Asymptotisch offene Quantensysteme

Matthias Westrich

Diplomarbeit
II. Institut für Theoretische Physik
Fachbereich Physik
Universität Hamburg

Januar 2008

Gutachter der Diplomarbeit:

Prof. Dr. K. Fredenhagen
Prof. Dr. D. Bahns

Asymptotically Open Quantum Systems

by Matthias Westrich

Abstract

In the present thesis we investigate the structure of time-dependent equations of motion in quantum mechanics. We start from two coupled systems with an autonomous equation of motion. A limit, in which the dynamics of one of the two systems has a decoupled evolution and imposes a non-autonomous evolution for the second system is identified. A result due to K. Hepp that provides a classical limit for dynamics turns out to be part and parcel for this limit and is generalized in our work. The method introduced by J.S. Howland for the solution of the time-dependent Schrödinger equation is interpreted as such a limit. Moreover, we associate our limit with the modern theory of quantization.

Zusammenfassung

In dieser Diplomarbeit wird die Stuktur zeitabhängiger Bewegungsgleichungen in der Quantenmechanik untersucht. Dabei gehen wir von zwei gekoppelten Systemen aus, deren Bewegungsgleichung nicht explizit von der Zeit abhängt. Es wird der Limes identifiziert, in dem die Dynamik eines der beiden Systeme entkoppelt und für das zweite System die Bedeutung einer äußeren Zeitabhängigkeit erhält. Ein Satz von K. Hepp, der den klassischen Limes der Dynamik behandelt, erweist sich als zentraler Bestandteil dieses Limes und wird in dieser Arbeit verallgemeinert. Die Methode von J.S. Howland zur Lösung zeitabhängiger Schrödingergleichungen wird im Sinn eines solchen Limes interpretiert. Darüber hinaus ordnen wir den Grenzwert in die moderne Quantisierungstheorie ein.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung und grundlegende Beobachtungen

In der vorliegenen Arbeit beschäftigen wir uns mit dem physikalischen Ursprung einer äußeren Zeitabhängigkeit in dynamischen Systemen. In natürlicher Weise treten zeitabhängige Bewegungsgleichungen bei Experimenten, wie z.B. in der Atomphysik auf. Man manipuliert mit Hilfe makroskopischer Felder atomare Systeme und konzentriert sich auf die Wirkung des Feldes auf das physikalische System. Die „Rückwirkung“ des atomaren Systems auf das Feld wird vernachlässigt. Dies ist durch die verschiedenen Größenordnungen der auftretenden Energien sicherlich gerechtfertigt. Allerdings stellt sich die Frage, ob es einen Übergang von der vollständig quantisierten Theorie zu dieser Vereinfachung gibt.
Solche Probleme treten in vielen Bereichen der modernen Physik auf. Ein Beispiel dafür ist der Zusammenhang von Gravitation und Standardmodell. Aus Beobachtungen zur Ablenkung des Lichts durch massive Körper kann man auf eine Wirkung der Gravitation auf die elektromagnetische Wechselwirkung schließen, welche durch die elektroschwache Theorie mit den anderen Wechselwirkungen des Standardmodells zusammenhängt. Ausgehend von dieser Tatsache wurde die Quantenfeldtheorie für eine gekrümmte Hintergrundraumzeit formuliert, [Fre99]. Das eigentliche Ziel eines großen Teils der modernen theoretischen Physik ist die Formulierung einer Quantenfeldtheorie, in der die Gravitation mit den anderen Kräften des Standardmodells wechselwirkt. Auf Grund der unterschiedlichen Energieskalen ist eine experimentelle Verifikation einer solchen Theorie problematisch. Allerdings kann man die konsistente Formulierung der Quantenfeldtheorie (QFT) auf gekrümmten Raumzeiten als Prüfstein einer solchen Theorie ansehen. Um einen Vergleich dieser Theorien bewerkstelligen zu können ist ein genaues Verständnis des Übergangs der voll quantisierten Theorie zur QFT auf gekrümmten Raumzeiten nötig.
Daher wollen wir in unserer Arbeit die Prinzipien des Übergangs vollquantisierter Theorien zu Quantentheorien, die an ein klassisches System gekoppelt

sind, genauer verstehen.
Die Motivation zur Anfertigung dieser Arbeit ist die Vorstellung, dass eine Dynamik mit einer äußeren Zeitabhängigkeit gewissen physikalischen Einschränkungen unterliegt. Mit dieser Vorstellung eng verbunden ist der Wunsch, durch die Charakterisierung dieser Einschränkungen notwendige Bedingungen für die Wohlgestelltheit physikalischer nicht-autonomer[1] Probleme zu finden. In der klassischen Mechanik wird dieses Problem in großer Allgemeinheit durch die Theorie der Gewöhnlichen Differentialgleichungen gelöst, sodass praktisch in allen physikalisch relevanten Fällen die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen gesichert ist.
Der Übergang zur Quantenmechanik wirft eine Fülle von neuen Problemen auf. Einerseits sind die meisten physikalisch relevanten Operatoren als unbeschränkte symmetrische Operatoren auf einem Hilbertraum definiert, sodass die Voraussetzungen des zentralen Satzes von Picard-Lindeloeff nicht erfüllt sind. Andererseits ist es für stetige Funktionen nicht möglich einen allgemeinen Existenzsatz zu beweisen. Dies wird prinzipiell durch den Satz von Godunov, [God75], ausgeschlossen. Damit kann man also auch die Heisenberg-Gleichungen im Allgemeinen nicht lösen, selbst wenn alle auftretenden Operatoren beschränkt sind.
Es stellt sich also die Frage, wie man das Problem physikalisch eingrenzen kann. Eine äußere Zeitabhängigkeit kommt durch die Betrachtung eines Teilsystems zu Stande, dass nach wie vor einen Einfluss der Umgebung „spürt“. Der Einfluss des Teilsystems auf die Umgebung wird vernachlässigt. Anders ausgedrückt geht man von zwei gekoppelten Systemen über zu einem System, dessen äußere Zeitabhängigkeit die freie Dynamik des anderen Systems darstellt. Wann tritt ein solcher Fall in der Physik auf? Sicherlich dann, wenn das eine der beiden Systeme in einem geeigneten Sinn „groß“ gegen das Zweite ist. Das wollen wir nun an einem sehr einfachen Beispiel aus der klassischen Mechanik verdeutlichen.
Wir betrachten ein 3-Körperproblem mit Newtonscher Gravitationswechselwirkung zwischen den Teilchen, z.B. Erde, Mond und Satellit. Die Newtonschen Bewegungsgleichungen[2] sind äquivalent zu:

$$\begin{pmatrix} M_1\ddot{x}_1(t) \\ M_2\ddot{x}_2(t) \\ \ddot{x}_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -M_1M_2\left(\frac{x_1(t)-x_2(t)}{|x_1(t)-x_2(t)|^3} + \lambda_2\frac{x_1(t)-x_3(t)}{|x_1(t)-x_3(t)|^3}\right) \\ M_1M_2\left(\frac{x_1(t)-x_2(t)}{|x_1(t)-x_2(t)|^3} - \lambda_1\frac{x_2(t)-x_3(t)}{|x_2(t)-x_3(t)|^3}\right) \\ M_1\frac{x_1(t)-x_3(t)}{|x_1(t)-x_3(t)|^3} + M_2\frac{x_2(t)-x_3(t)}{|x_2(t)-x_3(t)|^3} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

[1] D.h. explizit zeitabhängige Probleme.
[2] Die Gravitationskonstante G wird durch entsprechende Wahl der Einheiten auf 1 normiert.

Dabei seien M_1, M_2 die Massen der Teilchen des „großen“ Systems und $\lambda_i := \frac{m}{M_i}$, $i = 1, 2$, die relativen Massen des „kleinen“ Systems, das aus einem Teilchen der Masse m besteht. $x_3(t)$ ist der Ort dieses Teilchens zur Zeit t.
Die „Größe“ des Systems x_1, x_2 wird relativ zu x_3 durch die relativen Massen beschrieben. Fasst man die rechte Seite der Differentialgleichung als Funktion in den Parametern λ_i auf, so ist die Wechselwirkung asymmetrisch und man beobachtet eine Entkopplung der Bewegungsgleichungen für das große System von der Gleichung des Teilchens x_3 im Grenzfall $\lambda_i \to 0$. In dessen Bewegungsgleichung erhalten die Lösungen der Gleichungen für x_1, x_2 die Bedeutung einer äußeren Zeitabhängigkeit. In diesem Grenzfall erhält man also eine nichtautonome Differentialgleichung für das Teilchen x_3. Die Lösungen des entkoppelten Grenzfalles $\lambda_i = 0$ lassen sich durch die Lösungen des gekoppelten Systems approximieren. Allerdings gibt es hier eine Einschränkung: Diese Approximation ist im Allgemeinen lediglich auf einem fest gewählten Zeitintervall $T > 0$ möglich.
Physikalisch ist dies plausibel wenn man etwa an ein Fadenpendel denkt, welches die Parameter l: *Fadenlänge*, g: *Graviationsbeschleunigung* und ϕ_0: *Anfangswinkel* besitzt. Wählt man zu einem beliebigen $\epsilon > 0$ ein festes Intervall $[-T, T]$, so gibt es Umgebungen von l, g und ϕ_0, so dass die Lösung des variierten Pendels stets in der ϵ-Umgebung der Lösung des ursprünglichen Pendels liegt. Diese Aussage jedoch nicht mehr richtig, falls man die Einschränkung auf endliche Zeitintervalle fallen lässt, wie z.B. das Phänomen der Verzweigungspunkte[3] für autonome und nichtautonome Dynamische Systeme zeigt[4].
Mathematisch kann man prägnant sagen, dass ein parameterabhängiges System gleichmäßig stetig bezüglich t in Parametern λ und Anfangswerten u_0 auf kompakten Zeitintervallen $[t_0, t_1]$ ist. Wir werden sehen, dass die diskutierte Einschränkung auch im Fall der Quantenmechanik auftritt, wenn auch in etwas subtilerer Form. Insofern kann man die lokal gleichmäßige Approximerbarkeit der Lösungen (d.h. auf Kompakta) solcher Systeme als inhärente Eigenschaft ansehen.
Da die Heisenberg-Gleichungen nur in Spezialfällen lösbar sind, stellt sich die Frage, wie man eine entsprechende Vorstellung in der Quantenmechanik realisiert.
In der Regel erwartet man eine irreversible Dynamik für Systeme, die an ein Anderes gekoppelt sind, [GJK+96]. Diese Fälle wurden intensiv in der Theorie offener Quantensysteme untersucht. Wir interessieren uns jedoch für den Fall einer reversiblen Dynamik eines Teilsystems. Um dies zu erreichen, muss

[3] Bifurkationspunkte
[4] Siehe hierfür die einschlägige Literatur Dynamischer Systeme, oder z.B. [Lau05].

das große System klassisch werden, wie wir durch die folgende Überlegung plausibel machen wollen.

Einschränkung an den Limes

Die Dynamik des gesamten Systems wird vor der einseitigen Entkopplung durch eine Einparameter-Automorphismenguppe beschrieben, d.h. einer Abbildung α^λ von $\mathbb{R}$ nach $Aut(\mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2)$, wobei $\mathfrak{A}_i$, $i = 1, 2$, dargestellte C^*-Algebren und $\mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$ das Tensorprodukt der dargestellten C^*-Algebren seien[5]. Wir sind an der zeitlichen Entwicklung der Observablen von $\mathfrak{A}_2$ interessiert, d.h. der Evolution der Unteralgebra $\mathbb{C} \otimes \mathfrak{A}_2 \subset \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$. Der Hamiltonoperator des Gesamtsystems ist üblicherweise von der Form $H := H_1 \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes H_2 + K$, wobei der Einfachheit halber $H_i \in \mathfrak{A}_i$, $i = 1, 2$ sei. Wir untersuchen also ein Problem

$$\alpha_t^\lambda(\mathbb{1} \otimes A) \longrightarrow \alpha_t^0(\mathbb{1} \otimes A) \tag{2}$$

bezüglich einer geeigneten Topologie. Im Allgemeinen wird auch die Zeitentwicklung β_t^λ des „großen“ Systems, erzeugt durch den Hamiltonoperator $H_1 \otimes \mathbb{1}$, von dem Parameter λ abhängen. Da β_t^λ die Algebra $\mathbb{C} \otimes \mathfrak{A}_2$ invariant lässt, ist die Konvergenz von (2) äquivalent zu

$$\alpha_t^\lambda \beta_{-t}^\lambda(\mathbb{1} \otimes A) \longrightarrow \alpha_t^0 \beta_{-t}^0(\mathbb{1} \otimes A).$$

Als Ergebnis erhalten wir dann einen *Automorphismen-Kozyklus* $\eta_{t,s}$, mit der Eigenschaft $\eta_{t,r}\eta_{r,s} = \eta_{t,s}$. Konvergiert α_t^λ gegen eine Automorphismengruppe $\alpha_t := \alpha_t^0$, so berechnet man für die zweite Ableitung

$$\frac{d^2}{dt^2}\alpha_t(\mathbb{1} \otimes A) = \alpha_t([H, [H, \mathbb{1} \otimes A]]).$$

Die Dynamik des kleinen Systems ist gegeben durch

$$\chi \otimes id \circ \alpha_t \restriction_{\mathbb{C} \otimes \mathfrak{A}_2} .$$

Dabei ist χ ein Zustand auf der Algebra $\mathfrak{A}_1$, d.h. eine stetige Linearform mit $\chi(\mathbb{1}) = 1$ und id die Identität. Die Anwendung des Operators $\chi \otimes id$ schränkt die Dynamik auf das kleine System ein. Wählt man nun speziell $K = K_1 \otimes K_2$ und setzt $H_1 = 0 = H_2$, so folgt aus der Forderung

$$\chi \otimes id(\alpha_t(\mathbb{1} \otimes AB)) = \chi \otimes id(\alpha_t(\mathbb{1} \otimes A))\chi \otimes id(\alpha_t(\mathbb{1} \otimes B)),$$

[5] Siehe die Definitionen 1.1.6, 1.1.7, 3.1.1.

also dass die Zeitentwicklung des kleinen Systems ein Algebrenhomomorphismus für jeden Zeitpunkt t ist, durch zweifache Ableitung nach der Zeit

$$0 = (\chi(K_1^2) - \chi(K_1)\chi(K_1)) \otimes ([K_2,[K_2,A]]B + A[K_2,[K_2,B]] + 2[K_2,A][K_2,B]).$$

Falls B mit K_2 kommutiert und $[K_2,[K_2,A]] \neq 0$, folgt

$$\chi(K_1^2) = \chi(K_1)\chi(K_1).$$

$[K_2,[K_2,A]] \neq 0$ kann man durch geeignete beschränkte Funktionen von Potenzen von p und q stets erreichen. Durch diese Überlegung wird für $H = \sum_i K_1^{(i)} \otimes K_2^{(i)}$ die Beziehung

$$\chi(K_1^{(i)} K_1^{(j)}) = \chi(K_1^{(i)})\chi(K_1^{(j)})$$

nahe gelegt. Auf der von den selbstadjungierten Elementen erzeugten Subalgebra von $\mathfrak{A}_1$ ist der Zustand χ demnach ein *-Homomorphismus. Die durch die GNS-Darstellung[6] dieser Algebra bezüglich des Zustandes χ gegebende Algebra ist daher abelsch. In diesem Sinn ist es plausibel, dass in dem von uns gesuchten Limes die Observablenalgebra des großen Systems eine abelsche Algebra ist, d.h. sie ist eine Algebra klassischer Obervablen.

Der Aufbau dieser Arbeit

In Kapitel 1 sollen die konzeptionellen Grundlagen des klassischen Limes dargestellt werden. Zunächst geben wir die algebraischen Strukturen an, die klassischer und Quantentheorie gemeinsam sind. Darüber hinaus werden grundlegende Definitionen gegeben. Der Abschnitt über die Poisson-Mannigfaltigkeiten dient einer Zusammenfassung der wichtigsten Tatsachen und Begriffe der klassischen Mechanik. Sie kann für das Verständnis der Abschnitte 1.5-1.7 hilfreich sein. In den Abschnitten 1.3 und 1.4 wird eine abstrakte Quantisierungstheorie vorgestellt die in Kapitel 3 zur Entwicklung des Konzepts eines partiellen klassischen Limes verwendet werden. Die Heisenberggruppe und deren Darstellung ist die Grundlage für die Einführung der in dieser Arbeit verwendeten Standardquantisierung, der Weylquantisierung. Für die Beschreibung der Dynamik von Systemen mit quadratischen Hamiltonoperatoren ist die Metaplektische Darstellung nützlich. Ein solcher Fall tritt in Kapitel 2 auf. Der letzte Abschnitt dieses Kapitels befasst sich mit der Darstellung des für diese Arbeit wesentlichen Resultats über den klassischen Limes der Dynamik. Dabei stellen wir eine Verbindung zu der dargestellten

[6] Siehe [Fre99].

Quantisierungstheorie vor.
In Kapitel 2 untersuchen wir zunächst den klassischen Fall einer einseitigen Entkopplung. Im Fall der Quantenmechanik diskutieren wir anhand des explizit lösbaren Beispiels zweier gekoppelter Harmonischer Oszillatoren einen partiellen klassischen Limes des großen Systems. Wir sehen explizit, dass dieser Limes alle gewünschten Eigenschaften hat. Außerdem beschreiben wir den Zusammenhang dieses Limes mit einer von J.S. Howland eingeführten Methode zur Lösung der zeitabhängigen Schrödingergleichung.
Die im ersten Kapitel dargestellte Quantisierungstheorie wird in Abschnitt 3.1 angewandt, um einen partiellen klassischen Limes durchzuführen. Hierbei verwenden wir wir eine vereinfachte Version des Heppschen Satzes, die in Abschnitt 1.7 vorgestellt wurde. Im Fall beschränkter Kopplung und eines beschränkten Hamiltonoperators des kleinen Systems wird dieser Limes für alle Hamiltonoperatoren durchgeführt, die den Voraussetzungen des Satzes von Hepp genügen. Hieraus ergibt sich eine Verallgemeinerung des Resultats von Hepp. Schließlich interpretieren wir eine Galilei-Transformation als einen partiellen klassischen Limes.
Das letzte Kapitel beschäftigt sich mit der Übertragung der konzeptionellen Ergebnisse auf realistischere Hamiltonoperatoren. Dabei orientieren wir uns an einem aus der Laserphysik motivierten Beispiel, dessen Eigenschaften wir im Detail untersuchen. Mit Hilfe dieser Eigenschaften gelingt eine Übertragung der Ergebnisse auf eine Klasse von unbeschränkten Operatoren.
Immer wenn Ergebnisse der Literatur oder sonstigen Quellen entnommen wurden, wird die Quelle genannt. Nicht zitierte Aussagen werden von uns grundsätzlich bewiesen.

Kapitel 1

Quantisierung und der klassische Limes

Seit der Entdeckung der Quantenmechanik versucht man, ihren Zusammenhang mit der klassischen Mechanik zu verstehen. Dabei kann man prinzipiell zwei verschiedene Standpunkte einnehmen. Einerseits betrachtet man quantisierte Systeme und versucht durch einen Limes $\hbar \to 0$[1] zur klassischen Theorie zu gelangen. Andererseits kann man von einer klassischen Theorie ausgehen und (Quantisierungs-)Vorschriften angeben, durch die quantenmechanische Systeme definiert werden. In diesem Kapitel werden beide Standpunkte zusammengeführt. Wir stellen eine Theorie dar, die eine Quantisierung der Observablenalgebren der klassischen Mechanik definiert und umgekehrt auf direkte Weise einen klassischen Limes der quantisierten Theorie liefert. Dabei muss man die großen strukturellen Unterschiede von Quantenmechanik und klassischer Mechanik durch ein geeignetes Konzept miteinander in Einklang bringen. Dies wird durch den Begriff der strikten Quantisierung, bzw. der stetigen Quantisierung ermöglicht. Letzteres Konzept verwendet den Begriff der stetigen Felder von C^*-Algebren. Solche Quantisierungen, die grob gesprochen dieselbe klassische Theorie im Limes $\hbar \to 0$ ergeben, haben dasselbe stetige Feld von C^*-Algebren.

Dieses Kapitel dient zur Vorbereitung des Folgenden, aber soll auch die Möglichkeit bieten, die von uns eingeführte Methode zur Konstruktion von Quantensystemen, die einer äußeren Zeitabhängigkeit unterworfen sind, in einen konzeptionell durchsichtigen Rahmen einzuordnen. Die Darstellung dieses Rahmens geht im Wesentlichen[2] auf die Quantisierungstheorie zurück, wie sie im Buch von N.P.Landsman [Lan98] zu finden ist. $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ bezeichnet im

[1] Man kann einwenden, dass $\hbar$ eine Konstante ist, jedoch ist mit dem Bilden des Grenzwertes lediglich gemeint, dass $\hbar$ sehr klein ist im Vergleich zu anderen relevanten Größen.

[2] Abschnitte 1.1-1.6.

Folgenden immer die C^*-Algebra der beschränkten Operatoren auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$.

1.1 Die Struktur der Observablenalgebra

Zur Klärung der Frage, wie klassische Mechanik und Quantenmechanik zusammenhängen, ist es nötig, sich einen Überblick über die mathematischen Strukturen beider Theorien zu verschaffen. Dabei kann man entweder die Algebren der Messgrössen, d.h. der Observablen, oder aber die Zustände des physikalischen Systems betrachten. Wir wollen uns auf Observablenalgebren beschränken, da sie in natürlicher Weise in dem von uns konstruierten Limes verwendet werden. Beginnen möchten wir mit der Einführung des Jordan-Produktes, dass zusammen mit der Poisson-Klammer die algebraischen Strukturen definiert, welche der klassischen Theorie für $\hbar \to 0$ und der Quantentheorie für $\hbar \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ gemeinsam sind. Im Anschluss werden wir den für die Quantentheorie grundlegenden Begriff der C^*-Algebra angeben und einen Zusammenhang zu den Algebren, welche mit der Poisson-Klammer und dem Jordan-Produkt ausgestattet sind, herstellen.

1.1.1 Definition. Eine *Jordan-Algebra* $\mathfrak{J}$ ist eine (reelle) Algebra mit einer bilinearen Verknüpfung $\circ$, die wir *Jordan-Produkt* nennen, sodass $\forall A, B \in \mathfrak{J}$ gilt

$$A \circ B = B \circ A \tag{1.1}$$
$$A \circ (B \circ A^2) = (A \circ B) \circ A^2, \tag{1.2}$$

wobei $A^2 := A \circ A$.

Man rechnet leicht nach, dass $\circ$ ein Jordan-Produkt ist, wenn es von einem assoziativen Produkt via $A \circ B = \frac{1}{2}(AB + BA)$ erzeugt wird.
Im Fall der klassischen Mechanik sind die Observablen Elemente einer reellen Algebra $\mathfrak{A}_\mathbb{R}$, die etwa durch die Algebra der beschränkten glatten Funktionen $C_b^\infty(X, \mathbb{R})$ realisiert wird. Das Jordan-Produkt ist dann einfach die punktweise Multipliktion und damit auch assoziativ. In der Quantenmechanik ist dies nicht der Fall, da die auftretenden Operatoren nicht kommutieren.
Dynamische Theorien besitzen stets ein zweites Produkt $\{\,,\,\}$, etwa die Poisson-Klammer oder den Kommutator. Daher die folgende

1.1.2 Definition. Eine *Jordan-Lie algebra* ist ein reeller Vektorraum $\mathfrak{A}_\mathbb{R}$ mit zwei bilinearen Verknüpfungen $\circ$ und $\{\,,\,\}$, die als das *Jordan-Produkt* und die *Poisson-Klammer* bezeichnet werden, sodass folgende Bedingungen erfüllt sind.

1. $$A \circ B = B \circ A$$

$$\{A, B\} = -\{B, A\} \tag{1.3}$$

   $\forall A, B \in \mathfrak{A}_{\mathbb{R}}$.

2. Für alle $A \in \mathfrak{A}_{\mathbb{R}}$ ist die Abbildung $B \mapsto \{A, B\}$ eine Derivation von $(\mathfrak{A}_{\mathbb{R}}, \circ)$ und $(\mathfrak{A}_{\mathbb{R}}, \{,\})$, d.h. sowohl die Leibnizregel

$$\{A, B \circ C\} = \{A, B\} \circ C + B \circ \{A, C\} \tag{1.4}$$

   als auch die Jakobi-Identität

$$\{A, \{B, C\}\} = \{\{A, B\}, C\} + \{B, \{A, C\}\} \tag{1.5}$$

   gelten $\forall A, B, C \in \mathfrak{A}_{\mathbb{R}}$

3. Schließlich gelte für ein $\hbar^2 \in \mathbb{R}$ die *Assoziator-Identität*

$$(A \circ B) \circ C - A \circ (B \circ C) = \frac{1}{4}\hbar^2\{\{A, C\}, B\} \tag{1.6}$$

   $\forall A, B, C \in \mathfrak{A}_{\mathbb{R}}$.

Eine Jordan-Lie Algebra mit assoziativem Jordan-Produkt nennen wir eine *Poisson-Algebra.*

Bemerkung. Die wesentliche physikalische Bedeutung des Jordan-Produktes liegt in der Tatsache, dass der selbstadjungierte Anteil einer C*-Algebra[3] bezüglich dieses kommutativen Produktes eine Algebra bildet, was bezüglich des nichtkommutativen, aber assoziativen Produktes der C*-Algebra nicht der Fall ist.

$(\mathfrak{A}_{\mathbb{R}}, \{,\})$ ist eine reelle Lie Algebra und wegen der Assoziator-Identität ist $(\mathfrak{A}_{\mathbb{R}}, \circ)$ eine reelle Jordan-Algebra.
Morphismen zwischen Jordan-Lie Algebren werden in der naheliegenden Weise definiert.

1.1.3 Definition. Ein *Jordan-Morphismus* ist eine lineare Abbildung zwischen Jordan-Lie Algebren $\beta : \mathfrak{A}_{\mathbb{R}} \to \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$ mit $\beta(A \circ B) = \beta(A) \circ \beta(B)\, \forall A, B \in \mathfrak{A}_{\mathbb{R}}$. Analog erklären wir einen *Poisson-Morphismus* durch

$$\beta(\{A, B\}) = \{\beta(A), \beta(B)\}.$$

[3] Dies wird im Folgenden näher erläutert.

Eine Abbildung die beide Eigenschaften erfüllt nennen wir einen *Morphismus*. Einen invertierbaren (Jordan,Poisson) Morphismus $\alpha : \mathfrak{A}_\mathbb{R} \to \mathfrak{A}_\mathbb{R}$ nennen wir einen *(Jordan,Poisson) Automorphismus* und einen invertierbaren (Jordan,Poisson) Morphismus $\alpha : \mathfrak{A}_\mathbb{R} \to \mathfrak{B}_\mathbb{R}$ *(Jordan,Poisson) Isomorphismus*.

Letztlich sind wir an Grenzwerten „$\hbar \to 0$“ der Observablen der Quantentheorie interessiert, was die Erklärung einer Topologie auf unseren Algebren notwendig macht. Die einfachste Möglichkeit besteht in der Verwendung von normierten Algebren.

1.1.4 Definition. Eine *Jordan-Banach Algebra*, kurz *JB-Algebra*, ist ein Banach Raum mit einem Jordan-Produkt $\circ$, sodass $\forall A, B \in \mathfrak{A}_\mathbb{R}$ gilt

$$\|A \circ B\| \leq \|A\|\|B\| \tag{1.7}$$
$$\|A\|^2 \leq \|A^2 + B^2\|. \tag{1.8}$$

Bemerkung. Setzt man in (1.7) $A = B$ und $B = 0$ in (1.8), so sieht man, dass (1.8) äquivalent ist zu

$$\|A^2\| = \|A\|^2 \tag{1.9}$$
$$\|A^2\| \leq \|A^2 + B^2\|. \tag{1.10}$$

Die Motivation des ersten Axioms in der äquivalenten Formulierung wird im Folgenden klar werden. Das zweite Axiom ist eine Eigenschaft der Norm von C*-Algebren[4]. Man kann nämlich die Norm durch den Spektralradius[5] ausdrücken, sodass die Aussage schließlich offensichtlich wird.

1.1.5 Definition. Eine *JLB-Algebra* ist eine JB-Algebra $\mathfrak{A}_\mathbb{R}$ ausgestattet mit einer Poissonklammer, sodass $(\mathfrak{A}_\mathbb{R}, \circ, \{,\})$ eine Jordan-Lie Algebra ist, für ein $\hbar^2 \geq 0$.

Im Allgemeinen ist eine Poisson-Algebra nicht so normierbar, dass die Poissonklammer auf dem vervollständigten Raum definiert ist. Ein Beispiel ist der Raum $C^\infty(X, \mathbb{R})$, $X \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ der glatten Funktionen auf einem kompakten Hausdorffraum X, versehen mit der Supremumsnorm und der kanonischen Poissonklammer. Die Vervollständigung ist bekanntlich der Raum $C(X)$ der stetigen Funktionen auf X.
JLB-Algebren lassen sich als reelle Subalgebra einer komplexen assoziativen

[4]Zur Definition siehe 1.1.6

[5]Hier verweisen wir auf [KR83] und bemerken lediglich, dass der Spektralradius durch das Supremum des Betrages der Elemente des Spektrums eines Elementes der Algebra gegeben ist.

Algebra $\mathfrak{A}$ auffassen. Um diese Aussage päzisieren zu können, wollen wir zunächst den Begriff einer C*-Algebra erklären.
Eine *Involution* auf einer komplexen Algebra $\mathfrak{A}$ ist eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $A \mapsto A^*$, sodass $\forall A, B \in \mathfrak{A}$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt

$$A^{**} = A \tag{1.11}$$
$$(AB)^* = B^* A^* \tag{1.12}$$
$$(\lambda A)^* = \bar{\lambda} A^*. \tag{1.13}$$

1.1.6 Definition. Eine assoziative Algebra mit einer Involution * nennen wir *-*Algebra*. Ist eine *-Algebra gleichzeitig ein komplexer Banachraum $\mathfrak{A}$, sodass $\forall A, B \in \mathfrak{A}$

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\| \text{ (Submultiplikativität)}, \tag{1.14}$$
$$\|A^*A\| = \|A\|^2 \text{ (C*-Eigenschaft)} \tag{1.15}$$

gilt, so nennen wir diese Algebra eine *C^*-Algebra*.

Aus diesen Axiomen folgt sofort

$$\|A^*\| = \|A\|. \tag{1.16}$$

Das Standardbeispiel einer C*-Algebra ist die Banachalgebra der beschränkten Operatoren auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$, die wir mit $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ bezeichnen wollen. Die Involution ist wie üblich durch Bilden der Adjungierten bezüglich des Hilbertraumskalarproduktes $(\ ,\ )$ definiert. Die Submultiplikativität impliziert die Stetigkeit der Links- und Rechtsmultiplikation und damit auch die Stetigkeit der Multiplikation. Nach Definition der Norm[6] gilt

$$\|A\psi\|^2 \leq \|A^*A\|\|\psi\|^2 \leq \|A^*\|\|A\|\|\psi\|^2.$$

Ersetzt man A durch A^*, so folgt

$$\|A^*\| = \|A\|.$$

Alternativ kann man sich sofort davon überzeugen, dass $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ die C*-Eigenschaft besitzt; die übrigen Eigenschaften sind ebenfalls leicht zu sehen.

1.1.7 Definition. Ein Morphismus zwischen C*-Algebren $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ ist eine lineare Abbildung $\psi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$, sodass

$$\phi(AB) = \phi(A)\phi(B) \tag{1.17}$$
$$\phi(A^*) = \phi(A)^* \tag{1.18}$$

$\forall A, B \in \mathfrak{A}$. Ein Isomorphismus ist ein bijektiver Morphismus und zwei C*-Algebren sind isomorph, wenn ein Isomorphismus zwischen ihnen existiert.

[6] $\|A\|^2 := \sup\{(A\psi, A\psi) \in \mathbb{R} | \psi \in \mathcal{H},\ \|\psi\| = 1\}$.

Morphismen zwischen C*-Algebren haben sehr starke Eigenschaften. Zum Beispiel sind Isomorphismen automatisch auch Isometrien. Wie bereits bemerkt, ist der Unterraum der selbstadjungierten Elemente, $A^* = A$, bezüglich eines Jordan-Produktes eine Algebra. Der folgende Satz hat grundlegende Bedeutung für die Theorie der C^*-Algebren und besagt, dass man C^*-Algebren immer als Unteralgebren unseres Standardbeispiels $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ aufassen kann.

1.1.8 Satz. *Eine normabgeschlossene *-Algebra $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ ist eine C*-Algebra. Umgekehrt ist jede C*-Algebra isomorph zu einer normabgeschlossenen *-Algebra in $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ für einen geeigneten Hilbertraum $\mathcal{H}$.*

Ein Element A einer *-Algebra lässt sich stets als Linearkombination zweier selbsadjungierter Elemente schreiben,

$$A = A' + iA'' := \frac{1}{2}(A + A^*) + i\frac{-i}{2}(A - A^*). \tag{1.19}$$

Eine *kommutative C*-Algebra* ist eine C*-Algebra, in der das assoziative Produkt kommutativ ist.
Im Beispiel der Algebra $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ ist der Kommutator durch

$$[A, B] := AB - BA$$

definiert. Jedes Produkt von Elementen $A, B \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ lässt sich als

$$AB = \frac{1}{2}(AB + BA) + \frac{1}{2}[A, B]$$

schreiben. Der erste Summand definiert ein Jordan-Produkt,

$$A \circ B := \frac{1}{2}(AB + BA). \tag{1.20}$$

Um für den selbstadjungierten Anteil einer C*-Algebra die Struktur einer JLB-Algebra definieren zu können, muss man berücksichtigen, dass der Kommutator zweier selbstadjungierter Elemente antisymmetrisch ist. Man erhält eine Poissonklammer durch

$$\{A, B\}_\hbar := \frac{i}{\hbar}[A, B]. \tag{1.21}$$

Der Faktor $\frac{1}{\hbar}$ wurde eingeführt, um die Assoziator-Identität zu erfüllen. Natürlich ist die Wahl $\hbar$ der Konstante suggestiv, wie man formal für die Wahl $A = p$ und $B = q$ sieht. Demnach ist der Zusammenhang zwischen dem assoziativen Produkt der C*-Algebra und den Strukturen der JLB-Algebra

$$AB := A \circ B - \frac{1}{2}i\hbar\{A, B\}. \tag{1.22}$$

Der nun folgende Satz sagt aus, dass JLB-Algebren genau die reellen Anteile von C*-Algebren sind.

1.1.9 Satz. *Sei $\mathfrak{A}$ eine C*-Algebra und $\hbar \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Mit der Norm von $\mathfrak{A}$ und den Definitionen (1.20) und (1.21) ist der selbstadjungierte Anteil $\mathfrak{A}_{\mathbb{R}}$ von $\mathfrak{A}$ eine JLB-Algebra. Wenn $\mathfrak{A}$ nicht kommutativ ist, so ist $\hbar$ in (1.6) gleich dem in (1.21) und es ist $\hbar^2 > 0$. Eine kommutative Algebra $\mathfrak{A}$ führt zu einer Poisson-Algebra, in der die Poissonklammer die Nullabbildung ist.*
Umgekehrt wird jede JLB-Algebra zu einer C-Algebra, wenn man*

$$(A+iB)^* := A - iB \tag{1.23}$$

$$\|A\| := \|A^*A\|^{\frac{1}{2}} \tag{1.24}$$

setzt und ein assoziatives Produkt durch (1.22) definiert.

Wir haben also gesehen, dass das Jordan-Produkt zusammen mit der Poissonklammer die algebraischen Strukturen sind, die der klassischen Theorie ($\hbar = 0$) und der Quantenmechanik ($\hbar \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$) gemeinsam sind.

1.2 Poisson-Mannigfaltigkeiten

Im Laufe dieser Arbeit werden wir auf Begriffe der klassischen Mechanik zurückgreifen. Auch für die Interpretation des für diese Arbeit zentralen Satzes von Hepp, Satz 1.7.1, ist es hilfreich, die entsprechenden Begriffe der klassischen Mechnik zu kennen. Deswegen möchten wir hier noch einmal die grundlegenden Fakten und Begriffe der klassischen Mechanik zusammentragen.
In der Physik begegnen wir Poisson-Algebren in der Regel im Zusammenhang mit dem folgenden Begriff.

1.2.1 Definition. Sei P eine Mannigfaltigkeit, $\{,\} : C^\infty(P,\mathbb{R}) \times C^\infty(P,\mathbb{R}) \to C^\infty(P,\mathbb{R})$ eine bilineare Abbildung. Wir nennen P eine *Poisson-Mannigfaltigkeit*, falls $(C^\infty(P,\mathbb{R}), \{,\})$ zusammen mit der punktweisen Multiplikation eine Poisson-Algebra ist.

Für $f \in C^\infty(P,\mathbb{R})$ ist die Abbildung $g \mapsto \{f,g\}$ eine Derivation. Derivationen sind bekanntlich eine mögliche Charakterisierung für Tangentialvektoren einer Mannigfaltigkeit. Eine äquivalente Definition ist die Äquivalenzklassenbildung von Kurven, $[c]$, mit derselben Geschwindigkeit in einem Punkt der Mannigfaltigkeit. Jeder so definierte Tangentialvektor liefert eine Derivation durch die Richtungsableitung,

$$f \mapsto (f \circ c)\dot{}(0) = df([c]),$$

wobei $\circ$ die Komposition bezeichnet. Daher hängt die durch die Poisson-Klammer induzierte Derivation nur von den Differentialen df, dg ab und es existiert ein glattes antisymmetrisches Tensorfeld $B \in \Gamma(\wedge_2(P))$, sodass

$$\{f, g\} = B(df, dg). \tag{1.25}$$

Der *Poisson Tensor* B muss natürlich auf Grund der Jakobi-Identität gewisse Beziehungen erfüllen, so dass man eine Charakterisierung der Poisson-Klammer erhält. Der Poisson-Tensor B definiert eine lineare Abbildung $B^\natural : T^*P \to TP$ durch

$$(B^\natural(\sigma))(\varsigma) := B(\sigma, \varsigma), \tag{1.26}$$

wobei σ und ς in derselben Faser in T^*P liegen. Für $h \in C^\infty(P, \mathbb{R})$ definieren wir das *Hamiltonsche Vektorfeld* ξ_h durch

$$\xi_h f := B^\natural(dh) f = \{h, f\}. \tag{1.27}$$

Ist $c : (-\delta, \delta) \to T^*P$, $\delta > 0$, eine Kurve mit $c(0) = \sigma$, so schreiben wir $c(t) = \sigma(t)$. Für $h \in C^\infty(P, \mathbb{R})$ lauten die *Hamiltonschen Bewegungsgleichungen* einer solchen Kurve

$$\frac{d}{dt}\sigma(t) = \xi_h(\sigma(t)). \tag{1.28}$$

Eine Lösung dieser Gleichungen nennen wir *Hamiltonsche Kurve*. Den Fluss dieser Gleichung

$$F_t(\sigma) = \sigma(t), \tag{1.29}$$

nennen wir den *Hamiltonschen Fluss* von h. Trivialerweise gilt wegen Autonomie der Hamiltonschen Bewegungsgleichungen die Energieerhaltung, d.h.

$$\frac{d}{dt}h(\sigma(t)) = \{h, h\}(\sigma(t)) = 0. \tag{1.30}$$

Der Satz von Picard-Lindelöf liefert Existenz und Eindeutigkeit der Lösung für jeden Punkt in P. Aus diesem Satz folgt auch unmittelbar die Halbgruppeneigenschaft

$$F_t \circ F_s = F_{s+t}. \tag{1.31}$$

Für $h \in C^\infty(P, \mathbb{R})$ und $c(0) \in P$ ist der Fall $J_{max} \subsetneq \mathbb{R}$ möglich, wobei J_{max} das maximale Existenzintervall ist. In diesem Fall nennt man das Hamiltonsche Vektorfeld *unvollständig.*
Im Folgenden wollen wir die Wirkung der Dynamik auf die Poisson-Algebra übertragen. Sei $h \in C^\infty(P, \mathbb{R})$ mit dem Hamiltonschen Fluss $\sigma(t)$. Wir definieren eine Einparameterfamilie von linearen Abbildungen[7] $\alpha_t^0 : C^\infty(P, \mathbb{R}) \to C^\infty(P, \mathbb{R})$ durch

$$\alpha_t^0(f)(\sigma) := f(\sigma(t)),\ \forall t \in J_{max}^\sigma. \tag{1.32}$$

[7] Der obere Index “0” wird später für C*-Algebren eines stetigen Feldes ersetzt durch $\hbar$.

Aus Gleichung (1.27) folgt sofort punktweise in $C^\infty(P,\mathbb{R})$

$$\frac{d}{dt}\alpha_t^0(f) = \{h, \alpha_t^0(f)\}. \tag{1.33}$$

Diese Differentialgleichung ist für jede Poisson-Algebra sinnvoll. Betrachtet man statt $C^\infty(P,\mathbb{R})$ eine JLB-Algebra, d.h. stattet man die Poisson-Algebra mit einer Norm aus, so ist für alle h die rechte Seite in Gleichung (1.33) eine *innere Derivation.*
Eine einfache Konsequenz ist die folgende

1.2.2 Proposition. *Falls $\alpha_t^0(f)$ eine Lösung der Differentialgleichung (1.33) ist, so ist α_t^0 ein Morphismus von $C^\infty(P,\mathbb{R})$ $\forall t \in J^\sigma_{max}$.*

Beweis. Man zeigt mit der Leibnizregel und Gleichung (1.33)

$$\frac{d}{dt}\alpha_t^0(fg) = \frac{d}{dt}(\alpha_t^0(f)\alpha_t^0(g)).$$

$\square$

Auf diese Weise lässt sich eine algebraische Charakterisierung einer *vollständigen* Dynamik angeben.

1.2.3 Definition. Ein Element h einer Poisson-Algebra heißt *vollständig*, falls die Einparameterfamilie von Morphismen auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist.

Bemerkung. In diesem Fall definiert α_t^0 eine Einparametergruppe von Automorphismen.

1.2.4 Definition. Eine Poisson-Mannigfaltigkeit deren Poisson-Tensor einen Isomorphismus $B^\natural$ induziert heißt *symplektisch.* Bezeichnet $B^\flat : TP \to T^*P$ die Inverse von $B^\natural$, so definieren wir die *symplektische Form* $\omega \in \Gamma(\wedge^2(P))$ durch

$$\omega(X,Y) := (B^\flat(X))(Y). \tag{1.34}$$

Wegen der Jakobi-Identität ist ω geschlossen, d.h. $d\omega = 0$.

1.3 Strikte Quantisierung von Observablen

Die Theorie der Quantisierung setzt eine klassische Theorie in Beziehung zu einer Quantentheorie, d.h. sie beschreibt den Zusammenhang zwischen einer Poisson-Algebra und einer C*-Algebra, bzw. zwischen einer Poisson-Mannigfaltigkeit und dem Raum der reinen Zustände einer C*-Algebra. Die erste Formulierung ist also eine direkte Quantisierung der Observablen. Der Satz 1.1.9 zeigt, dass man JLB-Algebren immer als selbstadjungierten Anteil einer C*-Algebra auffassen kann. In der Quantenmechanik ist die Struktur einer C*-Algebra natürlich gegeben, in der klassischen Mechanik steht uns jedoch lediglich eine im Allgemeinen nicht vollständige Poisson-Algebra zur Verfügung, wie etwa das Beispiel der Menge glatten Funktionen auf einem kompakten Hausdorffraum, versehen mit der Supremumsnorm, zeigt. Die Definition der Quantisierung wird als wesentlichen Bestandteil die Existenz des klassischen Limes beinhalten. Für jedes $\hbar \geq 0$ wollen wir einen Zusammenhang einer klassischen Observablen mit einer Quantenobservablen derart finden, dass man durch einen Limes $\hbar \to 0$ wieder Eigenschaften der klassischen Theorie erhält. Im Wesentlichen sind wir also an Stetigkeit einer „Quantisierungsabbildung" in dem Punkt 0 interessiert. Wir betrachten also eine Teilmenge $I = I_0 \cup \{0\} \subset \mathbb{R}$, sodass $0 \notin I_0$ ein Häufungspunkt von I_0 ist. Mit $\tilde{\mathfrak{A}}^0_{\mathbb{R}}$ bezeichnen wir im Folgenden eine Poissonalgebra, die dicht enthalten sei im selbstadjungierten Anteil $\mathfrak{A}^0_{\mathbb{R}}$ einer C*-Algebra $\mathfrak{A}^0$. Nun wollen wir uns überlegen, welche Eigenschaften einer klassischen Theorie im Grenzfall gelten sollten.

Für jedes $\hbar \in I$ soll es eine C*-Algebra $\mathfrak{A}^\hbar$ geben und eine lineare Abbildung $\mathcal{Q}_\hbar : \tilde{\mathfrak{A}}^0_{\mathbb{R}} \to \mathfrak{A}^\hbar_{\mathbb{R}}$ die jeder klassischen Obersvablen eine Quantenobservable zuordnet. Man hat also eine Familie von C*-Algebren $\{\mathfrak{A}^\hbar\}_{\hbar \in I}$ und eine dazu gehörende Familie von *Quantisierungsabbildungen* $\{\mathcal{Q}_\hbar\}_{\hbar \in I}$. Die Familie der Quantisierungsabbildungen sollte punktweise eine stetige Abbildung in $\hbar$ sein, d.h. $\forall f \in \tilde{\mathfrak{A}}^0_{\mathbb{R}}$ ist die Funktion

$$\hbar \mapsto \|\mathcal{Q}_\hbar(f)\| \ \textit{(Rieffel-Bedingung)} \tag{1.35}$$

stetig in I, wobei $\mathcal{Q}_0$ die Identität ist. Insbesondere gilt dann

$$\lim_{\hbar \to 0} \|\mathcal{Q}_\hbar(f)\| = \|f\|, \tag{1.36}$$

wobei wir die $\hbar$-Abängigkeit der Norm unterdrückt haben, wie wir es auch mit mit den algebraischen Operationen der C*-Algebren $\mathfrak{A}^\hbar$ halten werden.
Im Grenzfall $\hbar \to 0$ ist das Jordan-Produkt assoziativ. Die Verträglichkeit der Familie der Quantisierungsabbildungen mit der Assoziativität bedeutet die Möglichkeit eines stetigen Übergangs vom Jordan-Produkt der Quantenphysik zu dem der klassischen Physik. Es sollte also $\forall f, g \in \tilde{\mathfrak{A}}^0_{\mathbb{R}}$

$$\lim_{\hbar \to 0} \|\mathcal{Q}_\hbar(f) \circ \mathcal{Q}_\hbar(g) - \mathcal{Q}_\hbar(fg)\| = 0 \ \textit{(von Neumann-Bedingung)} \tag{1.37}$$

gelten.
Ebenso sollte ein stetiger Übergang zwischen den Poissonklammern[8] gemäß

$$\lim_{\hbar\to 0} \|\{\mathcal{Q}_\hbar(f), \mathcal{Q}_\hbar(g)\}_\hbar - \mathcal{Q}_\hbar(\{f,g\})\| = 0 \textit{ (Dirac-Bedingung)} \tag{1.38}$$

$\forall f, g \in \tilde{\mathfrak{A}}^0_{\mathbb{R}}$ gegeben sein.
Schließlich sollen alle Observablen durch das Bild der Quantisierungsabbildungen erzeugt sein, d.h.[9] $\forall \hbar \in I$

$$\{\mathcal{Q}_\hbar(f) | f \in \tilde{\mathfrak{A}}^0_{\mathbb{R}}\} \subseteq_d \mathfrak{A}^\hbar_{\mathbb{R}} \textit{ (Vollständigkeit).} \tag{1.39}$$

1.3.1 Definition. Eine *strikte Quantisierung einer Poisson-Algebra* $\tilde{\mathfrak{A}}^0_{\mathbb{R}}$ ist eine Familie von C*-Algebren $\{\mathfrak{A}^\hbar\}_{\hbar\in I}$ und eine dazu gehörende Familie von linearen Abbildungen $\{\mathcal{Q}_\hbar : \tilde{\mathfrak{A}}^0_{\mathbb{R}} \to \mathfrak{A}^\hbar_{\mathbb{R}}\}_{\hbar\in I}$, mit $\mathcal{Q}_0 = \mathbb{1}_{\tilde{\mathfrak{A}}^0_{\mathbb{R}}}$, sodass die Bedingungen (1.35), (1.37), (1.38), (1.39) erfüllt sind.

Die Bedingung der Vollständigkeit ist nicht entscheidend, weil wir nötigenfalls $\mathfrak{A}^\hbar$ durch die vom Bild von $\mathcal{Q}_\hbar$ erzeugte Algebra ersetzen können.

1.3.2 Definition. Eine *strikte Quantisierung einer Poisson-Mannigfaltigkeit* P ist eine strikte Quantisierung einer Poisson-Subalgebra $\tilde{\mathfrak{A}}^0_{\mathbb{R}}$ von[10] $C_b(P,\mathbb{R})$, ausgestattet mit der Supremumsnorm, deren Abschluss $C_0(P,\mathbb{R}) := \{f \in C(P,\mathbb{R}) | \forall \epsilon > 0\, \exists K \Subset X, \textit{ sodass } \sup_{x\in P\setminus K} |f(x)| < \epsilon$[11]$\}$ enthält.

Die Quantisierungsabbildungen können auf $\tilde{\mathfrak{A}}^0$ fortgesetzt werden, indem man $\mathcal{Q}_\hbar$ als komplex lineare Abbildung erklärt. Dann folgt aus (1.37) und (1.38) sofort $\forall f, g \in \tilde{\mathfrak{A}}^0$

$$\lim_{\hbar} \|\mathcal{Q}_\hbar(f)\mathcal{Q}_\hbar(g) - \mathcal{Q}_\hbar(fg)\| = 0. \tag{1.40}$$

Die Rieffel-Bedingung besagt, dass die Quantisierungsabbildung für kleines $\hbar$ injektiv ist. Wir wollen nun eine interessante Formulierung einer Deformationsquantisierung in unseren Begriffen angeben.

1.3.3 Definition. Eine strikte Quantisierung $(\mathfrak{A}^\hbar, \{\mathcal{Q}_\hbar\})$ heißt *strikte Deformationsquantisierung*, wenn $\mathcal{Q}(\tilde{\mathfrak{A}}^0)$ bezüglich der Multiplikation in $\mathfrak{A}^\hbar$ abgeschlossen ist und $\mathcal{Q}_\hbar$ nicht *entartet* ist $\forall \hbar \in I$, d.h. $\mathcal{Q}_\hbar(f) = 0 \Leftrightarrow f = 0$.

---

[8] Siehe (1.21).

[9] Das Symbol $A \subseteq_d B$ bedeutet, dass A dicht liegt bezüglich der Normtopologie von B.

[10] Wenn nichts anderes gesagt wird, sind diese Räume stets normiert durch die Supremumsnorm.

[11] Im Folgenden bezeichnen wir dies kurz mit „$\lim_{x\to\infty}$" und das Symbol $A \Subset B$ bedeutet, dass A eine kompakte Teilmenge von B ist.

Eine strikte Deformationsquantisierung definiert ein deformiertes assoziatives Produkt $\cdot_\hbar$ auf der Algebra $\tilde{\mathfrak{A}}^0$ durch

$$\mathcal{Q}_\hbar(f)\mathcal{Q}_\hbar(g) = \mathcal{Q}_\hbar(f \cdot_\hbar g). \tag{1.41}$$

Für $\hbar = 0$ erhält man wieder das ursprüngliche Produkt von $\tilde{\mathfrak{A}}^0$. Damit kann man die Bedingungen einer strikten Quantisierung, mit Ausnahme der Rieffel-Bedingung, mit Hilfe des deformierten Produktes $\cdot_\hbar$ ausdrücken. Hierin drückt sich der Umstand aus, dass eine komplexifizierte Poisson-Algebra mit einem deformierten Produkt $\cdot_\hbar$ keine Quantenobservablen und damit nicht alle Eigenschaften einer Quantentheorie enthält. Es gibt viele Beispiele von strikten Quantisierungen die keine Deformationsquantisierungen induzieren, z.B. die durch Quantisierungen reiner Zustände gegebenen[12].
Die Abbildungen sind nicht eindeutig, sondern hängen stark von der physikalisch gewählten Ordnungsvorschrift der Operatoren ab. Allerdings kann man eine Äquivalenz von Quantisierungen definieren.

1.3.4 Definition. Seien $(\mathfrak{A}_i^\hbar, \{\mathcal{Q}_\hbar^i\})$, $i = 1, 2$, zwei strikte Quantisierungen. Falls $\mathfrak{A}_1^\hbar = \mathfrak{A}_2^\hbar \; \forall \hbar \in I$ und die Abbildung

$$\hbar \mapsto \|\mathcal{Q}_\hbar^1(f) - \mathcal{Q}_\hbar^2(f)\| \tag{1.42}$$

stetig ist auf $I \; \forall f \in \tilde{\mathfrak{A}}_{\mathbb{R}}^0$, so heißen die beiden strikten Quantisierungen *äquivalent*.

Im folgenden Abschnitt werden wir ein Objekt konstruieren, dass den Begriff der strikten Deformationsquantisierung sehr durchsichtig werden lässt. Darüber hinaus ist dieser Begriff invariant unter Wechseln zu äquivalenten Theorien.

1.4 Stetige Felder von C*-Algebren

Der Begriff der strikten Quantisierung stellt eine direkte Beziehung zwischen den klassischen Observablenalgebren und denen der Quantenmechanik her. Die Probleme, die bei der Erklärung eines Überganges zwischen beiden Theorien durch ihre strukturellen Unterschiede auftreten, werden durch die Identifikation der gemeinsamen algebraischen Strukturen, des Jordan- und des Lie-Produktes gelöst. Einen anderen Schwerpunkt setzt der Begriff der *stetigen Quantisierung*, der in diesem Abschnitt untersucht werden soll. Es stellt sich heraus, dass die stetigen Felder von C^*-Algebren praktisch alle analytischen Informationen des klassischen Limes enthalten. Den strukturellen

[12]Siehe hierzu [Lan98]

Unterschieden wird mit Hilfe eines Vektorraum-Homomorphismus Rechnung getragen.

1.4.1 Definition. Ein *stetiges Feld von C*-Algebren* $(X, \mathfrak{C}, \{\mathfrak{A}^x, \varphi_x\}_{x\in X})$ über einem lokal kompakten Hausdorffraum X ist eine C*-Algebra $\mathfrak{C}$, eine Familie von C*-Algebren $\{\mathfrak{A}^x\}_{x\in X}$ und einer Menge von surjektiven Morphismen $\{\varphi_x : \mathfrak{C} \to \mathfrak{A}^x\}_{x\in X}$, sodass die folgenden Bedingungen erfüllt sind.

F1. Die Abbildung $x \mapsto \|\varphi_x(A)\|$ liegt in $C_0(X)$ $\forall A \in \mathfrak{C}$.

F2. Die Norm der Elemente $A \in \mathfrak{C}$ ist gegeben durch

$$\|A\| = \sup_{x\in X} \|\varphi_x(A)\|. \tag{1.43}$$

F3. Das stetige Feld $(X, \mathfrak{C}, \{\mathfrak{A}^x, \varphi_x\}_{x\in X})$ ist C_0-*abgeschlossen*, d.h. $\forall f \in C_0(X)$ und $\forall A \in \mathfrak{C}$ $\exists fA \in \mathfrak{C}$, sodass

$$\varphi_x(fA) = f(x)\varphi_x(A) \tag{1.44}$$

$\forall x \in X$.

Die surjetiven Morphismen φ_x lassen sich als Schnitte des Feldes auffassen.

1.4.2 Definition. Ein *Schnitt eines stetigen Feldes von C*-Algebren*

$$(X, \mathfrak{C}, \{\mathfrak{A}^x, \varphi_x\}_{x\in X})$$

ist ein Element $\{A_x\}_{x\in X} \in \prod_{x\in X} \mathfrak{A}^x$, für das ein Element $A \in \mathfrak{C}$ existiert, sodass $A_x = \varphi_x(A)$ $\forall x \in X$. Die Menge der Schnitte bezeichnen wir mit kurz mit $\mathfrak{S}$.

Man kann die C*-Algebra $\mathfrak{C}$ mit der Menge der Schnitte identifizieren, wenn man auf der Menge der Schnitte zunächst eine *-algebraische Struktur punktweise erklärt und eine Norm wie in F2. Die Abgeschlossenheit dieser Operationen folgt aus der Injektivität der Abbildung

$$\Phi : \mathfrak{C} \to \mathfrak{S},\ \Phi(A) := \{\varphi_x(A)\}_{x\in X}, \tag{1.45}$$

welche eine Folge der Surjektivität dieser Isometrie ist, woraus auch die Vollständigkeit folgt.
Das einfachste Beispiel eines stetigen Feldes erhält man für $\mathfrak{A}^x = \mathfrak{A}$ $\forall x \in X$ und $\mathfrak{C} = C_0(X, \mathfrak{A})$, mit $\varphi_x(A) := A_x$. Ein solches Feld heißt *trivial*.

An dieser Stelle ist es vielleicht hilfreich darauf hinzuweisen, dass im Gegensatz zu den Fasern eines Vektorbündels die entsprechenden Algebren nicht isomorph sein müssen. Dies verschafft uns gerade den Spielraum, um die strukturell unterschiedlichen Theorien der klassischen Physik und der Quantentheorie in Beziehung zu setzen.
Wir möchten den Zusammenhang zwischen dem Begriff der strikten Quantisierung und den stetigen Feldern von C*-Algebren finden. Anstelle eines Intervalls I haben wir einen lokal kompakten Hausdorffraum X und die Rolle der Quantisierungsabbildungen, deren Bild dicht liegt (1.39,) werden von den surjektiven Morphismen φ_x komponiert mit einem Vektorraum-Homomorphismus $\mathcal{Q}$ übernommen. Ein solcher Homomorphismus ist natürlich notwendig, da Poissonalgebren kommutativ sind, im Gegensatz zu den C^*-Algebren der quantisierten Theorie. Wie schon im Vorangegangenen angesprochen besteht das Problem, dass Poissonalgebren im Allgemeinen nicht vollständig sind. Deswegen ist es wichtig, dass der von uns gesuchte Quantisierungsbegriff für stetige Felder von C^*-Algebren schon durch einen dichten Teilraum der Schnitte eindeutig charakterisiert wird. Das dies für stetige Felder realsiert wird, zeigt die folgende Diskussion.
Stetige Felder von C^*-Algebren haben die wichtige Eigenschaft, dass Elemente $\{A_x\}_{x\in X} \in \prod_{x\in X} \mathfrak{A}^x$, die lokal durch stetige Schnitte approximiert werden können und deren Normfunktion in

$$F_0(X) := \{f : X \to \mathbb{R} | \lim_{x\to\infty} \|A_x\| = 0\} \tag{1.46}$$

liegt, selbst wieder stetige Schnitte sind. Diese folgende Definition ist etwas technisch und formuliert lediglich formal die Bedeutung von „lokal durch stetige Schnitte approximerbar“.

1.4.3 Definition. Eine Teilmenge $\mathfrak{F} \subseteq \prod_{x\in X} \mathfrak{A}^x$ heißt *lokal gleichmäßig abgeschlossen*, falls für jedes $\{A_x\}_{x\in X} \in \prod_{x\in X} \mathfrak{A}^x$, dessen Normfunktion in $F_0(X)$ liegt und das die Eigenschaft hat: $\forall y \in X$ und $\forall \epsilon > 0$ $\exists \{B^y_x\} \in \mathfrak{F}$ und eine Umgebung $\mathcal{N}^y$ von y, sodass

$$\sup_{x\in\mathcal{N}^y} \|A_x - B^y_x\| < \epsilon \tag{1.47}$$

folgt, dass $\{A_x\}_{x\in X} \in \mathfrak{F}$.

Das folgende Lemma zeigt nun die oben angekündigte Aussage. Die entscheidende analytische Eigenschaft ist dabei die Vollständigkeit von $\mathfrak{C}$.

1.4.4 Lemma. *Die Schnitte $\mathfrak{C}$ eines stetigen Feldes sind lokal gleichmäßig abgeschlossen. Ist für $\{A_x\}_{x\in X} \in \prod_{x\in X} \mathfrak{A}^x$ die Abbildung $(x \mapsto \|A_x - C_x\|) \in C_0(X)$, $\forall C \in \mathfrak{C}$, so folgt $A \in \mathfrak{C}$.*

Bemerkung. Der erste Teil des Lemmas ist auch wahr, falls man in der Definition des stetigen Feldes die Eigenschaften F1 und F3 abschwächt, indem $C_0(X)$ durch $F_0(X)$ ersetzt wird.

Für die zweite Aussage wird jedoch direkt von der Stetigkeit von $(x \mapsto \|A_x - B_x\|)$ Gebrauch gemacht um die Voraussetzungen des ersten Teils zu zeigen. Um dann folgern zu können, dass jedes Element von $\mathfrak{C}$ die Eigenschaft des zweiten Teils des Lemmas hat, benötigt man Eigenschaft F1.

Bemerkung. Es gilt $A \in \mathfrak{C}$ genau dann, wenn

$$(x \mapsto \|A_x - C_x\|) \in C_0(X), \tag{1.48}$$

$\forall C \in \mathfrak{C}$.

1.4.5 Proposition. *Sei $\{\mathfrak{A}_x\}_{x\in X}$ eine Familie von C*-Algebren über einem lokal kompakten Hausdorffraum X und $\tilde{\mathfrak{C}} \subseteq \prod_x \mathfrak{A}^x$ eine Teilmenge der Schnitte, die folgenden Bedingungen genügt.*

1. *Die Menge $\{A_x | \{A_x\}_{x\in X} \in \tilde{\mathfrak{C}}\} \subseteq_d \mathfrak{A}^x \ \forall x \in X$.*
2. *$(x \mapsto \|A_x\|) \in C_0(X) \ \forall x \in X$.*
3. *Die Menge $\tilde{\mathfrak{C}}$ ist eine *-Algebra bezüglich punktweiser Operationen.*

Dann existiert genau ein stetiges Feld von C-Algebren $(\mathfrak{C}, \{\mathfrak{A}^x, \varphi_x\}_{x\in X})$, deren Familie von Schnitten $\tilde{\mathfrak{C}}$ enthält.*

Die Schnitte des eindeutigen stetigen Feldes wird als die Menge der Elemente gewählt, die (1.48) $\forall C \in \tilde{\mathfrak{C}}$ erfüllen. Die Morphismen werden durch die Auswertungsabbildung $\varphi_x(A) := A_x$ und die Norm durch die Supremumsnorm auf den Schnitten definiert. Man zeigt dann mit einem $\epsilon/3$-Argument, dass diese Menge lokal gleichmäßig abgeschlossen ist. Dazu machen wir die folgende

Bemerkung. Die in der Proposition definierte Menge $\mathfrak{C}$ ist eine C^*-Algebra. Das angesprochene $\epsilon/3$-Argument liefert nämlich die Stetigkeit von

$$x \mapsto \|(A - C)_x\| = \|A_x - C_x\|, \tag{1.49}$$

wobei $(A_x)_{x\in X}$ die Eigenschaften F1 und F2 erfüllt, da $\tilde{\mathfrak{C}}$ eine *-Algebra ist. Die Eigenschaft (1.) in der Proposition gibt uns nämlich die Möglichkeit, zumindest lokal, $(A_x)_{x\in X}$ durch $(B_x^y)_{x\in X} \in \tilde{\mathfrak{C}}$ zu approximieren. Damit sind auch Summen und Produkte, sowie Adjungierte auf diese Weise approximierbar und es folgt, dass $\mathfrak{C}$ eine *-Algebra ist. Ebenso sieht man die Gültigkeit von Eigenschaft F3 ein. Eine Cauchy-Folge in $\mathfrak{C}$ induziert in jeder Komponente $\mathfrak{A}^x$ eine Cauchy-Folge, welche konvergiert. Die Grenzwerte erzeugen wieder ein Element in $\prod_x \mathfrak{A}^x$ und die Dreiecksungleichung liefert die Stetigkeit in einem Punkt. Mit der Dreiecksungleichung $\|A_x\| \leq \|A_x - A_x^n\| + \|A_x^n\|$ folgt darüber hinaus auch $\lim_{x\to\infty} \|A_x\| = 0$. Damit ist $\mathfrak{C}$ eine C^*-Algebra.

Wir sind nun in der Lage, den Zusammenhang zwischen der strikten Quantisierung und dem Begriff des stetigen Feldes von C*-Algebren zu formulieren. Die Dirac-Eigenschaft ist dafür nicht notwendig. Falls I ein nicht kompaktes Intervall ist, so modifizieren wir die Rieffel-Bedingung, indem wir $(\hbar \mapsto \|\mathcal{Q}_\hbar(f)\|) \in C_0(I)\ \forall f \in \tilde{\mathfrak{A}}^0$ fordern.

1.4.6 Satz. *Sei* $(I, \tilde{\mathfrak{A}}^0_{\mathbb{R}}, \{\mathfrak{A}^\hbar\}_{\hbar\in I}, \{\mathcal{Q}_\hbar\}_{\hbar\in I})$ *eine strikte Quantisierung einer Poisson-Algebra, mit Ausnahme vielleicht von (1.38). Ferner sei entweder I diskret, oder* $\mathfrak{A}^\hbar = \mathfrak{A}\ \forall \hbar > 0$ *und* $\hbar \mapsto \mathcal{Q}_\hbar(f)$ *stetig bezüglich der Norm von* $\mathfrak{A}$*. Dann existiert ein eindeutiges stetiges Feld von C*-Algebren* $(I, \mathfrak{C}, \{\mathfrak{A}^\hbar, \varphi_\hbar\}_{\hbar\in I})$*, dessen Familie von Schnitten die Menge* $\{\{\mathcal{Q}_\hbar(f)\}_{\hbar\in I} | f \in \tilde{\mathfrak{A}}^0\}$ *enthält. Jede zu* $(I, \tilde{\mathfrak{A}}^0_{\mathbb{R}}, \{\mathfrak{A}^\hbar\}_{\hbar\in I}, \{\mathcal{Q}_\hbar\}_{\hbar\in I})$ *äquivalente Quantisierung liefert dasselbe stetige Feld.*

Bemerkung. Wir möchten betonen, dass die Auswertungsabbildungen die surjektiven Morphismen des stetigen Feldes definieren. Die Quantisierungsabbildungen sind lediglich Vektorraum-Homomorphismen.

Die Identifizierung der Algebren für $\hbar > 0$ falls I nicht diskret ist, wird natürlich durch die Stetigkeit der Abbildung $\hbar \mapsto \mathcal{Q}_\hbar(f)$, $f \in \tilde{\mathfrak{A}}^0$ notwendig, weil dieser Stetigkeitsbegriff sonst leer ist. Die Eindeutigkeit der Basis des stetigen Feldes ist eine direkte Konsequenz der Definition der Äquivalenz von Quantisierungen und der Bemerkung zur Eindeutigkeit im Anschluss an Proposition 1.4.5.
Alternativ zu unserem Begriff einer Quantisierung kann man auch vom Begriff des stetigen Feldes ausgehen.

1.4.7 Definition. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ mit $0 \in I$ als Häufungspunkt. Eine *stetige Quantisierung* einer Poisson-Mannigfaltigkeit P ist ein Tripel

$$((I, \mathfrak{C}, \{\mathfrak{A}^\hbar, \varphi_\hbar\}_{\hbar\in I}), \tilde{\mathfrak{A}}^0, \mathcal{Q})$$

mit den folgenden Eigenschaften:

1. $(I, \mathfrak{C}, \{\mathfrak{A}^\hbar, \varphi_\hbar\}_{\hbar\in I})$ ist ein stetiges Feld von C*-Algebren.
2. $\tilde{\mathfrak{A}}^0 \subseteq C_b^\infty(P)$ ist eine Poisson-Algebra, deren Abschluss $\mathfrak{A}^0$ $C_0(P)$ enthält.

3. $\mathcal{Q} : \tilde{\mathfrak{A}}^0 \to \mathfrak{C}$ ist eine lineare Abbildung mit $\mathcal{Q}_\hbar(f) := \varphi_\hbar(\mathcal{Q}(f)) \,\forall f \in \tilde{\mathfrak{A}}^0$, $\forall \hbar \in I$, sodass $\mathcal{Q}_0(f) = f$, sowie $\mathcal{Q}_\hbar(\bar{f}) = \mathcal{Q}_\hbar(f)^\dagger$ und $\forall f, g \in \tilde{\mathfrak{A}}^0$ erfüllen die $\mathcal{Q}_\hbar$ die Dirac-Bedingung (1.38).

Allgemein definiert eine stetige Quantisierung eine strikte Quantisierung falls (1.39) erfüllt ist. Umgekehrt gibt uns der Satz 1.4.6 Bedingungen, unter denen eine strikte Quantisierung stetig ist.

1.5 Die Heisenberggruppe und die Metaplektische Darstellung

Dieser Abschnitt möchte einen Zusammenhang zwischen der Bewegungsgruppe klassisch physikalischer Systeme und der Weylquantisierung aufzeigen. Dazu wollen wir einige Eigenschaften der Darstellungstheorie der Heisenberggruppe zusammenstellen. Anschließend werden wir die natürliche Verallgemeinerung der Orthogonalen Gruppe des Ortsraumes $\mathbb{R}^n$ auf das Kotangentialbündel $T^*\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$, die *Symplektische Gruppe* $Sp(n, \mathbb{R})$ und deren Darstellung auf $L^2(\mathbb{R}^n)$ besprechen.
Beginnen wir mit der Heisenberggruppe. Sei J die $2n \times 2n$ Matrix mit

$$J := \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix},$$

so ist $\{f, g\} = (\nabla f, J\nabla g)$. Diese Poissonklammer induziert eine symplektische Form $\omega = dq^i \wedge dp_i$. Betrachtet man die Koordinatenfunktionen p_i, q^j und die identische Funktion auf $T^*\mathbb{R}^n$ und berechnet $-\{,\}$ dieser Funktionen, so erhält man die Lie Algebra $\mathfrak{h}_n = \mathbb{R}^{2n+1}$ der *Heisenberggruppe* H_n. Bezeichnen wir mit $\{P_i, Q^j, Z\}_{i,j=1,\ldots,n}$ die Basiselemente, so sind die Lie Klammern gegeben durch

$$[P_i, P_j] = [Q^i, Q^j] = 0,\ [P_i, Q^j] = -\delta_i^j Z,\ [P_i, Z] = [Q^j, Z] = 0.$$

1.5.1 Definition. Die *Heisenberggruppe* H_n ist die eindeutig bestimmte zusammenhängende und einfach zusammenhängende Lie Gruppe mit Lie Algebra $\mathfrak{h}_n$.

Die in der Physik übliche Parametrisierung ist für $u, v \in \mathbb{R}^n$, $s \in \mathbb{R}$

$$(u, v, s) := Exp(-uQ + vP + sZ),$$

woraus mit der Campbell-Baker-Hausdorff Formel direkt

$$(u, v, s)(u', v', s') := (u + u', v + v', s + s' + \frac{1}{2}(uv' - vu')) \tag{1.50}$$

folgt.

Bemerkung. Zwischen der Poisson-Algebra der Polynome vom Grad ≤ 1, $P^{\leq 1}$, und der Lie Algebra $\mathfrak{h}_n$ wird durch

$$\mathcal{P}_{(u,v,s)}(p,q) = vp - uq + s \longleftrightarrow vP - uQ + sZ \tag{1.51}$$

ein Lie Algebren Antiisomorphismus definiert.

Nun wollen wir die für unsere Zwecke wichtige Darstellung der Heisenberggruppe angeben. Sei $\lambda \neq 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$, so definiert

$$U^S_\lambda(u,v,s)\psi(x) := e^{-i\lambda(s+\frac{1}{2}uv)}e^{iux}\psi(x-\lambda v) \tag{1.52}$$

eine unitäre irreduzible Darstellung der Heisenberggruppe auf $L^2(\mathbb{R}^n)$. Es lässt sich zeigen, dass für $\lambda \neq 0$ jede nicht-eindimensionale Darstellung der Heisenberggruppe äquivalent zu (1.52) ist.

1.5.2 Definition. Die durch Gleichung (1.52) definierte Darstellung nennen wir *Schrödinger Darstellung* der Heisenberggruppe.

Bemerkung. Die Darstellung

$$U_\lambda(u,v,s)\psi(x) := e^{-i\lambda(s+\frac{1}{2}uv-ux)}\psi(x-v) \tag{1.53}$$

ist äquivalent zur Schrödinger Darstellung. Die Äquivalenz wird durch die Dilatation $(V\psi)(x) := \lambda^{n/2}\psi(\lambda x)$ vermittelt, d.h. $VU^S_\lambda V^\dagger = U_\lambda$.

Die Darstellung der Lie Algebra $\mathfrak{h}_n$ ist gegeben durch

$$dU^S_\lambda(Q^i) = -ix^i,\ dU^S_\lambda(P_j) = -\lambda\frac{\partial}{\partial x^i},\ dU^S_\lambda(Z) = -i\lambda\mathbb{1}, \tag{1.54}$$

bzw.

$$dU_\lambda(Q^i) = -i\lambda x^i,\ dU_\lambda(P_j) = -\frac{\partial}{\partial x^i},\ dU_\lambda(Z) = -i\lambda\mathbb{1}. \tag{1.55}$$

Damit können wir den Ort- und Impulsoperator definieren.

$$Q^{\hbar,j}_S := i\hbar dU_{\frac{1}{\hbar}}(Q^j) = idU^S_\hbar(Q^j) = x^j, P^\hbar_{S,k} := i\hbar dU_{\frac{1}{\hbar}}(P_k) = idU^S_\hbar(P_k) = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x^k}. \tag{1.56}$$

In der ursprünglichen Version des Satzes von Hepp 1.7.1 wird eine symmetrische Darstellung der kanonischen Kommutatorrelationen verwendet. Man erhält sie durch die Dilatation $(\tilde{V}\psi)(x) := \hbar^{n/4}\psi(\sqrt{\hbar}x)$. Ort- und Impulsoperator haben dann die Form

$$q^{\hbar,j} := \sqrt{\hbar}x^j,\ p^\hbar_k := \frac{\sqrt{\hbar}}{i}\frac{\partial}{\partial x^k}. \tag{1.57}$$

Die Isometriegruppe der symplektischen Form $\omega = dq^i \wedge dp_j$ nennen wir die *Symplektische Gruppe* $Sp(n, \mathbb{R})$. Es ist $M \in GL(2n, \mathbb{R})$ in $Sp(n, \mathbb{R})$ genau dann, wenn $M^T JM = J$. Die Elemente der zugehörigen Lie Algebra sind dann charakterisiert durch $X \in \mathfrak{sp}(n, \mathbb{R}) \iff JX + X^T J = 0$. Für $X \in \mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$ erklären wir das quadratische Polynom

$$\mathcal{P}_X(\sigma) := \frac{1}{2}(JX\sigma, \sigma),$$

mit $\sigma = (p, q)$ und dem euklidischen Skalarprodukt im $\mathbb{R}^{2n}$. Die so definierte lineare Abbildung von $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$ ist bijektiv und man rechnet leicht nach, dass

$$\{\mathcal{P}_X, \mathcal{P}_{X'}\} = -\mathcal{P}_{[X,X']}$$

gilt, d.h. der Isomorphismus ist ein Lie Algebren Antiisomorphismus zwischen P^2 und $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$. Wir können ein semidirektes Produkt $Sp(n, \mathbb{R}) \ltimes H_n$ durch

$$(M, (u, v, s))(M', (u', v', s')) := (MM', (u, v, s)M(u', v', s'))$$

erklären. Aus den Antiisomorphismen von $\mathfrak{h}_n$ und $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$ lässt sich ein Antiisomorphismus zwischen $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R}) \ltimes \mathfrak{h}_n$ und $P^{\leq 2}$ konstruieren. Mit Hilfe dieses Isomorphismus können wir die Bewegungsgleichungen für beliebige Polynome in $P^{\leq 2}$ lösen. Ist $X \in \mathfrak{sp}(n, \mathbb{R}) \ltimes \mathfrak{h}_n$ und $\mathcal{P}_X$ das durch den Antiisomorphismums assoziierte Polynom zu X. Erklärt man die natürliche Wirkung der Gruppe $Sp(n, \mathbb{R}) \ltimes H_n$ auf $T^*\mathbb{R}^n$ durch

$$\rho^0_{(M,(u,v,s))}(\sigma) = M\sigma + (u, v),$$

so gilt

$$\sigma(t) = \mathrm{Exp}(tX)\sigma,$$

wobei $\sigma(t)$ der von $\mathcal{P}_X$ erzeugte Fluss und $\mathrm{Exp} : \mathfrak{sp}(n, \mathbb{R}) \ltimes \mathfrak{h}_n \to Sp(n, \mathbb{R}) \ltimes H_n$ die Exponentialabbildung ist. Auf Grund des Satzes von Picard-Lindeloeff ist diese Lösung eindeutig. In Abschnitt 2.2.1 werden wir diesen Zusammenhang verwenden, um die Heisenberggleichungen zweier linear gekoppelter Harmonischer Oszillatoren zu lösen. Dazu wollen wir nun eine integrierbare Darstellung der $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$ auf $L^2(\mathbb{R}^n)$ angeben. Sei $\mathcal{P}(p_i, q^j, 1)$ ein Polynom auf $T^*\mathbb{R}^n$, dann definieren wir

$$\mathcal{Q}^W_\hbar(\mathcal{P}(p_i, q^j, 1)) := \lambda[\mathcal{P}(P^\hbar_S, Q^\hbar_S), \mathbb{1}], \tag{1.58}$$

wobei $\lambda[A_1, \ldots, A_n] := \sum_{\pi \in S_n} A_{\pi(1)} \ldots A_{\pi(n)}/n!$, mit der Symmetrischen Gruppe S_n. Der obere Index W ist natürlich nicht zufällig so gewählt, sondern eine

Quantisierungsvorschrift die sich durch formale Anwendung der Weylquantisierung ergibt, wie wir im folgenden Abschnitt sehen werden.
Ein Standardresultat der Darstellungstheorie besagt, dass $\mathcal{Q}_\hbar^W(\mathcal{P})$ durch Ableitungen wohldefiniert ist als unbeschränkter Operator auf $L^2(\mathbb{R}^n)$ mit dem Raum der *Schwartzfunktionen* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ als Definitionsgebiet. Ein reelles Polynom $\mathcal{P}$ definiert so einen symmetrischen Operator.

1.5.3 Proposition.

- *Für höchstens quadratische Polynome wir durch $\mathcal{Q}_\hbar^W$ ein Lie Algebrenhomomorphismus definiert, d.h.*

$$\frac{i}{\hbar}[\mathcal{Q}_\hbar^W(\mathcal{P}_1), \mathcal{Q}_\hbar^W(\mathcal{P}_1)] = \mathcal{Q}_\hbar^W(\{\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2\}), \tag{1.59}$$

  $\forall \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \in P^{\leq 2}$.

- $d\rho^\hbar(X) := -\frac{i}{\hbar}\mathcal{Q}_\hbar^W(\mathcal{P}_X)$ *liefert eine Darstellung der Lie Algebra* $\mathfrak{sp}(n,\mathbb{R}) \ltimes \mathfrak{h}_n$ *als unbeschränkte Operatoren mit invariantem Definitionsgebiet* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. $id\rho^\hbar(X)$ *ist wesentlich selbstadjungiert.*

- *Das semidirekte Produkt der zweifachen Überlagerung von* $Sp(n,\mathbb{R})$, *der* Metaplektischen Gruppe $Mp(n,\mathbb{R})$, *mit der Heisenberggruppe*

$$Mp(n,\mathbb{R}) \ltimes H_n$$

  besitzt eine Darstellung $\rho^\hbar$ *auf* $L^2(\mathbb{R}^n)$, *sodass die abgeleitete Darstellung mit* $d\rho^\hbar$ *übereinstimmt.*

- $\rho^\hbar\restriction_{H_n} = U_{1/\hbar}(.)$.

Die Einschränkung von $\rho^\hbar$ auf $Sp(n,\mathbb{R})$ heißt *Metaplektische Darstellung.* Aus der Definition des Produktes von $Sp(n,\mathbb{R}) \ltimes H_n$ folgt

$$(M,0)(\mathbb{1},(u,v,s))(M^{-1},0) = (\mathbb{1}, M(u,v,s)),$$

was die *Equivarianz*

$$\rho^\hbar(M)U_{\frac{1}{\hbar}}(p,q)\rho^\hbar(M)^\dagger = U_{\frac{1}{\hbar}}(M(p,q)), \tag{1.60}$$

$M \in Sp(n,\mathbb{R})$, impliziert. Man kann zeigen, dass die Eigenräume des *Paritätsoperators* P, $P\psi(x) := \psi(-x)$, die Metaplektische Darstellung in irreduzible Darstellungen zerlegt. Daher gilt

$$\rho^\hbar(M)P\rho^\hbar(M)^\dagger = P. \tag{1.61}$$

Diese Gleichung werden wir im folgenden Abschnitt bei der Definition der Weylquantisierung ausnutzen.

1.6 Weylquantisierung des flachen Raumes

Wie bereits im vorigen Abschnitt angekündigt, werden wir nun eine Quantisierung angeben, die stetig, strikt und nicht entartet ist[13]. Darüber hinaus ist sie equivariant unter $Sp(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^{2n}$.

1.6.1 Definition. Die lineare Abbildung $\mathcal{Q}_\hbar^W : \mathcal{S}(T^*\mathbb{R}^n) \to \mathfrak{B}(L^2(\mathbb{R}^n))$,

$$\mathcal{Q}_\hbar^W(f) := \int_{T^*\mathbb{R}^n} \frac{d^n p d^n q}{(\pi\hbar)^n} f(p,q) U_{\frac{1}{\hbar}}(p,q) P U_{\frac{1}{\hbar}}(p,q)^\dagger, \tag{1.62}$$

wobei das Integral in der starken Operatortopologie existiert, nennen wir *Weylquantisierung.*

Bemerkung. Die Normierung wurde so gewählt, dass $\mathcal{Q}_\hbar^W(1_{T^*\mathbb{R}^n}) = \mathbb{1}$ gilt. Offensichtlich bildet $\mathcal{Q}_\hbar^W$ den Raum $\mathcal{S}(T^*\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ in $\mathfrak{B}(L^2(\mathbb{R}^n))_\mathbb{R}$, die Menge der selbstadjungierten Operatoren, ab.

Die in der Definition angegebene Darstellung der Weylquantisierung ist nicht die einzig mögliche. In [Lan98] werden die gängigen Formulierungen diskutiert und die Zusammenhänge zwischen ihnen hergestellt.
Um den Zusammenhang dieser Quantisierung mit der Bewegungsgruppe der klassischen Mechanik aufzuzeigen, geben wir das folgende Resultat an. Dabei vereinbaren wir, dass $\alpha^0_{(M,w)}(f) := f \circ \rho^0_{(M,w)^{-1}}$ und

$$\alpha^\hbar_{(M,w)}(A) := \rho^\hbar(M,w) A \rho^\hbar(M,w)^\dagger.$$

1.6.2 Satz. *Es gilt* $\forall (M,w) \in Sp(n,\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^{2n}$ *und* $\forall f \in \mathcal{S}(T^*\mathbb{R}^n)$

$$\mathcal{Q}_\hbar^W(\alpha^0_{(M,w)}(f)) = \alpha^\hbar_{(M,w)}(\mathcal{Q}_\hbar^W(f)). \tag{1.63}$$

Mit anderen Worten ist die Weylquantisierung invariant unter $Sp(n,\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^{2n}$ und die durch $\alpha^\hbar_{(M,w)}(\mathcal{Q}_\hbar^W(f))$ definierten Quantisierungen erzeugen dasselbe stetige Feld von C^*-Algebren, wie die Weylquantisierung. Dabei haben wir schon einmal vorweggenommen, dass die Weylquantisierung stetig ist.
Dasselbe Ergebnis ergibt sich für einfache Hamiltonoperatoren auch im Fall der Dynamik. Mit der Definition (1.32) und

$$\alpha^\hbar_t(A) = e^{\frac{it}{\hbar}H^\hbar} A e^{-\frac{it}{\hbar}H^\hbar} \tag{1.64}$$

gilt mit dem Antiisomorphsimus zwischen $P^{\leq 2}$ und $\mathfrak{sp}(n,\mathbb{R}) \ltimes \mathfrak{h}_n$ das folgende

[13] Siehe Def. 1.3.3.

1.6.3 Korollar. *Die klassische Hamiltonfunktion h sei ein beliebiges reelles Polynom auf $T^*\mathbb{R}^n$ vom Grad ≤ 2 in (p,q). Dann ist der Hamiltonoperator $H^\hbar := \mathcal{Q}_\hbar^W(h)$ ein wohldefinierter symmetrischer Operator auf dem Definitionskern*[14] *$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Es gilt*

$$\mathcal{Q}_\hbar^W(\alpha_t^0(h)) = \alpha_t^\hbar(\mathcal{Q}_\hbar^W(h)). \tag{1.65}$$

Demnach ist das zur Weylquantisierung gehörende stetige Feld invariant unter der Zeitentwicklung höchstens quadratischer Hamiltonoperatoren. Da die Weylquantisierung auch nicht entartet ist, kann man prägnant mit obigem Korollar sagen, dass die klassische Dynamik und die quantenmechanische Dynamik im Fall $P^{\leq 2}$ gleich sind.
Die Weylquantisierung lässt sich auch in folgender Form darstellen:

$$\mathcal{Q}_\hbar^W(f)\Psi(x) = \int_{T^*\mathbb{R}^n} \frac{d^n p d^n y}{(2\pi\hbar)^n} e^{ip(x-y)/\hbar} f(p, \frac{1}{2}(x+y))\Psi(y).$$

Das heißt man hat für jedes $f \in \mathcal{S}(T^*\mathbb{R}^n)$ eine explizite Darstellung von $\mathcal{Q}_\hbar^W(f)$ als Integraloperator, wobei der Integralkern in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$ liegt. Ein Resultat der Funktionalanalysis besagt, dass ein Operator des $L^2(X,\mu)$ eines beliebigen Maßraumes (X,Σ,μ) genau dann Hilbert-Schmidt ist, wenn er sich als Integraloperator mit einem Integralkern aus $L^2(X\times X, \mu\otimes\mu)$ schreiben lässt, [Wer05]. Demnach erhalten wir folgende

1.6.4 Proposition. *Die Abbildung $\mathcal{Q}_\hbar^W$ ist ein Isomorphismus zwischen dem Raum der Hilbert-Schmidt Operatoren auf $L^2(\mathbb{R}^n)$ mit Integralkernen in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$ und dem Raum der Schwartzfunktionen auf dem Kotangentialbündel $T^*\mathbb{R}^n$, $\mathcal{S}(T^*\mathbb{R}^n)$.*

Ein weiteres Resultat das Funktionalanalysis besagt, dass der in der Proposition angegebene Raum dicht liegt in den kompakten Operatoren. Wir erhalten also das

1.6.5 Korollar. *Das Bild $\mathcal{Q}_\hbar^W(\mathcal{S}(T^*\mathbb{R}^n))$ liegt dicht in dem Raum der kompakten Operatoren $K(L^2(\mathbb{R}^n))$ und $\mathcal{Q}_\hbar^W$ ist nicht entartet.*

Schließlich möchten wir noch die Standarddarstellung der Weylquantisierung angeben. Es gilt

$$\mathcal{Q}_\hbar^W(f) = \int_{\mathbb{R}^{2n}} d^n u d^n v \check{f}(u,v) U_\hbar^S(u,v,0). \tag{1.66}$$

[14] Siehe Kapitel 4.

Für $f \in \mathcal{S}(T^*\mathbb{R}^n)$ haben wir dabei die *symplektische Fourier Transformation* $\breve{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$ durch Inversion von

$$f(p,q) := \int_{\mathbb{R}^{2n}} d^n u d^n v \breve{f}(u,v) e^{i(uq-vp)}$$

definiert. Mit dieser Darstellung kann man die Operatorordnung aus dem vorangegangenen Abschnitt rechtfertigen. Ignoriert man die Testfunktion $\breve{f}$ und differenziert nach u und v, so legt die Linearität von $\mathcal{Q}_\hbar^W$ die Beziehung (1.58) nahe.
Wir wollen kurz motivieren, wieso die Weylquantisierung strikt und stetig ist. Es lässt sich zeigen, dass $\mathcal{Q}_1^W$ ein stetiger Operator auf $\mathcal{S}(T^*\mathbb{R}^n)$ ist, wobei der Schwartzraum als lokal konvexer Vektorraum aufgefasst wird. Wesentlich ist dabei, dass ein $C > 0$ existiert, sodass $\forall f \in \mathcal{S}(T^*\mathbb{R}^n)$ die Abschätzung

$$\|\mathcal{Q}_1^W(f)\| \leq C\|f\|_{2n+1,\infty} \tag{1.67}$$

gilt, wobei

$$\|f\|_{m,\infty} := \sum_{|\alpha|+|\beta|\leq m} \|\partial_p^\alpha \partial_q^\beta f\|_\infty \tag{1.68}$$

mit Multiindizes α und β. Für $\hbar \neq 1$ kann man dieses Lemma verwenden, indem man

$$\mathcal{Q}_\hbar^W(f) = \mathcal{Q}_1^W(f_\hbar), \tag{1.69}$$

mit $f_\hbar(p,q) := f(\hbar p, q)$ setzt. Damit sieht man sofort die Stetigkeit von $\hbar \mapsto \mathcal{Q}_\hbar^W(f)$ als Funktion von $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ ein, was die Gültigkeit von Rieffels Bedingung jenseits der 0 einschließt.

Bemerkung. Die obige Ungleichung liefert die Stetigkeit der linearen Abbildungen $\mathcal{Q}_\hbar^W$, falls wir die Werte von $\hbar$ auf eine kompakte Teilmenge I von $\mathbb{R}$ einschränken, sodass $0 \in I$. Ist nämlich k der Betrag der größten Zahl in I den wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit kleiner 1 annehmen, so gilt offenbar:

$$\|f_\hbar\|_{2n+1,\infty} \leq k\|f\|_{2n+1,\infty}. \tag{1.70}$$

1.6.6 Satz. *Die Weylquantisierung ist eine strikte Deformationsquantisierung von $\mathcal{S}(T^*\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ über $I = \mathbb{R}$, mit $\mathfrak{A}^\hbar = \mathfrak{A} = K(L^2(\mathbb{R}^n))$ für $\hbar \neq 0$.*

1.7 Der Heppsche Limes

Das für unsere Absicht, eine zeitabhängige Bewegungsgleichung zu konstruieren, wesentliche Werkzeug ist eine von Klaus Hepp in einer Arbeit von

1973, [Hep74], entwickelte Methode, durch einen Limes $\hbar \to 0$ die Dynamik eines quantisierten Systems in die Dynamik des entsprechenden klassischen Systems zu überführen. Nach unserer Kenntnis stellt diese Methode im Wesentlichen das heutige Wissen über einen klassischen Limes der Dynamik dar. Der Geltungsbereich der in dieser Arbeit gezeigten Sätze deckt in großer Allgemeinheit die in der Quantenmechanik auftretenden Probleme ab. Im Rahmen der Quantenfeldtheorie beschränken sich die Ergebnisse auf die $P(\phi)_2$-Modelle von Glimm und Jaffe, [GJa], [GJb], [Don81]. Dieser Umstand hängt wesentlich an den Schwierigkeiten der Konstruktion nichtstörungstheoretischer Quantenfeldtheorien.
Zunächst möchten wir einmal das ursprüngliche Resultat von Hepp vorstellen. Wir betrachten dazu eine Hamiltonfunktion

$$\mathscr{H}(\pi, \xi) = \frac{\pi^2}{2m} + V(\xi), \tag{1.71}$$

$(\pi, \xi) \in T^*\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$. Falls der Gradient des Potentials Lipschitz-stetig ist um den Punkt ξ, haben die Hamiltonschen Gleichungen (1.28) lokal, d.h. auf Kompakta, eindeutige Lösungen für alle Anfangswerte $\xi(0) = \xi$, $\pi(0) = \pi$. Die entsprechende Schrödingergleichung hat im Allgemeinen immer eine globale Lösung, sobald V und $\sum_k (p_k^\hbar)^2/2m$ ein gemeinsames dichtes Definitionsgebiet D haben. Die Lösungen sind jedoch nicht eindeutig, falls der Hamiltonoperator nicht wesentlich selbstadjungiert ist.
In Hepps Hauptresultat treten eine Reihe von Operationen auf, deren Bedeutung einer Erläuterung bedarf. Zunächst wird eine symmetrische Darstellung der kanonischen Kommutatorrelationen verwendet, die präzise der Darstellung (1.57) entsprechen. Das bedeutet insbesondere, dass alle Multiplikationsoperatoren V des $L^2(\mathbb{R}^n)$ mit einem Faktor $\sqrt{\hbar}$ im Argument skaliert werden müssen, um ihnen eine physikalische Bedeutung zu geben. Etwas formaler ausgedrückt heißt dies, dass die physikalischen Potentialfunktionen gemäß des Spektralsatzes, [RS72], definiert werden als

$$(\phi, V(q^\hbar)\psi) := \int_{\mathbb{R}^n} V(\sqrt{\hbar}x)\phi(x)^*\psi(x)d^n x, \tag{1.72}$$

mit dem Definitionsgebiet $\mathcal{D}_V^\hbar := \{\phi \in \mathcal{H} | \int |V(\sqrt{\hbar}x)|^2 |\phi(x)|^2 d^n x < \infty\}$.
Beim Übergang zur klassischen Dynamik muss die Information der klassischen Anfangswerte verwendet werden, um schließlich zu den Lösungen des klassischen Anfangswertproblems zu gelangen. In dem von Hepp erklärten Limes wird diese Aufgabe von den unitären Operatoren $U(\pi, \xi)$ übernommen. Diese Operatoren sind die *Weyloperatoren*,

$$U^\hbar(\pi, \xi) := e^{\frac{i}{\sqrt{\hbar}}(\pi q - \xi p)}. \tag{1.73}$$

Der Zusammenhang mit den Darstellungen der Heisenberggruppe wird mit den Bezeichungen des Abschnittes 1.5 durch

$$(U_\lambda^{sCCR}(u,v,s)\psi)(x) := e^{-i\lambda(s+\frac{1}{2}uv)}e^{i\lambda^{\frac{1}{2}}ux}\psi(x-\lambda^{\frac{1}{2}}v) \tag{1.74}$$

hergestellt[15]. Die abgeleitete Darstellung definiert gerade eine Darstellung der Lie-Algebra $\mathfrak{h}_n$, wie bereits dargestellt. Die erzeugenden Elemente der so gewonnenen Darstellung von $\mathfrak{h}_n$ sind für $\lambda = \hbar$ durch $-ip_k^\hbar$ und $iq^{\hbar,j}$ gegeben und hängen über die bereits angegebenen Dilatation $\tilde{V}$ mit der Schrödingerdarstellung zusammen. Die Operatoren $q := q^1$ und $p := p^1$ sind gerade Orts- und Impulsoperator. Auf Grund von Gleichung (1.74) gilt offensichtlich

$$U^\hbar(\pi,\xi) = U_{\frac{1}{\hbar}}^{sCCR}(\pi,\xi,0). \tag{1.75}$$

Die physikalische Bedeutung dieser Operatoren liegt in der Tatsache, dass sie *kohärente Zustände* erzeugen. Das einfachste Beispiel eines kohärenten Zustandes ist die Anwendung von $U^\hbar(\pi,\xi)$ auf den um a verschobenen Grundzustand des harmonischen Oszillators $\psi_a(x) = const.e^{-\frac{(x-a)^2}{2}}$,

$$U^\hbar(\pi,\xi)\psi_a(x) = const.e^{\frac{\xi\pi}{2\hbar}}e^{\hbar^{-\frac{1}{2}}\pi x}e^{-\frac{\left(x-a-\hbar^{-1/2}x\right)^2}{2}}.$$

Die lineare Hülle der Menge $\{\psi_a | a \in \mathbb{R}^n\}$ liegt dicht in $L^2(\mathbb{R}^n)$ und bildet eine Menge von *analytischen Vektoren*[16] für q und p, [RS75]. Man rechnet auf dieser Menge sofort die Beziehung

$$U^\hbar(\pi,\xi)(p,q)U^\hbar(\pi,\xi)^\dagger = (p+\hbar^{-\frac{1}{2}}\pi, q+\hbar^{-\frac{1}{2}}\xi) \tag{1.76}$$

nach. Aus dieser Gleichung folgt auch sofort, dass Ort und Impuls in kohärenten Zuständen minimale Unschärfe besitzen.
Mit diesen Vorbemerkungen und Bezeichungen gilt der

1.7.1 Satz (Hepp). *Seien $(\pi,\xi)(t)$ Lösungen der Hamiltonschen Gleichungen auf dem Kompaktum $[-T,T]$, $T > 0$. Sei V eine $C^{2+\delta}$-Funktion, $\delta > 0$, in einer Umgebung von $\xi(\alpha,t)$ und außerdem $\int |V(x)|^2 e^{-\rho\|x\|^2} d^{3N}x < \infty$ für ein $\rho < \infty$. Mit $H^\hbar$ bezeichnen wir die selbstadjungierte Erweiterung von*

$$-\sum_{i=1}^N \frac{(p_i^\hbar)^2}{2m_i} + V(q^\hbar) \text{ in } L^2(\mathbb{R}^{3N}) \text{ und } U_\hbar(t) = e^{-i\frac{H^\hbar t}{\hbar}}.$$

[15] Der Index „sCCR“ steht für *symmetric canonical commutation relations.*

[16] Ein Element $\varphi \in C^\infty(A) := \bigcap_{n=1}^\infty D(A^n)$ heißt *analytischer Vektor von A*, falls $\sum_{n=0}^\infty \frac{\|A^n\varphi\|}{n!}t^n < \infty$.

Dann gilt $\forall (r,s) \in \mathbb{R}^{6N}$ *gleichmäßig auf kompakten Teilintervallen von* $\{|t| < T\}$ *in der starken Operatortopologie:*

$$\operatorname*{s-lim}_{\hbar\to 0} U^\hbar(\pi,\xi)^\dagger U^\hbar(t)^\dagger e^{i(r(q-\hbar^{-\frac{1}{2}}\xi(t))+s(p-\hbar^{-\frac{1}{2}}\pi(t)))} U^\hbar(t) U^\hbar(\pi,\xi) = e^{i(rq(t)+sp(t))}\ , \tag{1.77}$$

$$\operatorname*{s-lim}_{\hbar\to 0} U^\hbar(\pi,\xi)^\dagger U^\hbar(t)^\dagger e^{i(rq^\hbar+sp^\hbar)} U^\hbar(t) U^\hbar(\pi,\xi) = e^{i(r\xi(t)+s\pi(t))}\ . \tag{1.78}$$

Dabei sind $(p(t), q(t))$ *Lösungen der Heisenberggleichungen des um die klassische Bahn linearisierten Hamiltonoperators*

$$H(t) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} q^T \operatorname{Hess}(V(\xi(t)))q.$$

Die Idee des Beweises besteht in einer „Entwicklung“ des Hamiltonoperators um die klassische Bahn gemäß

$$H^\hbar/\hbar = H_0^\hbar(t) + H_1^\hbar(t) + H_2^\hbar(t) + H_3^\hbar(t).$$

Dabei sind die einzelnen Terme gegeben durch

$$H_0^\hbar(t) := \mathscr{H}(\pi(t),\xi(t))/\hbar,$$

$$H_1^\hbar(t) := \frac{\pi(t)(p-\hbar^{-\frac{1}{2}}\pi(t))}{\sqrt{\hbar}m} + \nabla V(\xi(t))(q-\hbar^{-\frac{1}{2}}\xi(t))\hbar^{-\frac{1}{2}},$$

$$H_2^\hbar(t) := \frac{(p-\hbar^{-\frac{1}{2}}\pi(t))^2}{2m} + (q-\hbar^{-\frac{1}{2}}\xi(t)) \operatorname{Hess} V(\xi(t))(q-\hbar^{-\frac{1}{2}}\xi(t)),$$

und dem Restterm $H_3^\hbar(t)$. Man kann dann auf der linearen Hülle der Hermitefunktionen $Herm(\mathbb{R}^n)$ den unitären Propagator[17]

$$U_1^\hbar(t) := \mathrm{T}\, e^{-i\int_0^1 d\tau H_1^\hbar(\tau)}$$

durch seine stark konvergente Dysonreihe erklären. Dieser Operator definiert einen Automorphismus durch

$$U_1^\hbar(t)^\dagger (p^\hbar + \pi(t), q^\hbar + \xi(t)) U_1^\hbar(t) = (p^\hbar + \pi, q^\hbar + \xi) \tag{1.79}$$

wie man durch direkte Rechnung auf $Herm(\mathbb{R}^n)$ bestätigt. Damit kann man die Behauptungen des Satzes umformulieren und das Problem auf die starke Konvergenz

$$\operatorname*{s-lim}_{\hbar\to 0} W^\hbar(t,s) = W(t,s)$$

[17] Siehe Abschnitt 3.3.

zurückführen. Dabei ist

$$W(t,s) := \mathrm{T}\, e^{-i\int_s^t H(\tau)d\tau}$$

mit dem linearisierten Hamiltonoperator des Satzes 1.7.1 und

$$W^\hbar(t,s) := U^\hbar(\pi,\xi)U_1^\hbar(t)^\dagger U^\hbar(t-s)U_1^\hbar(s)U^\hbar(\pi,\xi)e^{i\int\limits_s^t H_0^\hbar(\tau)d\tau}.$$

Im Fall des Harmonischen Oszillators gilt $W^\hbar = W$ unabhängig von $\hbar$. Die erste Behauptung des Satzes gibt die Korrektur erster Ordnung an. Durch die oben angesprochenen algebraischen Operationen und den Beweis des Satzes wird folgende formale Beziehung nahe gelegt,

$$U^\hbar(\pi,\xi)^\dagger U^\hbar(t)^\dagger(p^\hbar,q^\hbar)U^\hbar(t)U^\hbar(\pi,\xi) = (\pi(t)+\sqrt{\hbar}p(t),\xi(t)+\sqrt{\hbar}q(t))+\mathcal{O}(\frac{1+\delta}{2}). \tag{1.80}$$

Im Fall des Harmonischen Oszillators verschwindet der Term $\mathcal{O}(\frac{1+\delta}{2})$. Man hat in diesem Fall das einfache

1.7.2 Korollar. *Für eine beschränkte, um $\xi(t)$ stetig differenzierbare Funktion f gilt*

$$\|[\frac{1}{\hbar}(U^\hbar(\pi,\xi)^\dagger U^\hbar(t)^\dagger f(p^\hbar)U^\hbar(t)U^\hbar(\pi,\xi) - f(\xi(t))) - f'(\xi(t))q(t)]\psi_a\| \to 0 \tag{1.81}$$

für $\hbar \to 0$.

Beweis. Nutzt man die algebraischen Relationen aus, so ist

$$\lim_{\hbar\to 0}\|[\frac{1}{\hbar}(f(p^\hbar+\xi(t)) - f(\xi(t))) - f'(\xi(t))q]W(t,0)\psi\| =\!\!\longrightarrow 0$$

zu zeigen. Die Gültigkeit dieser Gleichung ist aber offensichtlich auf Grund des Funktionalkalüls[18] und der stetigen Differenzierbarkeit von f. □

Zum Abschluß dieses Kapitels wollen wir noch angeben, wie sich dieses Theorem in den konzeptionellen Rahmen dieses Kapitels einfügt. Wir möchten für die Weylquantisierung eine vereinfachte Version des Satzes von Hepp angeben. Dazu nehmen wir an, dass die Hamiltonfunktion $\mathscr{H}$ in $\mathcal{S}(T^*\mathbb{R}^n)$ liegt. Mit den Bezeichnungen dieses Kapitels gilt die

[18]Siehe Abschnitt 3.

1.7.3 Proposition. *Für $f \in \tilde{\mathfrak{A}}^0$ nehmen wir an, dass $\alpha_t^0(f) \in \tilde{\mathfrak{A}}^0$ für alle t und dass $\forall f \in \mathcal{S}(T^*\mathbb{R}^n)$ $\alpha_t^0(f)$ eine stetige Funktion in t in der lokal konvexen Topologie von $\mathcal{S}(T^*\mathbb{R}^n)$ ist. Dann gilt auf kompakten Zeitintervallen $|t| \leq T$ gleichmäßig in t*

$$\lim_{\hbar \to 0} \|\mathcal{Q}_\hbar^W(\alpha_t^0(f)) - \alpha_t^\hbar(\mathcal{Q}_\hbar^W(f))\| = 0. \tag{1.82}$$

Beweis. Wegen (1.67) und (1.70) ist die Weylquantisierung für jedes $\hbar \in I$ eine stetige lineare Abbildung von dem lokal konvexen Vektorraum $\mathcal{S}(T^*\mathbb{R}^n)$ nach $\mathfrak{B}(L^2(\mathbb{R}^n)$. Aus Theorem V.5, [RS72], wissen wir, dass $\mathcal{S}(T^*\mathbb{R}^n)$ metrisierbar ist und Theorem V.9 liefert die Vollständigkeit, d.h. $\mathcal{S}(T^*\mathbb{R}^n)$ ist ein *Fréchet Raum.* Die Gleichung (1.70) impliziert die gleichmäßige Beschränktheit der Weylquantisierung auf I. Es gilt

$$\mathcal{Q}_\hbar^W(\alpha_t^0(f)) - \alpha_t^\hbar(\mathcal{Q}_\hbar^W(f)) = \int_0^t ds \frac{d}{ds}\alpha_{t-s}^\hbar(\mathcal{Q}_\hbar^W(\alpha_s^0(f)))$$

$$= \int_0^t ds \alpha_{t-s}^\hbar \left(\mathcal{Q}_\hbar^W(\{\mathscr{H}, \alpha_s^0(f)\}) - \frac{i}{\hbar}[\mathcal{Q}_\hbar^W(\mathscr{H}), \mathcal{Q}_\hbar^W(\alpha_s^0(f))] \right).$$

Automorphismen zwischen C^*-Algebren sind normerhaltend. Daher können wir mit der Monotonie des Integrals diese Differenz in der Norm durch

$$\int_0^t ds \left\| \mathcal{Q}_\hbar^W(\{\mathscr{H}, \alpha_s^0(f)\}) - \frac{i}{\hbar}[\mathcal{Q}_\hbar^W(\mathscr{H}), \mathcal{Q}_\hbar^W(\alpha_s^0(f))] \right\|$$

abschätzen. Wegen der Dirac Bedingung (1.38) konvergiert der Integrand punktweise gegen 0 und die Familie linearer Abbildungen in $\hbar$

$$a_\hbar := \mathcal{Q}_\hbar^W(\{\mathscr{H}, .\}) - \frac{i}{\hbar}[\mathcal{Q}_\hbar^W(\mathscr{H}), \mathcal{Q}_\hbar^W(.)]$$

ist gleichmäßig beschränkt, weil die Weylquantisierung es ist. Auf Grund der Stetigkeit von $\alpha_t^0(f)$ in der Topologie von $\mathcal{S}(T^*\mathbb{R}^n)$ ist diese Familie von Funktionen beschränkt für jedes $f \in \mathcal{S}(T^*\mathbb{R}^n)$ und wegen der gleichmäßigen Beschränktheit von $a_\hbar$ ist $\|a_\hbar \circ \alpha_t^0(f)\|$ eine Familie gleichstetiger Funktionen von $[-T, T]$ nach $\mathbb{R}^+$. Aus dem Satz von Arzelà-Ascoli folgt die gleichmäßige Konvergenz des Integranden bezüglich s und damit die Behauptung. $\square$

Bemerkung. Der Argumentation in Proposition 2.7.3, [Lan98], einer ähnliche Aussage für beliebige strikte Quantisierung konnten wir uns nicht anschließen.

Diese Proposition besagt also, dass das stetige Feld von C^*-Algebren invariant unter der Dynamik ist. Allerdings war hierfür die Annahme nötig, dass die Dynamik stetig in der Topologie von $\mathcal{S}(T^*\mathbb{R}^n)$ ist. Eine direkte Übertragung des Heppschen Satzes in die Sprache der hier dargestellten Quantisierungstheorie wird in [Lan98] angegeben, jedoch bringt diese Umformulierung keine neuen Erkenntnisse.

Kapitel 2

Asymptotisch offene Systeme

In diesem Kapitel sollen einige Konsequenzen unserer Arbeit diskutiert werden und eine Verbindung zu einer Methode von Howland aufgezeigt werden. Ausgangspunkt unserer Untersuchungen ist die Beobachtung aus Kapitel , dass bei gekoppelten Systemen in der klassischen Mechanik eine Entkopplung stattfinden kann, sobald eines der beiden Systeme „sehr groß“ gegenüber dem Zweiten wird.
Im Rahmen der klassischen Mechanik ist das Konzept von Teilsystemen mathematisch gut zu beherrschen, da die Hamiltonschen Gleichungen eine direkte Identifikation der Teilsysteme ermöglichen und eine allgemeine Lösungstheorie für die physikalisch relevanten Fälle existiert. In der Quantenmechanik hingegen sind die Heisenberg-Gleichungen analytisch nur in Spezialfällen zu kontrollieren. Aus diesem Grund wollen wir den Aspekt der „asymtotischen Freiheit“ des großen Systems zunächst klassisch untersuchen.
Im Fall der Quantentheorie kommt noch ein weiterer Gesichtspunkt zum Tragen, wenn man an der Konstruktion einer zeitabhängigen Schrödingergleichung, welche eine invertierbare Zeitentwicklung beschreibt, für das kleine System interessiert ist. Das große System muss klassisch werden. Der Limes, der dies bewerkstelligt ist der Hepp-Limes. Wir werden am analytisch beherrschbaren Beispiel gekoppelter harmonischer Oszillatoren illustrieren, dass die „asymptotische Freiheit“ des großen Systems automatisch durch diesen Limes gewährleistet wird. Damit ist der partielle Hepp-Limes genau der Limes, in dem die Vorstellung der Kopplung eines großen Systems an ein Kleines tatsächlich zu einer zeitabhängigen Schrödingergleichung führt.

2.1 Asymptotisch offene klassische Systeme

Wir wollen die Diskussion aus Kapitel mathematisch präzisieren[1] und die Definition eines asymtotisch offenen klassischen Systems festhalten.

2.1.1 Definition. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ eine stetige, bezüglich der ersten Variablen lokal Lipschitz stetige Abbildung. Dann definiert

$$\frac{d}{dt}u(t, t_0, u_0) = f(u(t, t_0, u_0), t) \tag{2.1}$$

für alle $t \in I$ und

$$u(t_0, t_0, u_0) = u_0 \tag{2.2}$$

ein *Anfangswertproblem*. Eine stetig differenzierbare Funktion $u : I \to \mathbb{R}^n$ die diese Bedingungen erfüllt nennen wir *Lösung* des Anfangswertproblems. Soll die *Abhängigkeit* der rechten Seite von f ausgedrückt werden, so schreiben wir $u(t, t_0, u_0, f)$. Hängt f von Parametern $\lambda \in Y$ ab, wobei Y ein metrischer Raum sei, so bezeichnen wir die Abhängigkeit der Lösung vom Parameter mit $u(t, t_0, u_0, \lambda)$.

Der Raum der lokal Lipschitz stetigen Funktionen $\mathrm{Lip}(U \times I)$ auf $U \times I$ besitzt eine Metrik d_L, bezüglich derer der folgende Satz gilt.

2.1.2 Satz (Stetige Abhängigkeit)**.** *Eine Lösung des Anfangswertproblems (2.1), (2.2) $u(t, t_0, u_0, f)$ ist stetig in allen Variablen.*

Bemerkung. Diese Aussage bleibt auch richtig, falls man den Satz von Peano zu Grunde legt und $f \in C(U \times I)$ ist.

Hieraus erhält man das für unsere Zwecke wichtige

2.1.3 Korollar (Stetige Abhängigkeit von Paramtern)**.** *Sei (Λ, d_Λ) ein metrischer Raum, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \times \mathbb{R} \times \Lambda \to \mathbb{R}^n$ stetig und für festes $(t, \lambda) \in \mathbb{R} \times \Lambda$ bezüglich u lokal Lipschitz stetig. Dann ist $u(t, t_0, u_0, \lambda)$ stetig in allen Variablen.*

Bemerkung. Falls der metrische Raum $\Lambda = \mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$, ist und f k-mal stetig differenzierbar ist, so ist auch $u(t, t_0, u_0, \lambda)$ k-mal stetig differenzierbar nach allen Variablen.

[1] Wir greifen auf Standarddefinitionen der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen zurück, wie man sie etwa in [Lau05] findet.

Als Nächstes wollen wir eine autonome Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = f(x(t), y(t), \lambda) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \tag{2.3}$$

betrachten. Der bequemeren Notation wegen sei $\lambda \in \mathbb{R}^l$. Die Koordinaten der Teilsysteme beschreiben wir durch $x \in \mathbb{R}^n$ für das "große" System und $y \in \mathbb{R}^m$ für das "kleine" System. Ferner seien $g : U \to \mathbb{R}^n$, $h : U \times V \to \mathbb{R}^m$ lokal Lipschitz stetige Abbildungen, $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $V \subseteq \mathbb{R}^m$ offene Teilmengen, sodass

$$\lim_{\lambda \to 0} f(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} g(x) \\ h(x, y) \end{pmatrix},$$

gleichmäßig auf Kompakta $K \subset U \times V$. Den Fluß der Differentialgleichung (2.3) bezeichnen wir mit $F_t^\lambda(x, y)$ und nehmen an, dass er vollständig ist, sodass

$$F_t^\lambda \circ F_s^\lambda = F_{t+s}^\lambda, \tag{2.4}$$

$\forall \lambda$ gilt. Den Fluß von

$$\dot{x}(t) = g(x(t))$$

schreiben wir als $G_t(x)$ und die Schar von Lösungsabbildungen von

$$\dot{y}(t) = h(x(t), y(t))$$

als $H^x_{(t,t_0)}(y)$, wobei $x(0) = x$ sei. G_t ist vollständig und erfüllt daher wieder eine Beziehung der Form (2.4). Die Lösungsabbildung $H^x_{(t,t_0)}$ genügt der *Chapman-Kolmogorov-Gleichung*

$$H^x_{(t,s)} \circ H^x_{(s,r)} = H^x_{(t,r)}. \tag{2.5}$$

Der Einfachheit halber wollen wir annehmen, dass $U = \mathbb{R}^n$, $V = \mathbb{R}^m$ gilt.
Wir möchten die Dynamik der Observablen im Sinn von Abschnitt 1.2 beschreiben. Dazu definieren wir auf der Poisson-Algebra $C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ eine Familie von Automorphismen durch

$$(\chi_t^\lambda(u))(x, y) := u(F_t^\lambda(x, y)). \tag{2.6}$$

In Gleichung (1) erkennt man, dass die Parameterabhängigkeit eine asymmetrische Wechselwirkung induziert, d.h. man kann keine gemeinsame Potentialfunktion für (x_1, x_2, x_3) angeben und das Gesamtsystem ist nicht mehr Hamiltonsch'. Solange $\lambda_i \neq 0$, $i = 1, 2$, kann man diese Gleichung mit Hilfe einer linearen Transformation wieder in eine Hamiltonsche Form überführen. Für $\lambda = 0$ ist dies nicht mehr möglich. Das Teilsystem bestehend aus dem Teilchen x_3 ist ein offenes System.

Die notwendige Bedingung für Integrabilität bedeutet in der Sprache von Differentialformen, dass die durch die rechte Seite in Gleichung (1) definierte Einsform, $\omega(x_1,x_2,x_3) = d_{12}\mu(x_1,x_2) + d_3\nu(x_1,x_2,x_3)$, geschlossen sein muss. Dabei bezeichnen wir mit $d_{12} := dx_1 + dx_2$ und d_3 die Differentiale der Koordinaten von x_1, x_2 und x_3, die Nullformen (Potentiale) mit μ und ν. Dann gilt für $\lambda = 0$

$$d\omega(x_1,x_2,x_3) = d_{12}d_3\nu(x_1,x_2,x_3) \neq 0.$$

Wegen $d_{12}d_{12}\mu(x_1,x_2) = 0$ ist es möglich in diesem Beispiel G_t als Hamiltonschen Fluss zu erklären.
Kehren wir zu unserer Differentialgleichung (2.3) zurück und fordern in Analogie zu unserem Beispiel, dass G_t ein Hamiltonscher Fluss mit Hamiltonfunktion $\mathscr{H}$ ist. Dann gilt mit Gleichung (1.33) bezüglich der Projektion[2] π_n auf $\mathbb{R}^n$

$$\dot{\alpha}_t^0(u)(x,y) := \pi_n^*(\dot{\chi}_t^0(u))(x,y) = \nabla u(G_t(x),y)\dot{G}_t(x) = \{\mathscr{H},u\}_n(G_t(x),y), \tag{2.7}$$

$\forall u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R})$.
Wir interessieren uns für die Struktur des Flusses $F_t := F_t^0$, d.h. für den Zusammenhang von F_t und $H_{(t,s)}$, um schließlich die Dynamik auf der Poissonalgebra $C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ durch die Dynamiken der Teilsysteme ausdrücken zu können. Der auf $\mathbb{R}^m$ projezierte Fluss, $T_t := \pi_m(F_t)$, genügt der Gleichung

$$T_t(x,y) = H^x_{(t,0)}(y). \tag{2.8}$$

Darüber hinaus gibt es einen Zusammenhang von $H^x_{(t,s)}$ und G_r, den wir genauer angeben wollen, weil er uns in einer analogen Form im Fall der Quantenmechanik begegnen wird.
Zunächst müssen wir die Abbildungen G und H zu Abbildungen auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ fortsetzen. Dazu definieren wir $\forall t,s \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{rcl} \tilde{G}_t : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m & \to & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \\ (x,y) & \mapsto & (G_t(x),y) \end{array}$$

und

$$\begin{array}{rcl} \tilde{H}_{(t,s)} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m & \to & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \\ (x,y) & \mapsto & (x, H^x_{(t,s)}(y)). \end{array}$$

Bemerkung. Die Gruppeneigenschaft, (2.4), von G_t und die Chapman-Kolmogorov-Gleichung, (2.5), für $H^x_{(t,s)}$ übertragen sich auf $\tilde{G}_t$, bzw. $\tilde{H}_{(t,s)}$.

[2] Mit $\{,\}_n$, bzw. $\{,\}_m$ bezeichnen wir die Poisson-Klammern bezüglich $\mathbb{R}^n$, bzw. $\mathbb{R}_m$.

Es gilt die folgende

2.1.4 Proposition (Kovarianz). *Es gilt* $\forall r, s, t \in \mathbb{R}$

$$\tilde{H}_{(t+r,s+r)} = \tilde{G}_{-r}\tilde{H}_{(t,s)}\tilde{G}_r. \tag{2.9}$$

Beweis. Wegen

$$(\tilde{G}_{-r}\tilde{H}_{(t,s)}\tilde{G}_r)(x,y) = (x, H_{(t,s)}^{G_r(x)}(y)),\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$$

müssen wir $H^x_{(t+r,s+r)}(y) = H^{G_r(x)}_{(t,s)}(y)$ zeigen. Sei $\|\cdot\|$ eine Norm in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, dann gilt

$$\begin{aligned} \|H^x_{(t+r,s+r)}(y) - H^{G_r(x)}_{(t,s)}(y)\| &\leq \int_s^t d\tau \|h(G_{\tau+r}(x), H^x_{(\tau+r,s+r)}(y)) \\ &\quad -h(G_{\tau+r}(x), H^{G_r(x)}_{(t,s)}(y))\| \\ &\overset{Lip.ste.}{\leq} M \int_s^t d\tau \|H^x_{(\tau+r,s+r)}(y) \\ &\quad -H^{G_r(x)}_{(\tau,s)}(y)\| \\ &\leq 0 \text{ (Gronwallsches Lemma).} \end{aligned}$$

□

Diese Proposition ermöglicht uns eine Interpretation von Howlands Methode, [How74], in unserem physikalisch motivierten Rahmen. Dazu definieren wir eine Abbildung

$$B_t := \tilde{H}_{(0,-t)}\tilde{G}_{-t}. \tag{2.10}$$

Mit Hilfe von Proposition 2.1.4 gilt dann

$$\begin{aligned} B_t \circ B_s &= \tilde{H}_{(0,-t)}\tilde{G}_{-t}\tilde{H}_{(0,-s)}\tilde{G}_{-s} \\ &= \tilde{H}_{(0,-t-s)}\tilde{G}_{-t-s}, \end{aligned}$$

d.h.

$$B_t \circ B_s = B_{t+s}. \tag{2.11}$$

Die Abbildung B_t ist nicht die einzig mögliche Definition einer Einparametergruppe durch Komposition der Abbildungen $\tilde{H}_{(t,s)}$ und $\tilde{G}_t$, auch wenn man von der Mehrdeutigkeit bezüglich des Anfangswertes s absieht. Eine zweite Möglichkeit ist

$$\tilde{T}_t := \tilde{G}_t\tilde{H}_{(t,0)}, \tag{2.12}$$

denn

$$\tilde{T}_t \circ \tilde{T}_s = \tilde{G}_t \tilde{H}_{(t,0)} \tilde{G}_s \tilde{H}_{(s,0)} = \tilde{G}_{t+s} \tilde{H}_{(t+s,0)}.$$

Dann erhalten wir das folgende

2.1.5 Korollar. *Es gilt* $\tilde{T}_t = F_t$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Beweis. Es gilt $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ und $\forall t \in \mathbb{R}$

$$\frac{d}{dt}\tilde{T}_t(x,y) = \frac{d}{dt}(G_t(x), H^x_{(t,0)}(y)) = \frac{d}{dt}F_t(x,y),$$

sowie $\tilde{T}_0 = F_0$. □

Nehmen wir an, dass die Bewegungsgleichung des kleinen Systems von einer zeitabhängigen Hamiltonfunktion $\mathscr{K}^x(t)$ herrührt, so können wir im Sinne von Gleichung (1.33) sofort die algebraische Formulierung der Bewegungsgleichungen angeben. Nach Gleichung (2.6) folgt für $\lambda = 0$

$$\frac{d}{dt}\chi^0_t(u)(x,y) = \{\mathscr{H}, u\}_n(F_t(x,y)) + \{\mathscr{K}^x(t), u\}_m(F_t(x,y)). \tag{2.13}$$

Die Zeitabhängigkeit der Hamiltonfunktion $\mathscr{K}^x$ kommt natürlich von dem Fluss G_t, d.h. es gibt eine Funktion $k : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, sodass

$$\mathscr{K}^x(t,y) = (\tilde{G}^*_t k)(x,y).$$

Damit können wir den zweiten Summanden in (2.13) auch umschreiben als

$$(\tilde{G}^*_t \{k, (\tilde{G}_{t*}u)\}_m)(G_t(x), H^x_{(t,0)}(y)) = \{k, (\tilde{G}_{t*}u)\}_m(G_{2t}(x), H^x_{(t,0)}(y))$$

und erhalten somit eine zeitunabhängige Derivation, beschrieben durch den *Liouville Operator* $\mathcal{L}$, [RS75], mit

$$(\mathcal{L}u)(x,y) = \{k, u\}_m(x,y).$$

Die Differentialgleichung (2.13) ist also gleich

$$\frac{d}{dt}\chi^0_t(u)(x,y) = (\chi^0_t(\{\mathscr{H}, u\}_n))(x,y) + (\chi^0_t \circ \alpha^0_t \circ \mathcal{L} \circ \alpha^0_{-t}(u))(x,y). \tag{2.14}$$

Diese Differentialgleichung wollen wir als charakteristische Eigenschaft eines asymptotisch offenen Systems ansehen und definieren daher mit obigen Bezeichnungen[3]:

2.1.6 Definition. Eine Lösung χ^0_t der Gleichung (2.14) nennen wir *asymptotisch offenes System*.

[3] Wir legen uns bewusst nicht auf einen bestimmten Lösungsbegriff fest, denn die Charakterisierung des „richtigen“ Lösungsbegriffes ist ein offenes Problem. Jedenfalls wollen wir eine geeignet stetige Familie von Automorphismen erhalten, die obige Gleichung erfüllt.

2.2 Asymptotisch offene Quantensysteme

In diesem Abschnitt wollen wir das zuvor besprochene Verfahren zur Konstruktion einer nicht-autonomen Dynamik auf die Quantenmechanik übertragen. Wie bereits zu Beginn des Kapitels angedeutet ist es nötig zwei Aspekte zu realisieren, um ein asymptotisch offenes Quantensystem zu erhalten. Einerseits möchten wir in Analogie zum vorigen Abschnitt einen Limes identifizieren, in dem die Dynamik des großen Systems unabhängig von der des kleinen Systems wird und für das kleine System die Bedeutung einer äußeren Zeitabhängigkeit erhält. Andererseits möchten wir für das Teilsystem eine invertierbare Zeitentwicklung erhalten, was durch eine unitäre Zeitentwicklung des Teilsystems geleistet wird.
Wir werden sehen, dass beide Aspekte durch eine Anwendung des Heppschen Limes realisiert werden. Schließlich stellen wir ebenso wie im vorangegangenen Abschnitt für asymptotisch offene Quantensysteme einen Zusammenhang zu Howlands Methode her.
Beginnen wir mit dem explizit lösbaren Beispiel zweier linear gekoppelter Harmonischer Oszillatoren.

2.2.1 Gekoppelte Harmonische Oszillatoren

Zunächst wollen wir einmal das Problem formulieren. Gegeben ist ein Tensorprodukt von zwei Hilberträumen $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, wobei das Tensorprodukt gemäß [RS72] erklärt ist. Falls nicht explizit etwas Anderes gesagt wird, identifizieren wir stets $\mathcal{H}_i = L^2(\mathbb{R})$, $i = 1, 2$. Der Hamiltonoperator ist gegeben durch

$$H_1 \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes H_2 + kq^\hbar \otimes q, \tag{2.15}$$

wobei $H_1 := \frac{p^2}{2M} + \frac{M\Omega^2}{2}$, $H_2 := \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}$, sowie $q^\hbar := \sqrt{\hbar}q$. Die Wohldefinition dieses Operators ergibt sich aus der Darstellungstheorie der Metaplektischen Gruppe[4]. Darüber hinaus folgt daraus die wesentliche Selbstadjungiertheit, oder aber aus der Diskussion in Abschnitt 4.1. Den Abschluss dieses Operators bezeichnen wir mit $H^\hbar$. Nach dem Spektralsatz, [RS72], erzeugt $H^\hbar$ eine stark stetige Einparametergruppe gemäß

$$U^\hbar(t) = e^{-itH^\hbar}.$$

Wir wollen wie in Gleichung (1) eine asymmetrische Wechselwirkung realisieren, die suggestiv durch den Parameter $\hbar$ kontrolliert wird, welcher ein

[4] Siehe Abschnitt 1.5.

relatives Maß für die beteiligten Wirkungen ausdrücken soll. Die Heisenberg-Gleichungen lauten dann:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}(\mathbb{1}\otimes q)(t)\\(\mathbb{1}\otimes p)(t)\\(q^\hbar\otimes\mathbb{1})(t)\\(p^\hbar\otimes\mathbb{1})(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{m}&0&0\\-m\omega^2&0&k&0\\0&0&0&\frac{1}{M}\\\hbar k&0&-M\Omega^2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(\mathbb{1}\otimes q)(t)\\(\mathbb{1}\otimes p)(t)\\(q^\hbar\otimes\mathbb{1})(t)\\(p^\hbar\otimes\mathbb{1})(t)\end{pmatrix}. \tag{2.16}$$

Wie im Fall der klassischen Physik kann man durch eine einfache Transformation dieses System in Eines mit symmetrischer Wechselwirkung transformieren.

In Anlehnung an den klassischen Fall erhebt sich die Frage, wie man einen Limes $\hbar\to 0$ erklären kann, sodass eine einseitige Entkopplung stattfinden kann. Eine Möglichkeit besteht in der Anwendung des Heppschen Limes bezüglich der ersten Komponente.

Wie in Anschnitt 1.7 dargestellt, basiert der Heppsche Limes auf der starken Konvergenz von

$$\operatorname*{s-lim}_{\hbar\to 0} W^\hbar(t,s)=W(t,s). \tag{2.17}$$

Wenn wir diesen Operator durch $W^\hbar(t,s)\otimes\mathbb{1}$ auf dem Tensorprodukt $\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{H}_2$ erklären, so können wir den Limes für die Operatoren $(q^\hbar\otimes\mathbb{1})(t)$, $(p^\hbar\otimes\mathbb{1})(t)$ durchführen. Der in $W^\hbar(t,s)$ eingehende Hamiltonoperator ist H_1 und $W(t,s)$ ist in diesem Fall gleich

$$e^{-i(t-s)H_1}.$$

Die formale Beziehung[5]

$$\begin{aligned}U^\hbar(\pi,\xi)^\dagger U^\hbar(t)^\dagger q^\hbar U^\hbar(t)U^\hbar(\pi,\xi) &= \xi(t)+W^\hbar(t,0)^\dagger q^\hbar W^\hbar(t,0)\\ &= \xi(t)+\sqrt{\hbar}q(t)+\mathcal{O}(\hbar^{\frac{1+\delta}{2}})\end{aligned}$$

vereinfacht sich für Harmonische Oszillatoren zu

$$U^\hbar(\pi,\xi)^\dagger U^\hbar(t)^\dagger q^\hbar U^\hbar(t)U^\hbar(\pi,\xi)=\xi(t)+\sqrt{\hbar}q(t)$$

und analog für $p^\hbar$. Für das Folgende vereinbaren wir die Abkürzung

$$q_x^\hbar(t):=U^\hbar(\pi,\xi)^\dagger U^\hbar(t)^\dagger q^\hbar U^\hbar(t)U^\hbar(\pi,\xi)$$

und genauso für $p_x^\hbar(t)$. Dabei soll $x=(\xi,\pi)$ sein. Im Fall gekoppelter harmonischer Oszillatoren gilt eine analoge Beziehung. Bezeichnen wir mit $X^\hbar$ die

[5]Siehe (1.80).

Koeffizientenmatrix in (2.16), so ist die eindeutige Lösung gegeben durch

$$\begin{pmatrix} (\mathbb{1}\otimes q)(t) \\ (\mathbb{1}\otimes p)(t) \\ (q^\hbar \otimes \mathbb{1})(t) \\ (p^\hbar \otimes \mathbb{1})(t) \end{pmatrix} = e^{X^\hbar t} \begin{pmatrix} \mathbb{1}\otimes q \\ \mathbb{1}\otimes p \\ q^\hbar \otimes \mathbb{1} \\ p^\hbar \otimes \mathbb{1} \end{pmatrix}.$$

Die *adjungierte Wirkung*, $\mathrm{Ad}_{U^\hbar(\pi,\xi)\otimes\mathbb{1}}$, transformiert die Lösung gemäß

$$\begin{pmatrix} (\mathbb{1}\otimes q)(t) \\ (\mathbb{1}\otimes p)(t) \\ (q_x^\hbar \otimes \mathbb{1})(t) \\ (p_x^\hbar \otimes \mathbb{1})(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (q^\hbar \otimes \mathbb{1})(t) \\ (p^\hbar \otimes \mathbb{1})(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (\mathbb{1}\otimes q)(t) \\ (\mathbb{1}\otimes p)(t) \\ \xi(t) \\ \pi(t) \end{pmatrix}.$$

Der Grenzwert $\hbar \to 0$ liefert

$$\begin{pmatrix} (\mathbb{1}\otimes q)(t) \\ (\mathbb{1}\otimes p)(t) \\ \xi(t) \\ \pi(t) \end{pmatrix} = e^{X^0 t} \begin{pmatrix} \mathbb{1}\otimes q \\ \mathbb{1}\otimes p \\ \xi \\ \pi \end{pmatrix}. \tag{2.18}$$

Wir sehen also, dass der Heppsche Limes wie gewünscht eine „einseitige“ Entkopplung des Systems liefert; das große System ist asymptotisch frei[6]:

$$e^{X^0 t} = \left(\begin{array}{c|c} e^{t\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m} \\ -m\omega^2 & 0 \end{pmatrix}} & * \\ \hline 0 & e^{t\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{M} \\ -M\Omega^2 & 0 \end{pmatrix}} \end{array}\right).$$

Damit genügt der Heppsche Limes zumindest einer der beiden Anforderungen an den von uns gesuchten Limes. Der Grenzwert ist gegeben durch einen ungekoppelten klassischen Oszillator für das große System und ein von einer periodischen Kraft getriebener quantenmechanischer Oszillator für das kleine System. Um einzusehen, dass er auch eine unitäre Zeitentwicklung liefert, werden wir eine Familie von unitären Propagatoren identifizieren, deren Erzeuger den des kleinen Systems approximieren.
Zunächst müssen wir also $\mathscr{K}^x(t,y)$ im Fall der Quantenmechanik bestimmen und wir werden uns dabei an dem Beispiel der gekoppelten Harmonischen

[6]Interessanterweise sind die Eigenfrequenzen des einseitig entkoppelten Systems dieselben wie im Fall ungekoppelter Oszillatoren.

Oszillatoren orientieren. Betrachtet man als Ausgangspunkt die zeitliche Ableitung der Lösung (2.18),

$$\begin{pmatrix} (\mathbb{1}\otimes q)(t) \\ (\mathbb{1}\otimes p)(t) \\ \xi(t) \\ \pi(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ -m\omega^2 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{M} \\ 0 & 0 & -M\Omega^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\mathbb{1}\otimes q)(t) \\ (\mathbb{1}\otimes p)(t) \\ \xi(t) \\ \pi(t) \end{pmatrix},$$

so erkennt man, dass diese Differentialgleichung vom klassischen Analogon des Operators H_1 und dem Operator

$$\mathbb{1}\otimes H_2 + k\xi(t)\mathbb{1}\otimes q, \tag{2.19}$$

dessen selbstadjungierte Erweiterung wir $H_S(t)$ nennen wollen, erzeugt wird. Dieser Erzeuger ist die genaue Entsprechung von $\mathscr{K}^x(t,y)$. Man erhält diesen Operator durch den Heppschen Limes von

$$\mathbb{1}\otimes H_2 + kq^\hbar(t)\otimes q \tag{2.20}$$

auf $Herm(\mathbb{R})\otimes Herm(\mathbb{R})$, wobei

$$q^\hbar(t) := e^{itH_1} q^\hbar e^{-itH_1}.$$

Dieser Limes existiert, weil die adjungierte Wirkung von $U(\hbar^{-\frac{1}{2}}\alpha)$ den Operator (2.20) in den Operator

$$\mathbb{1}\otimes H_2 + kq^\hbar_\alpha(t)\otimes q = \mathbb{1}\otimes H_2 + kq^\hbar(t)\otimes q + k\xi(t)\mathbb{1}\otimes q \tag{2.21}$$

überführt. Demnach erwarten wir, dass

$$\text{H-lim}\, e^{itH_1\otimes\mathbb{1}} e^{-itH^\hbar} = U(t,0) \tag{2.22}$$

gilt, wobei $U(t,s)$ der unitäre Propagator[7] ist, der die Gleichung

$$i\frac{d}{dt}U(t,s)\psi = H_S(t)U(t,s)\psi$$

löst. Das eine solche Lösung existiert ist eine Konsequenz des Satzes von Yosida[8]. Im Fall der gekoppelten Harmonischen Oszillatoren ist die Konvergenz (2.22) ein Spezialfall der Resultate von Abschnitt 4.2. Auf $Herm(\mathbb{R})\otimes Herm(\mathbb{R})$ hat der Propagator $U(t,s)$ die Form $\mathbb{1}\otimes *$, d.h. unter der Abbildung

$$\omega_\phi : \mathcal{B}(\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{H}_2) \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_2),$$

mit $\phi\in\mathcal{H}_1$, $\|\phi\| = 1$ und

$$(\chi, \omega_\phi(A)\psi)_{\mathcal{H}_2} := (\phi\otimes\chi, A\phi\otimes\psi)_{\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{H}_2}, \tag{2.23}$$

$\forall\chi,\psi\in\mathcal{H}_2$ erhalten wir wieder einen unitären Propagator. Damit besitzt der Heppsche Limes auch die zweite von uns geforderte Eigenschaft.

[7]Siehe Definition 3.3.4.

[8]Die Details finden sich in Abschnitt 4.2.

2.2.2 Howlands Methode und asymptotisch offene Quantensysteme

Die folgenden beiden Kapitel beschäftigen sich unter anderem mit der Gültigkeit von (2.22), während wir an dieser Stelle Konsequenzen aus den dort dargestellten Resultaten ziehen. In Kapitel 3 liefert Satz 3.3.6 eine allgemeine Konvergenzaussage für den Fall, dass die Kopplung und der Hamiltonoperator des kleinen Systems beschränkt sind. Der Einfachheit halber beschränken wir uns auch hier auf diesen Fall. Ausgangspunkt ist wieder das Tensorprodukt $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ und der Operator

$$\frac{1}{\hbar} H_1^\hbar \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes H_2 + K(q^\hbar, q). \tag{2.24}$$

Satz 3.3.6 stellt die Konvergenz (2.22) sicher. Der Grenzwert ist gegeben durch die unitären Propagatoren[9] $\mathcal{U}_x(t,s)$, mit dem Erzeuger

$$\mathbb{1} \otimes H_2 + K(\xi(t), q).$$

Wir verwenden hier konsequent die Schreibweise aus Abschnitt 1.2, d.h. unter $\xi(t)$ verstehen wir den Hamiltonschen Fluss G_t des freien Systems zur Zeit t, mit dem Anfangswert ξ. Die Hamiltonfunktion ist gegeben mittels einer formalen Ersetzung des Hamiltonoperators $H_1^\hbar$ durch die entsprechende Hamiltonfunktion.
Unser Vorgehen entspricht dem des klassischen Problems. Zunächst soll also ein Zusammenhang zwischen dem klassischen Fluss G und der durch $\mathcal{U}_x(t,s)$ definierten Zeitentwicklung des kleinen Systems aufgezeigt werden. Dazu kürzen wir den Erzeuger von $\mathcal{U}_x(t,s)$ durch $A(x(t))$ ab, wobei $x = (\xi, \pi)$. Um die gegebenen Objekte angemessen beschreiben zu können, betrachten wir die C^*-Algebra $C_0(P, \mathfrak{B}(\mathcal{H}_2))$, wobei P die flache Poisson-Mannigfaltigkeit $T^*\mathbb{R}^n$ ist und die Norm durch die Supremumsnorm gegeben ist. Auf dieser Algebra definieren wir einen Autmorphismen-Kozykel $\eta_{t,s}$ durch

$$(\eta_{t,s} f)(x) := \mathrm{Ad}_{\mathcal{U}_x(s,t)}\, f(x). \tag{2.25}$$

Der Fluss G erklärt über

$$(\beta_t f)(x) := f(G_t(x)) \tag{2.26}$$

eine Einparameter-Automorphismengruppe. Hierfür nehmen wir wieder die Vollständigkeit des Flusses G an. Die unitären Operatoren $\mathcal{U}_x(t,s)$ werden durch die Dysonreihe[10] dargestellt. Eine Standardrechnung zeigt

$$\mathrm{Ad}_{\mathcal{U}_x(t,s)}\, f(x) = \mathrm{T}\, e^{-i \int_s^t d\tau\, \mathrm{ad}_{A(x(\tau))}} f(x). \tag{2.27}$$

[9] $\alpha := \xi + i\pi$.
[10] Siehe Abschnitt 3.3.

Das Symbol $\mathrm{ad}_{A(x)}$ bezeichnet die *adjungierte Darstellung* der Algebra, d.h. $\mathrm{ad}_{A(x)} f(x) = [A(x), f(x)]$ und T ist das zeitgeordnete Produkt, d.h. dies ist einfach eine abkürzende Schreibweise für die Dysonreihe. Wir halten die einfache aber wichtige Konsquenz fest.

2.2.1 Proposition. *Es gilt* $\eta_{t+r,s+r} = \beta_r \eta_{t,s} \beta_{-r}$.

Beweis. Anwenden der Definition und der Substitutionsregel liefert

$$\begin{aligned}
(\eta_{t+r,s+r} f)(x) &= \mathrm{Ad}_{\mathcal{U}_x(t+r,s+r)} f(x) \\
&= \mathrm{T}\, e^{i \int_{s+r}^{t+r} d\tau\, \mathrm{ad}_{A(x(\tau))}} f(x) \\
&= \mathrm{T}\, e^{i \int_{s}^{t} d\tau\, \mathrm{ad}_{A(x(\tau+r))}} f(x) \\
&= \beta_r\, \mathrm{T}\, e^{i \int_{s}^{t} d\tau\, \mathrm{ad}_{A(x(\tau))}} \beta_{-r} f(x).
\end{aligned}$$

□

Bemerkung. Das im Vergleich zur klassischen Situation umgekehrte Vorzeichen von r kommt durch die unterschiedliche Wirkung der Familien von Automorphismen auf die jeweilige Funktionenalgebra. η wirkt auf das Bild $f(x)$ und hängt vom Punkt x ab.

Zusammen mit der Kozykel-Eigenschaft von $\eta_{t,s}$ können wir nun eine Einparametergruppe von Automorphismen erklären. Auch hier ergeben sich unabhängig vom Anfangszeitpunkt noch mehrere Kombinationsmöglichkeiten, je nachdem welche Zeitrichtung man betrachtet und ob man den klassischen Fluss mit η komponiert oder umgekehrt. Wir definieren

$$\alpha_t(f) := \eta_{0,t} \beta_t f. \tag{2.28}$$

Mit der Proposition bestätigt man sofort

$$\alpha_{t+s} = \alpha_t \circ \alpha_s.$$

Kommen wir zur Bewegungsgleichung der Einparametergruppe α_t. Um α_t differenzieren zu können müssen wir uns auf einen dichten Teilraum von $C_0(P, \mathfrak{B}(\mathcal{H}_2))$ beschränken. Da die Erzeuger von $\mathcal{U}_x(t,s)$ beschränkt sind, d.h. $A(.) \in C(P, \mathfrak{B}(\mathcal{H}_2))$, kommt es nur auf das Definitionsgebiet des Erzeugers von β_t an. Bezeichnen wir wie im vorigen Abschnitt mit $\mathscr{H}$ die Hamiltonfunktion, die G_t erzeugt, so müssen wir eine Poissonklammer auf einem Teilraum von $C_0(P, \mathfrak{B}(\mathcal{H}_2))$ erklären. Ein Ausdruck der Form $\{\mathscr{H}, f\}(x)$ ist sicher dann sinnvoll, wenn $f \in C_0^1(P, \mathfrak{B}(\mathcal{H}_2))$ liegt[11]. Damit gilt also $\forall f \in C_0^1(P, \mathfrak{B}(\mathcal{H}_2))$

$$\frac{d}{dt}\alpha_t(f)(x) = \alpha_t(\{\mathscr{H}, f\})(x) - i(\beta_t \circ \mathrm{ad}_{A(.)} \circ \beta_{-t} \circ \alpha_t f)(x).$$

[11] Wir meinen hier *Fréchet-differenzierbar*, [Wer05].

Im Allgemeinen wird $\mathrm{ad}_{A(.)}$ durch eine (punktweise) unbeschränkte Derivation δ ersetzt, d.h. die Bewegungsgleichung lautet

$$\frac{d}{dt}\alpha_t(f)(x) = \alpha_t(\{\mathscr{H}, f\})(x) - i(\beta_t \circ \delta \circ \beta_{-t} \circ \alpha_t f)(x). \tag{2.29}$$

Wie im klassischen Fall geben wir mit diesen Bezeichungen die

2.2.2 Definition. Eine Lösung von Gleichung (2.29) nennen wir *asymptotisch offenes Quantensystem.*

Wir möchten nun beschreiben, wie die asymptotisch offenen Quantensysteme mit Howlands Formalismus zur Behandlung zeitabhängiger Probleme in der Quantenmechanik zusammenhängen. Wir nehmen an, dass es eine Hilbertraumdarstellung π der Algebra $C_0(T^*\mathbb{R}^n, \mathfrak{A})$ gibt, d.h.

$$\pi : C_0(T^*\mathbb{R}^n, \mathfrak{A}) \to \mathfrak{B}(L^2(T^{\mathbb{R}^n}, \mathcal{H}))$$

ist ein *-Homomorphismus, der die Identität auf $\mathbb{1}$ abbildet. In dieser Darstellung existiere für $t \in \mathbb{R}$ ein untiärer Operator V_t, sodass

$$\mathrm{Ad}_{V_t}\,\pi(f) = \pi(\alpha_t(f)) \tag{2.30}$$

gilt. Zunächst gibt es für jedes t eine Darstellung die eine solche Beziehung erfüllt. Als Einschränkung fordern wir, dass es eine Darstellung π für alle t gibt[12]. Dies führt uns auf eine von J.S. Howland eingeführte Methode.
Die Idee, ein zeitabhängiges Problem auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ in ein zeitunabhängiges Problem auf dem Hilbertraum $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{H}) \cong L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{H}$ zu überführen, geht auf den Artikel [How74] zurück. Wir erläutern die grundlegenden Ideen dieses Formalismus. In ähnlicher Form, jedoch etwas ausführlicher kann man eine Einführung in [Sch01] finden. Gegeben sei also die Schrödingergleichung

$$i\frac{d}{dt}\varphi(t) = H(t)\varphi(t), \quad \varphi(t) \in \mathcal{H},$$

wobei $\{H(t) | t \in \mathbb{R}\}$ eine Familie selbstadjungierter Operatoren ist. Man fasst nun t als „räumliche“ Variable auf, mit dem konjugierten Impuls $-i\frac{d}{dt}$. Auf einem dichten Teilraum von $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ definiert man den Operator

$$K := H(.) - i\frac{d}{dt}. \tag{2.31}$$

Nimmt man an, dass die Operatoren $H(t)$ ein gemeinsames Definitionsgebiet D besitzen, so folgt aus dem Satz von Yosida, [Yos66], die Existenz und

[12] Dies ist im Allgemeinen nicht der Fall, [LM96], [Fre77].

Eindeutigkeit eines unitären Propagators $U(.,.)$, durch den die Lösungen der Schrödingergleichung dargestellt werden. Die Schrödingergleichung des konservativen Systems ist gegeben durch

$$i\frac{d}{d\sigma}\varphi = K\varphi, \quad \mathcal{K} := L^2(\mathbb{R}, \mathcal{H}).$$

Ist K wesentlich selbstadjungiert, so existiert nach dem Satz von Stone, [RS72], eine unitäre Einparametergruppe $e^{-i\sigma K}$. Wie im Fall der asymptotisch offenen Quantensysteme lässt sich mit Hilfe des unitären Propagators U eine unitäre Einparametergruppe V auf $\mathcal{K}$ erklären,

$$\sigma \mapsto V(\sigma)\varphi(.) := U(.,. - \sigma)\phi(. - \sigma).$$

Führt man die unitäre Einparametergruppe der Translationen T_σ ein, so kann man diese Gleichung auch umschreiben in

$$V(\sigma) = U(.,. - \sigma)T_{-\sigma}. \tag{2.32}$$

Man rechnet direkt nach, das V eine stark stetige unitäre Einparametergruppe ist, die von K erzeugt wird, d.h. $V(\sigma) = e^{-i\sigma K}$, $\forall \sigma \in \mathbb{R}$. Wir erwarten natürlich, dass auch hier ein Kozykel existiert, bezüglich dessen die Translationen kovariant im Sinn von Proposition 2.1.4 transformieren. Ein solcher Kozyklus wird durch

$$(\tilde{U}(\tau, \sigma)\varphi)(t) := U(\tau + t, \sigma + t)\varphi(t) \tag{2.33}$$

definiert. Es gilt dann

$$\tilde{U}(\tau + r, \sigma + r) = T_r\tilde{U}(\tau, \sigma)T_{-r}. \tag{2.34}$$

In dieser Schreibweise ist V gegeben durch

$$V(\sigma) = \tilde{U}(0, -\sigma)T_{-\sigma}.$$

Der Umstand, dass der Operator keine physikalische Interpretation hat, drückt sich in der Tatsache aus, dass $P = T^*\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ nicht eindimensional sein kann. Mathematisch gesehen zeigt sich dies insbesondere in der Tatsache, dass K nicht halbbeschränkt ist. Ausserdem haben die Elemente von $\mathcal{K}$ die unphysikalische Eigenschaft, dass die Norm in $\mathcal{H}$ für große und kleine t verschwinden muss. In diesem Sinn ist die von uns vorgeschlagene Interpretation zeitabhängiger Probleme aus physikalischer Sicht befriedigender. Ausserdem besteht die Möglichkeit, die Definitionsgebiete der Familien von Operatoren $A(.)$ physikalisch zu analysieren, um notwendige Bedingungen für „physikalische“ nicht-autonome Cauchy-Probleme[13] formulieren zu können.

[13]Siehe Abschnitt 4.

Kapitel 3

Beschränkte Teilerzeuger

Das Beispiel der linear gekoppelten Harmonischen Oszillatoren legt also nahe, einen „partiellen“ Heppschen Limes zu erklären. Dazu werden wir das Problem zunächst in dem konzeptionellen Rahmen von Kapitel 1 formulieren, bevor wir uns dem technischen Problem zuwenden. In diesem Kapitel wollen wir also eine Definition dieses Limes geben und in dem analytisch gut beherrschbaren Fall einer beschränkten Kopplung und eines beschränkten Hamiltonoperators des „kleinen“ Systems die Frage nach der Konvergenz untersuchen. Darüber hinaus geben wir eine Definition der Kopplungsterme mit Hilfe des Funktionalkalküls und der Weylquantisierung. Als Resultat erhalten wir in dem Abschnitt *Konstruktion für beschränkte Teilerzeuger* durch den partiellen Limes eine nicht-autonome Gleichung für die Dynamik des kleinen Systems und eine Verallgemeinerung des Heppschen Limes für „beschränkte Störungen“. Dieses Resultat definiert ein asymptotisch offenes Quantensystem im Sinn des vorangegangenen Kapitels. Als einfache Anwendung des Resultates interpretieren wir eine Galilei-Transformation als asymptotisch offenes Quantensystem. Der einfacheren Notation wegen beschränken wir uns in diesem und dem folgenden Kapitel gelegentlich auf einen Freiheitsgrad.

3.1 Der konzeptionelle Rahmen

Das Ziel dieses Abschnittes ist, bezüglich einer Komponente den klassischen Limes in der Sprache von Kapitel 1 darzustellen. Daher müssen wir zunächst den Begriff der Quantisierung für Tensorprodukte erklären. Der Einfachheit halber verwenden wir den intuitiv einleuchtenden Begriff des Tensorproduktes dargestellter C^*-Algebren, wie er im Detail in [KR86] diskutiert wird[1]. Im

[1] Wir merken an, dass für abstrakte C^*-Algebren verschiedene Konstruktionen für Tensorprodukte existieren, die im Algemeinen verschiedene Tensorproduktalgebren definieren;

Anschluss werden wir eine Hamiltonfunktion zweier gekoppelter Systeme auf dem Tensorprodukt quantisieren und andeuten, wie ein solcher partieller klassischer Limes mit nicht-autonomen Bewegungsgleichungen zusammenhängt, (3.5). Schließlich wird die Proposition 1.7.3 verallgemeinert, (3.6).
Unter *dargestellten* C^*-Algebren verstehen wir C^*-Algebren $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ die, etwa mittels einer GNS Darstellung, als Operatoralgebren auf Hilberträumen $\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_n$ erklärt sind. Das Tensorprodukt der Hilberträume $\mathcal{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_n$ ist die Vervollständigung der linearen Hülle der *einfachen Tensoren* $\phi_1 \otimes \cdots \otimes \phi_n$, $\phi_i \in \mathcal{H}_i$, $i = 1, \ldots, n$. Falls die Hilberträume separabel sind, ist dies sicher wohldefiniert, da alle separablen Hilberräume isometrisch zu $L^2(X)$ sind, wobei X ein lokal kompakter Hausdorffraum ist. $\mathfrak{A}_0$ bezeichne die von den einfachen Tensoren $A_1 \otimes \cdots \otimes A_n \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ erzeugte Algebra, wobei $\mathcal{H}$ der Hilbertraum $\mathcal{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_n$ sei. Die einfachen Tensoren $A_1 \otimes \cdots \otimes A_n \in \mathcal{H}$ werden in offensichtlicher Weise auf den einfachen Tensoren $\phi_1 \otimes \cdots \otimes \phi_n$ durch $(A_1\phi_1) \otimes \cdots \otimes (A_n\phi_n)$ erklärt und durch das BLT-Theorem, [RS72], eindeutig und normerhaltend auf $\mathcal{H}$ fortgesetzt. Man beachte, dass Tensorprodukte von unendlichdimensionalen Banachräumen auf Grund des Normabschlusses nicht mehr die übliche *universelle Eigenschaft* besitzen, die eine rein algebraische Charakterisierung von Tensorprodukten ist. Die folgende Definition hängt nicht von den Darstellungen der C^*-Algebren ab, [KR86].

3.1.1 Definition. Den Normabschluss von $\mathfrak{A}_0$ nennen wir das *Tensorprodukt* $\mathfrak{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathfrak{A}_n$ der dargestellten C^*-Algebren $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$.

Kehren wir nun zu unserem Ausgangspunkt zurück, den Begriff der Quantisierung auf gekoppelte Systeme zu übertragen. Hierfür verwenden wir den Begriff der stetigen Quantisierung einer Poisson-Mannigfaltigkeit P, weil stetige Felder von C^*-Algebren eine durchsichtige Formulierung ermöglichen.

3.1.2 Definition. Seien $(\mathfrak{C}_1, \{\mathfrak{A}_1^x, \varphi_x^1\}_{x\in X})$, $(\mathfrak{C}_2, \{\mathfrak{A}_1^y, \varphi_y^1\}_{y\in Y})$ stetige Felder von C^*-Algebren und X, Y kompakte Hausdorff Räume. Das *Tensorprodukt der stetigen Felder* definieren wir als das Tensorprodukt der dargestellten C^*-Algebren $\mathfrak{C}_1 \otimes \mathfrak{C}_2$ und $\mathfrak{A}_1^x \otimes \mathfrak{A}_2^y$, $\forall (x, y) \in X \times Y$, mit der eindeutigen Familie von surjektiven Morphismen[2] $\{\psi_{x,y}\}_{(x,y)\in X\times Y}$, gegeben durch

$$\psi_{x,y}(A_1 \otimes A_2) = \varphi_x^1(A_1) \otimes \varphi_y^2(A_2),$$

$\forall A_i \in \mathfrak{C}_i$, $i = 1, 2$.

ein physikalisches Kriterium für die „richtige“ Auswahl eines Tensorproduktes gibt es bisher nicht.

[2] Siehe Theorem 11.1.3 in [KR86].

Bemerkung. Im Allgemeinen sind Tensorprodukte von stetigen Feldern keine stetigen Felder. E. Blanchard konstruiert in [Bla00] ein explizites Beispiel eines algebraischen Tensorproduktes eines stetigen Feldes mit einer C^*-Algebra, sodass es keine C^*-Norm gibt, bezüglich der das Tensorprodukt wieder ein stetiges Feld von C^*-Algebren definiert.
Schwächt man die Stetigkeit der Felder ab, indem man nur eine Oberhalbstetigkeit fordert, so sind Tensorprodukte solcher Felder wieder Felder[3].

Als nächstes wollen wir ein Tensorprodukt von stetigen Quantisierungen erklären und zeigen, dass sich trotz der Schwierigkeit, dass Tensorprodukte stetiger Felder im Allgemeinen keine stetigen Felder sind, ein partieller klassischer Limes in der Sprache von Kapitel 1 definieren lässt. Seien also P_1, P_2 Poisson-Mannigfaltigkeiten mit stetigen Quantisierungen

$$((I_i, \mathfrak{C}_i, \{\mathfrak{A}_i^{x_i}, \varphi_{x_i,i}\}_{x_i \in I_i}), \tilde{\mathfrak{A}}_i^0, \mathcal{Q}_i),$$

$i = 1, 2$. Dann definieren wir das *Tensorprodukt der stetigen Quantisierungen* durch das Tensorprodukt der assoziierten stetigen Felder von C^*-Algebren und die Abbildung

$$\mathcal{Q} := \mathcal{Q}_1 \otimes \mathcal{Q}_2 : \tilde{\mathfrak{A}}_1^0 \otimes \tilde{\mathfrak{A}}_2^0 \to \mathfrak{C}_1 \otimes \mathfrak{C}_2.$$

Dabei ist mit $\tilde{\mathfrak{A}}_1^0 \otimes \tilde{\mathfrak{A}}_2^0$ die durch die einfachen Tensoren erzeugte *-Algebra gemeint und das algebraische Tensorprodukt ist definiert durch die punktweise Multiplikation. Für das Folgende ist es entscheidend, dass dieses Tensorprodukt von stetigen Quantisierungen die Dirac Bedingung (1.38) erfüllt. Die Dirac Bedingung für den Fall $x^1 = x^2 \to 0$ ist eine einfache Konsequenz der allgemeinen Kommutatorgleichung

$$[A \otimes C, B \otimes D] = [A, B] \otimes CD + BA \otimes [C, D]$$

und der Rieffel Bedingung (1.35). Allerdings gilt auch eine „komponentenweise" Rieffel Bedingung. Auf den einfachen Tensoren gilt

$$\mathcal{Q}_{x,y}(f \otimes g) = \mathcal{Q}_x^1(f) \otimes \mathcal{Q}_y^2(g).$$

Die Poissonklammer des Tensorproduktes ist gegeben durch

$$\{A_x \otimes C_x, B_x \otimes D_x\}_{x,y} = \{A_x, B_x\}_x \otimes (CD)_y + (BA)_x \otimes \{C_y, D_y\}_y. \quad (3.1)$$

Ersetzt man A_x durch $\mathcal{Q}_x^1(f)$ und B_x durch $\mathcal{Q}_x^1(g)$, so nähert sich obiger Ausdruck in der Norm[4] für $x \to 0$ beliebig dem Ausdruck

$$\mathcal{Q}_x^1\{f, g\} \otimes (CD)_y + \mathcal{Q}_x^1(fg) \otimes \{C_y, D_y\}_y. \quad (3.2)$$

[3]Diesen Hinweis verdanken wir Prof. D. Williams, Dartmouth.
[4]Wir setzen voraus, dass I_1 und I_2 diskrete Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind, deren einziger Häufungspunkt 0 ist.

Als nächsten Schritt spezialisieren wir den oben diskutieren Rahmen auf den für uns relevanten Fall. Wir kontrollieren mit dem Parameter $\hbar$ die relative Größe der beiden Systeme. Deswegen beschreiben wir eine der beiden stetigen Quantisierungen durch ein triviales Feld, d.h. durch eine C^*-Algebra $C(I_2, \mathfrak{B})$. Ziel ist es, die Proposition 1.7.3 so zu verallgemeinern, dass man in einer Komponente den klassischen Limes der Dynamik durchführen kann. Unter den Voraussetzungen von Proposition 1.7.3 gilt im Fall $\mathcal{Q}^1_x = \mathcal{Q}^W_x$ offensichtlich

$$\lim_{x\to 0} \|\beta^x_t \mathcal{Q}_{x,y}(f\otimes g) - \mathcal{Q}^W_x(\beta^0_t(f)) \otimes \mathcal{Q}_y(g)\| = 0 \tag{3.3}$$

gleichmäßig auf Kompakta. Wegen der Bilinearität des Tensorproduktes gilt dies auch für alle Elemente von $\mathcal{S}(T^*\mathbb{R}^n)\otimes\tilde{\mathfrak{A}}^0_2$. Die Abbildungen β^0, β^x haben die Bedeutung von α^0, α^x in Proposition 1.7.3 für die Hamiltonfunktion $\mathscr{H}\otimes 1_{T^*\mathbb{R}^n}$, wobei $\mathscr{H}$ die Voraussetzungen der Proposition erfüllt. Sei $\mathscr{K} \in \tilde{\mathfrak{A}}^0_2$ und $k \in \mathcal{S}(T^*\mathbb{R}^n) \otimes \tilde{\mathfrak{A}}^0_2$. Dann definieren wir die Hamiltonfunktion

$$h := \mathscr{H} \otimes 1_{T^*\mathbb{R}^n} + 1_{T^*\mathbb{R}^n} \otimes \mathscr{K} + k.$$

Wir nehmen an, dass $\mathfrak{A}^y_2 \subset \mathfrak{B}(L^2(\mathbb{R}^n))$ gilt und $\forall y \in I_2$ definieren wir $H^{x,y} := \frac{1}{x}\mathcal{Q}^W_x(\mathscr{H})\otimes\mathbb{1} + \frac{1}{y}\mathbb{1}\otimes\mathcal{Q}_y(\mathscr{K}) + \mathcal{Q}_{x,y}(k)$ und $\alpha^{x,y}_t(A) := \mathrm{Ad}_{exp(-iH^{x,y}t)}$. Die Wahl dieser Definition liegt an dem Umstand, dass wir den Limes partiell durchführen wollen. Dazu muss die Kopplung mit dem Parameter x skaliert werden, wie man am Beispiel der harmonischen Oszillatoren sieht. Weil wir die Zeitentwicklung dieses Hamiltonoperators betrachten und für β^x_t die Voraussetzung des Satzes von Hepp erfüllen müssen und gleichzeitig verlangen, dass sich der erste Summand von $H^{x,y}$ gegen den Erzeuger von β^x_t wegheben muss, ist diese Definition bezüglich x notwendig. Für den Parameter y könnten wir im Prinzip auch $y = 1$ setzen. Es gilt mit diesen Definitionen[5] $\forall f \in \mathcal{S}(T^*\mathbb{R}^n) \otimes \tilde{\mathfrak{A}}^0$

$$\frac{d}{dt}\alpha^{x,y}\beta^x_{-t}(\mathcal{Q}_{x,y}(f)) = i\alpha^{x,y}_t\beta^x_{-t}([\mathbb{1}\otimes\mathcal{Q}_y(\mathscr{K}) + \beta^x_t\mathcal{Q}_{x,y}(k), \mathcal{Q}_{x,y}(f)]). \tag{3.4}$$

In der Norm konvergiert die Differenz

$$[\beta^x_t\mathcal{Q}_{x,y}(k) - \mathcal{Q}_{x,y}(\beta^0_t k), \mathcal{Q}_{x,y}(f)]$$

wegen Proposition 1.7.3 gegen 0. Nach Voraussetzung ist $\mathcal{Q}_{x,y}(\beta^0_t k)$ stetig in t bezüglich der Norm, d.h. die Gleichung

$$\frac{d}{dt}A(t) = i[\mathbb{1}\otimes\mathcal{Q}_y(\mathscr{K}) + \mathcal{Q}_{x,y}(\beta^0_t k), A(t)]$$

[5] Den Index ^{2} für das zweite System lassen wir weg, da die Interpretation bereits durch die Verwendung von x und y klar ist.

ist für alle $A(0) = A \in \mathfrak{A}^x \otimes \mathfrak{A}^y$ mit Hilfe der Dysonreihe lösbar. Bezeichnen wir mit $\eta_{t,s}^{x,y}$ die von $\mathrm{ad}_{H_2^{x,y}(t)}$ erzeugte Dysonreihe, wobei $H_2^{x,y}(t) := \mathbb{1} \otimes \mathcal{Q}_y(\mathscr{K}) + \mathcal{Q}_{x,y}(\beta_t^0 k)$, so führt eine zu Satz 3.3.6 analoge Argumentation auf

$$\lim_{x\to 0} \|(\alpha_t^{x,y}\beta_{-t} - \eta_{t,0}^{x,y})(\mathcal{Q}_{x,y}(f))\| = 0. \tag{3.5}$$

Verwendet man die Gleichungen (3.3) und (3.5), so zeigt die Dreiecksungleichung

$$\lim_{x\to 0} \|\alpha_t^{x,y}(\mathcal{Q}_{x,y}(f)) - \eta_t^{x,y}(\mathcal{Q}_{x,y}(\beta_t^0 f))\| = 0. \tag{3.6}$$

Wir sehen also, wie sich im Rahmen der Quantisierungstheorie ein partieller klassischer Limes durchführen lässt. Die Dysonreihe $\eta_{t,s}^{x,y}$ ist die Lösung einer nicht-autonomen Differentialgleichung die sich als „Grenzwert" der kombinierten Zeitentwicklung $\alpha_t^{x,y}\beta_{-t}$ ergibt. $\eta_{t,s}^{x,y}$ ist nicht im üblichen Sinn ein Grenzwert, da durch die Zeitentwicklung a proiri keine stetigen Schnitte definiert werden. Hierin zeigt sich eine gewisse Unhandlichkeit der verwendeten Struktur und eine Erweiterung der Konzepte scheint sinnvoll. Im restlichen Teil der Arbeit werden wir unseren Standpunkt ändern, indem wir einen begrifflichen Rahmen verwenden, der dem analytischen Problem angemessener ist.

3.2 Die Kopplung der Systeme

In diesem Abschnitt greifen wir die Diskussion aus Abschnitt 2.2.1 nochmals auf. Wir wollen in Analogie zu dem dort diskutierten Verfahren den klassischen Limes in einer Komponente durchführen. Die zentrale Zutat ist der Satz von Hepp 1.7.1. Dabei werden wir ähnlich wie im vorigen Abschnitt den partiellen Limes für die Erzeuger einer Zeitentwicklung analog zu der von $\alpha_t^{x,y}\beta_{-t}^x$ durchführen. Anders als dort betrachten wir nun lediglich eine Algebra von Observablen, nämlich $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$. $\mathcal{H}$ ist das Tensorprodukt der Hilberträume $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$. Dann ist unser Problem gegeben durch einen Hamiltonoperator $H^\hbar$, der eine selbstadjungierte Erweiterung von

$$\frac{1}{\hbar} H_1^\hbar \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes H_2 + K^\hbar$$

ist. Der Operator $H_1^\hbar$ erfülle die Voraussetzungen des Satzes von Hepp 1.7.1. Den Operator $\mathbb{1} \otimes H_2 + K^\hbar$ nennen wir *Teilerzeuger der Dynamik*. Diese Bezeichung ist durch (3.4) motiviert. Im partiellen klassischen Limes ist dieser Operator der Erzeuger der Dynamik des kleinen Systems.
Wir müssen noch erklären was $K^\hbar$ zu bedeuten hat. Die für den Satz 3.3.6

notationstechnisch bequemste Variante ist eine Definition mit Hilfe des Funktionalkalüls selbstadjungierter Operatoren, d.h. $K^\hbar := K(a^\hbar, b)$, wobei $a^\hbar$ entweder gleich $q^\hbar$ oder gleich $p^\hbar$ ist und b durch p, bzw. q gegeben ist. Als einfache Konsequenz von Lemma 4.1.2 sind $a^\hbar \otimes \mathbb{1}$ bzw. $\mathbb{1} \otimes b$ wesentlich selbstadjungiert[6] auf $D := D(a^\hbar) \otimes D(b)$. Nach dem Spektralsatz existieren eindeutige projektionswertige Maße $E^{a^\hbar}$ und E^b, sodass für $\psi, phi \in D$

$$(\phi, a^\hbar \psi) = \int_{\mathbb{R}} \lambda d(\phi, E_\lambda^{a^\hbar} \psi)$$

und analog für b gilt. Auf diesem in $\mathcal{H}$ dichten Gebiet kommutieren $E^{a^\hbar}$ und E^b miteinander.

3.2.1 Definition. Zwei selbstadjungierte Operatoren A, B auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ kommutieren miteinander, falls alle Projektionen der assoziierten Spektralmaße kommutieren.

Das heißt also $[a^\hbar, b] = 0$ mit Hilfe des BLT-Theorems, [RS72]. Mit Hilfe dieser Eigenschaften lässt sich projektionswertiges Produktmaß erklären, bezüglich dem der folgende Satz gilt. Wir definieren die Menge der messbaren beschränkten Funktionen als $M^\infty := \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} | \, f \, messbar, \, \|f\|_\infty < \infty\}$. Alternativ zu der Konstruktion eines Produktmaßes kann man auch aus Theorem VIII.33, [RS72], die Selbstadjungiertheit beliebiger Polynome von $A \otimes \mathbb{1}$, $\mathbb{1} \otimes B$, wobei A und B selbstadjungiert seien, folgern. Anschließend verwendet man den folgenden[7]

3.2.2 Satz (Messbarer Funktionalkalkül)**.** *Sei A ein selbstadjungierter Operator auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$. Dann existiert eine eindeutige Abbildung $\Phi : M^\infty \to \mathfrak{B}(\mathcal{H})$, sodass*

(a) Φ ist ein algebraischer $*$-Homomorphismus

(b) Φ ist normstetig, d.h. $\|\Phi(f)\|_{\mathfrak{B}(\mathcal{H})} \leq \|f\|_\infty$

(c) Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset M^\infty$, mit $f_n(x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x) \, \forall x \in \mathbb{R}^2$ und $\|f_n\|_\infty < \infty$. Dann gilt für $\psi \in \mathcal{H}$, $\lim_{n\to\infty} \Phi(f_n)\psi = \Phi(f)\psi$.

Eine andere Variante der Definition von K besteht in der Verwendung der Weylquantisierung. Dabei kann man wie im vorigen Abschnitt wieder die von den einfachen Tensoren erzeugte *-Algebra $\mathcal{S}(T^*\mathbb{R}^n) \otimes \mathcal{S}(T^*\mathbb{R}^n)$ betrachten.

[6] D.h. $T^{\dagger\dagger} = T^\dagger$, siehe [RS72].

[7] Siehe z.B. [Sim71].

Für $\mathcal{Q}_x^1$ wählt man die Weylquantisierung $\mathcal{Q}_\hbar^W$ und für $\mathcal{Q}_y^2$ die Weylquantisierung $\mathcal{Q}_1^W$. Dabei verwenden wir die symmetrische Darstellung der Heisenberggruppe. Allerdings ist es notwendig die Weyloperatoren $\mathcal{Q}_\hbar^W$ zu modifizieren. Statt $U^\hbar(\pi,\xi)$ verwenden wir $V^\hbar(\pi,\xi) := U^{\frac{1}{\hbar}}(\pi,\xi)$. Für $f \in \mathcal{S}(T^*\mathbb{R}^n)$ und $U^\hbar(t)$ wie in Satz 1.7.1 gilt dann das folgende

3.2.3 Lemma. *Sei* $\mathcal{Q}^\hbar : \mathcal{S}(T^*\mathbb{R}^n) \to \mathfrak{B}(L^2(\mathbb{R}))$ *definiert durch*

$$\mathcal{Q}^\hbar := \int_{\mathbb{R}^{2n}} d^n u d^n v \check{f}(u,v) V^\hbar(u,v). \tag{3.7}$$

Dann gilt gleichmäßig auf kompakten Teilintervallen von $[-T,T]$

$$\operatorname*{s-lim}_{\hbar} U^\hbar(\xi,\pi)^\dagger U^\hbar(t)^\dagger \mathcal{Q}^\hbar(f) U^\hbar(t) U^\hbar(\xi,\pi) = f(\pi(t),\xi(t)). \tag{3.8}$$

Beweis. Dieses Lemma ist eine einfache Konsequenz aus dem Beweis des Satzes von Hepp 1.7.1. Explizit ausgeschrieben ist

$$V^\hbar(u,v) = e^{i(\xi p^\hbar - \pi q^\hbar)}.$$

Ferner gilt für $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned}&U^\hbar(\xi,\pi)^\dagger U^\hbar(t)^\dagger \mathcal{Q}^\hbar(f) U^\hbar(t) U^\hbar(\xi,\pi)\psi = \\ &W^\hbar(t,0)^\dagger \int_{\mathbb{R}^{2n}} d^n u d^n v \check{f}(u,v) V^\hbar(u,v) e^{i(u\xi(t) - v\pi(t))} W^\hbar(t,0)\psi.\end{aligned}$$

Wegen $\|V^\hbar(u,v)\| = 1 = \|W^\hbar(t,0)\|$ wird der Integrand majorisiert durch eine integrierbare Funktion. Aus dem Satz von Lebesgue für Bochner Integrale folgt die Vertauschbarkeit von Integration und dem Limes $\hbar \to 0$, d.h.

$$\begin{aligned}\operatorname*{s-lim}_{\hbar\to 0} U^\hbar(\xi,\pi)^\dagger U^\hbar(t)^\dagger \mathcal{Q}^\hbar(f) U^\hbar(t) U^\hbar(\xi,\pi) &= \int_{\mathbb{R}^{2n}} d^n u d^n v \check{f}(u,v) e^{i(u\xi(t) - v\pi(t))} \\ &= f(\pi(t),\xi(t)).\end{aligned}$$

□

Mit Hilfe dieses Lemmas ist es also eine reine Geschmacksfrage welche Definition man für den Kopplungsterm verwendet. Will man gänzlich auf den Funktionalkalül verzichten, so kann man ein Element $k \in \mathcal{S}(T^*\mathbb{R}^n) \otimes \mathcal{S}(T^*\mathbb{R}^n)$ wählen, wobei für die einfachen Tensoren $f \otimes g \in \mathcal{S}(T^*\mathbb{R}^n) \otimes \mathcal{S}(T^*\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\mathcal{Q}_\hbar(f \otimes g) := \mathcal{Q}^\hbar(f) \otimes \mathcal{Q}_1^W(g). \tag{3.9}$$

Alternativ kann man auch eine Kombination von Weylquantisierung und Funktionalkalül verwenden, also etwa

$$K^\hbar := f \circ \mathcal{Q}_\hbar(k),$$

wobei $f \in M^\infty$. In jedem Fall gilt die gleichmäßige Konvergenz auf Kompakta.

3.3 Konstruktion für beschränkte Teilerzeuger

Wir wollen damit beginnen, eine ebenso einfache wie wichtige Konsequenz aus dem Beweis des Heppschen Satzes 1.7.1 zu ziehen und damit eine Definition des partiellen Heppschen Limes angeben. Dabei verwenden wir den im vorigen Abschnitt eingeführten Rahmen. Dazu definieren wir die im Satz von Hepp verwendeten Operatoren auf dem Tensorprodukt $L^2(\mathbb{R}^n) \otimes L^2(\mathbb{R}^n)$ durch die eindeutigen normerhaltenden Fortsetzungen von $U^\hbar(\pi, \xi) \otimes \mathbb{1}$, $U_1^\hbar(t) \otimes \mathbb{1}$, wobei $U_1^\hbar(t)$ die Rolle von $U^\hbar(t)$ in der Formulierung des Satzes 1.7.1 übernimmt und die stark stetige unitäre Einparametergruppe ist, die von $\frac{1}{\hbar} H_1^\hbar$ erzeugt wird. Dann gelten natürlich bezüglich der Operatoren $q^\hbar \otimes \mathbb{1}$ und $p^\hbar \otimes \mathbb{1}$ die gleichen Transformationseigenschaften wie bereits in (1.76) und (1.79) angegeben. In diesem Sinn definieren wir auch $W^\hbar(t, s) \otimes \mathbb{1}$ und $W(t, s) \otimes \mathbb{1}$. Dann gilt das

3.3.1 Korollar. *Es gilt* $\text{s-lim}_{\hbar \to 0} W^\hbar(t, s) \otimes \mathbb{1} = W(t, s) \otimes \mathbb{1}$ *gleichmäßig auf kompakten Teilintervallen von* $[-T, T]$.

Beweis. Auf der linearen Hülle der einfachen Tensoren $\phi \otimes \psi \in L^2(\mathbb{R}^n) \otimes L^2(\mathbb{R}^n)$ gilt die gleichmäßige Konvergenz auf Grund von 1.7.1. Sei $\phi \in L^2(\mathbb{R}^n) \otimes L^2(\mathbb{R}^n)$ und bezeichnen wir mit ψ eine Linearkombination von einfachen Tensoren die ϕ approximieren. Dann zeigt die elementare Abschätzung

$$\|(W^\hbar(t, s) \otimes \mathbb{1} - W(t, s) \otimes \mathbb{1})\phi\| \leq \|(W^\hbar(t, s) \otimes \mathbb{1} - W(t, s) \otimes \mathbb{1})\psi\| + 2\|\psi - \phi\| \to 0$$

und zwar gleichmäßig auf kompakten Teilintervallen von $[-T, T]$. □

Mit den Ergebnissen des vorigen Abschnittes können wir also alle Observablen, die entweder mit der Weylquantisierung $\mathcal{Q}_\hbar$, oder aber mit dem Funktionalkalül durch $K(a^\hbar, b)$, bzw. der Komposition $f \circ \mathcal{Q}_\hbar$ definiert sind einen partiellen klassischen Limes durchführen. Sei also $K^\hbar$ auf irgendeine der obigen Möglichkeiten erklärt, dann können wir den Begriff des partiellen Hepp Limes formulieren.

3.3.2 Definition. Den Limes

$$\text{H-lim}\, K^\hbar := \underset{\hbar \to 0}{\text{s-lim}}\, U^\hbar(\pi, \xi) \otimes \mathbb{1}^\dagger U_1^\hbar(t) \otimes \mathbb{1}^\dagger K U_1^\hbar(t) \otimes \mathbb{1} U^\hbar(\pi, \xi) \otimes \mathbb{1}$$

nennen wir den *partiellen Hepp Limes* von $K^\hbar$, oder kurz *Hepp Limes.*

Beachte, dass diese Definition für $t = 0$ den klassischen Limes für beschränkte Funktionen von q und p beinhaltet.

Es ist hilfreich sich erneut den Stand der Dinge vor Augen zu halten. Bisher haben wir also einen Limes identifiziert, der eine einseitige Entkopplung der Systeme im Sinn der dieser Arbeit zu Grunde liegenden Idee liefert. Die Diskussion in Kapitel 2 legt die Interpretation nahe, dass die von uns als *Teilerzeuger* bezeichneten Operatoren im Hepp Limes tatsächlich den Erzeuger des kleinen Systems darstellen. Aus diesem Grund ist es sinnvoll zu untersuchen, inwiefern die Konvergenz des Teilerzeugers die Konvergenz der Dynamik impliziert und ob man wie in Kapitel 2 angekündigt dadurch eine Interpretation der gesamten Dynamik als asymptotisch offenes Quantensystem erhält. Beginnen wir nun mit den Vorbereitungen.

3.3.3 Lemma. *Seien $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen stark stetiger Familien $[a,b] \to \mathfrak{B}(\mathcal{H})$, die gleichmäßig in der starken Operatortopologie gegen die Familien A, B konvergieren. Dann konvergiert die Folge $(A_nB_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig in der starken Operatortopologie gegen AB.*

Beweis. Zunächst gilt

$$\begin{aligned}\|(A_n(t)B_n(t) - A(t)B(t))\psi\| &\leq \|A_n(t)\| \, \|(B_n(t) - B(t))\psi\| \\ &\quad + \|(A_n(t) - A(t))B(t)\psi\| \,.\end{aligned}$$

Die A_n sind lineare Abbildungen in den Banachraum der stetigen Hilbertraumwertigen Funktionen $C([a,b],\mathcal{H})$, der mit der Supremumsnorm versehen wird, d.h. $\|\psi(t)\|_\infty := \sup_{t\in[a,b]} \|\psi(t)\|$. Die A_n sind beschränkte Operatoren bezüglich der Norm

$$\|T(t)\| := \sup_{\|\psi\|=1} \sup_{t\in[a,b]} \|T(t)\psi\| \,,$$

da stetige Funktionen auf kompakten Mengen stets Maximum und Minimum annehmen. Da (A_n) gleichmäßig in der starken Topologie konvergiert, konvergiert insbesondere die Normfolge (Dreiecksungleichung nach unten), d.h. es gilt $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n\psi\|_\infty < \infty$. Nach dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit folgt $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n\| \leq \infty$. Damit wird der erste Summand auf der rechten Seite der Ungleichung kleiner als jedes ϵ, gleichmäßig in t. Der zweite Summand strebt ebenfalls gleichäßig in t gegen 0, was man folgendermaßen sieht. Angenommen, der zweite Summand konvergiert nicht gleichmäßig in t gegen 0, dann

$$\exists\epsilon > 0 \,\text{s.d.}\, \forall N \in \mathbb{N} \exists n \geq N,\, \exists t_n \in [a,b] : \|(A_n(t_n) - A(t_n))B(t_n)\psi\| \geq \epsilon \,.$$

Dann existiert ein Häufungspunkt $t_0 \in [a,b]$ der Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}\in[a,b]}$ und eine gegen diesen Punkt konvergente Teilfolge, die wir wieder mit $(t_n)_{n\in\mathbb{N}\in[a,b]}$ bezeichnen. Wegen

$$\|(A_n(t_n) - A(t_n))B(t_0)\psi\| \leq \sup_{t\in[a,b]} \|(A_n(t) - A(t))B(t_0)\psi\| \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

folgt dann

$$\begin{aligned}\|(A_n(t_n) - A(t_n))B(t_n)\psi\| &\leq \|A_n(t_n) - A(t_n)\| \\ \|(B(t_n) - B(t_0))\psi\| &+ \|(A_n(t_n) - A(t_n))B(t_0)\psi\| \\ \leq \sup_{\|\psi\|=1} \sup_{t\in[a,b]} (\|(A_n(t) - A(t))\psi\|) &\|(B(t_n) - B(t_0))\psi\| + \\ \|(A_n(t_n) - A(t_n))B(t_0)\psi\| &\stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\,,\end{aligned}$$

also ein Widerspruch. □

3.3.4 Definition. Eine Zweiparameterfamilie von unitären Operatoren $U(t,s)$, $t,s \in \mathbb{R}$, welche die nachfolgenden Eigenschaften besitzt, nennen wir einen *unitären Propagator.*

(i) $U(t,r)U(r,s) = U(t,s)$,

(ii) $U(t,t) = \mathbb{1}$,

(iii) $U(t,s)$ ist stark stetig als Funktion auf $\mathbb{R}^2$.

Wir benötigen noch das folgende

3.3.5 Lemma. *Sei H eine operatorwertige Abbildung, $H : \mathbb{R} \to \mathfrak{B}(\mathcal{H})$, die stetig ist in der starken Operatortopologie. Ferner seien die $H(t)$ selbstadjungiert, für alle $t \in \mathbb{R}$. Dann gibt es genau eine Zweiparameterfamilie die stark stetig in t ist und die das Anfangswertproblem*

$$i\frac{d}{dt}U(t,s)\psi = H(t)U(t,s)\psi,\ U(s,s)\psi = \psi,\ \forall\psi \in \mathcal{H}.$$

löst.

Beweis. Zunächst existiert ein unitärer Propagator nach Theorem X.69, [RS75], nämlich die Dyson-Reihe[8]:

$$U(t,s) = \mathbb{1} + \sum_{n=1}^{\infty}(-i)^n \int_s^t \int_s^{t_1} \dots \int_s^{t_{n-1}} H(t_1)\dots H(t_n)dt_n \dots dt_1\,.$$

Da die Erzeuger stark stetige Abbildungen sind, ist $U(t,s)\psi$ differenzierbar in t und s. Ohne Umschweife lässt sich das Riemannsche Integral auf

[8] Die auftretenden Integrale existieren in der starken Operatortopologie.

banachraumwertige Funktionen übertragen, für das alle vertrauten Rechenregeln gelten; dazu muss man lediglich in den Aussagen für $\mathbb{R}$ die Betragstriche durch die Norm des Banachraumes ersetzen. Damit gilt dann auch die Leibniz-Regel,

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)dx = \int\limits_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)dx + f(b(t),t)b'(t) - f(a(t),t)a'(t)\,,$$

die in unserem Fall zusammen mit dem Satz von Banach-Steinhaus

$$i\frac{d}{ds}U(t,s)\psi = -U(t,s)H(s)\psi$$

liefert. Sei nun $V(t,s)$ eine weitere Zweiparameterfamilie, die das Anfangswertproblem löst. Dann ist die Abbildung $r \mapsto U(t,r)V(r,s)\psi$, $\psi \in \mathcal{H}$ differenzierbar, auf Grund der Beschränktheit der Familie H. Der Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung liefert dann

$$\begin{aligned} V(t,s)\psi - U(t,s)\psi &= \int\limits_s^t \frac{d}{dr}U(t,r)V(r,s)\psi dr \\ &= \int\limits_s^t \left(iU(t,r)H(r)V(r,s) - iU(t,r)H(r)V(r,s)\right)\psi dr \\ &= 0, \end{aligned}$$

für alle $\psi \in \mathcal{H}$. □

Im Folgenden sei $H^\hbar : D(H^\hbar) \to \mathcal{H}$ eine selbstadjungierte Erweiterung von $\frac{1}{\hbar}H_1^\hbar \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes H_2 + K(q^\hbar, q)$, wobei wir der bequemeren Notation wegen annehmen, dass $K^\hbar$ durch den Funktionalkalül als Funktion von $q^\hbar$ und q erklärt sei. Wir wollen die von $H^\hbar$ erzeugte unitäre Gruppe mit $U^\hbar(t) = e^{-iH^\hbar t}$ bezeichnen. Die Evolutionsgleichung für das „kleine“ System, also die 2. Komponente des Tensorprodukts, erhält man durch Differentation von $\mathcal{U}^\hbar(t) := U_1^\hbar(t)^\dagger U^\hbar(t)$ auf $D(\frac{1}{\hbar}H_1^\hbar \otimes L^2(\mathbb{R}^n)$

$$i\frac{d}{dt}\mathcal{U}^\hbar(t)\psi = \left(\mathbb{1} \otimes H_2 + K(q^\hbar(t), q)\right)\mathcal{U}^\hbar(t)\psi\,, \forall \psi \in D(H_1^\hbar/\hbar), \qquad (3.10)$$

wobei $q^\hbar(t) := \mathrm{Ad}_{U_1^\hbar(t)}\, q^\hbar$. Schließlich verallgemeinern wir die Definition von $\mathcal{U}^\hbar(t)$ zu der einer Zweiparameterfamilie, indem wir

$$\mathcal{U}^\hbar(t,s) := \mathcal{U}^\hbar(t)\mathcal{U}^\hbar(s)^\dagger$$

definieren. Die so definierte Zweiparameterfamilie hat offensichtlich alle Eigenschaften von Definition 3.3.4, sie ist also ein unitärer Propagator. Mit diesen Vorbemerkungen können wir die Konstruktion einer nicht-autonomen Schrödingergleichung folgendermaßen durchführen.

3.3.6 Satz (Konstruktion)**.** *Es gilt*

$$\begin{aligned}\text{H-lim}\, i\frac{d}{dt}\mathcal{U}^\hbar(t,s) &\overset{(i)}{=} \text{H-lim}\,\big(\mathbb{1}\otimes H_2 + K(q^\hbar(t),q)\big)\,\mathcal{U}^\hbar(t,s)\\ &\overset{(ii)}{=} \text{H-lim}\,\big(\mathbb{1}\otimes H_2 + K(q^\hbar(t),q)\big)\,\text{H-lim}\,\mathcal{U}^\hbar(t,s)\\ &\overset{(iii)}{=} i\frac{d}{dt}\,\text{H-lim}\,\mathcal{U}^\hbar(t,s)\,.\end{aligned}$$

Beweis. Wir werden zunächst die Gleichung, $(i) = (ii)$, beweisen, indem wir die Konvergenz der beiden Faktoren nach dem mittleren Gleichheitszeichen nachweisen. Unter Verwendung von Satz 3.2.2 (c) folgt dann die behauptete Identität. Alternativ kann man bei einer anderen Definition der Kopplung auch Lemma 3.2.3 benutzen. Die Konvergenz des ersten Faktors ist jedenfalls eine unmittelbare Konsequenz von Korollar 3.3.1.

Um die Konvergenz des zweiten Faktors einzusehen, wenden wir Lemma 3.3.5 an, was uns ermöglicht, $U^\hbar(\pi,\xi)^\dagger\otimes\mathbb{1}\mathcal{U}^\hbar(t,s)U^\hbar(\pi,\xi)\otimes\mathbb{1}$ als Dyson-Reihe darzustellen. Da der Hepp-Limes gleichmäßig auf kompakten Zeitintervallen ist, konvergiert auch

$$\int_s^t A_\hbar(r)\psi dr\,,$$

gleichmäßig, wobei $A_\hbar(t) := U^\hbar(\pi,\xi)^\dagger\otimes\mathbb{1}(\mathbb{1}\otimes H_2 + K(q^\hbar(t),q))U^\hbar(\pi,\xi)\otimes\mathbb{1}$. Dies sieht man leicht aus der Ungleichung

$$\left\|\int_s^t A_\hbar(r)\psi dr - \int_s^t A(r)\psi dr\right\| \le (t-s)\sup_{r\in[s,t]}\|A_\hbar(r)\psi - A(r)\psi\|\,.$$

Ferner konvergiert nach Lemma 3.3.3 das Produkt

$$A_\hbar(t)\int_s^t A_\hbar(r)\psi dr$$

gleichmäßig in t und s bezüglich der Hilbertraumnorm. Nach einfacher Induktion konvergiert auch

$$\sum_{n=1}^N(-i)^n\int_s^t\int_s^{t_1}\dots\int_s^{t_{n-1}}A_\hbar(t_1)\dots A_\hbar(t_n)\psi dt_n\dots dt_1$$

gleichmäßig in der Norm.
Bezeichnen wir mit

$$D_n(T,t,s)\psi := (-i)^n \int_s^t \int_s^{t_1} \dots \int_s^{t_{n-1}} T(t_1)\dots T(t_n)\psi dt_n \dots dt_1$$

den n-ten Term der Dyson-Reihe, so zeigt folgendes $\epsilon/3$-Argument, dass auch die Dyson-Reihe gleichmäßig in s und t konvergiert. Sei $\epsilon > 0$ und $(\hbar_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+ - 0$ eine beliebige Folge mit $\hbar_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Dann existieren N_ϵ, $N_{M,\epsilon} \in \mathbb{N}$ mit

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=1}^{\infty} D_n(A,t,s)\psi - \sum_{n=1}^{N} D_n(A,t,s)\psi \right\| &\leq \frac{\epsilon}{3}, \forall N \geq N_\epsilon \\ \left\| \sum_{n=1}^{M} D_n(A,t,s)\psi - \sum_{n=1}^{M} D_n(A_{\hbar_k},t,s)\psi \right\| &\leq \frac{\epsilon}{3}, \forall k \geq N_{M,\epsilon}. \end{aligned}$$

Da die $\hbar$ abhängigen Familien $A_{\hbar_k}$ nach dem gleichen Argument wie in Lemma 3.3.3 gleichmäßig beschränkt sind, d.h.

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \|A_{\hbar_k}\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}} \sup_{\|\psi\|=1} \sup_{t\in[a,b]} \|A_{\hbar_k}(t)\psi\| =: C \in \mathbb{R}_+,$$

gilt $\forall i, l \in \mathbb{N}$, $l < i$,

$$\left\| \sum_{n=1}^{i} D_n(A_{\hbar_k},t,s)\psi - \sum_{n=1}^{l} D_n(A_{\hbar_k},t,s)\psi \right\| \leq \sum_{j=m+1}^{n} \frac{T^j C^j}{j!} \|\psi\|,$$

wobei T die Länge eines kompakten Teiluntervalles des maximalen Existenzintervalles der klassischen Lösung ist, das s und t enthält. Da die Summe auf der rechten Seite für $n \to \infty$ konvergiert, können wir auf Grund der Stetigkeit der Norm in der Ungleichung n durch ∞ ersetzen, d.h.

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} D_n(A_{\hbar_k},t,s)\psi - \sum_{n=1}^{m} D_n(A_{\hbar_k},t,s)\psi \right\| \leq \sum_{j=m+1}^{\infty} \frac{T^j C^j}{j!} \|\psi\|.$$

Nun existiert für alle $\epsilon > 0$ ein $K_\epsilon \in \mathbb{N}$, so dass $\sum_{j=m+1}^{\infty} \frac{T^j C^j}{j!} \|\psi\| < \frac{\epsilon}{3}$,

$\forall m \geq K_\epsilon$. Wähle $N := max\{N_\epsilon, K_\epsilon\}$ und $M = N$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{n=1}^{\infty} D_n(A,t,s)\psi \right. \quad - \quad & \sum_{n=1}^{\infty} D_n(A_{\hbar_k},t,s)\psi \,\| \leq \\ & \left\|\sum_{n=1}^{\infty} D_n(A,t,s)\psi - \sum_{n=1}^{N} D_n(A,t,s)\psi\right\| \\ & + \left\|\sum_{n=1}^{N} D_n(A,t,s)\psi - \sum_{n=1}^{N} D_n(A_{\hbar_k},t,s)\psi\right\| \\ & + \left\|\sum_{n=1}^{N} D_n(A_{\hbar_k},t,s)\psi - \sum_{n=1}^{\infty} D_n(A_{\hbar_k},t,s)\psi\right\| \\ \leq \quad & \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.\end{aligned}$$

Für beliebige gegen 0 konvergente Folgen $(\hbar_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+\backslash 0$ konvergieren also die zugehörigen Dyson-Reihen gleichmäßig in t was äquivalent ist zu

$$\operatorname*{s-lim}_{\hbar\to 0} U(\hbar^{-\frac{1}{2}}\alpha)^\dagger \mathcal{U}^\hbar(t,s) U(\hbar^{-\frac{1}{2}}\alpha) = \mathbb{1} + \sum_{n=1}^{\infty} D_n(A,t,s).$$

Damit sind alle behaupteten Identitäten gezeigt, denn wegen der Eindeutigkeit der Lösung und dem eben Bewiesenen gilt $(i) = (ii) = (iii)$. □

Dieses Resultat liefert also eine *klassische Lösung*[9] des durch (ii) gegebenen nicht-autonomen Cauchy-Problems. Darüber hinaus erhalten wir die angekündigte Verallgemeinerung des Heppschen Satzes.

3.3.7 Korollar. *Sei $H^\hbar$ wie oben und $\alpha_t^\hbar := \mathrm{Ad}_{U^\hbar(t)}$. Dann gilt für alle K, definiert im Sinn von Abschnitt 3.2, gleichmäßig auf kompakten Teilintervallen von $[-T,T]$*

$$\operatorname*{s-lim}_{\hbar} \mathrm{Ad}_{U^\hbar(\pi,\xi)}\, \alpha_t^\hbar(L(p^\hbar, q^\hbar, p, q)) = L(\pi(t), \xi(t), p_x(t), q_x(t)), \tag{3.11}$$

mit $\mathrm{Ad}_{\mathcal{U}_x^0(t,0)}(p,q) =: (p_x(t), q_x(t))$, $x := (\pi,\xi)$.

Beweis. Es gilt $U^\hbar(t)U^\hbar(\pi,\xi) = U_1^\hbar(t)U^\hbar(\pi,\xi)U^\hbar(\pi,\xi)^\dagger U_1^\hbar(t)^\dagger U^\hbar(t)U^\hbar(\pi,\xi)$. Kürzen wir wie in Kapitel 2 den zweiten Faktor durch

$$U^\hbar(\pi,\xi)^\dagger U_1^\hbar(t)^\dagger U^\hbar(t) U^\hbar(\pi,\xi) =: \mathcal{U}_x^\hbar(t,0)$$

[9] Siehe Definition 4.0.8.

ab, dann haben wir den Limes von

$$\mathcal{U}_x^\hbar(t,0)^\dagger \operatorname{Ad}_{U^\hbar(\pi,\xi)} \operatorname{Ad}_{U_1^\hbar(t)}(L)\mathcal{U}_x^\hbar(t,0)$$

zu bestimmen. Dies ist aber eine Komposition von stark konvergenten Folgen, die sogar gleichmäßig auf Kompakta konvergieren, denn der erste und der letzte Faktor ist stark konvergent auf Grund von Satz 3.3.6 und der Faktor $\operatorname{Ad}_{U^\hbar(\pi,\xi)} \operatorname{Ad}_{U_1^\hbar(t)}(L)$ ist gerade die Aussage des Heppschen Satzes, bzw. des Korollars 3.3.1. Dann folgt mit Lemma 3.3.3 die Behauptung. □

Nehmen wir an, dass L differenzierbar ist bezüglich der ersten beiden Komponenten, so folgt durch Differentation nach t

$$\frac{d}{dt}L(\pi(t),\xi(t),p_x(t),q_x(t)) = \{\mathscr{H},L\}(t) - i[\mathbb{1}\otimes H_2 + K, L](t), \qquad (3.12)$$

wobei wir die Argumente auf der rechten Seite durch t abgekürzt haben. Wir sehen also, dass der partielle Hepp Limes ein asymptotisch offenes Quantensystem ist, da er eine Differentialgleichung der Form (2.29) löst. In diesem Sinn sind nicht-autonome Differentialgleichungen in der Quantenmechanik stets Teil einer autonomen Dynamik. Hierin liegt der konzeptionelle Fortschritt dieser Arbeit. Darüber hinaus hat man einen Ansatzpunkt für eine physikalisch motivierte Charakterisierung der Derivationen δ des nicht-autonomen Systems.
Zum Abschluss dieses Kapitels wollen wir noch eine Anwendung von Satz 3.3.6 präsentieren, die ein interessantes Licht auf die Galilei Transformation in der Quantenmechanik wirft. Die Galilei Gruppe $\mathscr{G}$ ist das semidirekte Produkt $SO(3) \ltimes (\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{R})$, wobei $SO(3)$ die speziell orthogonale Gruppe des $\mathbb{R}^3$ ist. Ein Element $G\in\mathscr{G}$ wird durch (R,a,v,b) parametrisiert, wobei $R\in SO(3)$, $a,v\in\mathbb{R}^3$ und $b\in\mathbb{R}$. Die natürliche Aktion auf eine Element $(x,t)\in\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}$ ist gegeben durch $G(x,t) = (Rx+a+vt, t+b)$. Daraus folgt sofort $G'\circ G = (R'R, R'a+a', R'v+v', b'+b)$, woraus man die Identität und die Inverse direkt ablesen kann. Eine projektive Darstellung dieser Gruppe auf $L^2(\mathbb{R}^3)$ wird durch $G\mapsto \rho(G)\psi := G^*\psi$ definiert, wobei $\psi\in L^2(\mathbb{R}^3)$ und * der Pullback ist. Dann zeigt eine elementare Rechnung die Invarianz der freien Schrödingergleichung unter Galilei Transformationen. Nicht trivial transformiert sich aber im Allgemeinen das Potential V. Es gilt

$$\rho(G)V(x,t)\rho(G)^{-1} = V(G(x,t)).$$

Eine Beziehung dieses Typs kann man auch im Sinne offener Quantensysteme erhalten. Sei $\frac{1}{\hbar}H_1^\hbar = \frac{p^2}{2m}$ und $K(q^\hbar,q) := V(q^\hbar\otimes\mathbb{1} - \mathbb{1}\otimes q)$. Dann konvergiert der Teilerzeuger $\mathbb{1}\otimes H_2 + K(q^\hbar,q)$ gegen

$$\mathbb{1}\otimes H_2 + K(\xi(t),q),$$

wobei $\xi(t) = vt + a$ ist. Dies entspricht genau der Transformation $G = (1, -a, -v, 0)$.

Kapitel 4

Unbeschränkte Teilerzeuger

Wir haben gesehen, dass für die Konstruktion einer zeitabhängigen Schrödingergleichung die verwendeten Methoden stark von der Beschränktheit der Teilerzeuger der Dynamik des kleinen Systems abhängen. Möchte man den Limes der unitären Propagatoren auf realistischere Modelle und damit notwendigerweise auf Fälle unbeschränkter Teilerzeuger erweitern, so sieht man sich mit mehreren Schwierigkeiten konfrontiert. Zunächst stellt sich die Frage, ob es für $\hbar > 0$ überhaupt möglich ist eine zeitabhängige Differentialgleichung in Sinn des vorigen Abschnitts zu definieren. Darüber hinaus wollen wir verstehen, wie die durch einen partiellen Hepp Limes gegebenen Anfangswertprobleme in die allgemeine Theorie des abstrakten nichtautonomen Cauchy-Problems einzuordnen sind. Dazu möchten wir zunächst den klassischen Lösungsbegriff in folgenden Definitionen festhalten, die wir [Sch05] entnehmen.

4.0.8 Definition. Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $A(t)$, $t \in [s, \infty)$, eine Familie von linearen Operatoren mit Definitionsgebieten $D(A(t))$. Eine *klassische Lösung* des Anfangswertproblems

$$i\frac{d}{dt}\phi(t) = A(t)\phi(t),\ \phi(s) = \psi \in \mathcal{H}, \tag{4.1}$$

ist eine Funktion $\phi_{s,\psi} \in C^1([s,\infty),\mathcal{H})$, sodass $\phi_{s,\psi}(t) \in D(A(t))\ \forall t \in [s,\infty)$ und (4.1) erfüllt sind. Das Anfangswertproblem (4.1) nennen wir *nicht-autonomes Cauchy-Problem.*

4.0.9 Definition. Das nicht-autonome Cauchy-Problem (4.1) heißt *klassisch wohlgestellt* mit den *Regularitätsräumen* $(D_s)_{s\in\mathbb{R}}$, falls

(i) die Räume $D_s := \{\psi \in \mathcal{H} | \exists \text{ eine klassische Lösung } \phi_{s,\psi} \text{ von } (4.1)\}$ Teilräume der Gebiete $D(A(s))$ sind und außerdem $D_s \subseteq_d \mathcal{H}$ gilt,

(ii) die Lösung $\phi_{s,\psi}$ eindeutig ist $\forall \psi \in D_s$,

(iii) die Lösung $\phi_{s,\psi}$ stetig von den Anfangswerten abhängt: Sei $s_n \to s \in \mathbb{R}$, $D_{s_n} \ni \psi_n \to \psi \in D_s$ und für $\chi = \psi_n$ oder $\chi = \psi$ setze $\phi_{r,\chi} = \chi$ falls $t < r$. Dann konvergiert $\|\phi_{s_n,\psi_n}(t) - \phi_{s,\psi}(t)\| \to 0$ gleichmäßig auf kompakten Teilmengen $I \in \mathbb{R}$.

Im Sinn dieser Definitionen stellt sich die Frage, auf welchem Gebiet der unitäre Propagator

$$\mathcal{U}^\hbar(t,s) = U^\hbar(t)U^\hbar(s)^\dagger \tag{4.2}$$

differenzierbar ist. Dazu ziehen wir zunächst eine einfache Konsequenz aus dem Spektralsatz für selbstadjungierte Operatoren.

Bemerkung. Sei $A : D(A) \to \mathcal{H}$ selbstadjungiert. Dann gilt $e^{itA}(D(A)) \subseteq D(A)$. $E : \Sigma(\mathbb{R}) \to L(\mathcal{H})$ bezeichne ein projektionswertiges Maß von A. Wegen $[E_I, e^{itA}] = 0 \ \forall I \in \Sigma(\mathbb{R})$ folgt aus dem Spektralsatz für $\phi \in D(A)$

$$\infty > \|A\phi\|^2 = \int_{\mathbb{R}} \lambda^2 d(\phi, E_\lambda e^{-itA} e^{itA}\phi) = \int_{\mathbb{R}} \lambda^2 d(e^{itA}\phi, E_\lambda e^{itA}\phi) = \|Ae^{itA}\phi\|^2. \tag{4.3}$$

Um das allgemeine Problem besser verstehen zu können wollen wir uns ein konkretes Modell ansehen.

4.1 Kopplung eines Einmodenlasers an ein QM-System

Im folgenden werden wir ein Modell eines Einmodenlasers, der mit einem quantenmechanischen System wechselwirkt, untersuchen. Wir nehmen an, dass der Laser polarisiert ist, sodass die Beschreibung durch einen harmonischen Oszillator sinnvoll ist. Die Kopplung wird in einer Dipolnäherung betrachtet, die wir physikalisch motivieren wollen.
Dabei folgen wir einer Diskussion in [Fre00]. Die Motivation ist heuristisch, denn sie verwendet eine auf der Dysonreihe basierende Plausibilitätsbetrachtung zur Herleitung *Fermis Goldener Regel*. Eine rigorose Behandlung dieser Frage ist nicht trivial und wurde für ein Modellsystem von Jakšić und Pillet in [JP95], [JP96] studiert[1]. Im Rahmen der heuristischen Betrachtung wird die Wahrscheinlichkeit eines Übergangs von einem Zustand des Systems mit

[1] Siehe auch [BFS98].

Energie E_i in den Zustand mit Energie E_f berechnet. In der untersten Ordnung der Dysonreihe ergibt sich für die *Übergangswahrscheinlichkeit* $W_{i\to f}$

$$W_{i\to f} = 2\pi\frac{e^2}{m^2}|\vec{A}(\omega_{if})\cdot(\phi_f,\vec{p}\phi_i)|^2,$$

wobei wir die in der Standardliteratur der Physik übliche Notation verwenden. Dabei wurde die Ortsabhängigkeit des *Vektorpotentials* $\vec{A}$ vernachlässigt, da die auftretenden Wellenlängen sehr groß im Vergleich zu den atomaren Abmessungen, d.h. dem Bohr'schen Radius, sind, wobei die Differenz-Frequenz ω_{if} gegeben ist durch $1/\hbar(E_i - E_f)$. Dies sieht man an den einfachen Beziehungen

$$\lambda = \frac{2\pi}{\omega_{if}} \approx \frac{2\pi}{m\alpha^2} = a\frac{2\pi}{\alpha},$$

mit der Feinstrukturkonstante $\alpha \approx \frac{1}{137}$. Dann gilt wegen

$$\begin{aligned}(\phi_f, x(t)\phi_i) &= e^{-i\omega_{if}t}(\phi_f, x(0)\phi_i)\\ (\phi_f, p\phi_i) &= -i\omega_{if}m(\phi_f, x\phi_i).\end{aligned}$$

Der Operator $(\vec{p}-e\vec{A})^2$ ist in der Coulombeichung $div(\vec{A}) = 0$ gleich

$$\vec{p}^2 - e\vec{A}\vec{p} + e^2\vec{A}^2.$$

Ist das äußere magnetische Feld sehr klein, so kann man den quadratischen Term in $\vec{A}$ vernachlässigen[2]. Folgen wir der Argumentation, dass die Übergangsmatrixelemente von Orts- und Impulsoperator proportional sind, so können wir $\vec{p}$ im linearen Term in $\vec{A}$ durch $\vec{x}$ austauschen. Betrachtet man nur eine Mode von $\vec{A}$ in einer Polarisationsrichtung, so kann man diese durch $a^\dagger + a$ und die Energie des Feldes durch einen Harmonischen Oszillator, (4.5), beschreiben.
Als Resultat dieser Diskussion können wir also einen Kopplungsterm der Form

$$q^\hbar \otimes q$$

annehmen. Der Hamiltonoperator des gesamten Systems ist demnach formal gegeben durch

$$\tilde{H}^\hbar := \frac{1}{\hbar}H_1^\hbar \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes H_2 + kq^\hbar \otimes q, \tag{4.4}$$

wobei k eine Kopplungskonstante ist. Dabei sei

$$\frac{1}{\hbar}H_1^\hbar := \omega(a^\dagger a + \frac{1}{2}), \tag{4.5}$$

[2]Dies kann man auch so formulieren, dass Mehrphotonenprozesse zu vernachlässigen sind.

ein harmonischer Oszillator mit der Frequenz ω und a ist der bekannte Absteigeoperator, $a = q + ip$. Auf dem Gebiet

$$(D(\frac{1}{\hbar}H_1^\hbar) \otimes D(H_2)) \cap (D(q^\hbar) \otimes D(q)) \tag{4.6}$$

ist dieser Operator wohldefiniert. Um die Dynamik im Sinn des vorigen Abschnitts untersuchen zu können stellt sich zunächst die Frage, ob ein so erklärter Operator überhaupt eine stark stetige unitäre Einparametergruppe erzeugt. Dies ist dann der Fall, wenn $\tilde{H}^\hbar$ auf dem oben definierten Gebiet wesentlich selbstadjungiert ist. Unsere Strategie ist nun folgende:
Zunächst wollen wir beweisen, dass $\tilde{H}^\hbar$ auf $D(1/\hbar H_1^\hbar) \otimes D(H_2)$ wesentlich selbstadjungiert ist, $\forall \hbar > 0$. Den Abschluss dieses Operators wollen wir mit $H^\hbar$ bezeichnen. Wir werden sehen, dass das Definitionsgebiet $D(H_0^\hbar)$ des Abschlusses $H_0^\hbar$ von

$$\frac{1}{\hbar}H_1^\hbar \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes H_2 : D(\frac{1}{\hbar}H^\hbar) \otimes D(H_2) \to \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \tag{4.7}$$

ein Teilraum des Definitionsgebietes $D(H_E^\hbar)$ des Abschlusses $H_E^\hbar$ von

$$\frac{1}{\hbar}H_1^\hbar \otimes \mathbb{1} : D(\frac{1}{\hbar}H_1^\hbar) \otimes \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \tag{4.8}$$

ist, falls H_2 nach unten beschränkt ist. Natürlich könnte man auch argumentieren, dass diese Inklusion ja schon im Fall eines beschränkten H_2 gegeben ist, jedoch kollidiert dieses Argument mit der Annahme, dass q^2 H_2-beschränkt[3] sei.
Dann folgt mit obiger Bemerkung und den nachfolgenden Lemmata die Differenzierbarkeit von

$$U^\hbar(t) = e^{iH_E^\hbar t}e^{-iH^\hbar t} \tag{4.9}$$

auf $D(H_0^\hbar)$, denn $D(H^\hbar) = D(H_0^\hbar)$.

4.1.1 Lemma. *Seien X ein Banachraum, $I \subseteq \mathbb{R}$ offen und*

$$(\mathcal{A}(t))_{t\in I},\ (\mathcal{B}(t))_{t\in I} \subset \mathfrak{B}(X)$$

stark stetige Familien beschränkter Operatoren. Die Familien seien stark differenzierbar auf Teilräumen $D(A), D(B) \subseteq X$ und es gelte $\mathcal{B}(t)(D(B)) \subseteq D(A)$ $\forall t \in I$. Dann ist die Produktfamilie $(AB(t))_{t\in I}$, mit $AB(t) := A(t)B(t)$ $\forall t \in I$, differenzierbar auf $D(B)$ und die Ableitung, für $x \in D(B)$, ist gegeben durch

$$(\mathcal{A}'(t)\mathcal{B}(t) + \mathcal{A}(t)\mathcal{B}'(t))x. \tag{4.10}$$

[3] Siehe Def. 4.1.4 und beachte, dass $\|q^2\phi\| \leq C\|\phi\|$ für beschränktes H_2 auf $D(q^2)$ gelten würde.

Beweis. Sei $x \in D(B)$ und $\epsilon > 0$. Dann wähle $\delta > 0$, sodass

$$\delta = min\{\delta(\mathcal{A}), \delta(\mathcal{B}), \delta(\mathcal{B}')\}.$$

Dabei sei $\delta(\mathcal{A})$ so gewählt, dass $\|[\frac{1}{h}(\mathcal{A}(t+h) - \mathcal{A}(t)) - \mathcal{A}'(t)]\mathcal{B}(t)x\| < \frac{\epsilon}{3}$, $\delta(\mathcal{B}')$, sodass $\|(\mathcal{A}(t+h) - \mathcal{A}(t))\mathcal{B}'(t)x\| < \frac{\epsilon}{3}$ und $\delta(\mathcal{B})$ so, dass

$$\|[\frac{1}{h}(\mathcal{B}(t+h) - \mathcal{B}(t)) - \mathcal{B}'(t)]x\| < \frac{\epsilon}{3\sup_{h\in J}\|\mathcal{A}(t+h)\|},$$

wobei J eine kompakte Teilmenge von I sei, die $(t - \delta(\mathcal{A}), t + \delta(\mathcal{A}))$ enthält. Die Existenz von $\sup_{h\in J}\|\mathcal{A}(t+h)\|$ ist eine Konsequenz des Satzes von Banach-Steinhaus[4]. Dann folgt $\forall h \in (t-\delta, t+\delta)$

$$\begin{aligned}
\|[\frac{1}{h}(\mathcal{A}(t+h)\mathcal{B}(t+h) \quad &- \quad \mathcal{A}(t)\mathcal{B}(t)) - (\mathcal{A}(t)'\mathcal{B}(t) + \mathcal{A}(t)\mathcal{B}'(t))]x\| \\
&\leq \quad \|\mathcal{A}(t+h)[\frac{1}{h}(\mathcal{B}(t+h) - \mathcal{B}(t)) - \mathcal{B}'(t)]x\| \\
&\quad\quad +\|(\mathcal{A}(t+h) - \mathcal{A}(t))\mathcal{B}'(t)x\| \\
&\quad\quad +\|[\frac{1}{h}(\mathcal{A}(t+h) - \mathcal{A}(t)) - \mathcal{A}'(t)]\mathcal{B}(t)x\| \\
&\leq \quad \sup_{h\in J}\|\mathcal{A}(t+h)\|\|[\frac{1}{h}(\mathcal{B}(t+h) - \mathcal{B}(t)) - \mathcal{B}'(t)]x\| \\
&\quad\quad +\|[\frac{1}{h}(\mathcal{A}(t+h) - \mathcal{A}(t)) - \mathcal{A}'(t)]\mathcal{B}(t)x\| + \frac{\epsilon}{3} \\
&< \quad \epsilon.
\end{aligned}$$

□

4.1.2 Lemma. *Seien $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2$ Hilberträume und A, B auf $D(A) \subseteq \mathcal{H}_1$, bzw. $D(B) \subseteq \mathcal{H}_2$ selbstadjungierte Operatoren. Dann ist $A \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes B$ wesentlich selbstadjungiert auf $D(A) \otimes D(B) := \{\Phi \in \mathrm{lin}\{\phi \otimes \psi | \phi \in D(A),\ \psi \in D(B)\} \subset \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2\}$[5].*

Beweis. Wir zeigen, dass $U(t) := e^{itA} \otimes e^{itB}$ eine stark stetige unitäre Einparametergruppe ist und schließen mit Theorem VIII.10, [RS72], das eine direkte Konsequenz des Satzes von Stone ist, auf die wesentliche Selbstadjungiertheit. Offensichtlich ist nämlich $U(t)(D(A) \otimes D(B)) \subseteq D(A) \otimes D(B)$ $\forall t \in \mathbb{R}$. Klar sind $\forall t, s \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
U(t)^\dagger \restriction_{D(A)\otimes D(B)} &= U(t)^{-1} \restriction_{D(A)\otimes D(B)}, \\
U(t)U(s) \restriction_{D(A)\otimes D(B)} &= U(t+s) \restriction_{D(A)\otimes D(B)} .
\end{aligned}$$

[4]D.h. dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit.

[5]$\mathrm{lin}\{x \in X\}$ bedeutet die lineare Hülle von X.

Die eindeutige normerhaltende Fortsetzbarkeit ([RS72]) von beschränkten lineraen Abbildungen zwischen einem normierten Raum und einem Banachraum auf den vervollständigten des normierten Raume liefert die Aussage für $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$. D.h. $U(t)$ ist eine unitäre Gruppe. Seien $\Phi \in D(A) \otimes D(B)$, $t_0 \in \mathbb{R}$, dann gilt

$$\|(U(t) - U(t_0))\Phi\| \leq \|(e^{itA} - e^{it_0A}) \otimes \Phi\| + \|e^{itA} \otimes (e^{itB} - e^{it_0B})\Phi\| \stackrel{t \to t_0}{\longrightarrow} 0.$$

Für jede kompakte Umgebung J von t_0 existiert $\sup_{t \in J} \|U(t) - U(t_0)\|$ auf Grund des Satzes von Banach-Steinhaus, oder man nutzt einfach die Unitarität aus. Jedenfalls folgt für $\Phi \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ und $(\Phi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(A) \otimes D(B)$, mit $\Phi_n \to \Phi$ falls $n \to \infty$,

$$\|(U(t) - U(t_0))\Phi\| \leq \sup_t \|U(t) - U(t_0)\| \|\Phi - \Phi_n\| + \|(U(t) - U(t_0))\Phi_n\| \to 0,$$

d.h. $U(t)$ ist auch stark stetig. Aus Lemma 4.1.1 folgt für $U(t) = (e^{itA} \otimes \mathbb{1})(\mathbb{1} \otimes e^{itB})$ schließlich die Differenzierbarkeit auf $D(A) \otimes D(B)$, mit der Ableitung $i(A \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes B)$. $\square$

Mit den Bezeichungen des vorigen Lemmas gilt auch das folgende

4.1.3 Lemma. *Sei* $C := \overline{A \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{H}_2} + \mathbb{1}_{\mathcal{H}_1} \otimes B}$, *$A$ und B nach unten beschränkt mit Schranken M_A und M_B, dann gilt*

$$D(C) \subseteq D(\overline{A \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{H}_2}}), D(\overline{\mathbb{1}_{\mathcal{H}_1} \otimes B}).$$

Beweis. $C - M$, $M := (M_A \mathbb{1}_{\mathcal{H}_1}) \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{H}_2} + \mathbb{1}_{\mathcal{H}_1} \otimes (M_B \mathbb{1}_{\mathcal{H}_2})$, ist selbstadjungiert auf dem Definitionsgebiet $D(C) \subseteq_d \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ von C, wie man sofort mit Hilfe der Neumannschen Reihe sieht. Es gilt für alle $\varphi \in D(A) \otimes D(B)$

$$\begin{aligned}
\|(C \quad - \quad & M)\varphi\|^2 = \|(A \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{H}_2} - (M_A \mathbb{1}_{\mathcal{H}_1}) \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{H}_2})\varphi\|^2 \\
& + \|(\mathbb{1}_{\mathcal{H}_1} \otimes B - \mathbb{1}_{\mathcal{H}_1} \otimes (M_B \mathbb{1}_{\mathcal{H}_2}))\varphi\|^2 \\
& + 2(\varphi, (A \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{H}_2} - (M_A \mathbb{1}_{\mathcal{H}_1}) \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{H}_2})(\mathbb{1}_{\mathcal{H}_1} \otimes B - \mathbb{1}_{\mathcal{H}_1} \otimes (M_B \mathbb{1}_{\mathcal{H}_2}))\varphi) \\
\geq \quad & \|(A \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{H}_2} - (M_A \mathbb{1}_{\mathcal{H}_1}) \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{H}_2})\varphi\|^2.
\end{aligned}$$

Die Ungleichung sieht man mit einer Konstruktion wie in [RS72], Theorem VIII.33, ein. Stellen wir C in $L^2(X_A \times X_B, d\mu_A \otimes d\mu_B) \cong L^2(X_A, d\mu_A) \otimes L^2(X_B, d\mu_B)$ dar, wobei $L^2(X_A, d\mu_A)$ und $L^2(X_B, d\mu_B)$ Darstellungsräume von A und B sind, so ist $((A - (M_A \mathbb{1}_{\mathcal{H}_1})) \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{H}_2})(\mathbb{1}_{\mathcal{H}_1} \otimes (B - (M_B \mathbb{1}_{\mathcal{H}_2}))) = (A - (M_A \mathbb{1}_{\mathcal{H}_1})) \otimes (B - (M_B \mathbb{1}_{\mathcal{H}_2}))$ wesentlich selbstadjungiert auf $D(A) \otimes D(B)$. Ist U der unitäre Operator mit

$$U\overline{(A - (M_A \mathbb{1}_{\mathcal{H}_1})) \otimes (B - (M_B \mathbb{1}_{\mathcal{H}_2}))}U^\dagger = f,$$

und

$$U \restriction_{D(A)\otimes D(B)} = U_A \otimes U_B,$$

so gilt ferner

$$f \restriction_{(U_A D(A))\otimes(U_B D(B))} = (f_A - M_A)(f_B - M_B).$$

Die Funktionen $f_A - M_A$ und $f_B - M_B$ sind ≥ 0 $d\mu_A$-, bzw. $d\mu_B$-fast überall, d.h. ihr Produkt ist auch ≥ 0 $d\mu_A \otimes d\mu_B$-fast überall.
Es folgt

$$D(C) \subseteq D(\overline{A \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{H}_2}}),$$

da die Konvergenz in der Graphennorm von C die Konvergenz in der Graphennorm von $\overline{A \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{H}_2}}$ erzwingt. $\square$

Bemerkung. Der Kern des Beweises beruht auf der $(A\otimes\mathbb{1}+\mathbb{1}\otimes B)$-Beschränktheit von $A \otimes \mathbb{1}$, bzw. $\mathbb{1} \otimes B$.

Wenden wir uns nun der wesentlichen Selbstadjungiertheit von $H^\hbar$ zu, die wir mit Hilfe des Satzes von Kato-Rellich 4.1.5 beweisen wollen. Dazu benötigen wir die folgende

4.1.4 Definition. Seien A und B dicht definierte lineare Operatoren auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$. Dann heißt B *A-beschränkt*, falls

(i) $D(B) \supseteq D(A)$ und

(ii) $\exists a, b \in \mathbb{R}$, sodass $\forall \varphi \in D(A)$,

$$\|B\varphi\| \leq a\|A\varphi\| + b\|\varphi\| \tag{4.11}$$

gilt. Das Infimum dieser a nennen wir *relative Schranke* von B bezüglich A. Falls die relative Schranke 0 ist, heißt B *infinitesimal klein* bezüglich A und wir schreiben $B \ll A$.

Bemerkung. Die Bedingung (ii) ist äquivalent zu der Folgenden:

(iii) $\exists c, d \in \mathbb{R}$, sodass $\forall \varphi \in D(A)$

$$\|B\varphi\|^2 \leq c^2\|A\varphi\|^2 + d^2\|\varphi\|^2 \tag{4.12}$$

gilt. Falls (i) gilt, so sieht man sofort die Gültigkeit von (ii) mit $a = c$ und $b = d$. Ist (ii) richtig, so gilt wegen

$$2\|A\varphi\|\|\varphi\| \leq \epsilon\|A\varphi\|^2 + \epsilon^{-1}\|\varphi\|^2$$

auch (i) mit $c^2 = a^2(1+\epsilon)$ und $d^2 = b^2(1+\epsilon^{-1})$ $\forall \epsilon > 0$. Damit ist das Infimum aller a gleich dem Infimum aller c. Es genügt offensichtlich, Abschätzung (ii) oder (i) auf einem Definitionskern[6] von A zu zeigen.

Das nun folgende Resultat ist fundamental in der Störungstheorie linearer Operatoren auf Hilberträumen.

4.1.5 Satz (Kato-Rellich). *Sei A selbstadjungiert, B hermitesch und A-beschränkt, mit relativer Schranke < 1. Dann ist $A + B$ auf $D(A)$ selbstadjungiert und wesentlich selbstadjungiert auf jedem Definitionskern von A. Ist A darüber hinaus nach unten beschränkt durch $M \in \mathbb{R}$, so ist $A+B$ nach unten beschränkt durch $M - max\{b/(1-a), a|M| + b\}$, wobei a und b durch (4.11) gegeben sind.*

Der Beweis dieses Satzes, der im Kern auf der Tatsache beruht, dass beschränkte Operatoren mit Norm < 1 nach dem Lemma von Banach invertierbar sind, was bei $B(A \pm i\mu)^{-1}$ für gewisse $\mu \in \mathbb{R}$ der Fall ist, findet sich in [RS75].
Der Operator $H_E^\hbar$ ist auf der Menge der Linearkombinationen der Hermitefunktionen wesentlich selbstadjungiert und gegeben durch $\omega(a^\dagger a + \frac{1}{2})$. Das Spektrum des Operators $a^\dagger a$ ist bekanntlich $\mathbb{N} \cup \{0\}$, was man sofort mit dem Weylschen Kriterium bestätigt. Sei nämlich $\lambda \in \mathbb{R} \backslash (\mathbb{N} \cup \{0\})$ und seien

$$\begin{aligned} \psi_n &:= \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^\dagger)^n \psi_0, \ \forall n \in \mathbb{N} \\ \psi_0(x) &= \pi^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \ \forall x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

die Hermitefunktionen. Dann gilt $\forall \phi \in D(a^\dagger a)$, mit einer Entwicklung $\phi = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \psi_n \neq 0$,

$$\|(a^\dagger a - \lambda \mathbb{1})\phi\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n|^2 |n - \lambda|^2 > 0.$$

Wegen der Stetigkeit der Norm gilt dies auch für beliebige normierte Folgen $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Damit kennen wir die Spektraldarstellung von $\sqrt{a^\dagger a}$,

$$\sqrt{a^\dagger a}\phi = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n}(\psi_n, \phi)\psi_n.$$

[6] Damit meinen wir das englische „core“, [RS72].

Es folgen dann unmittelbar $\forall\phi \in D(\sqrt{a^\dagger a})$

$$\|a\phi\| = \|\sqrt{a^\dagger a}\phi\|$$

und

$$\|a^\dagger\phi\|^2 = \|\sqrt{a^\dagger a}\phi\|^2 + \|\phi\|^2.$$

Wir können nun auf die $\sqrt{a^\dagger a}$-Beschränktheit von $q = \frac{1}{\sqrt{2}}(a + a^\dagger)$ schließen. Es gilt nämlich $\forall\phi \in D(\sqrt{a^\dagger a})$

$$\|q\phi\| \leq \sqrt{2}\|\sqrt{a^\dagger a}\phi\| + \frac{1}{\sqrt{2}}\|\phi\|,$$

woraus

$$\|q\phi\|^2 \leq 2(1+\epsilon)\|\sqrt{a^\dagger a}\phi\|^2 + \frac{1+\epsilon^{-1}}{2}\|\phi\|^2$$

folgt und insbesondere im Sinn von Operatoren

$$\epsilon = \frac{1}{4} \Rightarrow q^2 \leq \frac{5}{2}(a^\dagger a + \mathbb{1}). \tag{4.13}$$

Das oben beschriebene Verfahren, aus der relativen Beschränktheit eines Operators eine Ungleichung der Form (4.13) zu schließen, ist auch unter allgemeinen Bedingungen möglich. Dazu zunächst eine

4.1.6 Definition. Sei A ein positiver selbstadjungierter Operator und B ein selbstadjungierter Operator, sodass

(i) $Q(A) \supseteq Q(B)$ und

(ii) $|(\varphi, B\varphi)| \leq a(\varphi, A\varphi) + b(\varphi,\varphi)\ \forall\varphi \in Q(A)$,

für $a > 0, b \in \mathbb{R}$ gilt. $Q(A)$ und $Q(B)$ seien die Definitionsgebiete der durch A und B induzierten quadratischen Formen. Dann nennen wir B *relativ formbeschränkt* bezüglich A. Falls a beliebig klein sein kann, nennen wir B *infinitesimal formbeschränkt* bezüglich A und schreiben $B \preccurlyeq A$.

Der folgende Satz zeigt, dass falls B A-beschränkt ist, dann ist B auch relativ formbeschränkt bezüglich A.

4.1.7 Satz. *Sei A ein positiver selbstadjungierter Operator und B sei selbstadjungiert.*

(a) Falls B A-beschränkt ist mit relativer Schranke a, dann ist B formbeschränkt bezüglich A mit relativer Schranke a.

(b) $B \ll A \Rightarrow B \preccurlyeq A$.

Für einen Beweis siehe [RS75].

Wie in [JP95] folgt nun die $H_0^\hbar$-Beschränktheit von $kq^\hbar \otimes q$. Sei q^2 H_2-beschränkt oder relativ formbeschränkt bezüglich H_2. Wegen Lemma 4.1.3 und der Diskussion zum harmonischen Oszillator ist die Menge der Operatoren $\{H_2\}$, die unseren Voraussetzungen genügen, nicht leer. H_2 ist nach Voraussetzung nach unten beschränkt, mit einer Schranke $M \in \mathbb{R}$. Dann ist $\tilde{H}_2 := H_2 - M\mathbb{1} \geq 0$ und q^2 ist $\tilde{H}_2$-beschränkt, bzw. relativ formbeschränkt bezüglich $\tilde{H}_2$, mit gleicher relativer Schranke wie für H_2. Im Fall der H_2-Beschränktheit folgt aus Satz 4.1.7 die relative Formbeschränktheit von q^2 mit der gleichen Schranke und insbesondere für geeignete $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ auf $D(H_2)$

$$q^2 \leq \alpha\tilde{H}_2 + \beta\mathbb{1}. \tag{4.14}$$

Ist nun $\Phi \in D(1/\hbar H_1^\hbar) \otimes D(H_2)$, so ist

$$\begin{aligned}
\|q \otimes q\Phi\|^2 &\leq \frac{5}{2}(\Phi, (a^\dagger a + \mathbb{1}) \otimes (\alpha\tilde{H}_2 + \beta\mathbb{1})\Phi) \\
&\leq \frac{5}{2}(\Phi, [\frac{1}{2\epsilon^2}(a^\dagger a + \mathbb{1})^2 \otimes \mathbb{1} + \frac{\epsilon^2}{2}\mathbb{1} \otimes (\alpha\tilde{H}_2 + \beta\mathbb{1})^2]\Phi) \\
&\leq \frac{5}{2}(\Phi, [\frac{1}{\sqrt{2}\epsilon}(a^\dagger a + \mathbb{1}) \otimes \mathbb{1} + \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}\mathbb{1} \otimes (\alpha\tilde{H}_2 + \beta\mathbb{1})]^2\Phi) \\
&= \frac{5}{2}\|(\frac{1}{\sqrt{2}\epsilon}(a^\dagger a + \mathbb{1}) \otimes \mathbb{1} + \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}\mathbb{1} \otimes (\alpha\tilde{H}_2 + \beta\mathbb{1}))\Phi\|^2, \ \forall\epsilon > 0.
\end{aligned}$$

Wählen wir $\epsilon = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$, so folgt für geeignete $c, d \in \mathbb{R}$

$$\|q \otimes q\Phi\| \leq c\alpha\|H_0^\hbar\Phi\| + d\|\Phi\|, \ \forall\Phi \in D(H_0^\hbar), \tag{4.15}$$

da $H_0^\hbar$ nach Lemma 4.1.2 auf $D(1/\hbar H_1^\hbar) \otimes D(H_2)$ wesentlich selbstadjungiert ist. Um die Selbstadjungiertheit von $H^\hbar$ auf $D(H_0^\hbar)$ folgern zu können, brauchen wir eine Schranke < 1. Da wir aber letzlich an dem klassichen Limes der $\hbar$-abhängigen Operatoren interessiert sind, genügt die Existenz eines $\hbar_0 > 0$, sodass $\hbar_0 kc\alpha < 1$. Im Folgenden wollen wir daher stets $\hbar \in (0, \hbar_0] \subset \mathbb{R}$ annehmen. Das nun bewiesene Resultat wollen wir in folgender Proposition festhalten.

4.1.8 Proposition. *Der Operator $H^\hbar$ ist auf $D(H_0^\hbar)$ selbstadjungiert $\forall\hbar \in (0, \hbar_0]$.*

Bemerkung. Der Operator $U^\hbar(t)^\dagger$ ist auf dem Definitionskern[7] $D(1/\hbar H^{\hbar_1}) \otimes D(H_2)$ von $H_E^\hbar$ auf Grund von

$$(e^{-itH_E^\hbar} \otimes \mathbb{1})(D(1/\hbar H_1^\hbar) \otimes D(H_2)) \subseteq D(1/\hbar H_1^\hbar) \otimes D(H_2) \tag{4.16}$$

[7] Siehe Theorem VIII.11, [RS72].

und Lemma 4.1.1 differenzierbar. Wegen $D(H_0^\hbar) \subseteq D(H_E^\hbar)$ ist auch $U^\hbar(t)$ differenzierbar.

Wir möchten wie im Fall beschränkter Teilerzeuger einen partiellen klassischen Limes durchführen. Dazu werden wir die klassische Wohlgestelltheit des nicht-autonomen Cauchy-Problems für $\hbar > 0$ benötigen. Für $\psi \in D(H^\hbar)$ ist die Stetigkeit von

$$t \mapsto e^{iH_E^\hbar t}(H^\hbar - H_E^\hbar)e^{-iH^\hbar t}\psi$$

nicht a priori klar, da $H_E^\hbar$ und $H^\hbar$ nicht kommutieren. Daher zeigen wir die klassische Wohlgestelltheit des Cauchy-Problems und folgern im nächsten Abschnitt aus der Konvergenz der Erzeuger die Konvergenz der unitären Propagatoren

$$\mathcal{U}_x^\hbar(t,s) := U^\hbar(\pi,\xi)^\dagger \mathcal{U}^\hbar(t,s) U^\hbar(\pi,\xi) \tag{4.17}$$

für $\hbar \to 0$ in der starken Operatortopologie, gleichmäßig auf Kompakta. Da der Erzeuger des unitären Propagators unbeschränkt ist, müssen wir genauer erklären in welchem Sinn dieser konvergiert.

Beginnen wir mit der Konvergenz des Erzeugers. Die auf dem Definitionsgebiet von p, q eindeutigen Lösungen der Heisenberggleichung sind nach der Diskussion des Abschnittes 1.5 gegeben durch $q^\hbar(t) = a\cos(\omega t)q^\hbar + b\sin(\omega t)p^\hbar$. Daher ist in der Notation von Kaptiel 3 der Erzeuger von

$$\mathcal{U}_x^\hbar(t,s) := \mathrm{Ad}_{U^\hbar(\pi,\xi)}\mathcal{U}^\hbar(t,s) \tag{4.18}$$

auf $D(1/\hbar H_1^\hbar) \otimes D(H_2)$ durch

$$A^\hbar(t) := \mathbb{1} \otimes H_2 + kq_x^\hbar(t) \otimes q = \mathbb{1} \otimes H_2 + kq^\hbar(t) \otimes q + k\xi(t)\mathbb{1} \otimes q \tag{4.19}$$

gegeben. Auf dem Gebiet $D(1/\hbar H_1^\hbar) \otimes D(H_2)$ konvergiert diese Familie von unbeschänkten Operatoren gegen

$$\mathbb{1} \otimes H_2 + k\xi(t)\mathbb{1} \otimes q. \tag{4.20}$$

Dieser Operator ist wegen[8] $q \ll q^2$ und der Beschränktheit von $\xi(t)$ wesentlich selbstadjungiert auf $D(1/\hbar H_1^\hbar) \otimes D(H_2)$ für alle t. Im vorliegenden Fall können wir die Konvergenz der Erzeugerfamilie durch die punktweise Konvergenz auf einem dichten Teilraum erklären.

Es stellt sich die Frage, unter welchen Bedingungen ein Grenzwert

$$\mathcal{U}_x^\hbar(t,s) \xrightarrow{\hbar \to 0} \mathcal{U}_x(t,s) \tag{4.21}$$

[8]Dies folgt sofort aus $q^4 + c^2 \geq 2cq^2$, $\forall c > 0$, und der Monotonie des Integrals.

existiert und ob dieser Grenzwert eine Lösung des nicht-autonomen Cauchy-Problems

$$i\frac{d}{dt}\phi_{s,\psi}(t) = (\mathbb{1} \otimes H_2 + k\xi(t)\mathbb{1} \otimes q)\phi_{s,\psi}(t) \tag{4.22}$$

ist.

4.2 Konstruktion für unbeschränkte Teilerzeuger

Man könnte versuchen im Geist Yosidas, [Yos66], die Erzeuger durch beschränkte Operatoren zu approximieren, um anschließend die Konstruktion aus Satz 3.3.6 zu verwenden, jedoch ist die gleichmäßige Approximierbarkeit der Erzeuger von $\mathcal{U}_x(t,s)$ nicht leicht zu zeigen.
Eine Verwendung von Howlands Methode ermöglicht hingegen einen eleganten Beweis für die starke Konvergenz gleichmäßig auf kompakten Teilintervallen von $[-T,T]$. Zunächst wollen wir aber einen Satz von Kato, Theorem 5.4.8 in [Paz83], bzw. Theorem X.70, [RS75], verwenden um die Existenz der unitären Propagatoren $\mathcal{U}_x(t,s)$ zu zeigen.
Wir wissen, dass die unitären Propagatoren $\mathcal{U}_x^\hbar(t,s)$ auf $Y := D(H_1) \otimes D(H_2)$ differenzierbar sind und die Familie von Erzeugern durch (4.19) gegeben ist. Ferner kennen wir den auf Y punktweisen Grenzwert dieser Erzeuger, (4.20). Die klassische Bahn $\xi(t)$ ist eine stetig differenzierbare Funktion. Daher ist die Familie (4.20) nach dem Satz von Kato-Rellich auf dem kompakten Intervall $[-T,T]$ selbstadjungiert auf dem Gebiet $\overline{\mathcal{H}_1 \otimes D(H_2)} = D$ und es gilt $Y \subset D$. Die stetige Differenzierbarkeit der Erzeuger (4.20) ermöglicht nun die Anwendung des Satzes von Kato, d.h. es existiert eine eindeutige Familie von unitären Propagatoren $\mathcal{U}_x(t,s)$ die eine klassische Lösung des Cauchy-Problems definiert. Wir möchten eine an die Quantenmechanik angepasste Version dieses Satzes verwenden, [Sim71].

4.2.1 Satz (Yosida)**.** *Sei $H(t)$, $[-T,T]$ eine Familie selbstadjungierter Operatoren, mit $H(t) \geq -E_0 + 1$ für ein E_0. Die Resolvente $(H(t)+E_0)^{-1}$ sei stark differenzierbar und $\|(H(t)+E_0)\frac{d}{dt}(H(t)+E_0)^{-1}\|$ sei beschränkt. Dann existiert $\forall \psi \in D(H(0))$ eine klassische Lösung des Cauchy-Problems. Diese Lösung $\varphi(t)$ erfüllt $\|\varphi(t)\| = \|\psi\|$ für alle t und definiert so einen unitären Propagator.*

Die Halbbeschränktheit ist eine einfache Konsequenz des Satzes von Kato-Rellich, 4.1.5. Dieser besagt, dass die untere Schranke von $H_2 + q$ durch $M - max\{\frac{b}{1-a}, a|M| + b\}$ gegeben ist. Dabei ist M die untere Schranke von

H_2 und $a, b \in \mathbb{R}^+$ sind die Konstanten der H_2-Beschränktheit von q. Die uns interessierenden Operatoren sind durch

$$H(t) := \overline{\mathbb{1} \otimes H_2 + k\xi(t)\mathbb{1} \otimes q}$$

gegeben. Die Operatoren $H(t)$ haben also nach Kato-Rellich eine gemeinsame untere Schranke

$$-E_0 + 1 := min_{t\in[-T,T]}(M - max\{\frac{\xi(t)kb}{1 - \xi(t)ka}, \xi(t)k(a|M| + b)\}).$$

Die anderen Voraussetzungen des Satzes kann man ebenfalls direkt nachprüfen. Es gilt nämlich in der Norm

$$\frac{d}{dt}(H(t) + E_0)^{-1} = (H(t) + E_0)^{-1}(k\frac{d\xi(t)}{dt}\mathbb{1} \otimes q)(H(t) + E_0)^{-1}, \qquad (4.23)$$

woraus die Beschränktheit von $\|(H(t) + E_0)\frac{d}{dt}(H(t) + E_0)^{-1}\|$ folgt. Damit sind alle Voraussetzungen des Satzes von Yosida erfüllt und es existiert ein stark stetiger Propagator $\mathcal{U}_x(t, s)$, der für jedes s eine klassische Lösung des nicht-autonomen Cauchy-Problems (4.22) definiert.
Damit ist schon eine der Fragen des vorigen Abschnittes beantwortet. Die Grenzwerte der Teilerzeuger definieren klassisch wohlgestelltes Cauchy-Problem. Wie steht es mit der Konvergenz der untären Propagatoren $\mathcal{U}_x^\hbar(t, s)$? Wie bereits im vorigen Abschnitt angekündigt, brauchen wir dazu die klassische Wohlgestelltheit. Daher zeigen wir das

4.2.2 Lemma. *Auf dem Definitionsgebiet $U^\hbar(\pi, \xi)^\dagger D(H^\hbar)$ ist das nicht-autonome Cauchy-Problem, gegeben durch*

$$i\frac{d}{dt}\mathcal{U}_x^\hbar(t, s)\phi = A^\hbar(t)\mathcal{U}_x^\hbar(t, s)\phi,$$

klassisch wohlgestellt.

Beweis. Wir zeigen die Stetigkeit der Ableitung. Dann folgt mit einem analogen Argument wie in Lemma 3.3.5 die Eindeutigkeit der Lösung. Ferner ist die stetige Abhängigkeit von den Anfangswerten eine direkte Konsequenz der Stetigkeit der unitären Propagatoren.
Nach den Ergebnissen des vorigen Abschnittes bleibt die Stetigkeit von

$$H_1 \otimes \mathbb{1}e^{-iH^\hbar t}$$

zu zeigen. Für $\mu \in \mathbb{R}$ erfüllt jeder selbstadjungierte Operator T auf seinem Definitionsgebiet die Beziehung

$$\|(T \pm i\mu)\phi\|^2 = \|T\phi\|^2 + \mu^2\|\phi\|^2.$$

Daraus folgen unmittelbar für die Resolvente $R(i\mu, T) := (T + i\mu)^{-1}$ die Abschätzungen

$$\|R(i\mu, T)\| \leq \frac{1}{\mu}, \quad \|TR(i\mu, T)\| \leq 1.$$

Daher ist für ausreichend großes $\nu \in i\mathbb{R}$

$$\|R(\frac{\nu}{2}, H_1)\| + \|R(\frac{\nu}{2}, H_2)\| < 1,$$

d.h. die Summe dieser beiden Operatoren ist nach dem Lemma von Banach invertierbar. Dann folgt die Gleichung

$$R(\nu, H_0) = R(\frac{\nu}{2}, H_1) \otimes R(\frac{\nu}{2}, H_2)(R(\frac{\nu}{2}, H_1) \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes R(\frac{\nu}{2}, H_2))^{-1}.$$

Diese Gleichung rechnet man leicht auf dem Definitionskern $D(H_1) \otimes D(H_2)$ nach und aus der eindeutigen Fortsetzbarkeit (BLT-Theorem) folgt dann die gewünschte Beziehung. Ferner ist mit $K^\hbar := kq^\hbar \otimes q$

$$R(\nu, H^\hbar) = R(\nu, H_0)(K^\hbar R(\nu, H_0) + 1)^{-1},$$

da $K^\hbar$ H_0-beschränkt ist mit Schranke < 1. Schließlich folgt für alle $\psi \in D(H^\hbar)$

$$\begin{aligned} H_1 \otimes \mathbb{1} e^{-iH^\hbar t}\psi &= H_1 \otimes \mathbb{1} R(\nu, H^\hbar) e^{-iH^\hbar t}(H^\hbar + \nu)\psi \\ &= (H_1 R(\frac{\nu}{2}, H_1)) \otimes R(\frac{\nu}{2}, H_2)(R(\frac{\nu}{2}, H_1) \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes R(\frac{\nu}{2}, H_2)) \\ &\quad (K^\hbar R(\nu, H_0) + 1)^{-1} e^{-iH^\hbar t}(H^\hbar + \nu)\psi. \end{aligned}$$

Da nach obigen Argumenten $H_1 R(\frac{\nu}{2}, H_1)$ beschränkt ist, folgt die Stetigkeit auf $D(H^\hbar)$. □

Das Argument für den Beweis der nun folgenden Aussage geht auf einen Vorschlag von R. Schnaubelt zurück und verwendet ein Resultat seiner Habilitationsschrift, [Sch99], das die klassische Wohlgestelltheit des nicht-autonomen Cauchy-Problems benötigt.

4.2.3 Satz. *Es gilt* s-$\lim_{\hbar \to 0} \mathcal{U}_x^\hbar(t, s) = \mathcal{U}_x(t, s)$ *gleichmäßig auf kompakten Teilintervallen von* $[-T, T]$.

Beweis. Definiere $E := \{f \in C([-T, T], L^2(\mathbb{R}) \otimes L^2(\mathbb{R})) | f(-T) = 0\}$ ausgestattet mit der Supremumsnorm. Dabei beachte man, dass auf Y die Erzeuger $H^\hbar(t)$ gleichmäßig in $t \in \mathbb{R}$ gegen $H(t)$ konvergieren. Wir verwenden Howlands Methode, die in Kapitel 2 eingeführt wurde und definieren für $f \in E$, $s \in (-T, T]$, $t \geq 0$ mit $s - t \in (-T, T]$ eine Abbildung

$$(\mathcal{T}_x(t) f(s) := \mathcal{U}_x(s, s - t) f(s - t)$$

und $(\mathcal{T}_x(t)f)(s) = 0$ sonst. Dann ist $\mathcal{T}_x$ eine stark stetige Halbgruppe[9] mit Erzeuger $Gf := -f' + H(\cdot)f$ auf dem Definitionskern

$$F := \{f \in C^1([-T,T], L^2(\mathbb{R}) \otimes L^2(\mathbb{R})) | f(t) \in Y, f, f', A(\cdot)f \in E\}.$$

Diese Behauptung ist eine Konsequenz von Proposition 1.14, [Sch99]. Genauso erklären wir $\mathcal{T}_x^\hbar(t)$ und aus Lemma 4.2.2 folgt nach demselben Resultat, dass der Erzeuger auf dem Definitionskern F die Form $G^\hbar f := -f' + A^\hbar(\cdot)f$ hat. Klar ist $\|\mathcal{T}_x(t)\| \leq 1$ auf Grund der Unitarität. Dann gilt für $f \in F$

$$\begin{aligned} \|(G^\hbar f - Gf)(t)\| &= k\sqrt{\hbar}\|q(t) \otimes qf(t)\| \\ &\leq k\sqrt{\hbar} \sup_{t\in[-T,T]} \|q(t) \otimes qf(t)\|. \end{aligned}$$

Bilden des Supremums auf der linken Seite der Ungleichung zeigt die Konvergenz $G^\hbar f \to Gf$ in der Norm von E. Der Satz von Trotter-Kato, Theorem 3.4.5 [Paz83], liefert die auf $[-T,T]$ gleichmäßige Konvergenz $\text{s-lim}_{\hbar\to 0} \mathcal{T}_x^\hbar(t) = \mathcal{T}_x(t)$. D.h. insbesondere konvergiert $\mathcal{T}_x^\hbar(t)f(s+t)$ gleichmäßig in s gegen $\mathcal{T}_x(t)f(s+t)$. Setzt man nun $f(s) = x$ für $s > a + \epsilon$, ϵ beliebig klein, so folgt die Behauptung. □

Bemerkung. Natürlich kann man dieses Resultat verallgemeinern, indem man die benutzten Eigenschaften des von uns diskutierten Systems, also im Wesentlichen die H_0-Beschränktheit der Kopplung, abstrakt formuliert. Da dies aber keine weitere Einsicht bringt, verzichten wir darauf. Auch hier gilt wieder eine Verallgemeinerung des Satzes von Hepp im Sinn von Korollar 3.3.7.

Bei dem vorgestellten Resultat erkennt man sehr deutlich, welchen physikalischen Hintergrund die Voraussetzungen des als Satz von Yosida 4.2.1 zitierten Theorems entsprechen. Der Limes existiert im Wesentlichen dann, wenn die Kopplung der beiden Systeme schwach ist. Es wäre interessant zu sehen was im Fall von stärkeren Kopplungen bei dem Grenzübergang passiert. Dies ist in der vorliegenden Arbeit noch nicht geleistet worden und vermutlich auch mit gewissen Schwierigkeiten verbunden, wie man an obiger Diskussion sehen kann.

[9] Eine stark stetige Halbgruppe (C_0-Halbgruppe), wird genauso definiert wie eine C_0-Einparametergruppe, der Parameterbereich verkleinert sich lediglich von $\mathbb{R}$ zu $\mathbb{R}^+$, [Paz83].

Kapitel 5

Zusammenfassung und Ausblick

Die vorliegende Diplomarbeit beschäftigt sich mit den physikalischen Aspekten des nicht-autonomen Cauchy-Problems. Ein Grund für die Relevanz dieser Problemstellung ist die Hoffnung, durch die Lösung des nicht-autonomen Cauchy-Problems lokale Streumatrizen für wechselwirkende Quantenfeldtheorien wie in [WMB04] zu konstruieren. Ein anderer wichtiger Aspekt ist das Verständnis eines Übergangs vollständig quantisierter physikalischer Theorien zu Quantentheorien, die an ein klassisches System gekoppelt sind. Ein solcher Fall liegt in der Quantenfeldtheorie auf gekrümmten Raumzeiten vor.
In unserer Arbeit ließen wir uns von der Vorstellung leiten, dass eine physikalisch motivierte Konstruktion einer zeitabhängigen Dynamik eine bessere Einsicht in die Bedingungen der Lösbarkeit dynamischer Probleme bietet.
Ausgangspunkt unserer Untersuchungen waren zwei gekoppelte Systeme, deren Zeitentwicklung autonom ist. Wir identifizierten einen Limes, in dem eines der beiden Systeme frei wird und für das zweite System die Bedeutung einer äußeren Zeitabängigkeit erhält. Der identifizierte Limes ist ein partieller klassischer Limes, der nach einer Methode von Hepp durchgeführt wird.
Eine Darstellung einer modernen Quantisierungstheorie wird gegeben und die Methode von Hepp wird in diesen konzeptionellen Rahmen eingeordnet. Es zeigt sich, dass die vorgestellten Konzepte der Quantisierung erweitert werden müssen um für eine größere Klasse von relevanten Beispielen der Physik anwendbar zu sein.
An Hand eines explizit lösbaren Beispiels wird der partielle klassische Limes der autonomen Dynamik motiviert. In diesem Grenzfall ergibt sich wiederum eine autonome Dynamik des Gesamtsystems, in dessen Bewegungsgleichung der Ursprung der Schwierigkeiten bei der Auswahl der Definitionsgebiete im nicht-autonomen Cauchy-Problem sichtbar wird. Howlands Formalismus wird in das allgemeinere Prinzip der von uns konstruierten asymptotisch offenen Systeme eingeordnet.

Der partielle Hepp Limes wird in dem dargestellten konzeptionellen Rahmen der Quantisierungstheorie formuliert und durchgeführt. Die Klasse von beschränkten Erzeugern der Dynamik des Teilsystems wird mit Hilfe des Funktionalkalküls oder alternativ mittels der Weylquantisierung definiert und die Existenz des partiellen Limes wird gezeigt. In diesem Sinn wird das Resultat von Hepp verallgemeinert. Es zeigt sich, dass die Dynamik natürlich als Automorphismengruppe auf der Algebra der Observablen definiert ist.
Ein aus der Laserphysik motiviertes Beispiel dient als erster Testfall für eine Durchführung des partiellen Hepp Limes in physikalisch relevanten Situationen. Die Eigenschaften des Systems werden im Detail diskutiert und eine Konstruktion eines nicht-autonomen Systems im Sinne des vorigen Kapitels wird durchgeführt. Auch hier ergibt sich eine Verallgemeinerung der Heppschen Methode. Außerdem erkennt man den engen Zusammenhang der technischen Forderung nach klassischer Wohlgestelltheit des nicht-autonomen Cauchy-Problems und der physikalischen Eigenschaft der schwachen Kopplung zweier Systeme.
Die Resultate dieser Arbeit geben einen physikalischen Ansatzpunkt für die Analyse der Derivationen nicht-autonomer Systeme. Dabei scheint eine Untersuchung des Problems im Rahmen von C^*-Algebren sinnvoll. Insbesondere ist zu klären, ob eine allgemeine Charakterisierung für die Existenz des partiellen klassischen Limes zu finden ist. Solche Bedingungen können vermutlich als notwendig für das physikalische nicht-autonome Cauchy-Problem angesehen werden. Grundsätzlich stellt sich die Frage nach der unitären Implementierbarkeit der Dynamik asymptotisch offener Quantensysteme.

Literaturverzeichnis

[BFS98] V. Bach, J. Fröhlich, and I.M. Sigal. Quantum electrodynamics of confined non-relativistic particles. *Adv. in Math.*, pages 137:299–395, 1998.

[Bla00] Etienne Blanchard. A few remarks on exact c(x)-algebras. 2000.

[Don81] M. Donald. The classical field limit of p (phi) in two-dimensions quantum field theory. *Commun. Math. Phys.*, 79:153–165, 1981.

[Fre77] Klaus Fredenhagen. Automorphisms and derivations of the CAR-algebra. *Comm. Math. Phys.*, pages 52:255–266, 1977.

[Fre99] Klaus Fredenhagen. Quantenfeldtheorie auf gekrümmter Raumzeit, 1999. Vorlesungsskript.

[Fre00] Klaus Fredenhagen. Quantenmechanik II, 2000. Vorlesungsskript.

[GJa] J. Glimm and Arthur M. Jaffe. Collected papers. vol. 1: Quantum field theory and statistical mechanics. expositions. Boston, Usa: Birkhaeuser (1985) 418 P. (Contemporary Physicists).

[GJb] J. Glimm and Arthur M. Jaffe. Collected papers. vol. 2: Constructive quantum field theory. selected papers. Boston, Usa: Birkhaeuser (1985) 533 P. (Contemporary Physicists).

[GJK+96] D. Giulini, E. Joos, C. Kiefer, J. Kupsch, I.O. Stamatescu, and H.D. Zeh. *Decoherence and the Appearance of a Classical World in Quantum Theory.* Springer, Berlin, Germany; New York, U.S.A., 1996.

[God75] A.N. Godunov. Peano's theorem in Banach spaces. *Funct. Anal. Appl.*, 9:53–55, 1975.

[Hep74] Klaus Hepp. The classical limit for quantum mechanical correlation functions. *Commun. Math. Phys.*, 35:265, 1974.

[How74] James S. Howland. Stationary scattering theory for time-dependent hamiltonians. *Math. Ann.*, 207:315–335, 1974.

[JP95] V. Jakšić and C.A. Pillet. On a model for quantum friction. I: Fermi's golden rule and dynamics at zero temperature. *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor.*, 62, no. 1:47–68, 1995.

[JP96] V. Jakšić and C.A. Pillet. On a model for quantum friction, ii. fermi's golden rule and dynamics at positive temperature. *Comm. Math. Phys.*, 176,3:619–644, 1996.

[KR83] Richard V. Kadison and John R. Ringrose. *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras*, volume I. Academic Press, 1983.

[KR86] Richard V. Kadison and John R. Ringrose. *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras*, volume II. Academic Press, 1986.

[Lan98] N.P. Landsman. *Mathematical Topics Between Classical and Quantum Mechanics*. Springer, 1998.

[Lau05] Reiner Lauterbach. Gewöhnliche Differentialgleichungen, 2005. Vorlesungsskript.

[LM96] E. Langmann and J. Mickelson. Scattering matrix in external field problems. *J. Math. Phys.*, pages 37:3933–3953, 1996.

[Paz83] Ammon Pazy. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. Springer, 1983.

[RS72] Michael Reed and Barry Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics*, volume I: Functional Analysis. Academic Press, 1972.

[RS75] Michael Reed and Barry Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics*, volume II: Fourier Analysis, Self-Adjointness. Academic Press, 1975.

[Sch99] Roland Schnaubelt. Exponential dichotomy of non-autonomous evolution equations. Tübingen, 1999. Habilitationsschrift.

[Sch01] Tobias Schlegelmilch. Howlands Formalismus in der zeitabhängigen Quantentheorie. Master's thesis, Universität Hamburg, 2001.

[Sch05] Tobias Schlegelmilch. *Local scattering operators for $P(\phi_2)$ models and the time-dependent Schroedinger equation.* PhD thesis, Universität Hamburg, 2005.

[Sim71] Barry Simon. *Quantum Mechanics defined as Quadratic Forms.* Princeton University Press, 1971.

[Wer05] Dirk Werner. *Funktionalanalysis.* Springer, 5. edition, 2005.

[WMB04] W.F. Wrezinski, L.A. Manzoni, and O. Bolina. Existence of the bogoliubov $S(g)$ operator for the $(:\phi^4:)_2$ quantum field theory. *J. Math. Phys.*, pages 45:2579–2593, 2004.

[Yos66] Kôsaku Yosida. *Functional Analysis.* Springer, 1966.

Danksagung

An erster Stelle möchte ich mich sehr gerne bei Herrn Fredenhagen für die interessante Aufgabenstellung und seine stets geduldige Betreuung bedanken. João Barata bin ich für seine wichtigen Literaturhinweise und sein Interesse und Roland Schnaubelt für seinen Vorschlag sehr dankbar. Darüber hinaus möchte ich Dana Williams und Klaas Landsman danken.
Auch den Mitgliedern der Gruppe „Algebraische Quantenfeldtheorie" möchte ich meinen herzlichen Dank ausdrücken. Die Bereitschaft zu hilfreichen und interessanten Diskussionen war eine der schönsten Erfahrungen während meiner Diplomarbeit. Besonders möchte ich Martin Porrmann, Pedro Ribeiro, Claudio Dappiaggi, Nicola Pinamonti, Thomas Hack, Diana Kaminski, Bruno Chilian, Heiner Olbermann und Tobias Schlegelmilch danken.
Bedanken möchte ich mich auch bei Juliane Grossehelweg, Rolf Kappl, Thomas Creutzig und Sebastian Peters für Ihre Hilfe beim Korrigieren dieser Arbeit. Juliane möchte ich für ihr Verständnis danken.
Ohne die uneingeschränkte Unterstützung meiner Eltern wäre mein Studium nicht möglich gewesen. Ihnen gilt mein tiefer Dank.

Erklärung gemäß der Diplomprüfungsordnung

Ich versichere, dass ich diese Arbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe. Ich gestatte die Veröffentlichung meiner Arbeit.

Hamburg, den 30.01.2008

Matthias Westrich