{sp}}} = \frac{Q}{\rho_{\text{sp}}} \frac{\sqrt{\xi_{\text{sp}} + 2} - 2\tau}{\sqrt{\xi_{\text{sp}} + 2}} \quad (4.58)$$

$$\begin{aligned} \lambda_5 \lambda_6 &= -\frac{\tau Q^2}{\rho_{\text{sp}}^2 \sqrt{\xi_{\text{sp}} + 2}} - 4\Delta_1 \beta_0 \sqrt{\xi_{\text{sp}} + 2} \frac{\tau Q}{\rho_{\text{sp}}^3} S^{(I\bar{I})'} - 8\Delta_1^2 \beta_0^2 \frac{\xi_{\text{sp}} + 2}{\rho_{\text{sp}}^4 Q^4} S^{(I\bar{I})'} \\ &\quad - \frac{\tau Q^2}{\rho_{\text{sp}}^2 \sqrt{\xi_{\text{sp}} + 2}} \left(\underbrace{-(\xi_{\text{sp}} + 2) \frac{S^{(I\bar{I})''}}{S^{(I\bar{I})'}}}_{>0} - 1 \right) \left(\underbrace{2 - \tau \sqrt{\xi_{\text{sp}} + 2}}_{>0} \right), \end{aligned} \quad (4.59)$$

wobei die einzelne Angabe von λ_5 und λ_6 an dieser Stelle zu umfangreich ausfallen würde. Bis auf das Produkt von $\lambda_5\lambda_6$ sind sämtliche Eigenwerte positiv, so dass die Hessedeterminante $\det H = \prod_i \lambda_i$ insgesamt negativ ausfällt. Dies führt schließlich zu einem nichtverschwindenden Imaginärteil der Vorwärtsstreuamplitude.

Abschließend sei an dieser Stelle noch die durch die Sattelpunktsnäherung bestimmte Vorwärtsstreuamplitude in Minkowki-Metrik angegeben

$$\hat{T}^{(I\bar{I})}(p_1, p_2, -q') \approx i d^2 \left(\frac{2\pi}{\alpha_s} \right)^{12} \rho_{\text{sp}}^2 \frac{1}{9\sqrt{\pi}} \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \frac{6}{\xi_{\text{sp}} S^{(I\bar{I})'}} \right)^{7/2} \frac{(2\pi)^3 \exp(-\Gamma_{\text{eff}})}{\sqrt{-\det(H)}} \quad (4.60)$$

$$[\omega(\xi_{\text{sp}})] \left(\frac{\pi}{2} \ Q \right) \left[\frac{\pi^3}{\alpha_s} \frac{u'^2}{M'^2} \right] \left[\frac{\pi^3}{\alpha_s} \frac{t'^2}{M'^2} \right] \left[(2\pi)^2 \frac{s - M'^2 - Q'^2}{\sqrt{M'^2}} \right],$$

wobei der effektive Exponent im Sattelpunkt durch

$$\Gamma_{\text{sattel}} = \left[\frac{4\pi}{\alpha_s} - \beta_0 \Delta_1 [\ln(\rho_{\text{sp}}^2 \mu_r^2) - 2] \right] S^{(I\bar{I})} + \Delta_2 [\ln(\rho_{\text{sp}}^2 \mu_r^2) - 2] \quad (4.61)$$

gegeben ist. Für die weitere Auswertung sind dabei für ρ und ξ in sämtlichen Termen deren Sattelpunktswerte einzusetzen.

4.2.3 Vergleich zwischen zeitartiger und raumartiger Lösung

Obwohl nach der analytischen Fortsetzung (4.41) und (4.42) der effektive Exponent (4.43), sowie die resultierenden Sattelpunktsgleichungen (4.48) und (4.49) ihrer Form nach scheinbar identisch zu ihrem Pendant aus der tief-inelastischen Streuung sind, so besteht dennoch ein feiner aber wesentlicher Unterschied. Dieser liegt im jeweils verschiedenen Bezug des konformen Parameters ξ zur Instantongröße ρ und dem Abstand R_4 , welcher für die beiden Fälle im jeweiligen Sattelpunkt durch

$$\frac{R_{\text{sp}}}{\rho_{\text{sp}}} = \begin{cases} \sqrt{\xi_{\text{sp}} + 2} \\ \sqrt{\xi_{\text{sp}} - 2} \end{cases} \quad \xi_{\text{sp}} = \begin{cases} \frac{R_{\text{sp}}^2}{\rho_{\text{sp}}^2} - 2 & \text{zeitartig (LHC)} \\ \frac{R_{\text{sp}}^2}{\rho_{\text{sp}}^2} + 2 & \text{raumartig (DIS)} \end{cases} \quad (4.62)$$

gegeben ist. Die unmittelbare Ursache für diesen Unterschied ist die wegen der *zeitartigen* Impulse notwendig gewordene zusätzliche analytische Fortsetzung von ρ und $\bar{\rho}$, die im tief-inelastischen Fall wegen der dort auftretenden *raumartigen* Virtualität nicht erforderlich ist.

Aus der unterschiedlichen Definition von ξ ergeben sich einige Konsequenzen, die sich zunächst am leichtesten auf dem Niveau der Sattelpunktslösung in Nullschleifennäherung erschließen. Wie sich leicht aus den Sattelpunktsgleichungen ablesen lässt, ist der Sattelpunkt in ξ für zeit- und raumartige Kinematik für $\frac{4\pi}{\alpha_s} \rightarrow \infty$ durch

$$\xi_0 = \begin{cases} \frac{4}{\tau^2} - 2, & \tau = \frac{M'}{Q}, \quad \text{zeitartig (LHC)} \\ \frac{4}{\tau^2} + 2, & \tau = \frac{\sqrt{s'}}{Q'}, \quad \text{raumartig (DIS)} \end{cases} \quad (4.63)$$

gegeben. Die verschiedene Definition von τ kommt dabei von der unterschiedlichen kinematischen Situation, die durch die Verwendung der $3 \rightarrow 3$ Vorwärtsstreuamplitude für den Einteilchen-inklusive Wirkungsquerschnitt im hiesigen Fall anstelle der $2 \rightarrow 2$ Vorwärtsstreuamplitude für den inklusiven Wirkungsquerschnitt im tief-inelastischen Fall herrührt.

Bezug zur Sphaleron-Masse

Wie bereits in Kapitel 2 angesprochen wurde, geht aus diversen Untersuchungen [33, 42, 44, 50, 93–95, 97] hervor, dass die Valley-Wirkung nur in etwa bis zu einem Wert von $S^{(I)} \approx \frac{1}{2}$ gültig sein sollte, was sich etwa bei $\xi \approx 3$ einstellt. Diese „weiche“ Schwelle steht in engem Zusammenhang mit der Sphaleronmasse, deren Wert von der Energie des Instanton-Prozesses nicht wesentlich überschritten werden sollte, wenn man Instanton-Störungsrechnung betreibt [14, 19, 33, 50, 107]. Interessant ist nun, dass im betrachteten Fall des Einteilchen-inklusive Prozesses, welcher durch die Vorwärtsstreuung dreier Teilchen beschrieben wird, der Antwortmasse M' zur Virtualität Q' die Rolle der Prozess-Energie zukommt. Somit stellt sich die Frage, die bislang noch nicht zur vollen Zufriedenheit beantwortet werden konnte: Welche Bedeutung hat die Sphaleronmasse in diesem Fall noch für die eigentliche Schwerpunktsenergie \sqrt{s} .

Oszillierende Valley-Wirkung

Im betrachteten zeitartigen Fall tritt noch eine weitere Schwelle auf:

$$M' = Q. \quad (4.64)$$

Für kleinere M' ist $\xi_0 > 2$ (vergl. (4.63)) und die Valley-Wirkung reell, was im raumartigen Fall bereits den gesamten Wertebereich von ξ_0 ausmacht, da $4/\tau^2 > 0$. Es stellt sich nun die Frage: Was passiert für $M' > Q$?

Zunächst würde der konforme Parameter im Sattelpunkt $\xi_0 < 2$ werden, was im raumartigen Fall nicht möglich ist, so dass die Valley-Wirkung und damit auch der effektive Exponent komplexe Werte annehmen würden. Zur exponentiellen Unterdrückung des Wirkungsquerschnittes kämen also Oszillationen hinzu, die zu interessanten Effekten führen könnten.⁵⁶ Andererseits ist die Valley-Wirkung selbst nur für $\xi > 3$ gültig, so dass keine strenge Aussage über diese Region getroffen werden kann. Zumindest sollte sich bei Überschreiten dieser Schwelle die Instanton-Physik qualitativ erheblich von derjenigen für kleinere M' unterscheiden.

Insbesondere stellt sich die Frage, inwiefern sich der Bereich des verdünnten Instanton-Gases, d.h. für $\xi \rightarrow \infty$, auf den Bereich für $\xi \rightarrow -2$ abbilden und inwiefern sich dieser Bereich ebenfalls mit Hilfe der Instanton-Störungstheorie behandeln lässt. Hierbei sollte der Skaleninvertierung $\tau \rightarrow 1/\tau$ eine besondere Rolle zukommen, wobei besonders der Bezug zur konformen Inversion damit zusammenhängend der Spiegelung der Instantongröße

⁵Man vergleiche hierzu auch Ref. [50]

⁶Eine mögliche Anwendung wäre eventuell die Messung der Instantongröße anhand der Periode der Oszillationen des Wirkungsquerschnittes.

$\rho \rightarrow \rho_0^2/\rho$ an einer Skala ρ_0 als interessant erscheint [45, 63, 64]. Desweiteren könnte sich alternativ zu ξ noch der Parameter λ , mit

$$\xi = \lambda + \frac{1}{\lambda}, \quad (4.65)$$

als hilfreich erweisen.

Numerische Lösung

Die numerische Lösung der Sattelpunktsgleichung von ξ ist in Abbildung (4.4) (a) in Abhängigkeit von τ für den zeit- und raumartigen Fall wiedergegeben. Dabei wird die Sattelpunktkoordinate in Null-, Ein- und Zweischleifen-Renormierungsgruppeninvarianz angegeben. Die ersten Korrekturen zur Nullschleifen-Lösung (4.63) sind noch relativ groß, sie scheinen allerdings mit der Zweischleifen-Lösung recht schnell zu konvergieren. Dies wird auch dadurch bestätigt, dass die Einschleifen-Lösung unter Verwendung der Zweischleifenform von α_s , nach wie vor aber mit $\Delta_1 = 1$ und $\Delta_2 = 0$ (hier jedoch nicht abgebildet), kaum noch von der Zweischleifen-Lösung zu unterscheiden ist. Weiterhin wird deutlich, dass die Sattelpunktlösung in ξ als Funktion von τ im zeit- und raumartigen Fall stark voneinander abweichen. Dies ist dem unterschiedlichen Definitionsbereich in τ , welcher durch die Schwelle bei $\tau = 1$ im Zeitartigen zustande kommt, zuzuschreiben.

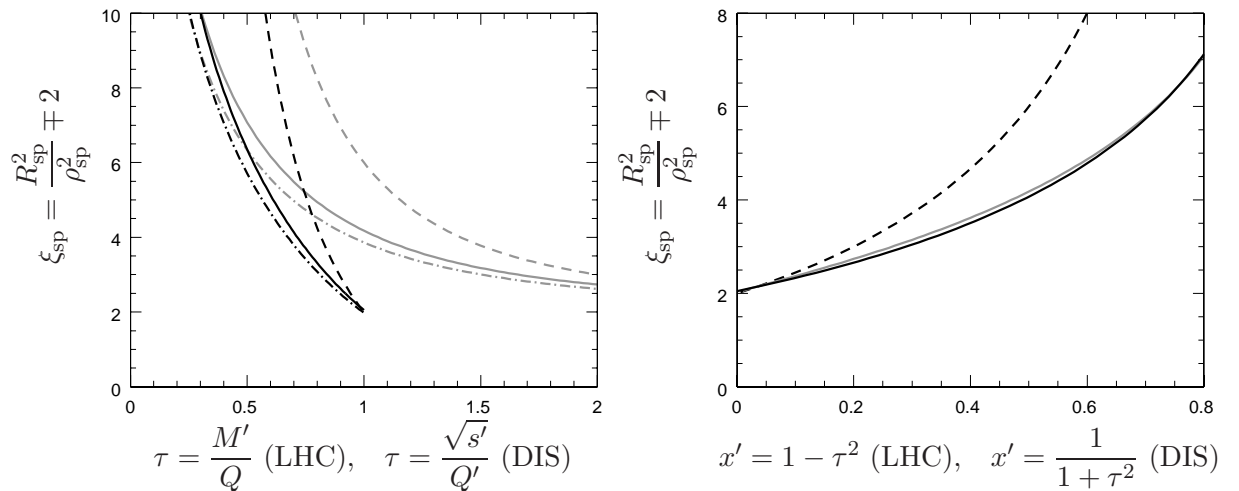


Abbildung 4.4: Sattelpunktlösung für ξ in Nullschleifen- (gestrichelt), Einschleifen- (gepunktgestrichelt) und Zweischleifen-Renormierungsgruppeninvarianz (durchgezogen).

(a) Der Graph zur Linken zeigt die numerische Lösung der Sattelpunktsgleichung für ξ als Funktion von τ , bei $Q = M_W$. Die schwarzen Linien beziehen sich dabei auf den Prozess mit zeitartiger und die grauen auf den entsprechenden Prozess mit raumartiger Virtualität.

(b) Rechts sind dieselben Lösungen über $x' = 1 - \tau^2$ im zeitartigen bzw. $x' = 1/(\tau^2 + 1)$ im raumartigen Fall aufgetragen. In Nullschleifennäherung sind diese in beiden Fällen identisch, während sie in Zweischleifennäherung nur leicht voneinander abweichen.

Zur weiteren Verwendung lässt sich die Sattelpunktslösung schließlich noch im relevanten Bereich, also für nicht zu kleine τ , sehr gut durch eine Potenzreihe in τ beschreiben.

Da sich die Bedeutung der Skalierungsvariable τ im zeitartigen und raumartigen Fall stark unterscheidet, erscheint es angebracht, jeweils neue Skalierungsvariablen einzuführen, die den selben Definitionsbereich abdecken und als deren Funktion die jeweiligen Sattelpunktslösungen von ξ sich möglichst ähneln. Im raumartigen Fall ist es üblich, die Skalierungsvariable $x' = \frac{Q'^2}{s'+Q'^2} \in [0, 1]$ zu verwenden. Es zeigt sich, dass die Sattelpunktslösung für den zeitartigen Fall als Funktion von

$$x' \equiv 1 - \tau^2, \quad \in [0, 1] \quad (4.66)$$

in Null-Schleifen-Näherung

$$\xi_0 = \frac{1}{1 - x'} - 2 \quad (4.67)$$

analytisch identisch mit der entsprechenden Sattelpunktslösung im raumartigen Fall ist. Bei der Berücksichtigung der Renormierungseffekte weichen beide Sattelpunkte nur sehr leicht voneinander ab, wie Abbildung 4.4 (b) zu entnehmen ist. Im Folgenden werde also mittels Gl. (4.66) die *zeitartige* Version von x' definiert.⁷ Zusammenfassend findet man schließlich

$$\tau = \begin{cases} \frac{M'}{Q} \equiv \sqrt{1 - x'}, & x' \in [0, 1] \quad \text{zeitartig (LHC)} \\ \frac{\sqrt{s'}}{Q'} \equiv \sqrt{\frac{1 - x'}{x'}}, & x' \in [0, 1] \quad \text{raumartig (DIS)}. \end{cases} \quad (4.68)$$

4.2.4 Wirkungsquerschnitte

Bevor nun die Vorwärtsstreuamplitude als Funktion der kinematischen Variablen bestimmt werden kann, ist noch die Renormierungsskala μ_r geeignet zu wählen.

Setzt man entsprechend Gl. (4.53) $\mu_r = \kappa Q$, so ist die Abhängigkeit des differentiellen Wirkungsquerschnitts $d\hat{\sigma}_{gg}/dM'$ des Subprozesses von κ , bei gegebener Schwerpunktsenergie \sqrt{s} und externer Skala Q , sowie für $M' = Q/2$, in Ein- und Zweischleifenapproximation in Abbildung 4.5 (a) wiedergegeben. Wie sich herausstellt, ist die Beschreibung in Ein-schleifengenauigkeit zur Bestimmung einer geeigneten Renormierungsskala μ_r ungeeignet und ein Bereich mit lokaler Unabhängigkeit nicht gegeben. Die Situation verbessert sich erheblich in Zweischleifengenauigkeit, bei der für etwa $\kappa \approx 0.1$ der Wirkungsquerschnitt sein lokales Minimum annimmt. Dieses Verhalten deckt sich sehr gut mit demjenigen in tief-inelastischer Streuung, wie ein Vergleich mit Ref. [37] zeigt. Es bleibt noch festzuhalten, dass die genaue Lage des Minimums leicht von $\tau = M'/Q$ abhängt. Da die genaue Bestimmung einer idealen Wahl für κ bei der hiesigen Untersuchung zweitrangig ist, soll hierauf der Einfachheit halber verzichtet werden.

Nach der Wahl der Renormierungsskala zu

$$\mu_r = \kappa Q, \quad \kappa = 0.1, \quad (4.69)$$

⁷Es sei angemerkt, dass x' kinematisch betrachtet durchaus auch negative Werte annehmen kann, wobei für diese allerdings $\xi < 2$ und somit die Valley-Wirkung komplex werden würde.

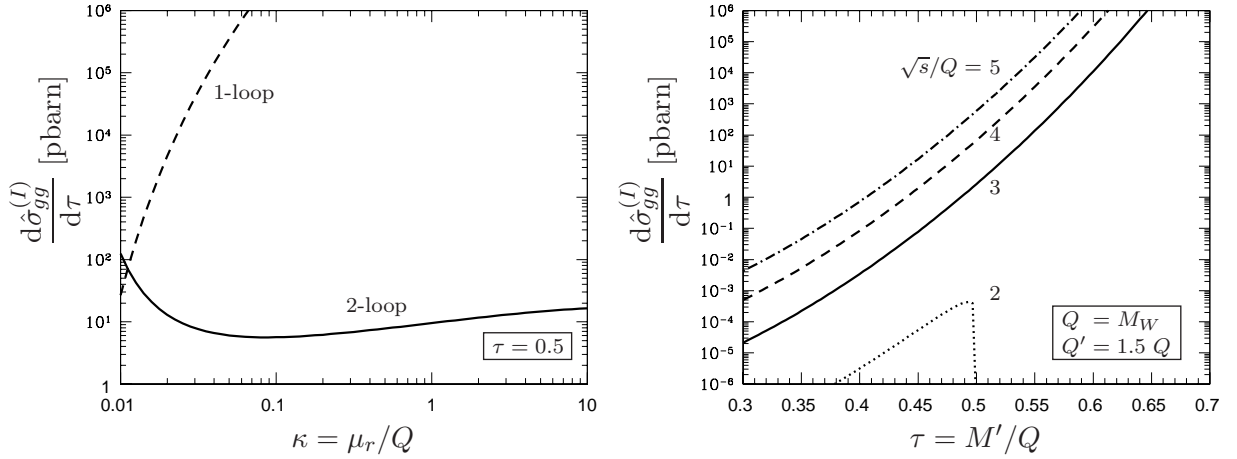


Abbildung 4.5: Differentieller Wirkungsquerschnitt des virtuellen Subprozesses $g+g \xrightarrow{I} \bar{q}^* + X$:
 (a) Der Graph zur Linken zeigt die Abhängigkeit des Wirkungsquerschnittes für den Subprozess von der Wahl der Renormierungsskala bei $M' = 0.5 Q$. Die gestrichelte Linie gibt dabei die Abhängigkeit in Einschleifenapproximation, die durchgezogene in Zweischleifennäherung wieder.
 (b) Rechts ist die $\tau = M'/Q$ -Verteilung des virtuellen Subprozesses bei einer internen virtuellen Masse von $Q' = 1.5 Q$ dargestellt. Der Wirkungsquerschnitt wurde für verschiedenen Schwerpunktsenergien aufgetragen.

können nun Wirkungsquerschnitte für den Subprozess und hierauf aufbauend die des vollständigen Prozesses angegeben werden.

Zunächst soll der differentielle Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d\hat{\sigma}_{gg}^{(I)}}{d\tau} = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{QM'}{2s^2} \int_{t'^-}^{t'^+} dt' \Im \left(\hat{\mathcal{T}}^{(I\bar{I})} \right), \quad (4.70)$$

mit den kinematischen Grenzen für den Impulsübertrag

$$t'^{\pm} = \frac{1}{2} \left(Q'^2 + M'^2 - s \pm \sqrt{\lambda(s, Q'^2, M'^2)} \right), \quad (4.71)$$

für den Subprozess bestimmt werden. Sein Verlauf in Abhängigkeit von M'/Q ist in Abbildung 4.5 (b) für verschiedene Schwerpunktsenergien \sqrt{s} dargestellt. Für die externe Skala Q wurde die Masse des W -Bosons gewählt, für die Masse des virtuellen Quarks $Q' = 1.5 Q$. Für eine Schwerpunktsenergie von $\sqrt{s} = 2 Q$ lässt sich sehr schön beobachten, wie der Wirkungsquerschnitt bis zur Schwelle $M' = Q/2$ ansteigt und dann rapide zusammenbricht, da der Prozess kinematisch nur für $Q' + M' \leq \sqrt{s}$ stattfinden kann. Weiterhin ist zu beobachten, dass der Wirkungsquerschnitt erwartungsgemäß mit ansteigendem $M' \rightarrow Q$ monoton ansteigt. Ebenso wächst dieser mit ansteigender Schwerpunktsenergie.

Der Verlauf des Wirkungsquerschnittes in Abbildung 4.5 (b) mit seinem extrem starken Anstieg bei zunehmendem $\tau = M'/Q$ lässt natürlich sofort die Frage aufkommen, bis zu welchem τ und bis zu welcher Schwerpunktsenergie dieser gültig ist. Durch einen Vergleich

über den Sattelpunkt ξ_{sp} mit einem angenommenen erlaubten Bereich von $\xi_{\text{sp}} \gtrsim 3$ würde sich der Gültigkeitsbereich für τ zunächst auf etwa $\tau \leq 0.8$ ergeben (vergl. Abbildung 4.4). Der dafür resultierende Wirkungsquerschnitt erscheint jedoch als viel zu groß, als dass man dessen Gültigkeit akzeptieren kann. Diese Begrenzung des Gültigkeitsbereiches der Valley-Wirkung wurde allerdings für die tief-inelastische Streuung bestimmt [42]. Gleiches gilt für die Begrenzung durch die Sphaleronenmasse (1.14) $M_{\text{sph}} \sim Q$. Es ist also eher anzunehmen, dass durch die veränderte kinematische Situation gerade diese Begrenzungen zu modifizieren sind, τ also deutlich kleiner als 0.8 sein sollte (siehe Diskussion in Abschnitt 4.3).

Nach dieser ersten Einordnung des Wirkungsquerschnitt für den virtuellen Subprozesses ist vor allem die Einbeziehung des Zerfalls des virtuellen Quarks unter Emission eines W -Bosons von Interesse. Hierzu werde der in Abschnitt 3.4 bestimmte Zerfallsfaktor \mathcal{P} aus Gl. (3.97) herangezogen so dass man zunächst

$$\frac{d\sigma_{gg}^{(I)}}{d\tau dQ'} = g_W^2 \mathcal{P}^{(I)} \frac{2Q'}{Q^2} \frac{d\hat{\sigma}_{gg}^{(I)}}{d\tau} \quad (4.72)$$

erhält. Der explizite Verlauf entlang Q' bzw. Q'^2 ist nicht weiter überraschend und liefert keine wesentliche Erkenntnis. Er ist vergleichbar mit seinem Pendant für den einfachsten Prozess (man vergl. Abbildung 3.4, wobei sich natürlich die nichtverschwindende Masse M' nun bei kleineren Schwerpunktsenergien entsprechend verzerrend auswirkt).

Interessanter ist hingegen der Verlauf des differentiellen Wirkungsquerschnittes

$$\frac{d\sigma_{gg}^{(I)}}{d\tau} = g_W^2 \int_Q^{\sqrt{s}-\tau Q} dQ' \mathcal{P}^{(I)} \frac{2Q'}{Q^2} \frac{d\hat{\sigma}_{gg}^{(I)}}{d\tau}, \quad \text{bzw.} \quad \frac{d\sigma_{gg}^{(I)}}{dx'} = \frac{1}{2\sqrt{1-x'}} \frac{d\sigma_{gg}^{(I)}}{d\tau}, \quad (4.73)$$

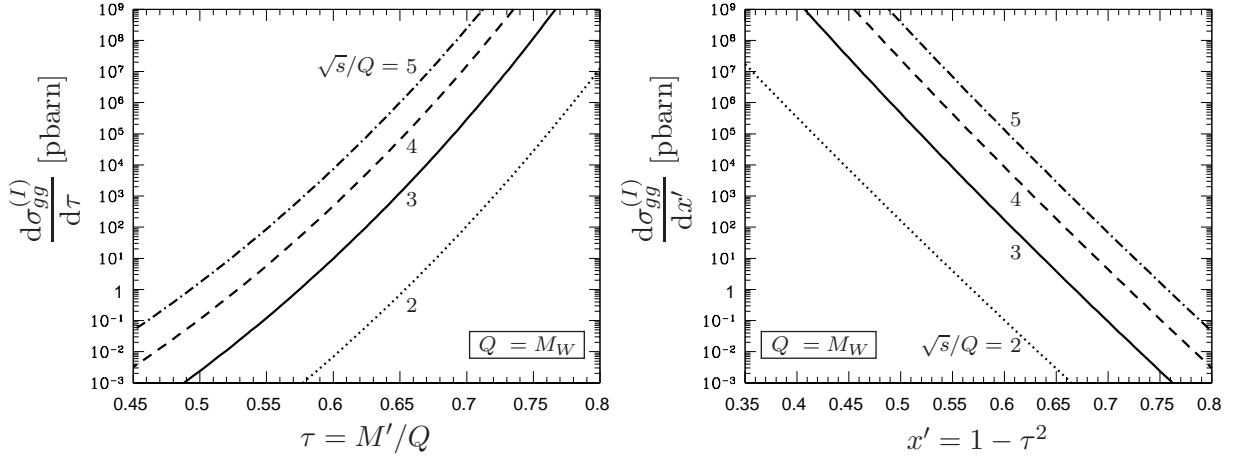
welche in Abbildung 4.6 (a) und (b) dargestellt sind. Qualitativ ist die τ -Verteilung des vollständigen Prozesses vergleichbar mit der des Subprozesses aus Gl. (4.70). Da Q' nun nicht länger eine feste Variable ist, sondern ausintegriert wurde, entfällt das entsprechende Abknicken an der nicht mehr vorhandenen Phasenraumschwelle bei niedriger Schwerpunktsenergie. Quantitativ wird der Wirkungsquerschnitt für $\sqrt{s} = 3Q$ um ca. drei Größenordnungen vermindert.⁸ Dies ändert allerdings nichts an der allgemeinen Situation, dass der Wirkungsquerschnitt für große τ bzw. kleine x' für die bisher angenommenen Grenzen sehr groß ausfällt.

Schließlich sei noch der integrierte Wirkungsquerschnitt

$$\sigma_{gg}^{(I)} = \int_0^{\tau_{\text{max}}} d\tau \frac{d\sigma_{gg}^{(I)}}{d\tau} = \int_{x'_{\text{min}}}^1 dx' \frac{d\sigma_{gg}^{(I)}}{dx'} \quad (4.74)$$

für den Instanton-induzierten gg -Streuprozess angegeben. Neben der durch die Masse des W -Bosons vorgegebenen Impulsskala Q hängt dieser noch von den Integrationsgrenzen

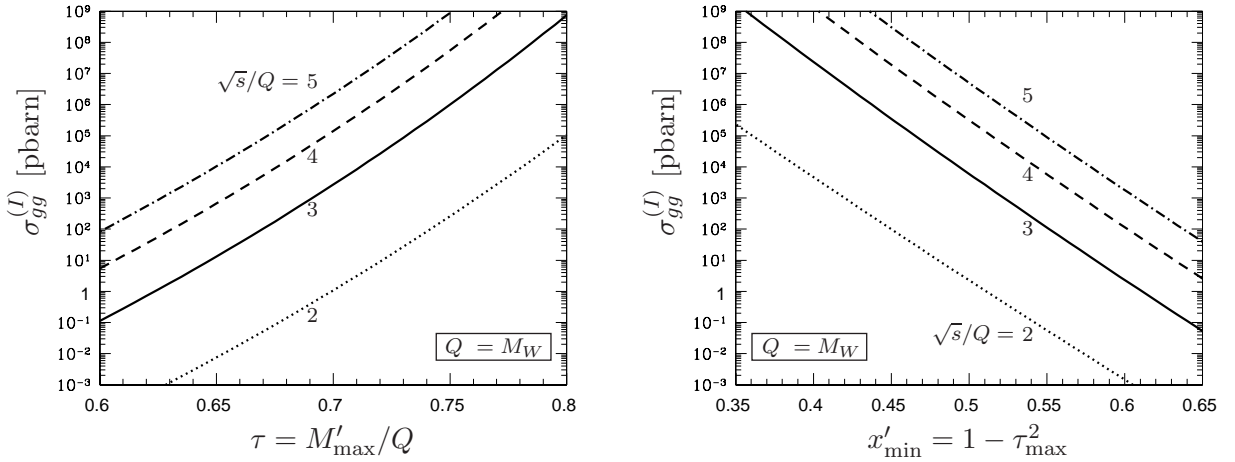
⁸Für diese Schwerpunktsenergie liegt das Maximum des differentiellen Wirkungsquerschnittes für den vollen Prozess etwa bei $Q' = 1.5Q$. Bei anderen Energien wandert das Maximum entsprechend leicht zu größerem oder kleinerem Verhältnis von Q'/Q , was sich auf die Skalierung auswirkt.


Abbildung 4.6:

Differentieller Wirkungsquerschnitt für den vollen Prozess $g + g \rightarrow \bar{q}^* + X$, $\bar{q}^* \rightarrow W + \bar{q}'$:

(a) Der Graph zur Linken zeigt die τ -Verteilung für den inklusiven Instanton-induzierten gg -Prozess unter Emission eines W -Bosons, wobei über die interne Virtualität Q' integriert wurde. Der Wirkungsquerschnitt wurde für verschiedene Schwerpunktsenergien aufgetragen.

(b) Rechts ist die entsprechende x' -Verteilung desselben Prozesses wiedergegeben. Man sieht hierbei sehr deutlich die exponentielle Abhängigkeit des Wirkungsquerschnittes, wobei die Abhängigkeit von der Schwerpunktsenergie offensichtlich in sehr guter Näherung faktorisiert.


Abbildung 4.7: Integrierter Wirkungsquerschnitt $g + g \rightarrow \bar{q}^* + X$, $\bar{q}^* \rightarrow W + \bar{q}'$:

(a) Zur Linken ist der integrierte Wirkungsquerschnitt des Instanton-induzierten gg -Prozesses mit Emission eines W -Bosons in Abhängigkeit des Abschneideparameters τ_{\max} aufgetragen. Die Abbildung zeigt den Verlauf für verschiedene Schwerpunktsenergien.

(b) Die rechte Abbildung zeigt den entsprechenden Wirkungsquerschnitt als Funktion der unteren Integrationsgrenze x'_{\min} für verschiedene Schwerpunktsenergien. Die exponentielle Abhängigkeit des differentiellen Wirkungsquerschnittes von x' findet sich auch hier wieder.

τ_{\max} bzw. entsprechend x'_{\min} , sowie von der gg -Schwerpunktsenergie \sqrt{s} ab. Die zugehörigen Verteilungen sind in Abbildung 4.7 zu finden. Zunächst ist festzuhalten, dass sich die starke Abhängigkeit des Wirkungsquerschnittes von τ auf dessen Integrationsgrenze überträgt, so dass der Wirkungsquerschnitt extrem sensitiv auf die genaue Wahl dieses Abschneideparameters reagiert. Durch die Verwendung von $x'_{\min} = 1 - \tau_{\max}^2$ als Skalierungsvariable verbessert sich diese Situation etwas. Wie bereits vor der x' -Integration hängt der totale Wirkungsquerschnitt nun exponentiell von der Integrationsgrenze x'_{\min} ab. Es bleibt also zunächst die Frage, wie groß x'_{\min} maximal sein darf und für welche Schwerpunktsenergie die Instanton-Störungsrechnung anwendbar ist.

4.3 Diskussion

Nachdem die verschiedenen Wirkungsquerchnitte für den Instanton-induzierte gg -Streuprozess unter Emission eines W -Bosons vorgestellt wurden, soll in diesem abschließenden Abschnitt ein zum tief-inelastischen Fall vergleichendes Resumee gezogen werden. Hierbei ist zunächst festzustellen, dass, bedingt durch das zusätzliche Gluon und die Verlagerung des virtuellen Quarks in den Endzustand des Subprozesses, die Wahl der Schwerpunktsenergie \sqrt{s} kinematisch weitestgehend unabhängig von der Wahl von τ oder x' bzw. deren jeweilige Integrationsgrenze τ_{\max} bzw. x'_{\min} ist. Wie bereits in Abschnitt 4.2.3 diskutiert wurde, hängen im tief-inelastischen Fall hingegen x' und s' (als tief-inelastisches Pendant zu M'^2) unmittelbar voneinander ab. Dies macht einen quantitativen Vergleich der beiden Fälle nicht ganz einfach.

Um in beiden Fällen von möglichst vergleichbaren Situationen ausgehen zu können, werden als Referenz im Zeitartigen der differentielle Wirkungsquerschnitt $d\sigma_{gg}^{(I)}/dx'$ des vollen Prozesses bei einer Schwerpunktsenergie von $\sqrt{s} = 2Q$ und im Raumartigen der totale Wirkungsquerschnitt des q^*g -Subprozesses herangezogen. Letzterer wurde Ref. [43], Fig. 2. entnommen und ist in Kapitel 2, Abbildung 2.4 (a) zu finden.

Ein erster Vergleich zeigt, dass auch der raumartige Referenzprozess exponentiell mit abfallendem x' ansteigt. Ein abfallendes x' bedeuten dabei in beiden Fällen einen Anstieg der Instantongröße ρ . Die hoch sensitive Abhängigkeit von x' bzw. nach dessen Integration von x'_{\min} ist also keine Besonderheit des hier untersuchten zeitartigen Prozesses. Sie entspricht vielmehr dem typischen Infrarotverhalten zu großen ρ für Instanton-induzierte Prozesse. Es stammt letztlich von der Aufhebung der exponentiellen Unterdrückung durch die Valley-Wirkung, die bei festem R mit zunehmendem ρ in Bereiche großer Wechselwirkungen zwischen Instanton und Antiinstanton getrieben wird. Ein genauerer Vergleich beider Prozesse bringt zudem zweierlei hervor:

- (i) Der Gradient des Wirkungsquerschnittes in x' bei logarithmischer Skala ist im zeitartigen Fall deutlich steiler als im raumartigen. So fällt dieser von $x' = 0.4$ auf $x' = 0.5$ im Zeitartigen um einen Faktor von etwa 2.5 stärker ab als im Raumartigen.
- (ii) Obwohl beide Prozesse bei sehr unterschiedlichen Impulsskalen betrachtet werden, im zeitartigen Fall bei $Q = M_W$ und im raumartigen bei $Q' \sim 10$ GeV, ist die

Größe des jeweiligen Wirkungsquerschnittes in beiden Fällen mit ca. $10^6 \dots 10^7$ pb bei kleinem x' von vergleichbarer Größe.

Die höhere Sensitivität des hier untersuchten Wirkungsquerschnittes bezüglich x' lässt sich dabei sofort durch die stark unterschiedlichen Massenskalen erklären. Der exponentielle Faktor $\exp(-\Gamma_{\text{eff}})$ des Wirkungsquerschnittes hängt im effektiven Exponenten

$$-\Gamma_{\text{eff}} = -\frac{4\pi}{\alpha_s} \left(1 + \mathcal{O}(\alpha_s)\right) F_{\text{hg}}(\xi) \quad (4.75)$$

direkt von α^{-1} ab, was bei den beiden unterschiedlichen Skalen mehr als einen Faktor von Zwei ausmacht. Dies führt unmittelbar zu einer stärkeren exponentiellen Abhängigkeit des Wirkungsquerschnittes von der Valley-Wirkung $F_{\text{hg}} = 1 + \Omega^{(I\bar{I})}$. Die stärkere x' -Abhängigkeit im untersuchten Fall ist somit nicht auf die zeitartige Kinematik zurückzuführen. Das größere α_s bei $Q \sim 10$ GeV führt ferner dazu, dass die Korrekturterme im effektiven Exponenten mehr Relevanz gewinnen und die exponentielle Abhängigkeit von x' mehr stören als bei $Q \sim M_W$.

Weitaus weniger plausibel erscheint hingegen der große Wirkungsquerschnitt des zeitartigen Prozesses. Wegen der größeren Massenskala würde man für diesen zunächst eine erhebliche Unterdrückung durch den effektiven Exponenten erwarten. Das zusätzliche Gluon im zeitartigen Fall hebt diesen zwar um einen Faktor π^3/α_s gegenüber dem raumartigen an, dies erscheint aber nicht als ausreichend, um die beobachtete Größe des Wirkungsquerschnittes zu erklären. Geht man davon aus, dass die Höhe des Wirkungsquerschnittes im Wesentlichen durch das Sattelpunktsintegral bestimmt wird und die kinematischen Vorfaktoren sich in beiden Fällen vergleichsweise ähnlich auswirken, so sollte eine Untersuchung des reinen Sattelpunktsintegrals bei zeit- und raumartiger Kinematik hierüber weiteren Aufschluß geben.

Zu diesem Zweck werden die dimensionslosen Sattelpunktsintegrale

$$I_{\text{raum}} \equiv \frac{\alpha_s^{-19/2} Q'^6 e^{-\Gamma_{\text{raum}}}}{\sqrt{-\det(H_{\text{raum}})}} \quad I_{\text{zeit}} \equiv \frac{\pi^3 \alpha_s^{-19/2} Q^6 e^{-\Gamma_{\text{zeit}}}}{\alpha_s \sqrt{-\det(H_{\text{zeit}})}} \quad (4.76)$$

definiert. Um die Auswirkung der Renormierungseffekte hinreichend zu berücksichtigen wurden die jeweiligen Potenzen von α_s mit einbezogen, wobei der zusätzliche Faktor π^3/α_s im zeitartigen Fall vom dort zusätzlich auftretenden Gluon stammt.

Die beiden Sattelpunktsintegrale sind bei festem x' in Abbildung 4.8 über $Q \in \{Q, Q'\}$ aufgetragen. Wie man sieht, sind die Werte des zeitartigen Sattelpunktsintegrals gegenüber dem raumartigen Integral erheblich angehoben. Der Effekt ist so groß, je nach Impulsskala sieben bis neun Größenordnungen, dass das zeitartige Integral bei $Q \sim 80$ GeV sogar etwas größer ausfällt als das raumartige bei $Q' \sim 10$ GeV. Insofern bestätigt sich zunächst die zuvor beobachtete Anhebung des Wirkungsquerschnittes für den zeitartigen Prozesses im Vergleich zum raumartigen Prozess. Um über die Herkunft der Anhebung bei zeitartiger Kinematik näher Aufschluß zu bekommen, sind in der nebenstehenden Abbildung noch die Verhältnisse der einzelnen Terme, die zur Anhebung des zeitartigen Integrals jeweils beitragen, dargestellt. Wie man sieht, trägt der effektive Exponent (durchgezogene Linie) mit bis zu vier Größenordnungen den Hauptanteil des Anstiegs, während

durch die Hesse-Determinante (gestrichelt dargestellt) und den zusätzlichen Faktor π^3/α_s (gepunktet dargestellt) jeweils etwa zwei weitere Größenordnungen hinzu kommen.

Es ist also zunächst festzustellen, dass der unerwartet hohe Wirkungsquerschnitt für den zeitartigen Prozess bei kleinem x' sich auf dem Niveau des Sattelpunktsintegrals erklären lässt. Damit bleibt die Frage zu klären, welcher Mechanismus letztlich ursächlich für die starke Anhebung des zeitartigen Sattelpunktsintegrals gegenüber dem raumartigen Integral verantwortlich ist. Hierzu sollte ein genauerer Blick auf den effektiven Exponenten, sowie auf die Hesse-Determinante in der Sattelpunktlösung weiterführen. Der besseren Übersicht halber wird dies in Einschleifennäherung durchgeführt, also für $\Delta_1 = 1$ und $\Delta_2 = 0$, was am Ergebnis selbst keinen Unterschied ausmacht.

Im Sattelpunkt ergeben sich der effektive Exponent in beiden Fällen zu

$$-\Gamma_{\text{eff}} = - \left(\frac{4\pi}{\alpha_s} - 2\beta_0 (\ln(\rho_{\text{sp}} Q \kappa) - 1) \right) S^{(I\bar{I})}, \quad (4.77)$$

sowie die Eigenwerte der Hessematrix zu

$$\frac{\lambda_{1,2,3}}{Q^2} = \frac{1}{\rho_{\text{sp}} Q} \cdot \begin{cases} \frac{\sqrt{1-x'}}{\sqrt{\xi_{\text{sp}}+2}} \\ \frac{\sqrt{\frac{1}{x'}-1}}{\sqrt{\xi_{\text{sp}}-2}} \end{cases}, \quad \frac{\lambda_4}{Q^2} = \frac{1}{\rho_{\text{sp}} Q} \cdot \begin{cases} \frac{\sqrt{\xi_{\text{sp}}+2}-2\sqrt{1-x'}}{\sqrt{\xi_{\text{sp}}+2}} & \text{zeitartig (LHC)} \\ \frac{\sqrt{\xi_{\text{sp}}-2}+2\sqrt{\frac{1}{x'}-1}}{\sqrt{\xi_{\text{sp}}-2}} & \text{raumartig (DIS)}, \end{cases} \quad (4.78)$$

wobei $\lambda_5 \sim \frac{1}{\rho_{\text{sp}} Q}$ und $\lambda_6 \sim \frac{1}{\rho_{\text{sp}} Q}$, sowie deren Produkt aus Platzgründen hier nicht ange-

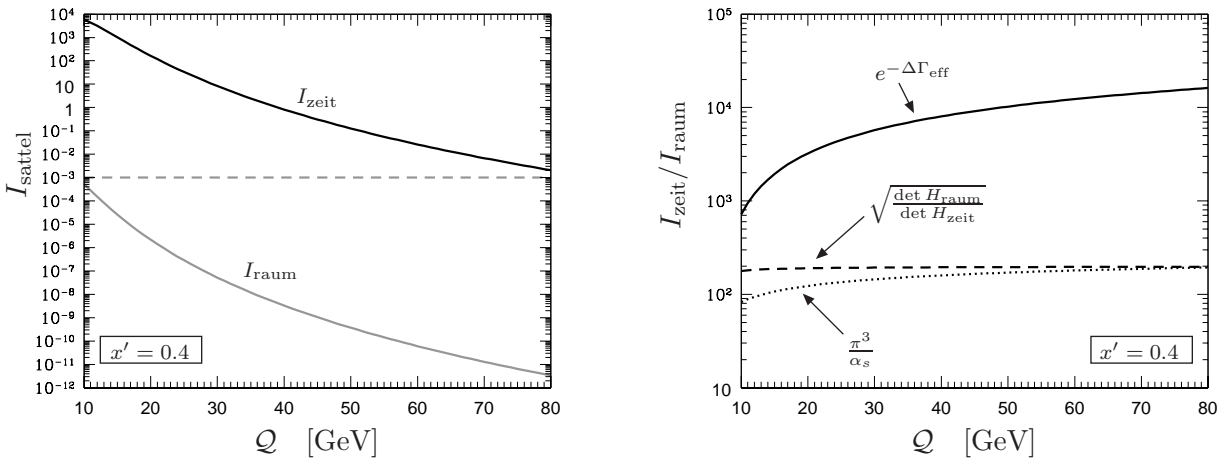


Abbildung 4.8: Zeit- und raumartige Sattelpunktsintegrale bei festem x'

(a) Zur Linken sind die beiden Sattelpunktsintegrale aus Gl. (4.76) für zeit- (schwarz) und raumartige (grau) Kinematik bei festem $x' = 0.4$ über Q dargestellt. Die Anhebung des zeitartigen Integrals beträgt etwa 7...9 Größenordnungen.

(b) Die rechte Abbildung zeigt die einzelnen Beiträge, aus denen sich die Anhebung des zeitartigen Sattelpunktsintegrals gegenüber dem raumartigen zusammensetzt.

geben wurden. Für $\rho_{\text{sp}}\mathcal{Q}$ sind jeweils die entsprechenden Sattelpunktlösungen

$$\rho\mathcal{Q} = \begin{cases} \frac{2\beta_0 S^{(I\bar{I})}}{2 - \sqrt{1-x'}\sqrt{\xi_{\text{sp}}+2}} & \text{zeitartig (LHC)} \\ \frac{2\beta_0 S^{(I\bar{I})}}{2 - \sqrt{\frac{1}{x'}-1}\sqrt{\xi_{\text{sp}}-2}} & \text{raumartig (DIS)} \end{cases} \quad (4.79)$$

zu verwenden.

Vergleicht man nun bei jeweils gleicher Massenskala \mathcal{Q} die einzelnen Terme des zeitartigen mit denen des raumartigen Sattelpunktsintegrals,

$$e^{-(\Gamma_{\text{zeit}}-\Gamma_{\text{raum}})} = \left(\frac{\rho_{\text{zeit}}}{\rho_{\text{raum}}}\right)^{2\beta_0 S^{(I\bar{I})}} \prod_{i=1}^6 \sqrt{\frac{\lambda_{i\text{raum}}}{\lambda_{i\text{zeit}}}} \sim \left(\frac{\rho_{\text{zeit}}}{\rho_{\text{raum}}}\right)^3, \quad (4.80)$$

so stellt man fest, dass die Anhebung im Wesentlichen durch die jeweils unterschiedliche Sattelpunktlösung für die Instantongröße zustande kommt, deren Verhältnis sich zu

$$\frac{\rho_{\text{zeit}}}{\rho_{\text{raum}}} = \frac{2 - \sqrt{\frac{1}{x'}-1}\sqrt{\xi_{\text{sp}}-2}}{2 - \sqrt{1-x'}\sqrt{\xi_{\text{sp}}+2}} \quad (4.81)$$

ergibt. Als Funktion von ξ_{sp} und x' haben die raum- und zeitartige Sattelpunktlösung (4.79) der Instantongröße nun jeweils einen Pol bei der Nullschleifenlösung $\xi_0 \equiv \frac{4}{1-x'} - 2$, wobei ihr Verhältnis gegen

$$\lim_{\xi \rightarrow \xi_0} \frac{\rho_{\text{zeit}}}{\rho_{\text{raum}}} = \frac{1}{x'} + \mathcal{O}\left(\xi + 2 - \frac{4}{1-x'}\right) \quad (4.82)$$

strebt.

Nimmt man diesen Grenzwert als den führenden Entwicklungsterm für das Verhältnis der Instantongrößen in zeit- und raumartiger Kinematik, so wird das zeitartige Sattelpunktsintegral allein aufgrund dieses Terms um $-(2\beta_0 S^{(I\bar{I})} + 6/2)\log(x' \approx 0.4) \sim 5$ Größenordnungen angehoben. Eine Entwicklung von Gl. (4.81) bis zu höherer als der führenden Ordnung ergibt einen leichten zusätzlichen Anstieg bei $\xi < \xi_0$. Tatsächlich nimmt ξ bei gegebenem x' an dessen Sattelpunktlösung in Zweischleifennäherung einen etwas kleineren Wert als ξ_0 an, was zu einem weiteren leichten Anstieg führt. Hinzu kommen noch weitere Faktoren über die Eigenwerte, welche Gl. (4.78) zu entnehmen sind, die zu einem zusätzlichen leichten Anstieg des zeitartigen Sattelpunktintegrals führen.

Resumee

Insgesamt ist festzustellen, dass der Instanton-induzierte Prozess in gg -Streuung mit einer Virtualität eines zeitartigen Impulses in einem s -Kanal des Endzustandes für kleine x' deutlich geringer unterdrückt wird als sein Pendant aus tief-inelastischer Streuung mit einer Virtualität zu einem raumartigen Impuls. Insbesondere scheint selbst die große Masse eines W -Bosons nicht auszureichen, um den Wirkungsquerschnitt unmessbar klein werden

zu lassen. Vielmehr wurde der Eindruck gewonnen, dass Instanton-Prozesse dieser Art an PP -Beschleunigern, die eine genügend hohe gg -Schwerpunktsenergie zur Verfügung stellen können, recht häufig auftreten sollten. Die inklusive gg -Streuung unter Emission eines W -Bosons erscheint also zunächst als eine sehr vielversprechende Möglichkeit, Instanton-induzierte Ereignisse am LHC nachweisen zu können.

Allerdings bestehen gewisse Zweifel daran, dass der Gültigkeitsbereich in x' derselbe sein dürfte wie in tief-inelastischer Streuung. Die Anhebung des Wirkungsquerschnittes für zeitartige Kinematik konnte auf Unterschiede in der jeweiligen Sattelpunktslösung für die Instantongröße zurückgeführt werden. Diese fällt im zeitartigen Fall um einen Faktor

$$\frac{\rho_{\text{zeit}}}{\rho_{\text{raum}}} \gtrsim \frac{1}{x'} \quad (4.83)$$

größer aus als im Raumartigen. Wie in Ref. [14] gezeigt wurde, lässt sich die Sattelpunktslösung für größere ξ mit der Begrenzung durch die Sphaleronenergie in Verbindung bringen. In tief inelastischer Streuung wurde dabei im Sattelpunkt die Relation $M_{\text{sph}} \sim \mathcal{Q}$ [33] ermittelt, wobei $\mathcal{Q} \sim 1/\rho_{\text{sp}}$ ist. Ein Anstieg des Sattelpunktwertes für ρ , wie im hier betrachteten Fall, würde u.U. dazu führen, dass das Verhältnis der relevanten Skala \mathcal{Q} zur Sphaleronenergie sich zu

$$M_{\text{sph}} \sim x' \mathcal{Q} \quad \text{zeitartig (LHC) ?} \quad (4.84)$$

verschiebt. Dies könnte wiederum zu einer Minderung des effektiven Gültigkeitsbereichs in M' oder \sqrt{s} führen und damit den exponentiellen Anstieg des Wirkungsquerschnittes dämpfen. Eine genauere Untersuchung in diese Richtung scheint daher unabdingbar.

Bei kleineren Massenskalen würde ein erhöhter ρ -Sattelpunkt zudem dazu führen, dass die Instantongröße bei kleinen x' oberhalb von $\rho_{\text{max}} \approx 0.3 \text{ fm}$ ausfallen würde, so dass die perturbativ berechnete Instanton-Größenverteilung ihre Gültigkeit verlieren würde. Zur Kompensation, so man nicht auf Werkzeuge wie gittergestützte Dichteverteilungen zurückgreifen möchte [13,14], wäre bei zu kleinem \mathcal{Q} entsprechend die Grenze für x' weiter nach oben zu korrigieren, was wiederum zu einer starken Unterdrückung des Wirkungsquerschnittes führen würde. Dies wäre bei der Untersuchung von Prozessen mit einem virtuellen Photon anstelle des W -Bosons zu berücksichtigen.

Während bei Instantonprozessen in tief-inelastischer eP -Streuung mit raumartiger Kinematik die Schwerpunktsenergie des Subprozesses direkt von der Skalierungsvariable x' abhängt, sind diese beiden Größen in der betrachteten zeitartigen Umgebung weitestgehend unabhängig voneinander. Dies scheint für große Energien (insbesondere bei kleineren Virtualitäten) zu sehr großen Wirkungsquerschnitten zu führen. Bislang konnte noch kein Mechanismus gefunden werden, der diesem entgegen wirken bzw. den Gültigkeitsbereich von s/Q^2 festlegen würde.

5 Zusammenfassung

Das Anliegen dieser Arbeit war es, mit Methoden der Instanton-Störungstheorie in semi-klassischer Näherung einen ersten quantitativen Eindruck über das Entdeckungspotential von QCD-Instantonen an Protonenbeschleunigern mit hoher Schwerpunktsenergie wie dem LHC zu gewinnen. Hierbei konnte auf die reichhaltige Erfahrung ausgiebiger theoretischer Untersuchungen [33, 34, 37, 42, 43, 46] zu Instantonprozessen in tief-inelastischer eP -Streuung bei HERA zurückgegriffen werden. Dabei kam der Untersuchung des Übergangs vom führenden Instanton-induzierten Prozess bei HERA zum entsprechend führenden Prozess am LHC, der Instanton-induzierten gg -Streuung, besondere Bedeutung zu. Wesentliche Unterschiede zwischen beiden Fällen kommen dadurch zustande, dass die für die Instanton-Störungsrechnung benötigte Virtualität in der gg -Streuung durch die Emission eines virtuellen Photons oder eines massiven Vektorbosons über einen s -Kanal des *Endzustands* präpariert wird und daher *zeitartig* ist.

Der einfachste Prozess

Einer der Schwerpunkte der Arbeit bestand darin, zunächst den *einfachsten* Instanton-induzierten Prozess in gg -Streuung unter Vernachlässigung zusätzlicher Gluonen zu studieren (Kapitel 3), wobei von den Erfahrungen zur tief-inelastischen Streuung profitiert werden konnte [34]. Hierbei konnten u.a. wichtige Informationen über die Auswirkungen der zeitartigen Virtualität gewonnen werden.

Die wesentlichen Resultate der Untersuchungen zum einfachsten Prozess lassen sich wie folgt zusammenfassen:

- So konnte durch die Notwendigkeit der analytischen Fortsetzung des ρ -Integrals zu $\rho \rightarrow -i\rho$ bei zeitartigem q bereits ein wesentlicher Hinweis darauf gefunden werden, dass der dominante Beitrag zum Sattelpunktsintegral im inklusiven Fall von einem imaginären Wert für ρ herrührt.
- Wie bereits im tief-inelastischen Fall treten zwei Impulsskalen auf: die Virtualität Q' des virtuellen Quarks und die Virtualität Q des von diesem emittierten Vektorbosons (γ^* oder W). Aufgrund ihrer *Zeitartigkeit* genügen sie der Hierarchie $Q < Q'$. Dies führt zu einer starken Unterdrückung des mit $e^{-\rho Q'}$ abfallenden Anteils des effektiven Vertices zwischen Quark und Vektorboson gegenüber dem, welcher mit $e^{-\rho Q}$ abfällt. Hierdurch ergibt sich, dass die für die ρ -Integration relevante Skala im Zeitartigen Q und nicht Q' ist, also gerade umgekehrt wie im Bjorken-Limes in tief-inelastischer

Streuung. Dieser Umstand wirkt sich auch unmittelbar auf allgemeinere Prozesse in Instanton-induzierter gg -Streuung aus.

- Ein interessanter Aspekt der gg -Streuung ist die Möglichkeit beispielsweise ein W -Boson anstelle eines virtuellen Photons zu emittieren. Durch die reelle Masse des W -Bosons tragen bei dessen Ankopplung auch longitudinale Anteile bei, die im Falle der γ^* -Emission durch Interferenzen zwischen mehreren beteiligten Diagrammen aufgehoben werden. Ferner konnte gezeigt werden, dass für nicht zu große $Q' \gtrsim Q$ die Interferenzterme effektiv unterdrückt werden.
- Der einfachste Prozess wurde in einen Subprozess mit virtuellem Quark und dessen anschließenden Zerfall unter Emission des W -Bosons zerlegt. Durch die Berechnung des Wirkungsquerschnittes des virtuellen Subprozesses und dessen anschließenden Vergleich mit dem des vollen Prozesses, konnte der Zerfallsfaktor für den Zerfall eines virtuellen Quarks unter Emission eines Vektorbosons im Instantonhintergrund bestimmt werden. Über Crossing konnte dieser Faktor ferner mit dem entsprechenden Flussfaktor in tief-inelastischer Streuung in Zusammenhang gebracht werden.

Einteilchen-inklusive Wirkungsquerschnitt

Aufbauend auf den beim einfachsten Prozess gewonnenen Erkenntnissen und den Erfahrungen aus der tief-inelastischen Streuung [37] wurden in Kapitel 4, unter Anwendung der Valley-Methode [30, 69, 81, 82, 85], Instanton-Prozesse in gg -Streuung mit beliebiger Gluonenzahl berücksichtigt. Der Prozess wurde dabei in einen virtuellen Subprozess und den Zerfall eines virtuellen Quarks durch die Emission des Vektorbosons zerlegt. Um die Kontrolle über die relevante Impulsskala gewährleisten zu können, wurde für den virtuellen Subprozess der Einteilchen-inklusive Wirkungsquerschnitt über eine geeignete Vorwärtstreuamplitude berechnet. Die Integration über die kollektiven Koordinaten wurde dabei, wie auch im tief-inelastischen Fall [37], über eine Sattelpunktsnäherung durchgeführt.

Bei der Berechnung des inklusiven Wirkungsquerschnittes wurden insbesondere Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen beiden Fällen untersucht:

- Aufgrund der Einteilchen-inklusive Betrachtung wird das Verhältnis R/ρ von Instantonabstand und -größe im Sattelpunkt nun nicht über die Schwerpunktsenergie sondern über die entsprechende „Recoil“-Masse M' zur Virtualität des Subprozesses kontrolliert.
- Wegen der Zeitartigkeit liegt der Sattelpunkt nun auch für die Instantongröße ρ auf der imaginären Achse, jenseits des Integrationsbereiches. Hierdurch ergibt sich mit $\xi = \frac{R^2}{\rho^2} - 2$ ein anderer Zusammenhang zwischen dem konformen Parameter ξ , dem Abstand R und der Instantongröße ρ . Bei $M' > Q$, wobei Q die Masse des emittierten Vektorbosons sei, wird $\xi < 2$, wofür die Valley-Wirkung komplex wird und der Phasenraum in zwei qualitativ unterschiedliche Bereiche geteilt wird.
- Durch analytische Fortsetzung der Instantongröße ρ konnte das Sattelpunktsproblem und deren Lösung im Wesentlichen auf den tief-inelastischen Fall abgebildet werden.

-
- Aufgrund des modifizierten Zusammenhangs zum konformen Parameter wurde für die Instantongröße im Sattelpunkt bei jeweils gleichem ξ ein größerer Wert als in tief-inelastischer Streuung gefunden. Da bei großen Instantonen die Tunnelunterdrückung kleiner wird, steigt hierdurch der Wirkungsquerschnitt erheblich an.

Fazit

Als das wesentliche Ergebnis dieser Arbeit kann betrachtet werden, dass die Rate von Instantonereignissen an Beschleunigern wie dem LHC erheblich höher ausfallen sollte, als dies zunächst, ausgehend vom tief-inelastischen Fall, durch einfache Analogieschlüsse anzunehmen war. Effektiv ist hierfür die erhöhte Instantongröße im Sattelpunkt verantwortlich, wodurch die Tunnelunterdrückung des Prozesses reduziert wird. Diese Anhebung wiederum ist unmittelbar auf die Zeitartigkeit der eingespeisten Virtualität zurückzuführen.

Liegt die Virtualität hingegen deutlich unterhalb der W -Masse so wandert die Instantongröße im Sattelpunkt in Bereiche, die außerhalb des Gültigkeitsbereiches der Instanton-Störungsrechnung liegen. Um dies zu verhindern müsste der betrachtete Bereich des Phasenraumes weiter eingeschränkt werden, was zu einer erheblichen Reduzierung der Rate führen würde.

Zudem hat sich wegen der hohen Wirkungsquerschnitte bei kleinen x' bzw. großen $\tau = M'/Q$ die Frage aufgedrängt, inwiefern die für tief-inelastische Streuung bestimmten Gültigkeitsbereiche der Instanton-Störungsrechnung sich ohne Weiteres einfach auf den zeitartigen Fall übertragen lassen. Man darf vermuten, dass wegen der erhöhten Instantongröße im Sattelpunkt die Sphaleronmasse im Vergleich zum tief-inelastischen Fall nicht unerheblich zu reduzieren ist, was u.U. zu engeren kinematischen Grenzen und somit zu kleineren Wirkungsquerschnitten führen würde.

Eine genaue Beantwortung dieser Frage hat entscheidenden Einfluss auf die Vorhersage von Instantonraten am LHC. Trotzdem erscheint insgesamt die Präparation des Instantonprozesses über die Emission eines Z - oder W -Bosons anstatt eines virtuellen Photons als vielversprechende Möglichkeit, um Instantonereignisse am LHC nachzuweisen.

Ausblick

Im Rahmen dieser Arbeit blieben noch einige weitere Fragen offen, diese seien hier kurz aufgeführt:

- Durch die Abhängigkeit der Sattelpunktlösung von den kinematischen Variablen werden diese im gültigen Bereich der Instanton-Störungstheorie scheinbar auf $M' < Q$ beschränkt. Für kleinere M' bleibt der Tunnelfaktor dabei reell, für größere wird dieser dagegen komplex und oszilliert. Es stellt sich die Frage, ob es auch für $M' > Q$ einen Bereich gibt, in dem die Instantonstörungsrechnung anwendbar ist und ob dieser mit $M' < Q$ beispielsweise über eine konforme Symmetrie miteinander in Beziehung steht.
- Für die Schwerpunktsenergie des Subprozesses konnte keine klare Begrenzung durch die Sphaleronmasse [37] hergestellt werden. Es ist zu vermuten, dass diese nicht

zu weit oberhalb der Masse des Vektorbosons liegen sollte, etwa dem Zwei- bis Dreifachen, da eine zu hohe Schwerpunktsenergie ansonsten zu unrealistisch hohen Wirkungsquerschnitten führen würde.

- Weiterhin steht eine systematische Untersuchung der Interferenzterme aus, die bei der Berücksichtigung mehrerer leichter Quarkflavors auftreten. Hierbei ist insbesondere von Interesse, ob es kinematische Regionen gibt, in denen diese unterdrückt werden, ähnlich wie dies im tief-inelastischen Fall im Bjorken-Limes der Fall ist.
- Schließlich gilt es noch die phänomenologische Untersuchung mittels Monte-Carlo-Simulationen voranzutreiben. Die in dieser Arbeit durchgeführten Berechnungen sollten sich als Grundlage hierfür als hilfreich erweisen.

A Konventionen und Identitäten

A.1 Eichfelder und Wirkung in Minkowskimetrik

Es folgt eine Auflistung der verwendeten Konventionen und Definitionen:

- Kovariante Ableitung:

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - igA_\mu \quad (\text{A.1})$$

- Feldstärketensor:

$$F_{\mu\nu} = \frac{1}{2} t_a F_{\mu\nu}^a \equiv \frac{i}{g} [\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu] \quad (\text{A.2})$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig [A_\mu, A_\nu] \quad (\text{A.3})$$

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g C_{bc}^a A_\mu^b A_\nu^c \quad (\text{A.4})$$

- Gruppengeneratoren:

$$[t_a, t_b] = 2iC_{ab}^c t_c \quad (\text{A.5})$$

$$\text{tr}(t_a t_b) = 2\delta_{ab} \quad (\text{A.6})$$

- Wirkung in Minkowskimetrik:

$$S_M = \int d^4x \left(\bar{\psi} (i\mathcal{D} - m) \psi - \frac{1}{2} \text{tr}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) \right) \quad (\text{A.7})$$

A.2 Sigma- und Gamma-Matrizen in Minkowskimetrik

- Pauli-Matrizen:

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.8})$$

$$[\tau_a, \tau_b] = 2i\epsilon_{abc} \tau_c \quad \{\tau_a, \tau_b\} = 2\delta_{ab} \mathbb{1} \quad (\tau_a)_j^i (\tau_a)_l^k = 2\delta_l^i \delta_j^k - \delta_j^i \delta_l^k \quad (\text{A.9})$$

- Dirac-Matrizen

$$\gamma_\mu = \begin{pmatrix} 0 & \bar{\sigma}_\mu \\ \sigma_\mu & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^5 = \gamma_5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \quad (\text{A.10})$$

- Sigma-Matrizen

$$\sigma \equiv (\mathbb{1}, \vec{\tau}), \quad \text{und} \quad \bar{\sigma} \equiv (\mathbb{1}, -\vec{\tau}) \quad (\text{A.11})$$

A.3 Sigma-Matrizen in euklidischer Metrik

- Euklidische Sigma-Matrizen

$$\sigma \equiv (-i\vec{\tau}, \mathbb{1}), \quad \bar{\sigma} \equiv (i\vec{\tau}, \mathbb{1}) \quad (\text{A.12})$$

$$\bar{\sigma}_\mu \sigma_\nu + \bar{\sigma}_\nu \sigma_\mu = 2\delta_{\mu\nu} \quad \sigma_\mu \bar{\sigma}_\nu + \sigma_\nu \bar{\sigma}_\mu = 2\delta_{\mu\nu} \quad (\text{A.13})$$

$$\sigma^{\alpha\dot{\alpha}} = -\epsilon^{\alpha\beta} \bar{\sigma}_{\dot{\beta}\beta} \epsilon^{\dot{\beta}\dot{\alpha}} \quad \bar{\sigma}_{\dot{\alpha}\alpha} = -\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \sigma^{\beta\dot{\beta}} \epsilon_{\beta\alpha} \quad (\text{A.14})$$

$$\epsilon_{\beta\alpha} \sigma^{\alpha\dot{\alpha}} = -\bar{\sigma}_{\dot{\beta}\beta} \epsilon^{\dot{\beta}\dot{\alpha}} \quad \epsilon^{\dot{\beta}\dot{\alpha}} \bar{\sigma}_{\dot{\alpha}\alpha} = -\sigma^{\beta\dot{\beta}} \epsilon_{\beta\alpha} \quad (\text{A.15})$$

$$(\sigma_\mu)^{\alpha\dot{\alpha}} (\bar{\sigma}_\mu)_{\dot{\beta}\beta} = 2\delta_\beta^\alpha \delta_{\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}} \quad (\text{A.16})$$

$$(\sigma_\mu)^{\alpha\dot{\alpha}} (\sigma_\mu)^{\beta\dot{\beta}} = 2\epsilon^{\alpha\beta} \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \quad (\bar{\sigma}_\mu)_{\dot{\alpha}\alpha} (\bar{\sigma}_\mu)_{\dot{\beta}\beta} = 2\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \epsilon_{\alpha\beta} \quad (\text{A.17})$$

- 't Hooft-Symbole

$$\eta_{\mu\nu}^a \equiv \begin{cases} \epsilon_{aij} & \mu = i, \nu = j \\ \delta_\mu^a & \nu = 4 \\ -\delta_\nu^a & \mu = 4 \\ 0 & \mu = 4, \nu = 4 \end{cases} \quad \bar{\eta}_{\mu\nu}^a \equiv \begin{cases} \epsilon_{aij} & \mu = i, \nu = j \\ -\delta_\mu^a & \nu = 4 \\ \delta_\nu^a & \mu = 4 \\ 0 & \mu = 4, \nu = 4 \end{cases} \quad (\text{A.18})$$

$$\bar{\sigma}_\mu \sigma_\nu - \bar{\sigma}_\nu \sigma_\mu = 2i\eta_{\mu\nu}^a \tau_a \quad \sigma_\mu \bar{\sigma}_\nu - \sigma_\nu \bar{\sigma}_\mu = 2i\bar{\eta}_{\mu\nu}^a \tau_a \quad (\text{A.19})$$

$$\sigma_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{4i} (\bar{\sigma}_\mu \sigma_\nu - \bar{\sigma}_\nu \sigma_\mu), \quad \bar{\sigma}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{4i} (\sigma_\mu \bar{\sigma}_\nu - \sigma_\nu \bar{\sigma}_\mu) \quad (\text{A.20})$$

A.4 Spinoren und Polarisationsvektoren

- Weylgleichungen

$$\bar{k}_{\dot{\alpha}\alpha} \chi_L^\alpha(k) = 0 \quad k^{\alpha\dot{\alpha}} \chi_{R\dot{\alpha}}(k) = 0 \quad (\text{A.21})$$

- Normierung der Spinoren

$$\chi_{R\dot{\alpha}}(k) \chi_{R\dot{\alpha}}^\dagger(k) = \bar{k}_{\dot{\alpha}\alpha} \quad \chi_L^\alpha(k) \chi_L^{\dagger\dot{\alpha}}(k) = k^{\alpha\dot{\alpha}} \quad (\text{A.22})$$

- Longitudinalität der Polarisationsvektoren

$$\varepsilon(p) \cdot p = 0 \quad (\text{A.23})$$

B Gruppenintegration

Zu bestimmen sind die Koeffizienten des Gruppenintegrals $\mathcal{I}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3,j_1j_2j_3}^{i_1i_2i_3,\beta_1\beta_2\beta_3}$ aus Gl. (3.61). Kontraktion von Gl. (3.43) mit $\delta_{i_3}^{j_3}$ liefert zunächst

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{\alpha_1\alpha_2,j_1j_2}^{(2,2)i_1i_2,\beta_1\beta_2} \delta_{\alpha_3}^{\beta_3} &\stackrel{!}{=} \mathcal{I}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3,j_1j_2j_3}^{(3,3)i_1i_2i_3,\beta_1\beta_2\beta_3} \delta_{i_3}^{j_3} \\
&= \sum_{m=1}^{3!} a_m^{(3,3)} \sum_{n=1}^{3!} \delta_{P_n(P_m(j_1j_2j_3))}^{i_1i_2j_3} \delta_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}^{P_n(\beta_1\beta_2\beta_3)} \\
&= \sum_{m=1}^{3!} a_m^{(3,3)} \left[\delta_{j_1j_2}^{i_1i_2} \left(N \delta_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}^{P_m(\beta_1\beta_2\beta_3)} + \delta_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}^{P_3P_m(\beta_1\beta_2\beta_3)} + \delta_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}^{P_2P_3P_m(\beta_1\beta_2\beta_3)} \right) \right. \\
&\quad \left. + \delta_{j_2j_1}^{i_1i_2} \left(N \delta_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}^{P_2P_m(\beta_1\beta_2\beta_3)} + \delta_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}^{P_2P_3P_m(\beta_1\beta_2\beta_3)} + \delta_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}^{P_3P_2P_m(\beta_1\beta_2\beta_3)} \right) \right], \tag{B.1}
\end{aligned}$$

wobei die Permutationsgruppe durch die Elemente

$$P_1 \equiv [1, 2, 3] = \text{id} \qquad P_1(j_1j_2j_3) = j_1j_2j_3 \tag{B.2}$$

$$P_2 \equiv [2, 1, 3] = [1 \leftrightarrow 2] \qquad P_2(j_1j_2j_3) = j_2j_1j_3 \tag{B.3}$$

$$P_3 \equiv [1, 3, 2] = [2 \leftrightarrow 3] \qquad P_3(j_1j_2j_3) = j_1j_3j_2 \tag{B.4}$$

$$P_4 \equiv [3, 1, 2] = P_2P_3 \qquad P_4(j_1j_2j_3) = j_3j_1j_2 \tag{B.5}$$

$$P_5 \equiv [2, 3, 1] = P_3P_2 \qquad P_5(j_1j_2j_3) = j_2j_3j_1 \tag{B.6}$$

$$P_6 \equiv [3, 2, 1] = P_2P_3P_2 = P_3P_2P_3 \qquad P_6(j_1j_2j_3) = j_3j_2j_1 \tag{B.7}$$

gegeben sei. Ein Koeffizientenvergleich mit

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{\alpha_1\alpha_2,j_1j_2}^{(2,2)i_1i_2,\beta_1\beta_2} \delta_{\alpha_3}^{\beta_3} &= \sum_{m=1}^{2!} \sum_{n=1}^{2!} a_{mn}^{(2,2)} \delta_{P_m(j_1j_2)}^{i_1i_2} \delta_{\alpha_1\alpha_2}^{P_n(\beta_1\beta_2)} \delta_{\alpha_3}^{\beta_3} \\
&= a_1^{(2,2)} \sum_{n=1}^{2!} \delta_{P_n(j_1j_2)}^{i_1i_2} \delta_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}^{P_n(\beta_1\beta_2)\beta_3} + a_2^{(2,2)} \sum_{n=1}^{2!} \delta_{P_n(j_1j_2)}^{i_1i_2} \delta_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}^{P_n(\beta_2\beta_1)\beta_3} \tag{B.8}
\end{aligned}$$

liefert das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
 Na_1^{(3,3)} + a_3^{(3,3)} + a_6^{(3,3)} &= a_1^{(2,2)} \\
 Na_2^{(3,3)} + a_5^{(3,3)} + a_4^{(3,3)} &= a_2^{(2,2)} \\
 Na_3^{(3,3)} + a_1^{(3,3)} + a_5^{(3,3)} &= 0 \\
 Na_4^{(3,3)} + a_6^{(3,3)} + a_2^{(3,3)} &= 0 \\
 Na_5^{(3,3)} + a_2^{(3,3)} + a_3^{(3,3)} &= 0 \\
 Na_6^{(3,3)} + a_4^{(3,3)} + a_1^{(3,3)} &= 0,
 \end{aligned} \tag{B.9}$$

wobei die Parameter $a_i^{(2,2)}$ in Gl. (3.60) gegeben sind. Das Gleichungssystem wird schließlich eindeutig durch die Vorfaktoren

$$a_1^{(3)} = \frac{N^2 - 2}{N(N^2 - 1)(N^2 - 4)} \tag{B.10}$$

$$a_2^{(3)} = a_3^{(3)} = a_6^{(3)} = \frac{-1}{(N^2 - 1)(N^2 - 4)} \tag{B.11}$$

$$a_4^{(3)} = a_5^{(3)} = \frac{2}{N(N^2 - 1)(N^2 - 4)} \tag{B.12}$$

gelöst.

Literaturverzeichnis

- [1] Stephen L. Adler. Axial vector vertex in spinor electrodynamics. *Phys. Rev.*, 177:2426–2438, 1969.
- J. S. Bell und R. Jackiw. A PCAC puzzle: $\pi^0 \rightarrow \gamma \gamma$ in the sigma model. *Nuovo Cim.*, A60:47–61, 1969.
- [2] Gerard 't Hooft. Symmetry breaking through Bell-Jackiw anomalies. *Phys. Rev. Lett.*, 37:8–11, 1976.
- [3] A. A. Belavin, Alexander M. Polyakov, A. S. Shvarts und Yu. S. Tyupkin. Pseudoparticle solutions of the Yang-Mills equations. *Phys. Lett.*, B59:85–87, 1975.
- [4] R. Jackiw und C. Rebbi. Vacuum periodicity in a Yang-Mills quantum theory. *Phys. Rev. Lett.*, 37:172–175, 1976.
- L. D. Faddeev. The search for multidimensional solitons. In *Alushta 1976, Proceedings, Nonlocal, Nonlinear and Nonrenormalizable Field Theories*, Dubna 1976, 207-223.
- [5] Gerard 't Hooft. Computation of the quantum effects due to a four-dimensional pseudoparticle. *Phys. Rev.*, D14:3432–3450, 1976. Erratum-ibid., D18:2199, 1978.
- [6] Khalil M. Bitar und Shau-Jin Chang. Vacuum tunneling of gauge theory in Minkowski space. *Phys. Rev.*, D17:486, 1978.
- [7] Gerard 't Hooft. How instantons solve the U(1) problem. *Phys. Rept.*, 142:357–387, 1986.
- [8] Edward V. Shuryak. The role of instantons in quantum chromodynamics. 1. physical vacuum. *Nucl. Phys.*, B203:93, 1982.
- Edward V. Shuryak. The role of instantons in quantum chromodynamics. 2. hadronic structure. *Nucl. Phys.*, B203:116, 1982.
- Edward V. Shuryak. The role of instantons in quantum chromodynamics. 3. quark - gluon plasma. *Nucl. Phys.*, B203:140, 1982.
- [9] M. C. Chu, J. M. Grandy, S. Huang und J. W. Negele. Evidence for the role of instantons in hadron structure from lattice QCD. *Phys. Rev.*, D49:6039–6050, 1994.

- [10] Thomas Schafer und Edward V. Shuryak. Instantons in QCD. *Rev. Mod. Phys.*, 70:323–426, 1998.
- [11] Dmitri Diakonov. Chiral-symmetry breaking by instantons. 1995.
- [12] Dmitri Diakonov. Instantons at work. *Prog. Part. Nucl. Phys.*, 51:173–222, 2003.
- [13] F. Schrempp und A. Utermann. Instantons and saturation in the colour dipole picture. *Acta Phys. Polon.*, B33:3633–3638, 2002.
- [14] F. Schrempp und A. Utermann. QCD instantons and high-energy diffractive scattering. *Phys. Lett.*, B543:197–207, 2002.
- [15] Andre Utermann. *QCD-instantons and saturation at small Bjorken-x. (In German)*. PhD thesis, Universität Hamburg, 2003. DESY-THESIS-2003-029.
- [16] F. Schrempp und A. Utermann. QCD instantons and saturation at small x. 2003. hep-ph/0301177.
- [17] F. Schrempp und A. Utermann. Instanton-driven saturation at small x. 2004. hep-ph/0401137.
- [18] F. Schrempp und A. Utermann. Instanton-driven gluon saturation. 2004. hep-ph/0407146.
- [19] N. S. Manton. Topology in the Weinberg-Salam theory. *Phys. Rev.*, D28:2019, 1983.
Frans R. Klinkhamer und N. S. Manton. A saddle point solution in the Weinberg-Salam theory. *Phys. Rev.*, D30:2212, 1984.
- [20] V. A. Kuzmin, V. A. Rubakov und M. E. Shaposhnikov. On the anomalous electroweak baryon number nonconservation in the early universe. *Phys. Lett.*, B155:36, 1985.
- [21] Peter Arnold und Larry D. McLerran. Sphalerons, small fluctuations and baryon number violation in electroweak theory. *Phys. Rev.*, D36:581, 1987.
- [22] A. Ringwald. Rate of anomalous baryon and lepton number violation at finite temperature in standard electroweak theory. *Phys. Lett.*, B201:510, 1988.
- [23] A. D. Sakharov. Violation of CP invariance, c asymmetry, and baryon asymmetry of the universe. *Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, 5:32–35, 1967.
- [24] Savas Dimopoulos und Leonard Susskind. On the baryon number of the universe. *Phys. Rev.*, D18:4500–4509, 1978.
- [25] V. A. Rubakov und M. E. Shaposhnikov. Electroweak baryon number non-conservation in the early universe and in high-energy collisions. *Usp. Fiz. Nauk*, 166:493–537, 1996.

- [26] W. Buchmuller, P. Di Bari und M. Plumacher. Leptogenesis for pedestrians. *Ann. Phys.*, 315:305–351, 2005.
- [27] A. Ringwald. High-energy breakdown of perturbation theory in the electroweak instanton sector. *Nucl. Phys.*, B330:1, 1990.
- [28] Olivier Espinosa. High-energy behavior of baryon and lepton number violating scattering amplitudes and breakdown of unitarity in the standard model. *Nucl. Phys.*, B343:310–340, 1990.
- [29] Valentin V. Khoze und A. Ringwald. Total cross-section for anomalous fermion number violation via dispersion relation. *Nucl. Phys.*, B355:351–368, 1991.
- [30] Valentin V. Khoze und A. Ringwald. Nonperturbative contribution to total cross-sections in nonabelian gauge theories. *Phys. Lett.*, B259:106–112, 1991.
- [31] A. Ringwald, F. Schrempp und C. Wetterich. Phenomenology of geometrical flavor interactions at TeV energies. *Nucl. Phys.*, B365:3–23, 1991.
- [32] Edward V. Shuryak und J. J. M. Verbaarschot. On baryon number violation and nonperturbative weak processes at SSC energies. *Phys. Rev. Lett.*, 68:2576–2579, 1992.
- [33] A. Ringwald und F. Schrempp. Towards the phenomenology of QCD instanton induced particle production at HERA. In D.Yu. Grigoriev et al., editors, *Quarks '94*. World Scientific, Singapore, 1995.
- [34] S. Moch, A. Ringwald und F. Schrempp. Instantons in deep-inelastic scattering: The simplest process. *Nucl. Phys.*, B507:134–156, 1997.
- [35] S. Moch, A. Ringwald und F. Schrempp. QCD-instantons in e^+p scattering. In Jose Repond und Daniel Krakauer, editors, *Deep Inelastic Scattering and QCD*. Woodbury, N.Y., American Inst. Phys., 1997. hep-ph/9706400.
- [36] A. Ringwald und F. Schrempp. QCD-instantons at HERA: An introduction. *J. Phys.*, G25:1297–1306, 1999.
- [37] A. Ringwald und F. Schrempp. Instanton-induced cross-sections in deep-inelastic scattering. *Phys. Lett.*, B438:217–228, 1998.
- [38] A. Ringwald und F. Schrempp. Searching for QCD-instantons at HERA. *Nucl. Phys. Proc. Suppl.*, 74:376–379, 1999.
- [39] A. Ringwald und F. Schrempp. QCD-instantons at HERA. 1998.
- [40] T. Carli, J. Gerigk, A. Ringwald und F. Schrempp. QCD instanton-induced processes in deep-inelastic scattering: Search strategies and model dependencies. 1998.

- [41] A. Ringwald und F. Schrempp. Instantons in the QCD vacuum and in deep inelastic scattering. *Nucl. Phys. Proc. Suppl.*, 79:447–449, 1999.
- [42] A. Ringwald und F. Schrempp. Confronting instanton perturbation theory with QCD lattice results. *Phys. Lett.*, B459:249–258, 1999.
- [43] A. Ringwald und F. Schrempp. QCDINS 2.0: A Monte Carlo generator for instanton-induced processes in deep-inelastic scattering. *Comput. Phys. Commun.*, 132:267–305, 2000.
- [44] A. Ringwald und F. Schrempp. Zooming-in on instantons at HERA. *Phys. Lett.*, B503:331–340, 2001.
- [45] F. Schrempp. Tracking QCD-instantons. *J. Phys.*, G28:915–926, 2002.
- [46] F. Schrempp. Instanton-induced processes: An overview. 2005. hep-ph/0507160.
- [47] C. Adloff et al. Search for QCD instanton-induced processes in deep- inelastic scattering at HERA. *Eur. Phys. J.*, C25:495–509, 2002.
- [48] S. Chekanov et al. Search for QCD-instanton induced events in deep inelastic e p scattering at HERA. *Eur. Phys. J.*, C34:255–265, 2004.
- [49] A. Brandenburg, A. Ringwald und A. Utermann. Instantons in lepton pair production. *Nucl. Phys.*, B754:107–126, 2006.
- [50] Dmitri Diakonov und Victor Petrov. Nonperturbative isotropic multiparticle production in Yang- Mills theory. *Phys. Rev.*, D50:266–282, 1994.
- [51] Sidney R. Coleman. The uses of instantons. Lecture delivered at 1977 Int. School of Subnuclear Physics, Erice, Italy, Jul 23-Aug 10, 1977.
- [52] R. Jackiw und C. Rebbi. Spinor analysis of Yang-Mills theory. *Phys. Rev.*, D16:1052, 1977.
- [53] Jr. Callan, Curtis G., R. F. Dashen und David J. Gross. The structure of the gauge theory vacuum. *Phys. Lett.*, B63:334–340, 1976.
- [54] R. J. Crewther. Chirality selection rules and the U(1) problem. *Phys. Lett.*, B70:349, 1977.
R. J. Crewther. Status of the U(1) problem. *Riv. Nuovo Cim.*, 2N8:63–117, 1979.
- [55] Albert S. Schwarz. On regular solutions of euclidean Yang-Mills equations. *Phys. Lett.*, B67:172–174, 1977.
- [56] Lowell S. Brown, Robert D. Carlitz und Choon-kyu Lee. Massless excitations in instanton fields. *Phys. Rev.*, D16:417–422, 1977.

-
- [57] M. F. Atiyah und I. M. Singer. The index of elliptic operators. 1. *Annals Math.*, 87:484–530, 1968.
- M. F. Atiyah und I. M. Singer. The index of elliptic operators. 3. *Annals Math.*, 87:546–604, 1968.
- M. F. Atiyah und I. M. Singer. The index of elliptic operators. 4. *Annals Math.*, 93:119–138, 1971.
- M. F. Atiyah und I. M. Singer. The index of elliptic operators. 5. *Annals Math.*, 93:139–149, 1971.
- [58] Lowell S. Brown, Robert D. Carlitz, Dennis B. Creamer und Choon-kyu Lee. Propagation functions in pseudoparticle fields. *Phys. Rev.*, D17:1583, 1978.
- [59] Claude W. Bernard, Norman H. Christ, Alan H. Guth und Erick J. Weinberg. Pseudoparticle parameters for arbitrary gauge groups. *Phys. Rev.*, D16:2967, 1977.
- [60] R. Jackiw und C. Rebbi. Conformal properties of a Yang-Mills pseudoparticle. *Phys. Rev.*, D14:517, 1976.
- [61] R. Jackiw, C. Nohl und C. Rebbi. Conformal properties of pseudoparticle configurations. *Phys. Rev.*, D15:1642, 1977.
- [62] R. Jackiw und C. Rebbi. Degrees of freedom in pseudoparticle systems. *Phys. Lett.*, B67:189, 1977.
- [63] D. Klammer und F. Schrempp. In Vorbereitung.
- [64] Daniela Klammer. QCD-instantons and conformal inversion symmetry. Master's thesis, Vienna U., July 2006. DESY-THESIS-2006-018.
- [65] L. F. Abbott. The background field method beyond one loop. *Nucl. Phys.*, B185:189, 1981.
- L. F. Abbott. Introduction to the background field method. *Acta Phys. Polon.*, B13:33, 1982.
- L. F. Abbott, Marcus T. Grisaru und Robert K. Schaefer. The background field method and the S matrix. *Nucl. Phys.*, B229:372, 1983.
- [66] Nathan Andrei und David J. Gross. The effect of instantons on the short distance structure of hadronic currents. *Phys. Rev.*, D18:468, 1978.
- [67] Jean-Loup Gervais und B. Sakita. Extended particles in quantum field theories. *Phys. Rev.*, D11:2943, 1975.
- [68] E. Tomboulis. Canonical quantization of nonlinear waves. *Phys. Rev.*, D12:1678, 1975.

- [69] I. I. Balitsky und A. V. Yung. Collective-coordinate method for quasizero modes. *Phys. Lett.*, B168:113–119, 1986.
- [70] Claude W. Bernard. Instanton interactions at the one loop level. *Phys. Rev.*, D18:2026, 1978.
- [71] Lowell S. Brown und Dennis B. Creamer. Vacuum polarization about instantons. *Phys. Rev.*, D18:3695, 1978.
- [72] A. I. Vainshtein, Valentin I. Zakharov, V. A. Novikov und Mikhail A. Shifman. ABC of instantons. *Sov. Phys. Usp.*, 25:195, 1982.
- [73] T. R. Morris, D. A. Ross und Christopher T. Sachrajda. Higher order quantum corrections in the presence of an instanton background field. *Nucl. Phys.*, B255:115, 1985.
- [74] D. Amati und A. Rouet. Renormalization of Yang-Mills theory developed around an instanton. *Nuovo Cim.*, A50:265, 1979.
- [75] Dmitri Diakonov und V. Yu. Petrov. A theory of light quarks in the instanton vacuum. *Nucl. Phys.*, B272:457, 1986.
- [76] Sven-Olaf Moch. *QCD-instantons in deep-inelastic scattering*. PhD thesis, Universität Hamburg, 1997. DESY-T-97-02.
- [77] Alfred H. Mueller. First quantum corrections to gluon-gluon collisions in the one instanton sector. *Nucl. Phys.*, B348:310–326, 1991.
Alfred H. Mueller. On higher order semiclassical corrections to high-energy cross-sections in the one instanton sector. *Nucl. Phys.*, B364:109–126, 1991.
- [78] Massimo Porrati. Dispersion relations and finite size effects in high-energy electro-weak interactions. *Nucl. Phys.*, B347:371–393, 1990.
- [79] Dmitri Diakonov und V. Yu. Petrov. Instanton based vacuum from Feynman variational principle. *Nucl. Phys.*, B245:259, 1984.
- [80] I. I. Balitsky und A. V. Yung. Instanton molecular vacuum in N=1 supersymmetric quantum mechanics. *Nucl. Phys.*, B274:475, 1986.
- [81] A. V. Yung. Instanton vacuum in supersymmetric QCD. *Nucl. Phys.*, B297:47, 1988.
- [82] J. J. M. Verbaarschot. Streamlines and conformal invariance in Yang-Mills theories. *Nucl. Phys.*, B362:33–53, 1991.
- [83] Ian I. Balitsky und Vladimir M. Braun. Valleys in Minkowski space and instanton induced cross- sections. *Nucl. Phys.*, B380:51–82, 1992.

-
- [84] Peter B. Arnold und Michael P. Mattis. Peace in the valley: Concordant approaches to distorted instantons. *Phys. Rev.*, D44:3650–3660, 1991.
- [85] Jurgen Fuchs und Andreas Ringwald. Valley determinants. *Nucl. Phys.*, B408:391–414, 1993.
- [86] Ian I. Balitsky und Vladimir M. Braun. Instanton-induced contributions of fractional twist in the cross-section of hard gluon-gluon scattering in QCD. *Phys. Rev.*, D47:1879–1888, 1993.
- [87] Ian I. Balitsky und Vladimir M. Braun. Instanton induced contributions to structure functions of deep inelastic scattering. *Phys. Lett.*, B314:237–245, 1993.
- [88] I. Balitsky und A. Schafer. Valley method versus instanton induced effective lagrangian up to $(E / E(\text{sphaleron}))^{**8/3}$. *Nucl. Phys.*, B404:639–683, 1993.
- [89] Michael P. Mattis. The riddle of high-energy baryon number violation. *Phys. Rept.*, 214:159–221, 1992.
- [90] P. G. Tinyakov. Instanton like transitions in high-energy collisions. *Int. J. Mod. Phys.*, A8:1823–1886, 1993.
- [91] R. Guida, K. Konishi und N. Magnoli. Fermions, anomaly and unitarity in high-energy electroweak interactions. *Int. J. Mod. Phys.*, A9:795–860, 1994.
- [92] Edward V. Shuryak. Toward the quantitative theory of the topological effects in gauge field theories. 1. phenomenology and the method of collective coordinates. *Nucl. Phys.*, B302:559, 1988.
- Edward V. Shuryak. Toward the quantitative theory of the topological effects in gauge field theories. 2. the SU(2) gluodynamics. *Nucl. Phys.*, B302:574, 1988.
- Edward V. Shuryak. Toward the quantitative theory of the topological phenomena in gauge theories. 3. instantons and light fermions. *Nucl. Phys.*, B302:599, 1988.
- Edward V. Shuryak. Toward the quantitative theory of the 'instanton liquid' 4. tunneling in the double well potential. *Nucl. Phys.*, B302:621, 1988.
- [93] Valentin I. Zakharov. Unitarity constraints on multiparticle weak production. *Nucl. Phys.*, B353:683–688, 1991.
- [94] Michele Maggiore und Mikhail A. Shifman. Where have all the form-factors gone in the instanton amplitudes? *Nucl. Phys.*, B365:161–190, 1991.
- [95] G. Veneziano. Bound on reliable one instanton cross-sections. *Mod. Phys. Lett.*, A7:1661–1666, 1992.
- [96] Douglas A. Smith und Michael J. Teper. Topological structure of the SU(3) vacuum. *Phys. Rev.*, D58:014505, 1998.

- [97] F. Bezrukov, D. Levkov, C. Rebbi, V. A. Rubakov und P. Tinyakov. Semiclassical study of baryon and lepton number violation in high-energy electroweak collisions. *Phys. Rev.*, D68:036005, 2003.
- [98] John R. Ellis, R. A. Flores, S. Rudaz und D. Seckel. Comments on the possibility of electroweak baryon number violation at high temperatures. *Phys. Lett.*, B194:241, 1987.
- [99] J. Benecke, T. T. Chou, Chen-Ning Yang und E. Yen. Hypothesis of limiting fragmentation in high-energy collisions. *Phys. Rev.*, 188:2159–2169, 1969.
- [100] G. J. van Oldenborgh und J. A. M. Vermaseren. The formula manipulation program Form. Prepared for International Workshop on Software Engineering, Artificial Intelligence and Expert Systems for High-energy and Nuclear Physics, Lyon, France, 19-24 Mar 1990.
- J. A. M. Vermaseren. Managing large formulae with Form. In *Amsterdam 1991, Proceedings, MC91: Detector and event simulation in high energy physics* 184-188. (see HIGH ENERGY PHYSICS INDEX 30 (1992) No. 3237).
- J. A. M. Vermaseren. The symbolic manipulation program Form. KEK-TH-326.
- J. A. M. Vermaseren. New features of Form. 2000.
- [101] Michael Creutz. On invariant integration over $SU(N)$. *J. Math. Phys.*, 19:2043, 1978.
- [102] E. Byckling und K. Kajantie. *Particle Kinematics*. John Wiley & Sons, 1973.
- [103] A. Ringwald und F. Schrempp. QCD-instantons in deep inelastic scattering. 1996. Persönliche Notizen.
- S. Moch, A. Ringwald und F. Schrempp. Instantons in deep-inelastic scattering – inclusive processes –. 1997. Persönliche Notizen.
- S. Moch, A. Ringwald und F. Schrempp. Instantons in deep-inelastic scattering – structure functions and cross sections –. 1998. Persönliche Notizen.
- [104] Alfred H. Mueller. $O(2,1)$ analysis of single particle spectra at high-energy. *Phys. Rev.*, D2:2963–2968, 1970.
- C. E. Detar, D. Z. Freedman und G. Veneziano. Sum rules for inclusive cross-sections. *Phys. Rev.*, D4:906–909, 1971.
- L. S. Brown. Inclusive- and exclusive-cross-section functionals - conservation constraints and multiplicity distributions. *Phys. Rev.*, D5:748–755, 1972.
- [105] A. Ringwald und F. Schrempp. Instanton-induced processes in deep-inelastic scattering. 1996.
- [106] F. Schrempp. Persönliche Mitteilung.

- [107] A. Ringwald. Electroweak instantons / sphalerons at VLHC? *Phys. Lett.*, B555:227–237, 2003.

Danksagung

Meinen besonderen und herzlichen Dank möchte ich meinem Doktorvater Fridger Schrempp aussprechen. Die Zusammenarbeit, die immer von lebhaften und auch langen Diskussionen und persönlichen Gesprächen begleitet war, habe ich sehr zu schätzen gelernt und als wahre Bereicherung empfunden. Auch für die Möglichkeit ein Thema zu bearbeiten, welches seinen ganz besonderen Reiz und Charme hat, möchte ich mich bedanken.

Bei Jochen Bartels und Bernd Kniehl bedanke ich mich für die Bereitschaft, meine Arbeit mit zu begutachten.

Meinen alten und neuen Bürokollegen aus „301“: Markus, Jens, Jonas, Toffi und König, sowie den „Externen“ Kai und H-Man sei für die vielen Diskussionen über Physik, Mathematik und Gesellschaft, die stets gute Atmosphäre und nicht zuletzt für die Skatrunden herzlich gedankt.

Der gesamten DESY-Theorie danke ich für das gute Arbeitsklima. Besonders möchte ich mich bei Julia Herrmann und Nora Van Looveren bedanken, die bei anfallenden Büroproblemen stets hilfsbereit waren.

Meinen Eltern danke ich sehr für ihre seelische Unterstützung und dafür, dass sie während meiner Arbeit stets hinter mir standen, auch in schwierigen Zeiten.

Mein ganz besonderer Dank gilt meiner Frau Susann, einfach dafür, dass sie immer für mich da war. Besonders für ihre ausdauernde Korrekturlesung und das Durchwachen vor Abgabe möchte ich ihr danken.