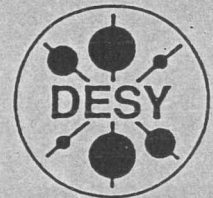


*Z* *aus*  
DEUTSCHES ELEKTRONEN-SYNCHROTRON

DESY-THESIS-1998-001

ITP-UH 03/98

Februar 1998

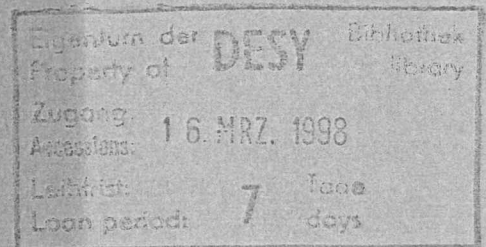


\*X1998-00491\*

Effektive Wirkungen für QCD  
bei hoher Temperatur

von

F. Flechsig



NOTKESTRASSE 85 - 22607 HAMBURG

DESY behält sich alle Rechte für den Fall der Schutzrechtserteilung und für die wirtschaftliche Verwertung der in diesem Bericht enthaltenen Informationen vor.

DESY reserves all rights for commercial use of information included in this report, especially in case of filing application for or grant of patents.

**"Die Verantwortung für den Inhalt dieses  
Internen Berichtes liegt ausschließlich beim Verfasser"**



ITP-UH 03/98  
DESY-THESIS-1998-001  
February 1998

# Effektive Wirkungen für QCD bei hoher Temperatur

Vom Fachbereich Physik der Universität Hannover  
zur Erlangung des Grades  
Doktor der Naturwissenschaften

— Dr. rer. nat. —

genehmigte Dissertation  
von

**Dipl. Phys. Fritjof Flechsig** ✓

geb. am 17. Mai 1969 in Hildesheim

1998

Rektor: Prof. Dr. H. Schön, Universität Hannover  
Korreferent: Prof. Dr. M. Reuter, Universität Mainz  
Tag der Promotion: 3. Februar 1998

FTF-UH 03/98  
DISS-THESIS-1998-001  
Februar 1998

# Effektive Wirkungen für QCD bei hoher Temperatur

Vom Fachbereich Physik der Universität Hannover  
zur Erlangung des Grades  
Doktor der Naturwissenschaften

— Dr. rer. nat. —

genehmigte Dissertation  
von

✓  
Dipl. Phys. Fritjof Flechsig

geb. am 17. Mai 1969 in Hildesheim

1998

Referent: Prof. Dr. H. Schulz, Universität Hannover  
Koreferent: Prof. Dr. M. Reuter, Universität Mainz  
Tag der Promotion: 3. Februar 1998



## Überblick

Vor fast zehn Jahren ist es gelungen, eine vernünftige Störungsreihe für Eichfeldtheorien bei hoher Temperatur aufzustellen. Mit Hilfe der sogenannten Braaten-Pisarski Resummation konnten etliche bis dahin nicht zugängliche Größen, wie z.B. die Dämpfung von Elementaranregungen des Quark-Gluon Plasmas, bestimmt werden. Jedoch blieben noch Fragen offen. Infrarot-Divergenzen bedingt durch das Fehlen einer „magnetischen Masse“ sind nicht vollständig verstanden. Ebenso nicht die kollinearen Divergenzen in Größen, welche von äußeren lichtartigen Impulsen abhängen. Diese Arbeit versucht, das letztere Problem zu lösen.

Es wird eine verbesserte Braaten-Pisarski-Wirkung vorgestellt, welche keine kollinearen Singularitäten mehr enthält. Dies wird durch die zusätzliche Resummation einer bestimmten „asymptotischen“ Masse erreicht. Der Beweis gelingt, daß eine solche Resummation bei lichtartigen Impulsen zwingend notwendig ist. Die Eindeutigkeit der neuen Wirkung wird diskutiert. Schließlich wird die bekannte Rechnung zur „Weichen Photon-Produktionsrate“ des Quark-Gluon Plasmas wiederholt und anstelle des alten, divergenten Resultates ein Endliches erzielt.

## Abstract      Effective Actions for QCD at High Temperature

Nearly ten years ago Braaten and Pisarski succeeded to establish a reliable perturbation series for gauge theories at high temperature. With their resummation scheme several up to that point unaccessible quantities could be calculated, e. g. the damping of excitations in a quark-gluon-plasma. But a few problems remained. Infrared divergencies due to the lack of a 'magnetic mass' are not completely understood. As well collinear divergencies in quantities which depend on lightlike momenta. This Thesis solves the latter problem.

An improvement of the action by Braaten and Pisarski is presented which contains no more collinear singularities. This is achieved by an additional resummation of a certain 'asymptotic' mass. It is proved that such a resummation is mandatory whenever outer momenta are light-like. The uniqueness of the action is discussed. Finally the calculation of the real soft photon-productionrate is re-investigated and instead of the know singular result a finite one is obtained.

## Schlagworte / Keywords

Quantenfeldtheorie, QCD, hohe Temperatur, Braaten-Pisarski Resummation, kollineare Singularitäten.

Quantum Field Theory, QCD, high Temperature, Braaten-Pisarski Resummation, collinear Singularities.

# Überblick

Vor fast zehn Jahren ist es gelungen, eine wesentliche Voraussetzung für die Erreichung der hohen Temperatur zu erfüllen. Mit Hilfe der sogenannten "Feynman-Hellmann-Relation" konnten die Eigenschaften der Quark-Gluon-Plasma (QGP) bestimmt werden. Jedoch blieben noch Fragen offen. Insbesondere bedingt durch die Existenz einer "magnetischen Masse" sind nicht vollständig verstanden. Hierzu sind die kollisionsfreien Quarks in Gluonen, welche von äußeren Lichtstrahlen abhängen. Diese Arbeit versucht, das letztere Problem zu lösen.

Es wird eine verbesserte Feynman-Hellmann-Relation vorgeschlagen, welche keine Kollisions-Singularitäten mehr enthält. Dies wird durch die zusätzliche Renormierung einer bestimmten "asymptotischen" Masse erreicht. Der Beweis zeigt, dass eine solche Renormierung bei nichtverschwindenden Impulsen zwingend notwendig ist. Die Eindeutigkeit der nun Wirkung wird diskutiert. Schließlich wird die bekannte Rechnung zur "Weichen Photon-Produktion" des Quark-Gluon-Plasma wiederholt und zusätzlich das alte, divergierende Verhalten ein höheres ersetzt.

## Abstract

Nearly ten years ago Braaten and Pisarski succeeded to establish a reliable perturbation series for gauge theories at high temperature. With their renormalization scheme several up to that point uncalculable quantities could be calculated, e.g. the damping of excitations in a quark-gluon plasma. But a few problems remained. Infrared divergences due to the lack of a 'magnetic mass' are not completely understood. As well collinear divergences in quantities which depend on lightlike momenta. This Thesis solves the latter problem.

An improvement of the action by Braaten and Pisarski is presented which contains no more collinear singularities. This is achieved by an additional renormalization of a certain 'asymptotic' mass. It is proved that such a renormalization is mandatory whenever outer momenta are light-like. The uniqueness of the action is discussed. Finally the calculation of the real soft photon-production is re-investigated and instead of the known singular result a finite one is obtained.

## Schluszworte / Keywords

Quantenfeldtheorie, QCD, hohe Temperatur, Braaten-Pisarski Renormierung, Kollisions-Singularitäten  
 Quantum Field Theory, QCD, high Temperature, Braaten-Pisarski Renormalization, collinear singularities



# Inhaltsverzeichnis

Überblick	1
<b>1 Einleitung</b>	<b>5</b>
<b>2 Grundlagen</b>	<b>7</b>
2.1 Antwort des Plasmas auf kleine Störungen	7
2.2 Anregungen im Gluon-Plasma	9
2.3 Resummation nach Braaten und Pisarski	11
2.4 Die erste Korrektur zur Plasmon-Dispersion	14
2.5 Magnetische Masse	16
<b>3 Das Plasmon eines Modellsystems</b>	<b>19</b>
3.1 Kollineare Singularitäten am Lichtkegel	20
3.2 Resummation asymptotischer Massen	22
3.3 Plasmon-Frequenz am Lichtkegel	25
3.4 Halbklassische Beschreibung	26
<b>4 Das QCD-Plasmon am Lichtkegel</b>	<b>29</b>
4.1 Die führende Ordnung am Lichtkegel	30
4.2 Die Korrektur $\delta\Pi$	31
4.3 Beiträge von HTL-Vertizes	33
4.4 Konsistente Störungsreihe am Lichtkegel	35
<b>5 Auswertung der HTL-Vertex-Anteile</b>	<b>37</b>
5.1 Die Frequenzsumme	38
5.2 IR-Anteil von $\Sigma$	39
5.3 IR-Anteil von $\Upsilon$	40

5.4	Zwischenresultat	44
5.5	Der Imaginärteil mit IR-cutoff	44
5.6	IR-unempfindliche Anteile	46
5.7	Endresultat	51
<b>6</b>	<b>Die verbesserte effektive Wirkung</b>	<b>53</b>
6.1	Skalare Elektrodynamik	53
6.2	QCD ohne Quarks	55
6.3	Einbau von Fermionen	57
6.4	Eindeutigkeit der effektiven Wirkung	59
<b>7</b>	<b>Photon-Produktionsrate</b>	<b>63</b>
7.1	Gleichgewichtsrate	63
7.2	Produktion harter Photonen	65
7.3	Produktion weicher Photonen	67
<b>8</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>73</b>
<b>A</b>	<b>Der Eichboson-Propagator</b>	<b>75</b>
<b>B</b>	<b>Der Fermion-Propagator</b>	<b>77</b>
<b>C</b>	<b>Die Korrektur <math>\delta\Pi</math></b>	<b>79</b>
<b>D</b>	<b>Winkelintegrale</b>	<b>81</b>
<b>E</b>	<b>Details zu Kapitel 5</b>	<b>83</b>
E.1	Asymptotik des Imaginärteils von $\Upsilon_0^0$	83
E.2	Zu Integrationen in $\Upsilon_0^1$	84
E.3	Das gekoppelte Winkelintegral	85
<b>F</b>	<b>Korrelationsfunktion zweier Ströme</b>	<b>87</b>
	Literaturverzeichnis	89



# Kapitel 1

## Einleitung

Die Feldtheorie bei endlicher Temperatur erlebt seit einigen Jahren einen Aufschwung. Insbesondere die Vorhersage eines neuartigen Zustandes der Materie, des sogenannten Quark-Gluon-Plasmas (QGP) [1], hat das Interesse der physikalischen Welt geweckt. Viele Rechnungen, meist auf dem Gitter [2], haben mittlerweile die Existenz des QGP mit hoher Wahrscheinlichkeit bestätigt. In naher Zukunft werden Experimente (RHIC in Brookhaven, LHC am CERN) starten, welche endgültig den Existenzbeweis liefern sollen.

Die Quantenchromodynamik (QCD) ist diejenige Theorie, welche der Bildung des QGP zugrunde liegt [3, 4]. Sie ist eine nichtabelsche Feldtheorie mit der Eichgruppe  $SU(N)$ ,  $N = 3 =$  Anzahl der Farben, und enthält  $(N^2 - 1)$  Eichfelder, genannt Gluonen, sowie  $N_f$  farbige Spin  $\frac{1}{2}$  Quarks. Die Anzahl der Flavours  $N_f$  wird hier keine Rolle spielen,  $N_f = 1$ . Wie in verwandten Theorien, hängt in der QCD die Kopplungskonstante  $g$  von derjenigen Energieskala ab, bei welcher die elementaren Teilchen wechselwirken.  $g(E)$  hat die bemerkenswerte Eigenschaft, für große Energien ( $\gg 200\text{MeV}$ ) klein zu werden, was die Grundlage für einen störungstheoretischen Ansatz schafft. Bei kleinen Energien ist  $g$  groß, und eine Störungsreihe ist zwangsläufig nicht möglich.

Quarks und Gluonen findet man in der Natur nicht als freie Teilchen [5], sondern stets in gebundenen Zuständen (Confinement). Bringt man jedoch ein Ensemble von Quarks und Gluonen in Kontakt mit einem Wärmebad, so wird bei genügend hoher Temperatur  $T$  die mittlere freie Weglänge durch die zunehmende Anzahl der Teilchen kleiner als der Radius der Bindungszustände: Die Teilchen entkoppeln, und die Thermodynamik wird von freien Quarks und Gluonen bestimmt [6]. Dies ist die Phase des QGP. Man erwartet den Phasenübergang von Confinement zu QGP bei  $T \approx 150\text{MeV}$ .

Im Plasma beträgt die mittlere Energie der Teilchen etwa  $T$  ( $k_b = \hbar = c = 1$ ). Bei hoher Temperatur ist demnach die Kopplung  $g$  klein, und störungstheoretische Methoden sind anwendbar. Dazu muß  $T$  jedoch einige Größenordnungen über der Temperatur des Phasenüberganges liegen. Eine Störungsrechnung kann daher für Experimente am Phasenübergang bestenfalls tendenzielle Vorhersagen liefern. Für Theoretiker jedoch ist die Hochtemperaturphase eine aufregende Bereicherung:  $T$  liefert eine Parameterachse, an deren oberen Ende die komplexen Strukturen der QCD untersucht werden können. Die QCD ist dort lösbar (Im Gegensatz z.B zu  $N \rightarrow \infty$ ).

Die vorliegende Arbeit behandelte die Aufstellung einer konsistenten Störungstheorie für QCD bei hoher Temperatur. Anders als bei wenig-Teilchen Prozessen, bilden sich im thermodynamischen Ensemble neben der Temperatur diverse physikalische Skalen aus [7], wie z.B. die chromoelektrische ( $\sim gT$ ) oder -magnetische Abschirmmasse (wahrscheinlich  $\sim g^2T$ ). Je kleiner eine Skala ist, desto schwieriger ist es, die übliche Störungsreihe auf konsistente Aussagen hin umzustrukturieren.

Braaten und Pisarski ist es 1989 gelungen [8], mittels eines ausgeklügelten Resummationsverfahrens die Physik der Skala  $gT$  richtig zu beschreiben. Es konnten wichtige Größen, wie z.B. die Dämpfung [9] kollektiver Anregungen im Plasma, erstmals bestimmt werden. Zahlreiche weitere Arbeiten behandelten den Druck des Plasmas [10, 11], Korrekturen zur Plasma-Dynamik [12] oder die Photon-Produktionsrate [13, 14]. Auf der Skala  $g^2T$  steht eine konsistente Störungsreihe jedoch noch aus, wahrscheinlich wird sie sogar mit den bekannten Methoden nicht zu finden sein [15, 16]. Dennoch gibt es für die magnetische Masse einige ernstzunehmende Abschätzungen [17, 18].

Auch auf der chromoelektrischen Skala  $gT$  gibt es noch offene Fragen. Zum Beispiel verlangen Infrarotdivergenzen nach detailliertem Wissen aus der magnetischen Skala [19]. Ferner sind immer dann, wenn äußere Impulse lichtartig werden, kollineare Divergenzen zu behandeln [20, 21, 22]. Wie man mit einer zusätzlichen Resummation letztere regulieren kann, ist das Hauptthema dieser Arbeit. Das Ziel ist ein verbessertes Braaten-Pisarski Verfahren in der Form einer effektiven Wirkung.

Zwei physikalische Meßgrößen, welche mit Schwierigkeiten durch kollineare Singularitäten belastet sind, werden exemplarisch diskutiert. Zum einen ist die Photon-Produktionsrate des QGP eine wichtige Signatur beim experimentellen Nachweis des Plasmas. Die Rate für Photonen der Energie  $\sim T$  konnte mit Hilfe der Braaten-Pisarski Resummation bestimmt werden [14]. Für kleinere Energien  $\sim gT$  findet man jedoch trotz Resummation ein logarithmisch divergentes Resultat [20].

Die zweite Größe ist die Dispersionskurve  $\bar{\omega}_\ell(q)$  des Plasmons, der kollektiven Anregung im Plasma bei der Skala  $gT$ . Für  $q \sim g \ln(\frac{1}{g})T$  nähert sie sich dem Lichtkegel an,  $\bar{\omega}_\ell \approx q$ . Dort wächst in der Störungsreihe  $\bar{\omega}_\ell = \omega_\ell + \delta\omega_\ell$  die Korrektur  $\delta\omega_\ell$  bedingt durch kollineare Singularitäten stärker mit dem Abstand vom Lichtkegel an als  $\omega_\ell$ : Die Reihe bricht zusammen [21, 22]. Die Diskussion der Plasmondispersion wird den Hauptteil der Arbeit einnehmen. Die existierenden (und berechenbaren) Terme der Störungsreihe liefern ein Kriterium, welches ein verbessertes Braaten-Pisarski Verfahren erfüllen muß: Die Konsistenz am Lichtkegel ist wiederherzustellen. Die Photon-Produktionsrate liefert keine derartige Entscheidungshilfe.

Kapitel 2 vermittelt die Grundlagen, die zum Verständnis der folgenden Diskussion notwendig sind. Kapitel 3 zeigt am Beispiel der Skalaren Elektrodynamik, wie die Konsistenz der Störungsreihe durch die Resummation einer bestimmten asymptotischen Masse hergestellt werden kann. In Kapitel 4 und 5 werden die Methoden von der SED auf die QCD übertragen. Es wird gezeigt, daß auch im nichtabelschen Fall die asymptotische Masse die Konsistenz reparieren kann. Schließlich bringt Kapitel 6 das gewonnene Resummationsverfahren in die elegante Form einer effektiven Wirkung. Die so gewonnene Wirkung wird in Kapitel 7 zur Bestimmung der Photon-Produktionsrate verwendet. Teile der Arbeit, insbesondere aus Kapitel 6, sind zusammen mit A. Rebhan veröffentlicht [23].



# Kapitel 2

## Grundlagen

Zum Verständnis der folgenden Kapitel werden einige Grundbegriffe benötigt. Die Darstellung ist knapp, für Details sei auf z. B. [7, 6, 24, 25] verwiesen. Abschnitt 2.1 zeigt, wie sich Spektren von elementaren Anregungen eines Systems im Gleichgewicht erhalten lassen. Abschnitt 2.2 diskutiert die Spektren eines Gluon-Plasmas. Das Resummationsverfahren nach Braaten und Pisarski wird in 2.3 vorgestellt und in 2.4 auf die Bestimmung der ersten Korrektur der Gluon-Plasma Spektren angewandt. Schließlich behandelt Abschnitt 2.5 die Problematik der magnetischen Masse.

### 2.1 Antwort des Plasmas auf kleine Störungen

Ein System mit Hamiltonian  $\mathcal{H}_0$  befinde sich zur Zeit  $t < t_0$  im thermischen Gleichgewicht. Der Mittelwert irgendeiner physikalischen Größe ist  $\langle Q \rangle_0 = \frac{1}{Z} \text{Sp } e^{-\beta \mathcal{H}_0} Q$ . Zur Spurbildung wird das vollständige System von  $\mathcal{H}_0$ -Eigenzuständen verwendet:  $\mathcal{H}_0 |i\rangle = E_i |i\rangle$ .

Zur Zeit  $t_0$  werde eine äußere, infinitesimale Störung  $\mathcal{H}_1(t)$  eingeschaltet. Die Zustände  $|i\rangle$  haben in Wechselwirkungs-Darstellung die Zeitabhängigkeit

$$|i(t)\rangle = e^{-i\mathcal{H}_0 t} |i\rangle - i e^{-i\mathcal{H}_0 t} \int_{t_0}^t dt' \mathcal{H}_1^{\text{WW}}(t') |i\rangle + \mathcal{O}(\mathcal{H}_1^2) \quad (2.1)$$

mit  $\mathcal{H}_1^{\text{WW}}(t) = e^{i\mathcal{H}_0 t} \mathcal{H}_1(t) e^{-i\mathcal{H}_0 t}$ . Der Erwartungswert von  $Q$  entwickelt sich ebenfalls mit der Zeit,

$$\langle Q(t) \rangle = \frac{1}{Z} \sum_i e^{-\beta E_i} \langle i(t) | Q^{\text{WW}}(t) | i(t) \rangle. \quad (2.2)$$

Die Verteilung der Zustände  $|i(t)\rangle$  ändere sich mit der Zeit nicht, d.h. die Relaxation des gestörten Systems ins Gleichgewicht sei sehr langsam. Mit anderen Worten sei das System während der Dauer der Störung vom Wärmebad abgekoppelt und verhalte sich wie ein quantenmechanisches Zustandsgemisch, welches keinen weiteren äußeren Einflüssen unterliegt.

Die Antwort des Systems  $\Delta Q(t) := \langle Q(t) \rangle - \langle Q \rangle_0$  auf die Störung  $\mathcal{H}_1(t)$  ist somit gegeben durch

$$\Delta Q(t) = i \int_{t_0}^t dt' \sum_i \frac{e^{-\beta E_i}}{Z} \langle i | [\mathcal{H}_1^{\text{WW}}(t'), Q^{\text{WW}}(t)] | i \rangle + \mathcal{O}(\mathcal{H}_1^2). \quad (2.3)$$

Als Beispiel betrachte man ein Gluon-Plasma (keine Quarks) im Gleichgewicht, beschrieben durch  $\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + \mathcal{L}_{\text{eich-fix}} + \mathcal{L}_{\text{geist}}$ . Es wird durch einen äußeren Quellenterm  $\mathcal{H}_1 = -\int d^3r A_\mu^a J^{a\mu}$  gestört. Eine mögliche Antwort des Systems ist

$$\Delta A_\mu^a(x) = -i \int_{-\infty}^t dt' \int d^3r' \sum_i \frac{e^{-\beta E_i}}{Z} \langle i | [A_\nu^b(x'), A_\mu^a(x)] | i \rangle J^{b\nu}(x'). \quad (2.4)$$

Wird der äußere Strom adiabatisch eingeschaltet,  $J(x) = e^{\epsilon t} j(x)$ , antwortet das System mit  $\Delta A(x) = e^{\epsilon t} a(x)$ . Den linearen Zusammenhang zwischen  $j(x)$  und  $a(x)$  nennt man „Lineare Antwort-Funktion“:  $a(x) = \int d^4x' \chi(x-x') j(x')$ .

$$\chi_{\mu\nu}^{ab}(x-x') = i \Theta(t-t') e^{-\epsilon(t-t')} \sum_i \frac{e^{-\beta E_i}}{Z} \langle i | [A_\mu^a(x), A_\nu^b(x')] | i \rangle. \quad (2.5)$$

Für die Fouriertransformierte  $\chi(Q)$  läßt sich eine spektrale Darstellung finden,  $Q = (\omega, \vec{q})$ :

$$\chi_{\mu\nu}^{ab}(Q) = \int dx \frac{\sigma_{\mu\nu}^{ab}(x, \vec{q})}{x - \omega - i\epsilon}. \quad (2.6)$$

mit

$$\sigma_{\mu\nu}^{ab}(x, \vec{q}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_{i,f} (e^{-\beta E_i} - e^{-\beta E_f}) \delta(x + E_i - E_f) \langle i | A_\mu^a(\vec{q}) | f \rangle \langle f | A_\nu^b(\vec{p}) | i \rangle. \quad (2.7)$$

An (2.6) ist insbesondere interessant, daß die gesamte  $\omega$ -Abhängigkeit von  $\chi$  explizit zu sehen ist.

Die Spektraldarstellung (2.6) ermöglicht einen Vergleich mit thermischen Greensfunktionen  $G_{\mu\nu}^{ab}(x) = \text{Sp} \frac{e^{-\beta \mathcal{H}}}{Z} \mathcal{T} A_\mu^a(x) A_\nu^b(0)$ .  $G$  kann auf der Matsubara-Kontur  $x = (-i\tau, \vec{r})$ ,  $0 \leq \tau < \beta$  ermittelt werden. Man erhält dort für die Fouriertransformierte,  $Q = (i\omega_n, \vec{q})$ ,  $\omega_n = 2\pi nT$ :

$$G_{\mu\nu}^{ab}(Q) = \int dx \frac{\sigma_{\mu\nu}^{ab}(x, \vec{q})}{x - i\omega_n} \quad (2.8)$$

mit genau der gleichen spektralen Dichte  $\sigma$  aus (2.7). Man kann den Zusammenhang der Linearen Antwort-Funktion  $\chi$  mit der Matsubara-Greensfunktion damit ablesen,

$$\chi(\omega, \vec{q}) = G(i\omega_n \rightarrow \omega + i\epsilon, \vec{q}). \quad (2.9)$$

Die Pole von  $\chi$  spielen eine besondere Rolle. Stört man das Plasma mit einem kurzen Impuls  $j_q(x) = j(\vec{q}) e^{i\vec{q}\vec{r}} \delta(t)$ , erhält man die Antwort

$$a(x) = j(\vec{q}) e^{i\vec{q}\vec{r}} \int \frac{dq_0}{2\pi} \chi(q_0, \vec{q}) e^{-iq_0 t}. \quad (2.10)$$

Sofern  $\chi$  keine ins Unendliche reichenden Schnitte hat, darf die Restintegration in der unteren komplexen Halbebene geschlossen werden. Das System kann somit nur dann auf die kurzzeitige Störung mit einer nichtverschwindenden Antwort  $a(x)$  reagieren, wenn  $\chi$  Polstellen hat, zum Beispiel

$$\chi(q_0, \vec{q}) = \frac{R(q_0, \vec{q})}{q_0 - \omega(\vec{q}) + i\gamma(\vec{q})}. \quad (2.11)$$

Die Antwort des Systems ist in diesem Fall

$$a(x) = i\Theta(t)j(\vec{q})R(\vec{q})e^{-i(\omega(\vec{q})t - \vec{q}\vec{r})}e^{-\gamma(\vec{q})t}. \quad (2.12)$$

Nach der Störung breiten sich also ebene Wellen im Plasma aus, man spricht von den elementaren Anregungen. Ihre Amplitude ist proportional zum Residuum des Poles von  $\chi$ , die Dispersionskurve ist durch  $\omega(\vec{q})$  und die Dämpfung durch  $\gamma(\vec{q})$  gegeben.

Mit dem oben hergeleiteten Zusammenhang von  $\chi$  mit dem Propagator  $G$  ist es möglich,  $\chi$  mit Hilfe üblicher diagrammatischer Entwicklung störungstheoretisch zu bestimmen. Die Pole von  $\chi$  sind dann als Pole des Propagators wiederzufinden.

## 2.2 Anregungen im Gluon-Plasma

Das Gluon-Plasma ist ein vereinfachtes System ohne Quarks. Es wird durch die Lagrangendichte [3, 4]  $\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} - \frac{1}{2\alpha}(\partial^\mu A_\mu^a) + \mathcal{L}_{\text{geist}}$  beschrieben, wobei  $F_{\mu\nu}^a$  der übliche nichtabelsche Feldtensor ist. Es wird in kovarianter Eichung eichfixiert, und die Metrik ist  $(+---)$ . Thermische Größen werden auf der Matsubara-Kontour [24] bestimmt, so daß die Null-Komponente von Viererimpulsen aus diskreten Werten besteht:  $Q = (i\omega_n, \vec{q})$ ,  $\omega_n = 2\pi nT$ . Der Propagator des freien Gluons ist

$$G_{\mu\nu}^o(Q) = A_{\mu\nu}(Q)\Delta_o(Q) + B_{\mu\nu}(Q)\Delta_o(Q) + \alpha D_{\mu\nu}(Q)\Delta_o(Q). \quad (2.13)$$

mit  $\Delta_o = 1/Q^2$ . Die Projektoren in (2.13) entstammen einer Basis symmetrischer Lorentz-Tensoren,

$$A = g - B - D, \quad B = \frac{V \circ V}{V^2}, \quad C = \frac{Q \circ V + V \circ Q}{\sqrt{2} Q^2 q}, \quad D = \frac{Q \circ Q}{Q^2} \quad (2.14)$$

mit  $V_\mu = Q^2 U_\mu - (UQ)Q_\mu$ .  $U = (1, \vec{0})$  ist die Vierergeschwindigkeit des ruhenden Wärmebades. Die üblichere Version  $G_o = \Delta_o(g_{\mu\nu} + (\alpha - 1)D_{\mu\nu})$  folgt aus (2.13) mittels  $A = g - B - D$ .

Der volle Propagator  $\overline{G}_{\mu\nu}$  ergibt sich als Lösung der Dyson-Gleichung

$$\overline{G}_{\mu\nu}(Q) = G_{\mu\nu}^o(Q) + G_{\mu\rho}^o \overline{\Pi}^{\rho\sigma}(Q) \overline{G}_{\sigma\nu}(Q),$$

wobei  $\overline{\Pi}_{\mu\nu}(Q)$  die Gluon-Selbstenergie ist. Nach Aufsummation der Selbstenergie in Einschleifen-Näherung (Abbildung 2.1) hat er die Gestalt

$${}^*G_{\mu\nu}(Q) = A_{\mu\nu}(Q)\Delta_t(Q) + B_{\mu\nu}(Q)\Delta_\ell(Q) + \alpha D_{\mu\nu}\Delta_o \quad (2.15)$$

$$\text{mit} \quad \Delta_{t,\ell} := \frac{1}{Q^2 - \Pi_{t,\ell}(Q)}, \quad \Pi_t := \frac{1}{2}\text{Sp} A\Pi, \quad \Pi_\ell := \text{Sp} B\Pi.$$



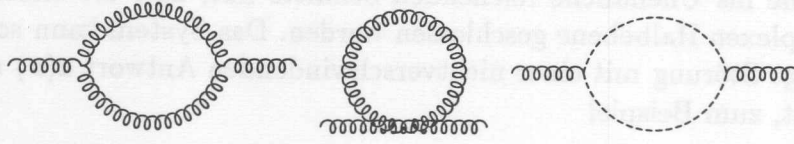


Abbildung 2.1: Die Diagramme zur führenden Ordnung der Gluon-Selbstenergie. Gluonen werden durch Spiralen dargestellt, Geister durch gestrichelte Linien.

Die Selbstenergie ist in dieser Näherung die Summe der Diagramme aus Abbildung 2.1.

$$\Pi_{\mu\nu}(Q) = 2g^2 N \int_P \Delta_o^- \Delta_o \left\{ -P^2 g_{\mu\nu} + 2P_\mu P_\nu \right\}. \quad (2.16)$$

Das Summationszeichen steht für  $\int_P := \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} T \sum_n$ . Der Index  $n$  läuft über alle Matsubara-Frequenzen. Die Bezeichnung der Impulse zieht sich durch die gesamte Arbeit:  $Q$  ist der äußere Impuls, über  $P$  wird summiert und  $K$  ist die Differenz  $Q - P$ . Das Minuszeichen am Propagator  $\Delta_o^-$  bezeichnet die Transformation  $P \rightarrow K$ , z.B. steht  $\Delta_o^-$  für  $1/K^2$ .

Wie oben gezeigt, beschreiben die Pole des Propagators  $\bar{G}$  Anregungen des Plasmas. Allerdings ist  $\bar{G}$  offensichtlich abhängig von der Wahl der Eichung. Es kann jedoch allgemein gezeigt werden [26, 6], daß die Pole von  $\Delta_t$  und  $\Delta_\ell$  eichunabhängig sind. Dort finden sich die (zwei) Dispersionsrelationen der physikalischen Anregungen. Der Pol von  $\Delta_t$  entspricht transversalen Anregungen. Zur Vereinfachung spricht man weiterhin von Gluonen, obwohl ihre Dispersionsrelation natürlich von der eines freien Gluons abweicht. Der Pol von  $\Delta_\ell$  beschreibt eine longitudinale Anregung des Plasmas, das sogenannte Plasmon. Es ist eine kollektive Mode, welche bei  $T = 0$  nicht existiert.

Beide Dispersionskurven entwickeln bei kleinen Impulsen ein interessantes Verhalten. Für  $Q \sim T$  ergibt sich aus (2.15) die triviale Lösung  $\omega = q$ , denn die Selbstenergie  $\Pi \sim g^2 T^2$  ist in diesem Fall nur eine Korrektur. Das ändert sich, wenn  $Q \sim gT$ . Dann haben  $\Pi$  und  $Q^2$  die gleiche Größenordnung und  $\Pi$  darf nicht mehr vernachlässigt werden. Die Dispersionskurven ergeben sich als (komplexe) Lösungen  $\Omega_{t,\ell}$  von

$$\Omega_{t,\ell}^2 - q^2 = \Pi_{t,\ell}(Q_o, q) \quad \text{mit} \quad Q_o = \Omega + i\varepsilon, \quad (2.17)$$

wobei der Realteil von  $\Omega = \omega - i\gamma$  die Frequenz und der Imaginärteil die Dämpfung der entsprechenden Anregung ist. In führender Ordnung sind die  $\Omega_{t,\ell}(q) = \omega_{t,\ell}(q)$  reell. Beide Kurven beginnen bei dem gleichen Wert,  $\omega_{t,\ell}^2(q=0) = m^2 = g^2 NT^2/9$ , der sogenannten Plasma-Frequenz. Für  $q \neq 0$  unterscheiden sie sich. Die transversale Kurve nähert sich bei  $q \rightarrow \infty$  der Form  $\omega_t^2 = q^2 + m_\infty^2$  mit einer thermischen asymptotischen Masse  $m_\infty^2 = 3m^2/2 = g^2 NT^2/6$ . Der longitudinale Ast nähert sich exponentiell mit  $q \rightarrow \infty$  dem Lichtkegel  $\omega_\ell = q$ . Dort verschwindet die longitudinale Anregung, denn das Residuum wird exponentiell mit  $q \rightarrow \infty$  klein. Ein Plot der Kurven findet sich in Anhang A.

Die Dämpfungen  $\gamma_{t,\ell}$  sollten sehr viel kleiner als die Frequenzen  $\omega_{t,\ell}$  sein, ansonsten könnte man schwerlich von Anregungen des Plasmas reden. Gleichung (2.17) mit  $\Pi$  in

führender Ordnung liefert verschwindende Dämpfungen  $\gamma_{t,\ell}$ . Erst die Korrektur zur Selbstenergie liefert endliche Werte, so daß  $\gamma \sim g^2 T \ll \omega$  gilt, siehe (2.52).

Die zwei Impulsskalen  $T$  und  $gT$  werden im folgenden streng unterschieden. Die Skala  $Q \sim T$  heißt „hart“, und die Skala  $Q \sim gT$  heißt „weich“. Von nun an sei der äußere Impuls stets weich, denn dort findet sich die interessante Physik. Die Beschränkung auf die weiche Skala ermöglicht gewisse Vereinfachungen bei der Auswertung von (2.16), die sogenannten Hard-Thermal-Loop Näherungen. Der führende Anteil der Summation kommt von harten  $P$ , so daß  $P^2 \gg Q^2$  gilt. Sowohl im Zähler von (2.16) als auch im Nenner wird entsprechend genähert. Damit erhält  $\Pi$  die einfache und sehr nützliche Form

$$\Pi_{\mu\nu}(Q) = 3m^2 \left( U_\mu U_\nu - \int_\Omega \frac{(UQ)}{(YQ)} Y_\mu Y_\nu \right) \quad \text{mit} \quad Y = (1, \vec{e}). \quad (2.18)$$

Das Winkelintegral  $\int_\Omega := \frac{1}{4\pi} \int d^2\Omega$  mittelt über die Richtungen des Einheitsvektors  $\vec{e}$ . Die „Y-Sprache“ wird im folgenden häufig verwendet und ausgenutzt.

Natürlich kann (2.18) vollständig ausintegriert werden. Das Resultat sowie weitere Details zur führenden Ordnung finden sich im Anhang A. Die Hinzunahme von Quarks ändert an den qualitativen Resultaten nichts. Lediglich die Masse  $m$  bekommt einen anderen Wert:  $m^2 = g^2(N + N_f/2)^2 T^2/9$ . Der Quark-Propagator enthält für weiche Impulse ebenfalls nicht-triviale Pole. Details dazu finden sich in Anhang B.

## 2.3 Resummation nach Braaten und Pisarski

Physikalische Meßgrößen können meist nur im Rahmen einer Störungstheorie berechnet werden. Das Resultat für eine solche soll als asymptotische Entwicklung [27] nach einem kleinen Parameter (z.B. der Kopplung  $g$ ) vorliegen. Das heißt, es besteht aus einer Abfolge von Termen, welche zu kleinem  $g$  nach abnehmender Größe sortiert sind. Üblicherweise verwendet man eine diagrammatische Entwicklung, bei welcher eine hohe Schleifenanzahl eine große  $g$ -Potenz bedeutet. Dies liefert bekanntlich nicht automatisch die asymptotische Entwicklung. Manchmal können Diagramme einer beliebigen Schleifenanzahl zu ein und demselben Term der Asymptotik beitragen. Dann muß die „naive“ Entwicklung derart umsortiert werden, daß alle Anteile zu jenem Term erfaßt werden. Wenn dies gelingt, bezeichnet man die Prozedur als *konsistent*.

Als Beispiel dient der Gluon-Propagator (2.15). Er ist aus der Aufsummation einer unendlichen Anzahl von Diagrammen mit beliebig großer Schleifenanzahl hervorgegangen,

$$G_{\mu\nu} = G_{\mu\nu}^o + G_{\mu\rho}^o \Pi^{\rho\sigma} G_{\sigma\nu}^o + G_{\mu\rho}^o \Pi^{\rho\sigma} G_{\sigma\tau}^o \Pi^{\tau\lambda} G_{\lambda\nu}^o + \dots \quad (2.19)$$

Wie oben gesehen, hat die Selbstenergie die Größenordnung  $g^2 T^2$ . Für weiche Impulse  $Q \sim gT$  hat jedoch der freie Propagator  $G^o$  die Ordnung  $G^o \sim 1/Q^2 \sim (gT)^{-2}$ , so daß der Faktor  $\Pi(Q)G^o(Q) \sim 1$  ist. Also tragen alle Terme in (2.19) trotz beliebiger Schleifenanzahl zur selben Ordnung der Asymptotik von  $G$  bei. Zu einer konsistenten Entwicklung ist es also zwingend notwendig, für weiche Impulse den Propagator  $G$  aus (2.15) anstelle des

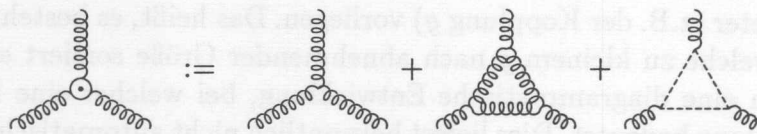
freien  $G^\circ$  aus (2.13) zu verwenden. Braaten und Pisarski [8] sowie Frenkel und Taylor [28] haben dies erkannt und ein entsprechendes Resummationsverfahren entwickelt.

Für die weiche Impulsskala verliert also die naive Unterteilung der Wirkung in einen freien Anteil und einen störungstheoretisch zu behandelnden, wechselwirkenden Anteil ihre Gültigkeit. Man benötigt eine effektive Wirkung, welche unter anderem (2.15) als Propagator liefert. Wie man eine solche Wirkung aus einer bekannten, auf größeren Skalen gültigen prinzipiell erhalten kann, ist aus verwandten Problemen der Renormierungstheorie bekannt [29]: Sie bestimmt sich durch „Ausintegration“ der harten Impulse. Die Prozedur funktioniert im thermischen Fall für statische Größen ausgezeichnet, wie z.B. den Druck oder die Debye-Masse [11]. Bei dynamischen Größen wie den Plasma-Anregungen ist die Verwandtschaft zur Renormierung nicht so deutlich: die effektive Wirkung ist nichtlokal<sup>1</sup>. Daß harte Impulse ausintegriert werden, ist jedoch offensichtlich:  $\Pi_{t,\ell}$  in (2.15) besteht aus einer Summe über harte Impulse, siehe (2.16), und enthält keinen Beitrag von kleineren Skalen [30].

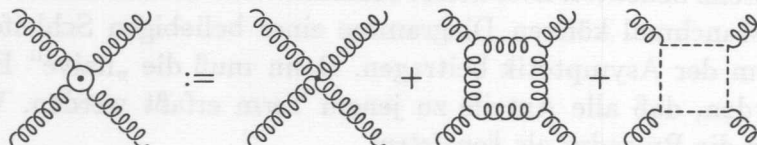
Nach Braaten und Pisarski bekommt nicht nur der Propagator einen Zusatz von harten Einschleifern. Auch zu den Vertizes finden sich Einschleifer, welche genau dann eine gleichwertige Größenordnung erreichen, wenn durch alle äußeren Linien an den Vertizes weiche Impulse laufen. Es müssen für eine konsistente Störungsreihe neben resummierten Propagatoren auch resummierte Vertizes verwendet werden, wie z.B.

$${}^*\Gamma_{\mu\nu\sigma}^{(3)}(Q_1, Q_2, Q_3) = (Q_1|Q_2|Q_3)_{\mu\nu\sigma} + \delta\Gamma_{\mu\nu\sigma}^{(3)}(Q_1, Q_2, Q_3) \quad (2.20)$$

wobei  $(Q_1|Q_2|Q_3)_{\mu\nu\sigma} = (Q_1 - Q_2)_\sigma g_{\mu\nu} + \text{zykl}_{123}$  der tree-level Dreiervertex ist. Der Diagramme des Zusatzes  $\delta\Gamma$  bestehen ebenfalls aus jeweils einer Summe über harte Impulse. Man nennt diese Diagrammklasse „Hard-Thermal-Loops“ (HTL). Sie verhalten sich jeweils  $\sim T^2$  für  $T \rightarrow \infty$ .



$$\text{Diagram (2.21)} \quad (2.21)$$



$$\text{Diagram (2.22)} \quad (2.22)$$

Neben den hier dargestellten Dreier- und Vierervertizes gibt es Vertizes mit fünf und mehr Beinen. Sie bestehen nur aus den entsprechenden HTL-Diagrammen, da die zugehörigen tree-level Vertizes nicht existieren. In [8, 28] wurden die expliziten Ausdrücke für  $\delta\Gamma$  durch Auswertung der HTL-Diagramme bestimmt. Kurz nach dem Erscheinen der genannten zwei Arbeiten haben Taylor und Wong [31] eine effektive Wirkung für die weichen Skala vorgestellt, welche die HTL-Zusätze enthält. Diese Wirkung liefert einen weitaus eleganteren Weg, um die Vertizes zu erhalten. Beide Versionen der Vertizes sind natürlich äquivalent.

<sup>1</sup>Möglicherweise läßt sie sich mit Hilfe von Stückelberg-Feldern lokal umformulieren.



Wir betrachten kurz die Herleitung der effektiven Wirkung. Zur bekannten Wirkung  $S$  wird ein Anteil hinzugefügt und wieder abgezogen,

$$S = S + \delta S - \delta S =: S_{\text{eff}} - \delta S. \quad (2.23)$$

Der Zusatz  $\delta S$  enthält die HTL-Beiträge, so daß  $S_{\text{eff}}$  die resummierten Propagatoren und Vertizes liefert. Für den Propagator muß  $\delta S$  mindestens folgenden in den Feldern  $A_\mu$  quadratischen Term enthalten:

$$\delta S^{(2)} := \frac{1}{2} \sum_P A^\mu(-P) \Pi_{\mu\nu}(P) A^\nu(P) \quad (2.24)$$

Damit  $S_{\text{eff}}$  auch die Vertizes in der korrigierten Version liefern kann, muß sie die entsprechenden Terme in  $A^3, A^4$  etc. enthalten:  $\delta S = \frac{NT^2}{3} \sum_{n=2}^{\infty} V_n[A]$ . Taylor und Wong [31] sowie Frenkel und Taylor [32] ist es gelungen, aus der Forderung nach Eichinvarianz von  $S_{\text{eff}}$   $V_n[A]$  für alle  $n$  zu bestimmen. Sie benötigen dazu lediglich (2.24) als Anfangsbedingung.

Mittlerweile gibt es mehrere, äquivalente Darstellungen der effektiven Wirkung. Zum Beispiel hat Pisarski [33] sie in eine Form gebracht, aus der die Vertizes sehr einfach zu bestimmen sind.

$$\delta S = \frac{1}{3} NT^2 \text{Sp} \int d^4x \int_{\Omega}^{\beta} \left\{ H_o(x) H(x) + 2[\partial_o H(x)] F(z) \frac{1}{Y^\mu \partial_\mu} H(x) \right\} \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} H_o(x) &:= g A_o^a T^a & ; & & H(x) &:= g Y^\mu A_\mu^a T^a \\ F(z) &:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n+2} & ; & & z &:= \frac{1}{Y^\mu \partial_\mu} [iH(x), *]. \end{aligned}$$

In der Integration  $d^4x$  läuft die Zeitintegration längs der Matsubara-Kontur. Der Stern im Kommutator  $[igH(x), *]$  ist Platzhalter für alles rechts von ihm stehende. Bis auf einen allgemeinen Vorfaktor  $g^2$  enthält allein das Argument der Funktion  $F$  die Kopplung  $g$ , so daß man die Vertizes aus der Entwicklung von  $F$  sehr schnell ablesen kann.

Von Braaten und Pisarski [34] stammt eine weitere Darstellung von  $S_{\text{eff}}$ , in welcher die Eichinvarianz manifest ist. Allerdings erfordert die Bestimmung der Vertizes etwas mehr Arbeit.

$$\delta S = -\frac{3m^2}{4} \int d^4x F_a^{\mu\rho} \int_{\Omega} \frac{Y_\rho Y_\sigma}{(Y D_{ab})^2} F_b^{\sigma\mu}, \quad (2.26)$$

wobei  $D$  die kovariante Ableitung ist. Es ist bemerkenswert, mit welcher Leichtigkeit sich (2.26) herleiten läßt. Die Anfangsbedingung (2.24) liefert

$$\delta S^{(2)} = -\frac{3m^2}{4} \int d^4x F_a^{\mu\rho} \int_{\Omega} \frac{Y_\rho Y_\sigma}{(Y \partial)^2} F_a^{\sigma\mu}. \quad (2.27)$$

Die Forderung nach Eichinvarianz läßt sich nun spielend durch die Ersetzung  $\partial \rightarrow D$  erfüllen.

Die HTL-Korrekturen der Vertizes folgen aus (2.25). Ein Faktor  $igf^{abc}$  kann dort abgespalten werden. Er ist tree-level- und HTL-Anteil gemeinsam.

$$\delta\Gamma^{\mu\nu e}(Q_1, Q_2, Q_3) = m^2 \int_{\Omega} Y^{\mu} Y^{\nu} Y^e \left\{ \frac{UQ_1}{YQ_1} \left( \frac{1}{YQ_2} - \frac{1}{YQ_3} \right) + \text{zykl.}_{123} \right\} \quad (2.28)$$

Auf die gleiche Art erhält man Ausdrücke für den Vierervertex sowie alle höheren Vertizes.

Im folgenden werden resummierte Vertizes mit einem Stern \* versehen,  $*\Gamma := \Gamma^{\circ} + \delta\Gamma$ , wobei  $\Gamma^{\circ}$  der tree-level Vertex ist. In Feynman-Diagrammen wird  $*\Gamma$  durch das Symbol  $\odot$  dargestellt. Die Vertizes werden nur an ganz bestimmten Impulsargumenten vorkommen. Der Dreiervertex wird als  $*\Gamma_{\mu\nu e} := *\Gamma_{\mu\nu e}(Q, -K, -P)$  und der Vierervertex als  $*\Gamma_{\mu\nu e\lambda} := *\Gamma_{\mu\nu e\lambda}(Q, -Q, -P, P)$  benötigt. Zudem steht der Vierervertex unter Summen, welche die Transformation  $P \rightarrow -P$  erlauben. Die Ausdrücke werden dadurch erheblich einfacher.

$$\delta\Gamma^{\mu\nu e} = 3m^2 \int_{\Omega} Y^{\mu} Y^{\nu} Y^e \left\{ \frac{P_o}{(YQ)(YP)} - \frac{K_o}{(YQ)(YK)} \right\} \quad (2.29)$$

$$\delta\Gamma^{\mu\nu e\lambda} = 6m^2 \int_{\Omega} Y^{\mu} Y^{\nu} Y^e Y^{\lambda} \left\{ \frac{P_o}{(YQ)^2(YP)} - \frac{K_o}{(YQ)^2(YK)} \right\} \quad (2.30)$$

Die HTL-Korrekturen der Vertizes haben damit eine erstaunlich übersichtliche Form erhalten.

Die HTL-Vertizes entstammen einer nach Konstruktion eichinvarianten Wirkung. Sie erfüllen somit die tree-level Ward-Identitäten [35]

$$Q_4^{\lambda} \delta\Gamma_{\mu\nu e\lambda}(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4) = \delta\Gamma_{\mu\nu e}(Q_1, Q_2 + Q_4, Q_3) - \delta\Gamma_{\mu\nu e}(Q_1 + Q_4, Q_2, Q_3) \quad (2.31)$$

$$Q_3^e \delta\Gamma_{\mu\nu e}(Q_1, Q_2, Q_3) = \Pi_{\mu\nu}(Q_1) - \Pi_{\mu\nu}(Q_2) \quad (2.32)$$

Ihre Gültigkeit kann man entweder durch Nachrechnen direkt verifizieren oder aus dem BRST-Formalismus herleiten. Beides ist möglich.

## 2.4 Die erste Korrektur zur Plasmon-Dispersion

Die Braaten-Pisarski-Resummation hat eine langjährige Diskussion über die Plasmon-Dämpfung beendet. Bis dahin gab es eine große Zahl von Arbeiten, die je nach verwendeten Approximationsschemata und je nach Wahl der Eichung andere Zahlenwerte und insbesondere Vorzeichen von  $\gamma_{\ell}$  vorhersagten. Es war somit unklar, ob das Gluon-Plasma stabil oder instabil gegenüber äußeren Störungen ist. Braaten und Pisarski konnten in [9] endlich einen explizit eichinvarianten Wert angeben<sup>2</sup>:  $\gamma_{\ell} \approx +0.26 g^2 T$  bei  $q = 0$ . Kurze Zeit später ist es Schulz [12] gelungen, die erste Korrektur zur Plasmon-Frequenz zu erhalten,  $\omega_{\ell}^2 = m^2(1 - 0.18g\sqrt{N})$  bei  $q = 0$ . Schließlich enthält [22] einige Detail zur Plasmon-Dispersion bei  $q \neq 0$ .

<sup>2</sup>Bei  $q = 0$  gilt  $\gamma_t = \gamma_{\ell}$ . Manche Arbeiten nennen daher  $\gamma(q = 0)$  die Dämpfung des Plasmas

Dämpfung und Frequenz des Plasmons erhält man, wie oben erwähnt, als Lösung der Gleichung

$$\Omega^2 - q^2 = \Pi_\ell(\Omega + i\varepsilon, q), \quad (2.33)$$

wobei  $\Omega(q) = \omega_\ell(q) - i\gamma_\ell(q)$ . Die Selbstenergie  $\Pi_\ell$  kann mit Hilfe der Braaten-Pisarski-Resummation einschließlich der ersten Korrektur in  $g$  verlässlich bestimmt werden. Wenn man  $\Omega(q)$  ebenfalls nach  $g$  entwickelt, entsteht aus (2.33) für jede Ordnung in  $g$  eine Gleichung: eine Hierarchie von Bestimmungsgleichungen also.

Da zunächst nur die erste Korrektur in  $g$  interessiert, ist eine in dieser Ordnung gerade noch gültige Vereinfachung möglich: Die Gluon-Selbstenergie ist bis einschließlich der relativen Ordnung  $g$  transversal [36]. Daraus folgt  $\Pi_\ell = -Q^2/q^2 \Pi_{oo}$ . Die Bestimmungsgleichung (2.33) wird dann zu

$$-q^2 = \bar{\Pi}_{oo}(\Omega + i\varepsilon, q). \quad (2.34)$$

Es wird entwickelt:  $\Omega = \omega_\ell + \delta\omega_\ell - i\gamma_\ell$  und  $\bar{\Pi}_{oo} = \Pi_{oo} + \delta\Pi_{oo}$ .

$$-q^2 = \Pi_{oo}(\omega_\ell, q) \quad (2.35)$$

$$0 = \Re \delta\Pi_{oo}(\omega_\ell + i\varepsilon, q) + \delta\omega_\ell \partial_\omega \Pi_{oo}(\omega, q)|_{\omega=\omega_\ell} \quad (2.36)$$

$$0 = \Im \delta\Pi_{oo}(\omega_\ell + i\varepsilon, q) - \gamma_\ell \partial_\omega \Pi_{oo}(\omega, q)|_{\omega=\omega_\ell}. \quad (2.37)$$

so daß sich die Korrekturen  $\delta\omega$  und  $\gamma_\ell$  aus folgenden Gleichungen ergeben:

$$\delta\omega_\ell(q) = -\frac{\Re \delta\Pi_{oo}(\omega_\ell + i\varepsilon, q)}{\partial_\omega \Pi_{oo}(\omega, q)|_{\omega=\omega_\ell}} \quad (2.38)$$

$$\gamma_\ell(q) = \frac{\Im \delta\Pi_{oo}(\omega_\ell + i\varepsilon, q)}{\partial_\omega \Pi_{oo}(\omega, q)|_{\omega=\omega_\ell}} \quad (2.39)$$

Zur Bestimmung von  $\delta\omega_\ell$  und  $\gamma_\ell$  benötigt man also  $\Pi_{oo}$  und  $\delta\Pi_{oo}$ , welche jeweils auf der longitudinalen Massenschale  $\omega_\ell(q)$  ausgewertet werden. Die führende Ordnung ist aus (2.18) bekannt,

$$\Pi_{oo}(\omega, q) = 3m^2 \left\{ 1 - \frac{\omega}{2q} \ln \left( \frac{\omega + q}{\omega - q} \right) \right\} \quad (2.40)$$

$$\partial_\omega \Pi_{oo}(\omega, q)|_{\omega=\omega_\ell} = \frac{q^2}{\omega_\ell} \left\{ \frac{3m^2}{\omega_\ell^2 - q^2} - 1 \right\}. \quad (2.41)$$

Die Korrektur  $\delta\Pi_{\mu\nu}$  zur Gluon-Selbstenergie ist in [22, 37] ausführlich diskutiert worden.

$$\delta\Pi_{\mu\nu}(Q) = \Pi_{\mu\nu}^{\text{loop}}(Q) + \Pi_{\mu\nu}^{\text{tad}}(Q) - \Pi_{\mu\nu}^{[-]}(Q) \quad (2.42)$$

mit

$$\Pi_{\mu\nu}^{\text{loop}}(Q) = \frac{1}{2} g^2 N \int_P^* G^{\rho\sigma}(K) * G^{\lambda\tau}(P) * \Gamma_{\mu\rho\lambda}(Q, -K, -P) * \Gamma_{\nu\sigma\tau}(Q, -K, -P) \quad (2.43)$$

$$\Pi_{\mu\nu}^{\text{tad}}(Q) = \frac{1}{2} g^2 N \int_P^* G^{\rho\sigma}(P) * \Gamma_{\mu\nu\rho\sigma}(Q, -Q, -P, P) \quad (2.44)$$

$$\Pi_{\mu\nu}^{[-]}(Q) = g^2 N \int_P^* \Delta_o(K) \Delta_o(P) [5P_\mu P_\nu - 2P^2 g_{\mu\nu}] \quad (2.45)$$



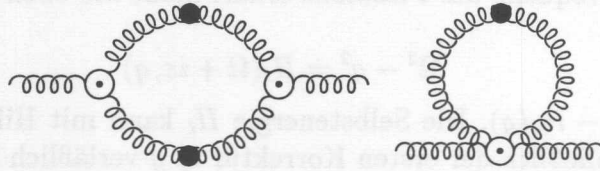


Abbildung 2.2: Die Diagramme zur ersten Korrektur der thermischen QCD Selbstenergie. Der innere Impuls ist weich, also müssen Propagatoren und Vertizes resummiert werden.

Die beiden Anteile  $\Pi^{\text{loop}}$  und  $\Pi^{\text{tad}}$  entsprechen den zwei Diagrammen in Abbildung 2.2. Der innere Impuls  $P$  ist bei ihnen nicht automatisch auf die weiche Skala beschränkt, vielmehr enthalten sie von harten  $P$  noch Anteile aus der führenden Ordnung. Letztere werden per Subtraktion von  $\Pi^{[-]}$  in (2.42) eliminiert. In der Differenz erstreckt sich die Summation nur noch über weiche  $P$ , und  $\delta\Pi$  ist eine echte Korrektur der relativen Ordnung  $g$ . Zur Auswertung der Ausdrücke finden sich ein paar Details in Anhang C.

## 2.5 Magnetische Masse

Bei  $T = 0$  gibt es in diagrammatischen Entwicklungen von z. B. Streuquerschnitten häufig infrarote Singularitäten, welche durch bestimmte Vorschriften wie das Bloch-Nordsieck-Theorem oder das Kinoshita-Lee-Nauenberg Theorem [38] behandelt werden müssen. Das Resultat sind IR-endliche Querschnitte. Bei endlicher Temperatur sind Probleme im IR einerseits schlimmer, andererseits nicht vorhanden. Einerseits führt das Verhalten der Bose-Funktion  $n_b(x) \rightarrow T/x$  für  $x \rightarrow 0$  dazu, daß infrarote Singularitäten bei Integration über  $x$  verstärkt werden. Die oben genannten Theoreme sind dann nicht mehr anwendbar. Andererseits kann es in einem Gluon-Plasma keine langreichweitigen Kräfte geben. Effekte des Medium sorgen für eine Abschirmung. Somit existieren keine IR-Singularitäten. Die Abschirmlänge kann allerdings recht lang sein, so daß IR-empfindliche Größen zwar nicht divergent, jedoch sehr groß werden können. Störungsreihen sind aus diesem Grund nicht unbedingt von  $T = 0$  auf  $T \neq 0$  übertragbar. Eine Neusortierung der Reihe kann notwendig sein. Das beste Beispiel ist die soeben vorgestellte Braaten-Pisarski-Resummation.

Im Gluon-Plasma gibt es zwei Abschirmlängen. Sowohl chromoelektrische als auch -magnetische Wechselwirkungen sind nicht langreichweitig. So verhält sich z. B. das chromoelektrische Potential nicht  $\sim 1/r$ , sondern  $\sim 1/r \exp(-m_D r)$ , wobei  $m_D$  Debyemasse genannt wird [6, 7]. Ähnliches gilt für chromomagnetische Felder. Die zugehörige Abschirmmasse heißt magnetische Masse  $m_m$ . Die Massen lassen sich analog zu den oben besprochenen Dispersionskurven aus den Polen des Gluon-Propagators bestimmen [39],

$$m_D^2 = \Pi_\ell(0, q)|_{q^2=-m_D^2} \quad \text{und} \quad m_m^2 = \Pi_t(0, q)|_{q^2=-m_m^2}. \quad (2.46)$$

Wie man an  $Q_o = 0$  sieht, sind die Massen statische Größen. Ihre führenden Ordnungen lassen sich mit (A.2) und (A.3) finden.

$$m_D^2 = 3m^2 \quad \text{und} \quad m_m^2 = 0. \quad (2.47)$$

Das Verschwinden der magnetischen Masse auf HTL-Niveau (d.h.  $m_m = 0 \cdot gT$ ) hat zu Diskussionen über die Stabilität von Störungsreihen in thermischer QCD geführt [15, 16]. Ist  $m_m^2 \sim g^3 T^2$ , so hat man eine Chance, durch Resummation eine konsistente Störungsreihe zu formulieren. Ist  $m_m^2 \sim g^4 T^2$ , so existiert zwar eine Entwicklung von  $m_m$  in  $g$ , jedoch tragen zur führenden Ordnung beliebig viele Diagramme und Diagrammklassen bei. Sollte schließlich  $m_m \ll g^4 T^2$  sein, existiert möglicherweise gar keine Störungsentwicklung mehr.

Inzwischen gibt es ausreichend Resultate aus analytischen Abschätzungen [17, 18] und Gitterrechnungen [40], welche die Größenordnung  $m_m^2 \sim g^4 T^2$  vorhersagen. Diese recht kleine Ordnung hat leider zur Folge, daß bei diagrammatischen Entwicklungen eine Grenzordnung in  $g$  existiert, ab welcher Diagramme selbst mit beliebig hoher Schleifenanzahl beitragen [15, 16]. Diese Ordnung liegt z.B. für den Druck des Gluon-Plasmas bei  $g^6 T^4$  [41] und für die hier betrachtete Selbstenergie bei  $g^4 T^2$ . Die Korrektur (2.42)  $\sim g^3 T^2$  ist die einzige Ordnung, welche störungstheoretisch noch zugänglich ist. Für höhere Ordnungen benötigt man andere, neue Methoden, wie zum Beispiel Variationsverfahren [42].

Überraschenderweise spürt die Selbstenergie schon in (2.42) etwas von der magnetischen Skala. Die Dämpfung (2.39) hängt logarithmisch vom Verhältnis  $m_D/m_m$  ab und ist für  $m_m = 0$  IR-divergent [43]. Dieses Verhalten geht auf sogenannte Massenschalen-Singularitäten zurück. Sie sollen etwas genauer untersucht werden, da in Kapitel 4 eben solche Singularitäten auftauchen. Dazu betrachte man den „Spielzeug“-Term [19]

$$S(Q_o, q) = \not\int_P \Delta_t(P) \Delta_t(Q - P) \quad \text{bei} \quad Q_o = \omega_\ell(q) + i\varepsilon. \quad (2.48)$$

Er ist ein typischer Anteil des Korrekturterms (2.43). In der Summation über die Matsubara-Frequenzen kann nur der Anteil mit  $P_o = 0$  empfindlich auf IR reagieren, denn es gilt  $\Pi_t(0, p) = 0$  und somit  $\Delta_t(0, p) = -1/p^2$ . Die Existenz einer endlichen magnetischen Masse würde an dieser Stelle z.B.  $\Delta_t \sim -1/(p^2 + m_m^2)$  liefern. Weiterhin wird  $S$  auf der longitudinalen Massenschale ausgewertet. Dort erfüllt  $Q = (\omega_\ell, q)$  die Bedingung  $Q^2 = \Pi_\ell(Q)$ , was für eine zusätzliche  $p$ -Potenz sorgt:

$$S(Q_o, q) \simeq T \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{p^2} \frac{1}{p^2 - 2\vec{p}\vec{q} + \Pi_\ell(Q - P) - \Pi_\ell(Q) - i\varepsilon\sigma} \quad (2.49)$$

$$\simeq T [1 + \partial_{q^2} \Pi_\ell(Q_o, q)]^{-1} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{p^2} \frac{1}{p^2 - 2\vec{p}\vec{q} - i\varepsilon\sigma'} \quad (2.50)$$

wobei  $\sigma = \pm 1$ , siehe [19]. Im letzten Schritt wurde  $p \ll q$  genähert, IR-reguläre Terme sind dabei vernachlässigt. Die weitere Auswertung von  $S$  ergibt einen regulären Realteil, jedoch einen divergenten Imaginärteil. Hier ist ein expliziter IR-cutoff  $\lambda$  notwendig,

$$S = i\sigma' \frac{T}{8\pi q} [1 + \partial_{q^2} \Pi_\ell(Q_o, q)]^{-1} \ln \left( \frac{q}{\lambda} \right) + \mathcal{O}(1). \quad (2.51)$$

Zumindest im Imaginärteil von  $S$  kann man nicht höhere Ordnungen als  $g^3 \ln(1/g) T^2$  berechnen, denn in Ordnung  $g^3 T^2$  ist die genaue Form des IR-cutoffs  $\lambda$  wichtig. In  $\mathcal{O}(g^3 \ln(1/g))$  ist jedoch die analytische Auswertung der Selbstenergie (2.42) möglich [19],

$$\gamma_\ell(q) = \frac{g^2 N T}{4\pi} \frac{\omega_\ell}{q} \frac{3(m^2 - Q^2)}{3m^2 - Q^2} \ln \left( \frac{1}{g} \right). \quad (2.52)$$

Diese Gleichung wird in Kapitel 4 zur Kontrolle der Rechnungen in Lichtkegelnähe dienen.

Das Verschwinden der magnetischen Masse am HLL-Niveau (d.h.  $m_{\perp} = 0$ ) hat zu Diskussionen über die Stabilität von Störungsmoden in toroidalen GGD geführt [15, 16], ist  $m_{\perp} \sim q^2 T^2$ , so hat man eine Klasse, durch Homomorphismen eine konstante Störungsmoden zu formulieren. Ist  $m_{\perp} \sim q^2 T^2$ , so existiert zwar eine Entzweiung von  $m_{\perp}$  in  $a$ , jedoch tragen zur führenden Ordnung beliebig viele Diagramme und Diagrammblöcke bei. Sollte schließlich  $m_{\perp} \ll q^2 T^2$  sein, existiert möglicherweise keine Störungsentwicklung mehr. Inzwischen gibt es ausreichend Hinweise aus analytischen Abschätzungen [17, 18] und Gitterrechnungen [19], welche die Gültigkeit von  $m_{\perp} \sim q^2 T^2$  unterstützen. Dies recht kleine Ordnung hat leider zur Folge, daß bei diagrammatischen Entwicklungen eine Grenzordnung in  $q$  existiert, ab welcher Diagramme selbst mit beliebig hoher Schließzahl beitragen [15, 16]. Diese Ordnung liegt z.B. für den Druck des Gluon-Plasmas bei  $q^2 T^2$  [21] und für die hier betrachtete Selbstenergie bei  $q^2 T^2$ . Die Konstante (2.43)  $\sim q^2 T^2$  ist die einzige Ordnung, welche störungstheoretisch noch zugänglich ist für höhere Ordnungen benötigt man andere, neue Methoden, wie zum Beispiel Variationsverfahren [22].

Überprüfbarweise prüft die Selbstenergie schon in (2.42) etwas von der magnetischen Skala. Die Darstellung (2.39) hängt kontinuierlich vom Verhältnis  $m_{\perp}/m_{\parallel}$  ab und ist für  $m_{\perp} = 0$  IR-divergent [23]. Dieses Verhalten geht auf bekannte Massenschieben zurück, die schon etwas genauer untersucht werden, da in Kapitel 4 eine solche Singularitäten auftreten. Dann betrachte man den „Spiegel“-Term [23]

$$S(q, p) = \int_0^1 dx \Delta(x) \Delta(1-x) - R, \quad \text{mit} \quad Q = \omega(p) + ic. \quad (2.44)$$

Es ist ein typischer Anteil des Korrekturen (2.43). In der Summation über die Matsubara-Frequenzen kann mit der Anteil mit  $R = 0$  unabhängig sein IR-regular, denn es gilt  $\Pi(0, p) = 0$  und somit  $\Delta(0, p) = -1/p^2$ . Die Existenz einer endlichen magnetischen Masse würde an dieser Stelle z.B.  $\Delta = -1/(p^2 + m_{\perp}^2)$  liefern. Weiterhin wird  $S$  aus der langwelligsten Massenschiebe ausgewertet. Dies erhält  $Q = \omega(p)$  die Bedingung  $Q^2 = R(0)$ , was für eine zusätzliche  $q$ -Potenz sorgt:

$$R(0, p) = T \int_0^1 dx \frac{1}{(2x)^2 p^2 - 2x(1-x) - R(0) - ic}. \quad (2.45)$$

$$= T \int_0^1 dx \frac{1}{(2x)^2 p^2 - 2x(1-x) - ic}. \quad (2.50)$$

wobei  $v = \pm 1$ , siehe [19]. Im letzten Schritt wurde  $p \ll q$  genähert, IR-regular Terme sind dabei vernachlässigt. Die weitere Auswertung von  $S$  ergibt einen regulären Realteil, jedoch einen divergenter Imaginärteil. Hier ist ein regulärer IR-cut-off  $\lambda$  notwendig:

$$S = ic \frac{1}{\lambda} \ln \left( \frac{2}{\lambda} \right) + 0(1) \quad (2.51)$$

Zumindest im Imaginärteil von  $S$  kann man nicht höhere Ordnungen als  $q^2 \ln(q) T^2$  berechnen, denn in Ordnung  $q^2 T^2$  ist die gesamte Form des IR-cut-off  $\lambda$  wichtig. In  $Q^2 \ln(1/y)$  ist jedoch die analytische Auswertung der Selbstenergie (2.42) möglich [19].

$$\omega(p) = \frac{q^2 T^2 \omega^2 - Q^2}{4v - q^2 m_{\perp}^2 - Q^2} \ln \left( \frac{1}{\lambda} \right) \quad (2.52)$$

Diese Gleichung wird in Kapitel 4 zur Kontrolle der Rechnungen in Lichtkegelkoordinaten.



## Kapitel 3

# Das Plasmon eines Modellsystems

In thermischen Feldtheorien wie QCD gibt es keine infraroten oder kollinearen Singularitäten. Alle bei  $T = 0$  langreichweitigen Kräfte sind durch Effekte des Mediums abgeschirmt. Wenn dennoch Singularitäten in der Störungsentwicklung einer physikalischen Größe zu finden sind, ist die Entwicklung inkonsistent oder fehlerhaft.

Mit Hilfe des Braaten-Pisarski Resummationsverfahren ist es gelungen, Infrarotdivergenzen zu beseitigen, welche auf unzureichender Berücksichtigung der weichen Skala beruhen. Doch gibt es noch immer Bereiche, in denen bei Bestimmung der Plasmon-Dispersion Singularitäten auftauchen. Ein solcher Bereich ist die Nähe des Lichtkegels  $Q^2 = 0$ . Dort lassen kollineare Singularitäten die Störungsreihe zusammenbrechen. Vor der Untersuchung des QCD-Plasmons wird anhand eines Modells der Ursprung und die Beseitigung dieser Singularitäten vorgeführt. Die Skalare Elektrodynamik (SED) dient diesem Zwecke ideal. Krämmer, Rebhan und Schulz untersuchen in [21] das Plasmon der SED einschließlich der ersten Korrektur zu  $\omega_\ell$ . Aus ihrer Arbeit sind etliche Resultate in das vorliegende Kapitels übernommen. Die Lagrangedichte ist [3]

$$\mathcal{L} = (D_\mu \phi)^* D^\mu \phi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\alpha} (\partial_\mu A^\mu)^2 \quad (3.1)$$

mit  $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$  und dem abelsche Feldtensor  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ . Die SED hat zwei Vertizes. Ein Dreiervertex koppelt zwei Skalare an ein Photon und ein Vierervertex koppelt zwei Skalare an zwei Photonen. Die diagrammatische Struktur ist jener der QCD also sehr ähnlich: Läßt man Linienunterschiede verblassen, sind sie formal gleich.

Bei endlicher Temperatur geht die Analogie noch weiter: Ersetzt man die thermische Gluonmasse durch  $m = eT/3$ , können die Resultate aus Anhang A für den Photon-Propagator übernommen werden. Unter anderem existiert eine kollektive longitudinale Anregung, das Plasmon. Jedoch gibt es gegenüber der QCD eine wesentliche Vereinfachung: Die effektive Lagragedichte der weichen Skala ist einfacher aufgebaut,

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \mathcal{L} - \mu^2 \phi \phi^* - \frac{3m^2}{4} \int_\Omega F_{\mu\rho} \frac{Y^\rho Y^\sigma}{(Y\partial)^2} F_{\sigma}{}^\mu, \quad (3.2)$$

wobei  $\mu^2 = e^2 T^2/2$  die thermische Masse des skalaren Feldes ist.  $\mathcal{L}_{\text{eff}}$  ist manifest eichinvariant, da bereits der Feldtensor im Gegensatz zum nichtabelschen Fall eichinvariant ist.

Aus diesem Grund gibt es in der SED keine HTL-Vertexzusätze. Des weiteren ist die skalare Selbstenergie sehr einfach: Sie ist konstant. Durch diese Vereinfachungen ist es möglich, die Photon-Selbstenergie bis einschließlich der ersten Korrektur analytisch auszuwerten.

Analog zur QCD enthält die Selbstenergie<sup>1</sup>  $\overline{\Pi} := \Pi + \delta\Pi$  einen Anteil  $\Pi \sim e^2 T^2$ , welcher diagrammatisch von harten Einschleifern gebildet wird, und die Korrektur  $\delta\Pi \sim e e^2 T^2$ , welche von weichen Einschleifern herrührt.

$$\Pi_{\mu\nu} = 2e^2 \sum_P \Delta_o^- \Delta_o \left( -P^2 g_{\mu\nu} + 2P_\mu P_\nu \right) \quad (3.3)$$

$$\delta\Pi_{\mu\nu} = 2e^2 \sum_P \left[ \Delta_\mu^- \Delta_\mu - \Delta_o^- \Delta_o \right] \left( -P^2 g_{\mu\nu} + 2P_\mu P_\nu \right) \quad (3.4)$$

mit  $\Delta_\mu = (P^2 - \mu^2)^{-1}$ . Die führende Ordnung  $\Pi_{\mu\nu}$  ist aus der QCD bekannt, vergleiche (2.16) und (A.2). In (3.4) ist der zweite Term der eckigen Klammer der vom QCD-Plasmon bekannte Subtraktions-Term, welcher die Summation über  $P$  auf weiche Impulse beschränken soll. Wie gesagt ist die Integrationen in  $\delta\Pi$  analytisch ausführbar. Das Resultat findet sich in Gleichung (6.5) in [21].

### 3.1 Kollineare Singularitäten am Lichtkegel

Die führende Ordnung (3.3) der Photon-Selbstenergie  $\Pi_{oo}(Q)$ ,  $Q = (\omega, \vec{q})$ , enthält am Lichtkegel  $\omega = q$  eine kollineare Singularität,

$$\Pi_{oo}(\omega, q) = 4e^2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} n(p) \left\{ 1 - \frac{\omega}{\omega - \vec{p}\vec{q}/p} \right\}. \quad (3.5)$$

Gleichung (3.5) gewinnt man aus (3.3) nach Summation über die Matsubara-Frequenzen. Die Singularität heißt kollinear, da sie unabhängig von der Größe des Betrages von  $p$  an den Endpunkten der Winkelintegration  $\vec{p}\vec{q} = pq$  auftritt. Die Selbstenergie wächst logarithmisch mit dem Abstand vom Lichtkegel an, das heißt mit  $\varepsilon^2 = Q^2/q^2$  verhält sie sich wie

$$\Pi_{oo}(\omega, q) \rightarrow -\frac{3m^2}{2} \ln\left(\frac{4}{\varepsilon^2}\right) \quad \text{für} \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (3.6)$$

vergleiche Gleichung (2.40). Eine solche Singularität nennen wir logarithmisch, höhere  $\varepsilon$ -Potenzen entsprechend linear, quadratisch etc. Die Plasmon-Frequenz bestimmt sich in Lichtkegelnähe aus der Asymptotik von (2.34)

$$q^2 = m_\infty^2 \ln\left(\frac{4q^2}{\omega_\ell^2 - q^2}\right) \quad \text{zu} \quad \omega_\ell^2 = q^2 \left(1 + 4e^{-q^2/m_\infty^2}\right) \quad (3.7)$$

mit  $m_\infty^2 = 3m^2/2$ . Für  $q \rightarrow \infty$  schmiegt sich  $\omega_\ell(q)$  exponentiell an den Lichtkegel an, sie erreicht ihn jedoch nie. Somit kommt die Dispersionkurve niemals in direkten Kontakt mit der Singularität aus (3.5) und bleibt stets endlich. Da  $\omega_\ell$  die uns interessierende physikalische Meßgröße endlich ist, besteht noch kein Grund, an der existierenden Störungsentwicklung zu zweifeln.

<sup>1</sup>Im vorliegenden Kapitel bezeichnet  $\Pi_{\mu\nu}$  nicht die Gluon-, sondern die Photon-Selbstenergie.

Die Korrektur  $\delta\Pi_{oo}(\omega = q)$  ist stärker divergent. Die Autoren von [21] finden

$$\delta\Pi_{oo}(\omega, q) \rightarrow \frac{e^2 \mu T}{2\pi} \frac{q}{\sqrt{\omega - q^2}} = \frac{e^2 \mu T}{2\pi} \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{für} \quad \omega \rightarrow q. \quad (3.8)$$

Die Korrektur kann damit in Lichtkegelnähe stark anwachsen, mit der führenden Ordnung der Selbstenergie gleichziehen oder sie sogar übertreffen. Dies zerstört in dem engen Bereich  $\varepsilon \lesssim e$  die konsistente Bestimmung der Selbstenergie. Damit muß noch immer nicht die Konsistenz der Entwicklung von  $\omega_\ell$  gefährdet sein, jedenfalls solange  $\omega_\ell(q)$  in ausreichendem Abstand vom Lichtkegel bleibt. Letzteres ist jedoch nicht für alle  $q$  erfüllt. Der Abstand der longitudinalen Dispersionskurve vom Lichtkegel wird vergleichbar mit der Kopplung  $e$ , denn nach (3.7) gilt  $\omega_\ell^2 - q^2 \lesssim e^2 q^2$  bei  $q \gtrsim m_\infty \ln(1/e)$ . Eine konsistente Bestimmung der Plasmon-Frequenz ist in dem schmalen Streifen  $\omega_\ell^2 - q^2 \lesssim e^2 q^2$  um den Lichtkegel nicht mehr möglich, zumal nicht ausgeschlossen werden kann, daß weitere Korrekturen von  $\Pi_{oo}$  dort noch stärker divergent sind.

Wir wollen die Plasmon-Frequenz  $\omega_\ell$  in Lichtkegelnähe genauer betrachten. Sie erfüllt die Bestimmungsgleichung  $q^2 = \Pi(\omega_\ell, q) + \delta\Pi(\omega_\ell, q) + \dots$ , welche für  $\varepsilon^2 = Q^2/q^2 \rightarrow 0$  zu

$$q^2 = -\frac{3m^2}{2} \ln\left(\frac{4}{\varepsilon^2}\right) + \frac{e^2 \mu T}{2\pi} \frac{1}{\varepsilon} + \dots \quad (3.9)$$

wird. Für  $\varepsilon \lesssim e$  ist es unklar, welcher der beiden Terme in (3.9) zur Bestimmung der führenden Ordnung von  $\omega_\ell$  zu verwenden ist. Angenommen, die ursprüngliche Unterteilung sei weiterhin gültig. Dann folgt aus (3.9) und (2.38)

$$\omega_\ell^2(q) = q^2 \left[ 1 + 4e^{-q^2/m_\infty^2} \left( 1 - \frac{e^2 \mu T}{24\pi m^2} e^{+q^2/2m_\infty^2} \right) \right]. \quad (3.10)$$

Der Korrekturterm (der zweite in der runden Klammer) kann bei genügend großen  $q$  den Abstand vom Lichtkegel bestimmen. Es gibt nun sogar eine Lösung auf dem Lichtkegel, d.h.  $\omega_\ell(q_{\text{krit}}) = q_{\text{krit}}$ .

$$q_{\text{krit}}^2 = 3m^2 \ln\left(\frac{24\pi m^2}{e^2 \mu T}\right). \quad (3.11)$$

Dies würde bedeuten, daß sich die führende und die in erster Ordnung korrigierte Version der Meßgröße  $\omega_\ell$  physikalisch stark unterschiedlich verhalten. So etwas darf in einer konsistenten Störungsentwicklung nicht passieren.

Tatsächlich ist der Zusammenbruch der Störungsreihe ein Kunstprodukt. Die Summe  $\bar{\Pi} = \Pi + \delta\Pi$

$$\bar{\Pi}_{\mu\nu}(Q) = 2e^2 \int_P \Delta_\mu^- \Delta_\nu \left( -P^2 g_{\mu\nu} + 2P_\mu P_\nu \right) \quad (3.12)$$

enthält nur massive Propagatoren  $\Delta_\mu$ , welche keine kollinearen Singularitäten entwickeln können. Ohne die Zerlegung in führenden Anteil und Korrektur ist die Selbstenergie endlich. Offensichtlich verliert die Unterteilung in (3.3) und (3.4) am Lichtkegel ihren Sinn.

Um den tatsächlich führenden Term zu finden, werden wir (3.12) jetzt näher untersuchen. Nach Aufsummation aller Matsubara-Frequenzen ist

$$\bar{\Pi}_{oo}(Q) = -2e^2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{n_b(\omega_p)}{\omega_p} (\mu^2 + p^2 + k^2) \left\{ \frac{1}{Q^2 - 2\omega_p \omega + 2\vec{p} \cdot \vec{q}} + \frac{1}{Q^2 + 2\omega_p \omega + 2\vec{p} \cdot \vec{q}} \right\}, \quad (3.13)$$



wobei  $n_b(x)$  die Bosefunktion,  $\omega_p^2 = p^2 + \mu^2$  und  $Q = (\omega, q) \sim eT$  ist. Der Impuls  $p$  sei hart, denn dort ist der führende Term zu suchen. In (3.13) wurde eine  $Q$ -unabhängige Konstante vernachlässigt, ansonsten sind keine der sonst üblichen HTL-Näherungen durchgeführt worden. Letztere würden bedeuten, im Nenner  $Q^2$  wegzulassen und im Zähler und Nenner  $\omega_p = p$  zu setzen. Wir kämen wieder beim alten divergenten Resultat an.

Am Lichtkegel ist  $Q^2 = 0$  erfüllt. Dennoch ist (3.13) nicht divergent, die Masse in  $\omega_p$  reguliert die bisherige Singularität. In führender Ordnung ist also

$$\bar{\Pi}_{oo}(Q) = -4e^2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{n_b(p)}{p} \frac{\vec{p}\vec{q}}{\omega_p\omega - \vec{p}\vec{q}} \rightarrow -\frac{3m^2}{2} \ln\left(\frac{T^2}{\mu^2}\right). \quad (3.14)$$

Die Näherung  $\omega_p = p$  im Nenner ist verboten. Trotz harter  $p$  dürfen wir am Lichtkegel die thermische Masse  $\mu$  der skalaren Felder nicht vernachlässigen.

Auch die starke Divergenz der Korrektur  $\delta\Pi_{oo} \sim \frac{1}{\epsilon}$  kann auf diese Art verstanden werden. Sie wird dadurch verursacht, daß in (3.4) ein ungeeigneter Term subtrahiert wird: Der Anteil mit massiven Propagatoren  $\Delta_\mu$  divergiert am Lichtkegel nicht, sondern nur derjenige mit nackten Propagatoren  $\Delta_o$ , welcher dadurch dominant wird. Die Summation ist nun nicht mehr nur auf die weiche Skala beschränkt. Wenn man dennoch bei der Auswertung von (3.4) davon ausgeht, nur von weichen Impulsen  $P$  Beiträge zu erhalten, und entsprechend entwickelt, um sich danach dem Lichtkegel zu nähern, dann erhält man  $\delta\Pi_{oo} \sim \frac{1}{\epsilon}$ . Als Beispiel betrachten wir die Differenz

$$\delta\Pi^{\text{Bsp}} = -4e^2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{n_b(p)}{p} \left\{ \frac{\vec{p}\vec{q}}{\omega_p\omega - \vec{p}\vec{q}} - \frac{\vec{p}\vec{q}}{p\omega - \vec{p}\vec{q}} \right\}. \quad (3.15)$$

Beschränkung auf weiche Impulse heißt  $n_b(p) \approx T/p$ . Wenn  $\omega \neq q$ , ist (3.15) trotz der Näherung im UV endlich. Nach der Integration über  $p$ -Betrag erhalten wir aus

$$\delta\Pi^{\text{Bsp}} = -\frac{e^2\mu T}{2\pi} \frac{\omega}{q} \int_{-1}^1 du \frac{u^2}{\sqrt{\omega^2/q^2 - u^2}^3} \quad (3.16)$$

das erwartete Verhalten  $\sim \frac{1}{\epsilon}$ . Wenn wir dagegen die Näherungen in umgekehrter Reihenfolge durchführen, also zuerst  $\omega = q$  berücksichtigen und dann  $n_b = T/p$  setzen, entdecken wir statt des  $\frac{1}{\epsilon}$  eine logarithmische kollineare Singularität zuzüglich einer UV-Divergenz. Dann ist (3.15) offensichtlich nicht mehr auf die weiche Skala beschränkt,  $\delta\Pi$  ist latent UV-divergent. Es ist somit manifest, daß der harte Beitrag der Selbstenergie nicht vollständig abgezogen ist.

## 3.2 Resummation asymptotischer Massen

Wie soeben gezeigt, werden die kollinearen Singularitäten in der Selbstenergie durch die Verwendung des nackten Propagators  $\Delta_o$  anstelle des massiven  $\Delta_\mu$  verursacht. Sie sind Kunstprodukt einer falschen Aufteilung in führenden Term und Korrektur. Daß diese Tatsache nicht nur auf die erste Korrektur  $\delta\Pi$  der Selbstenergie beschränkt ist, zeigt ein

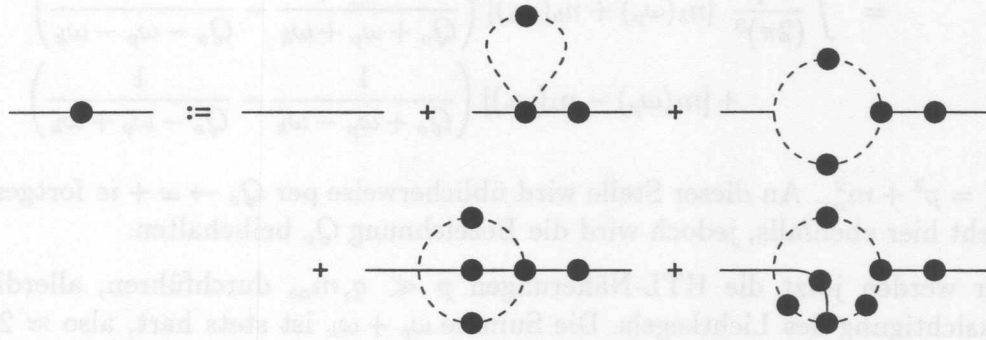


Abbildung 3.1: Dyson Gleichung für den Photon-Propagator. Photonen sind durchgezogene, Skalare gestrichelte Linien. Innere Propagatoren sind stets volle, Vertizes hingegen kommen sowohl nackt als auch voll vor.

Blick auf die Dyson-Gleichung Abbildung 3.1. In der vollen Selbstenergie gibt es keinerlei nackte Propagatoren. Es kann also auch in höheren Korrekturen niemals zu kollinearen Singularitäten kommen. Zu einer korrekten asymptotischen Entwicklung des Propagators ist es zwingend notwendig, gewisse Anteile des vollen Propagators in den inneren Linien mitzunehmen. Welche Anteile dies sind, muß in einer selbstkonsistenten Weise bestimmt werden.

Im vorliegenden Fall ist die Prozedur recht einfach: Der Photon-Propagator benötigt am Lichtkegel skalare Linien, welche mit dem führenden Anteil der skalaren Selbstenergie resummiert sind. Letztere ist eine Konstante, welche keine kollinearen Singularitäten enthält, also unempfindlich gegen lichtartige Impulse ist. Dadurch ist nach Resummation der Masse  $\mu$  Selbstkonsistenz erreicht. Wie die Prozedur in konkreter Rechnung ausschaut, werden wir im folgenden zeigen [23].

Zur Bestimmung der führenden Ordnung der Selbstenergie starten wir mit der Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \mathcal{L}_{\text{SED}} - m_{\infty}^2 \phi \phi^* , \quad (3.17)$$

wobei die „asymptotische Masse“  $m_{\infty}$  zunächst unbestimmt ist. In Einloop-Niveau ist die Photon-Selbstenergie nun gegeben durch

$$\Pi_{\mu\nu}(Q) = 2e^2 \int_P \Delta_m^- \Delta_m \left( -P^2 g_{\mu\nu} + 2P_{\mu} P_{\nu} \right) \quad (3.18)$$

mit  $\Delta_m = (P^2 - m_{\infty}^2)^{-1}$ . Die weitere Auswertung erfolge am Beispiel von  $\Pi_{oo}$ . Die inneren Impulse seien hart,  $Q$  sei wie bisher weich und  $K = Q - P$ . Bei Vernachlässigung nicht-führender Anteile läßt sich  $\Pi_{oo}$  umformen zu

$$\Pi_{oo}(Q) = e^2 \int_P \left\{ -2\Delta_m - 4\Delta_m^- \Delta_m P_o K_o \right\} . \quad (3.19)$$

Summation über die Matsubara-Frequenzen ergibt  $-2e^2 \int_P \Delta_m = \frac{3}{2} m^2$  sowie

$$4 \int_P \Delta_m^- \Delta_m P_o K_o = \int_P \left\{ \frac{1}{P_o - \omega_p} + \frac{1}{P_o + \omega_p} \right\} \left\{ \frac{1}{K_o - \omega_k} + \frac{1}{K_o + \omega_k} \right\}$$

$$\begin{aligned}
= & \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} [n_b(\omega_p) + n_b(\omega_k)] \left( \frac{1}{Q_o + \omega_p + \omega_k} - \frac{1}{Q_o - \omega_p - \omega_k} \right) \\
& + [n_b(\omega_p) - n_b(\omega_k)] \left( \frac{1}{Q_o + \omega_p - \omega_k} - \frac{1}{Q_o - \omega_p + \omega_k} \right) \quad (3.20)
\end{aligned}$$

mit  $\omega_p^2 = p^2 + m_\infty^2$ . An dieser Stelle wird üblicherweise per  $Q_o \rightarrow \omega + i\epsilon$  fortgesetzt. Dies geschieht hier ebenfalls, jedoch wird die Bezeichnung  $Q_o$  beibehalten.

Wir werden jetzt die HTL-Näherungen  $p \ll q, m_\infty$  durchführen, allerdings unter Berücksichtigung des Lichtkegels. Die Summe  $\omega_p + \omega_k$  ist stets hart, also  $\approx 2p$ . Ebenso  $n_b(\omega_p) + n_b(\omega_k) \approx 2n_b(p)$ . Die entsprechenden Differenzen ergeben jedoch weiche Größen,  $n_b(\omega_p) - n_b(\omega_k) = n'(\omega_p)(\omega_p - \omega_k) + \mathcal{O}(q^2)$  sowie

$$\omega_p - \omega_k = \frac{\vec{p}\vec{q}}{p} \left( 1 - \frac{m_\infty^2}{2p^2} \right) - \frac{p^2 q^2 - (\vec{p}\vec{q})^2}{2p^3} + \mathcal{O}(q^3/p^2). \quad (3.21)$$

Die kollineare Singularität war bei  $\vec{p}\vec{q} = \pm pq$  zu finden. Dort verschwindet der zweite Term von (3.21). Er ist am Lichtkegel eine „echte“ Korrektur und darf vernachlässigt werden. Nicht so der Term  $\sim m_\infty^2$ . Dies ist der gesuchte Regulator der Singularität<sup>2</sup>. Damit ist die Photon-Selbstenergie in führender Ordnung gegeben durch

$$\Pi_{oo}(Q) = 3m^2 + 2e^2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} n'(p) \frac{Q_o^2 \omega_p^2}{(p^2 + m_\infty^2) Q_o^2 - (\vec{p}\vec{q})^2}. \quad (3.22)$$

Auf analoge Weise kann die skalare Selbstenergie bestimmt werden. Man stellt fest, daß deren führende Ordnung nicht von  $m_\infty$  abhängt. Sie ist weiterhin durch die Konstante  $\mu^2$  gegeben.

Die führenden Ordnungen der Selbstenergien sind nun bekannt. Wir können mit ihnen die effektive Wirkung der weichen Skala aufstellen,

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \mathcal{L} - \mu^2 \phi \phi^* + \delta \mathcal{L}_{\text{photon}}. \quad (3.23)$$

Der Zusatz  $\delta \mathcal{L}_{\text{photon}}$  ist gegenüber (3.2) leicht verändert. Er wird in Kapitel 6 genauer diskutiert. Noch ist die effektive Wirkung jedoch nicht vollständig: Die Masse  $m_\infty$  ist unbekannt. Wir werden sie jetzt festlegen. Dazu wird gefordert, daß die Korrektur  $\delta \Pi$ , welche man aus (3.23) analog zu (3.4) erhält, keine Terme mehr enthalte, welche aus einer

<sup>2</sup>Bemerkung zur Entwicklung der  $\omega_{p,k}$ : Es gilt exakt

$$\omega_k = \sqrt{(p - \vec{p}\vec{q}/p)^2 + m_\infty^2 + (p^2 q^2 - (\vec{p}\vec{q})^2)/p^2} = \omega_\kappa \left( 1 + \mathcal{P} \left( \frac{\eta}{\omega_\kappa^2} \right) \right)$$

mit  $\omega_\kappa = \sqrt{(p - \vec{p}\vec{q}/p)^2 + m_\infty^2}$  und  $\eta = (p^2 q^2 - (\vec{p}\vec{q})^2)/p^2$ .  $\mathcal{P}(x)$  ist ein Polynom. Weiterhin gilt

$$\omega_\kappa = (\omega_p - \vec{p}\vec{q}/\omega_p) (1 + \mathcal{P}(\eta')) \quad \text{mit} \quad \eta' = \frac{(\vec{p}\vec{q})^2}{p^2} \frac{m_\infty^2}{(\omega_p^2 - \vec{p}\vec{q})^2}.$$

Sowohl  $\eta$  also auch  $\eta'$  sind am Lichtkegel 'echte' Korrekturen, so daß  $\omega_p - \omega_k \approx \vec{p}\vec{q}/\omega_p$ .



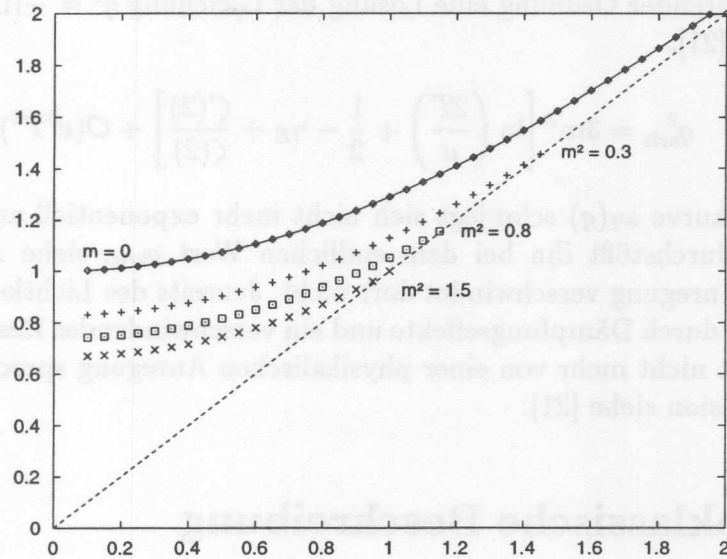


Abbildung 3.2: Die Dispersionskurve  $\omega_\ell(q)$  des Plasmon bei Resummation der asymptotischen Massen  $m_\infty$ , dargestellt in Einheiten der thermischen Masse  $m$ . Die unresummierte Kurve nähert sich für  $q \rightarrow \infty$  exponentiell dem Lichtkegel. Die mit verschiedenen Werten von  $m_\infty$  resummierten Kurven stoßen bei endlichen Werten von  $q$  durch den Lichtkegel durch.

Summation über harte Impulse entstehen, d.h. die Summation in  $\delta\Pi$  sei weich. Nach den Ausführungen des vorherigen Abschnittes können wir folgern:

$$m_\infty^2 = \mu^2. \quad (3.24)$$

Daß die Bestimmung der Selbstenergie schon in führender Ordnung zur Resummation einer Masse zwingt, ist neu. Es stellt sich dabei die Frage, ob noch immer aus der Selbstenergie eine effektive Wirkung im Sinne der Renormierungs-Theorie erhalten werden kann. Schließlich ist die Analogie nur dann gegeben, wenn zur Bestimmung der Wirkung harte Impulse ausintegriert werden, die kleineren Skalen dagegen unberührt bleiben. Dem scheint zu widersprechen, daß am Lichtkegel eine kleine Masse  $\mu \sim gT$  mitgenommen worden ist. Diese Masse führt jedoch nicht dazu, daß die Selbstenergie  $\Pi$  Beiträge aus der weichen Impulsskala bekommt. Sowohl bei der Bestimmung der Masse  $\mu$  als auch in  $\Pi$  (3.22) sind die Impulse wie bisher auf hart beschränkt. Die Analogie ist also noch immer gültig.

### 3.3 Plasmon-Frequenz am Lichtkegel

Die asymptotische Masse hat interessante Effekte auf die Plasmon-Dispersionskurve in der Nähe des Lichtkegels. Da die Selbstenergie  $\Pi_{oo}(\omega = q)$  nicht mehr divergiert, gibt es

nun schon in führender Ordnung eine Lösung der Gleichung  $q^2 = -\Pi_{oo}(\omega = q)$  direkt auf dem Lichtkegel [21].

$$q_{\text{krit}}^2 = 3m^2 \left[ \ln \left( \frac{2T}{\mu} \right) + \frac{1}{2} - \gamma_E + \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} \right] + \mathcal{O}(e^3 T^2). \quad (3.25)$$

Die Dispersionskurve  $\omega_\ell(q)$  schmiegt sich nicht mehr exponentiell an den Lichtkegel an (3.7), sondern durchstößt ihn bei dem endlichen Wert  $q_{\text{krit}}$ , siehe Abbildung 3.2. Das Residuum der Anregung verschwindet dort nicht. Jenseits des Lichtkegel jedoch wird das Plasmon schnell durch Dämpfungseffekte und ein verschwindendes Residuum unterdrückt, so daß man dort nicht mehr von einer physikalischen Anregung sprechen sollte. Für eine genauere Diskussion siehe [21].

### 3.4 Halbklassische Beschreibung

In führender Ordnung können die Dispersionkurven der Plasma-Anregungen [44] sowie die HTL-Approximationen der Selbstenergien [45] aus einer halbklassischen Betrachtung mittels der Boltzmann-Gleichung gewonnen werden. Wir dürfen annehmen, daß allein die Wechselwirkung klassischer Teilchen zur Bildung der thermischen Massen beiträgt. Erst in der Korrektur zur Selbstenergie lassen sich quantenmechanische Beiträge (Paarerzeugung) nachweisen [21].

Auch bei Resummation der asymptotischen Massen bleibt die klassische Beschreibung gültig. Wir betrachten ein Plasma aus geladenen ultrarelativistischen Bosonen und fragen, ob sich in diesem Medium eine longitudinale elektromagnetische Welle ausbreiten kann. Im strengen ultrarelativistischen Limes ist die Ruhemasse der Teilchen vernachlässigbar. Wir wollen jedoch zulassen, daß die Teilchen eine thermische Masse  $m \sim eT$  besitzen.

Die Verteilung der Ladungsträger  $f(\vec{p}; \vec{r}, t)$  genügt der Gleichung

$$\partial_t f(\vec{p}; \vec{r}, t) = -e \vec{E} \cdot \nabla_p f(\vec{p}; \vec{r}, t) - \vec{v}(\vec{p}) \cdot \nabla_r f(\vec{p}; \vec{r}, t). \quad (3.26)$$

Die Funktion  $f(\vec{p}; \vec{r}, t)$  beschreibt die Anzahl der Ladungsträger mit Impuls  $p$  in einem Subsystem am Ort  $(\vec{r}, t)$ . Die Bosefunktion  $n_b(p)$  ist ihr ortunabhängiger Gleichgewichtswert. Gesucht ist eine longitudinale elektromagnetische Anregung des Plasmas. Sie wird die Gestalt

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{q}}{q} E_o \cos(\omega(q)t - \vec{q} \cdot \vec{r}) \quad (3.27)$$

haben. Die Maxwellgleichung  $\vec{j}(\vec{r}, t) = -\partial_t \vec{E}(\vec{r}, t)$  liefert einen Zusammenhang zwischen elektrischem Feld und der Verteilungsfunktion  $f$ .

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = 2e \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \vec{v}(\vec{p}) f(\vec{p}; \vec{r}, t) = -\partial_t \vec{E}(\vec{r}, t), \quad (3.28)$$

wobei  $\vec{v} = \vec{p} / \sqrt{p^2 + m^2}$  die Geschwindigkeit eines Teilchens mit Impuls  $\vec{p}$  ist,  $m$  ist die oben angesprochene thermische Masse.

Das System weiche nur wenig vom Gleichgewicht ab:  $f(\vec{p}; \vec{r}, t) = n_b(p) + \delta f(\vec{p}; \vec{r}, t)$ . Die Boltzmann-Gleichung (3.26) wird linearisiert und ergibt

$$\delta f(\vec{p}; \vec{r}, t) = -eE_0 \frac{n'(\sqrt{\phantom{x}})}{\sqrt{\phantom{x}}} \frac{\vec{p} \cdot \vec{q}}{q} \frac{\sin(\omega t - \vec{q} \cdot \vec{r})}{\omega - \vec{p} \cdot \vec{q} / \sqrt{\phantom{x}}} \quad (3.29)$$

mit  $\sqrt{\phantom{x}} = \sqrt{p^2 + m^2}$ . Die Maxwell-Gleichung liefert die Bestimmungsgleichung für  $\omega(q)$ .

$$\omega(q) = -2e^2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{n'(p)}{p^2 + m^2} \frac{(\vec{p} \cdot \vec{q})^2}{q^2} \frac{1}{\omega - \vec{p} \cdot \vec{q} / \sqrt{\phantom{x}}} \quad (3.30)$$

wobei  $m \ll p$  in der Bosefunktion ausgenutzt wurde. Die Gleichung läßt sich mühelos in

$$q^2 = -\Pi_{oo} \quad \text{mit} \quad \Pi_{oo} = 2e^2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} n'(p) \frac{\vec{p} \cdot \vec{q}}{\omega \sqrt{\phantom{x}} - \vec{p} \cdot \vec{q}} \quad (3.31)$$

umformen. Dies ist genau die Selbstenergie aus (3.22).

Die halbklassische Betrachtung führt also auch am Lichtkegel zum Erfolg. Dies liefert folgendes physikalisches Bild: Die longitudinale Anregung ist eine kollektive Anregung der klassischen Teilchen des Plasmas. Es gibt dabei keine quantenmechanischen Wechselwirkungen der Teilchen untereinander (z.B. über virtuellen Photonaustausch). Mit anderen Worten heißt das, daß die inneren Linien in den Diagrammen der HTL-Selbstenergie auf der Massenschale sind. Die Teilchen erhalten durch ihre klassische Wechselwirkung thermische Massen. Letztere dürfen in Lichtkegelnähe nicht vernachlässigt werden.



Das System weicht nur wenig vom Gleichgewicht ab  $\delta(\rho, T, \mu) = \delta(\rho) + \delta(T) + \delta(\mu)$ . Die Boltzmann-Gleichung (3.20) wird linearisiert und ergibt

$$\delta(\rho, T, \mu) = -\frac{v(\rho, T, \mu)}{\sqrt{v^2 + m^2}} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right) + \dots \quad (3.21)$$

mit  $\mathbf{v} = \nabla \phi / m$ . Die Maxwell-Gleichung liefert die Bestimmungsgleichung für  $\phi(\mathbf{r}, t)$

$$\Delta \phi = -\frac{1}{\epsilon_0} \delta(\rho) = -\frac{1}{\epsilon_0} \left( -\frac{v(\rho, T, \mu)}{\sqrt{v^2 + m^2}} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right) \right) \quad (3.22)$$

wobei  $\mathbf{v}$  in der Poisson-Gleichung eingesetzt wurde. Die Gleichung lässt sich in Fourier-Raum umformen. Dies ist genau die Helmholtz-Gleichung (3.23)

$$(\Delta + k^2) \phi = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{v(\rho, T, \mu)}{\sqrt{v^2 + m^2}} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right) \quad (3.23)$$

Die helmholtzsche Bestimmung führt also auch zum Lichteigenwert  $\omega$ . Dies liefert folgendes physikalisches Bild: Die longitudinale Anregung ist eine kollektive Anregung der klassischen Teilchen des Plasmas. Es gibt dabei keine quantenmechanischen Wechselwirkungen der Teilchen untereinander (z.B. über virtuellen Photonaustausch). Mit anderen Worten heißt das, dass die Ionen in den Plasmen im HLL-Bereich als klassische Teilchen betrachtet werden können. Die Teilchen erfahren durch ihre ständige Wechselwirkung mit den Ionen Plasmonen, letztere dürfen in der Helmholtz-Gleichung nicht vernachlässigt werden.

## Kapitel 4

# Das QCD-Plasmon am Lichtkegel

Wir müssen zeigen, daß bei Verwendung der resummierten Gluon-Propagatoren lediglich die Singularität abgemildert wird. Wenn nun das Integral konvergiert, wie die Fol-

Im Modell der skalaren Elektrodynamik haben wir gesehen, welche Effekte kollineare Singularitäten in den Selbstenergien auf die Dispersionskurve des Plasmon haben und wie die zerstörte Konsistenz wiederhergestellt werden kann. Die Untersuchung wird nun für QCD wiederholt. Wir werden feststellen, daß auch im nichtabelschen Fall eine bestimmte asymptotische Masse resummiert werden muß, um am Lichtkegel die konsistente Bestimmung der Plasmon-Dispersionskurve zu ermöglichen.

Die halbklassische Betrachtung des vorangegangenen Abschnittes läßt schon erahnen, welche Masse zu resummiert sein wird: Die klassischen Freiheitsgrade mit harten Impulsen, welche das Gluon-Plasma bilden, sind die transversalen Gluonen. Longitudinale Anregungen existieren erst bei kleineren Energien, welche nicht zur Bildung der HTL-Größen beitragen. Entsprechend wird bei lichtartigen Impulsen die thermische Masse der transversalen Gluonen wichtig werden, falls eine solche Masse existiert. Nach Abschnitt 2.2 existiert sie tatsächlich, die transversale Dispersionskurve  $\omega_t(q)$  nähert sich für große  $q$  nämlich der Form  $\omega_t^2 = q^2 + m_\infty^2$  mit

$$m_\infty^2 := \frac{g^2 NT}{6} = \Pi_t(\omega = q)^1 \quad \text{für} \quad \omega, q \sim T. \quad (4.1)$$

Also sind transversale Gluonen für harte Impulse massiv. Wir kommen zu der Vermutung, daß ihre Masse  $m_\infty$  bei der Bestimmung der Plasmon-Selbstenergie in Lichtkegelnähe nicht vernachlässigt werden darf.

In den folgenden Abschnitten bestätigen wir die Vermutung. Zuerst wird die führende Ordnung der Gluon-Selbstenergie betrachtet. Sie wird mit den massiven Propagatoren neu bestimmt, wobei analog zur SED die Masse  $m_\infty$  vorerst unbekannt ist. Letztere wird in Abschnitt 4.2 festgelegt, in welchem die Korrektur  $\delta\Pi_{\mu\nu}$  ausgewertet wird. Dabei werden zunächst alle Beiträge von HTL-Vertizes vernachlässigt. Sie werden gesondert in Abschnitt 4.3 diskutiert.

Die führende Ordnung  $\Pi$  der Gluon-Selbstenergie aus Gleichung (2.18) stimmt bis auf einen Vorfaktor mit der Photon-Selbstenergie der SED überein. Wie bei SED divergiert also  $\Pi$  am Lichtkegel aufgrund einer kollinearen Singularität.

<sup>1</sup> $\Pi_{\mu\nu}(Q)$  ist nun wieder die Gluon-, nicht mehr die Photon-Selbstenergie.

Die Korrektur  $\delta\Pi$  aus (2.42) besteht aus zwei Teilen. Im ersten sind innere Propagatoren und Vertizes nach Braaten und Pisarski resummiert. Der zweite (der Subtraktionsterm  $\Pi^{[-]}$ ) enthält dagegen nackte Propagatoren. Analog zum entsprechenden Term der SED hat er die Aufgabe, alle Beiträge von der harten Impulsskala des ersten Anteils zu kompensieren, so daß in der Differenz die Summationen auf weiche Impulse beschränkt sind. Wir haben gesehen, daß  $\Pi^{[-]}$  unter Umständen diese Aufgabe nicht erfüllt. Am Lichtkegel kann  $\Pi^{[-]}$  aufgrund der kollinearen Singularität in den nackten Propagatoren beliebig groß werden. Der erste Teil der Korrektur besteht jedoch aus resummierten Propagatoren, welche die kollineare Singularität abschirmen. Dieser Anteil wird am Lichtkegel also nicht beliebig groß, sondern bleibt endlich. Der Subtraktionsterm kann dann seinen Zweck nicht erfüllen.

Wir müssen zeigen, daß bei Verwendung der resummierten Gluon-Propagatoren tatsächlich die Singularität abgeschirmt wird. Wenn uns dies gelingt, können wir die Philosophie des vorigen Kapitels vollständig auf QCD übertragen. Dann ist in der QCD der Subtraktionsterm ebenfalls ungeeignet gewählt, und wir müssen die führende Ordnung der Selbstenergie erneut betrachten.

## 4.1 Die führende Ordnung am Lichtkegel

Wir nehmen zunächst die Vermutung (4.1) ernst und versuchen, mit ihr eine verbesserte Version der Gluon-Selbstenergie zu erhalten. Interessant ist vor allem die Frage, ob eine einzige transversale Masse ausreichend ist, um kollineare Singularitäten zu verhindern. Schließlich stehen noch immer nackte Anteile  $\Delta_o = 1/P^2$  im Propagator.

Zur Resummation der (unbekannten) Masse  $m_\infty$  addieren wir analog zu (3.17) der Lagrangedichte einen Massenterm hinzu, so daß der transversale Anteil des Propagators eine Masse bekommt, die anderen Anteile jedoch nicht. Der in  $A_\mu$  quadratische Term der Lagrangedichte wird zu [46]

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}^{(2)} = -\frac{1}{2}A^\mu \left\{ Q^2 g_{\mu\nu} + (\alpha - 1)Q_\mu Q_\nu - m_\infty^2 A_{\mu\nu}(Q) \right\} A^\nu. \quad (4.2)$$

Die Matrix  $A_{\mu\nu}$  ist der transversale Projektor aus der Basis (2.14). Wie die vollständige (eichinvariante) Lagrangedichte mit eingebauter Masse  $m_\infty^2$  auszusehen hat, findet sich in [46]. Wie werden hier nur den Propagator  $G_{\mu\nu}$  benötigen. Aus (4.2) ergibt sich

$$G_{\mu\nu}(P) = A_{\mu\nu}\Delta_m + (B_{\mu\nu} + \alpha D_{\mu\nu})\Delta_o \quad (4.3)$$

$$\text{mit } \Delta_m = \frac{1}{P^2 - m_\infty^2} \quad \text{und} \quad \Delta_o = \frac{1}{P^2}.$$

Die gefährlichen  $\Delta_o$ -Terme sieht man nun explizit. Neben  $G_{\mu\nu}$  gibt es den Geist-Propagator. Auch dieser ist nicht massiv.

Die führende Ordnung  $\Pi_{\mu\nu}(Q)$  ist durch die Diagramme aus Abbildung 2.1 gegeben. Mit dem Gluon-Propagator (4.3) liefern sie

$$\Pi_{oo}^{\text{loop}}(Q) = g^2 N \int \left\{ \Delta_m - 4\Delta_m^- \Delta_m P_o K_o - \Delta_o^- \Delta_o P_o K_o \right\}$$



$$\begin{aligned}\Pi_{oo}^{\text{tad}}(Q) &= -g^2 N \not{\int} 3\Delta_m \\ \Pi_{oo}^{\text{ghost}}(Q) &= g^2 N \not{\int} \Delta_o^- \Delta_o P_o K_o,\end{aligned}\quad (4.4)$$

so daß in der Summe nur massive Propagatoren vorkommen,

$$\Pi_{oo}(Q) = g^2 N \not{\int} \left\{ -2\Delta_m - 4\Delta_m^- \Delta_m P_o K_o \right\}. \quad (4.5)$$

Dies ist genau derjenige Ausdruck, welchen wir für die Photon-Selbstenergie der SED (3.19) erhalten haben. Wir wissen, daß er am Lichtkegel endlich ist. Der führende Anteil ist analog zu (3.22)

$$\Pi_{oo}(Q) = 3m^2 + 2g^2 N \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} n'(p) \frac{Q_o^2 \omega_p^2}{\omega_p^2 Q_o^2 - (\vec{p}\vec{q})^2} \quad (4.6)$$

mit  $m^2 = g^2 NT^2/9$  und  $\omega_p^2 = p^2 + m_\infty^2$ . Die asymptotische Masse  $m_\infty$  ist formal noch unbekannt. Sie wird im folgenden Abschnitt aus der Forderung bestimmt, die Summationen in der Korrektur  $\delta\Pi$  seien auf weiche Impulse beschränkt. Wir werden auf (4.1) geführt werden.

Die Gluon-Selbstenergie ist nun auch für lichtartige Impulse wohldefiniert.  $\Pi_{oo}(Q^2 = 0)$  ist endlich. Entsprechend (vgl. (3.25)) gibt es eine Lösung der Gleichung  $\omega_\ell(q_{\text{krit}}) = q_{\text{krit}}$ :

$$q_{\text{krit}}^2 = 3m^2 \left[ \ln\left(\frac{2T}{m_\infty}\right) + \frac{1}{2} - \gamma_E + \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} \right] + \mathcal{O}(g^3 T^2). \quad (4.7)$$

Analog zur SED schmiegt sich die Plasmon-Dispersionskurve nicht mehr exponentiell an den Lichtkegel an, sondern mündet bei endlichem  $q_{\text{krit}}$  in den Lichtkegel ein.

## 4.2 Die Korrektur $\delta\Pi$

Die Korrektur  $\delta\Pi_{oo}$  aus (2.42) wird nun auf ihr Verhalten am Lichtkegel untersucht. Wir werden feststellen, daß es zwei verschiedene Mechanismen gibt, welche  $\delta\Pi$  wachsen lassen. Zum einen die aus der SED bekannte „latente UV-Divergenz“, also die ungeeignete Wahl des Subtraktionstermes. Zum anderen können die HTL-Zusätze der Vertizes kollineare Singularitäten entwickeln. Sie wurden in Kapitel 2 aus der ursprünglichen Form der Selbstenergie  $\Pi$  hergeleitet. Die HTL-Vertizes haben dabei die Singularitäten von  $\Pi$  „geerbt“. Entsprechend der zwei Mechanismen unterteilen wir  $\delta\Pi_{oo}$  in zwei Teile [22],

$$\delta\Pi_{oo}(Q) =: \delta\Pi_{oo}^{\text{tree}}(Q) + \delta\Pi_{oo}^{\text{HTLV}}(Q). \quad (4.8)$$

Der Anteil  $\delta\Pi_{oo}^{\text{tree}}(Q)$  enthalte keine HTL-Zusätze, sondern nur die nackten Vertizes.  $\delta\Pi_{oo}^{\text{HTLV}}(Q)$  enthalte den Rest. Die expliziten Ausdrücke für beide Teile sind im Anhang C angegeben.

Wir wenden uns zunächst dem tree-Anteil  $\delta\Pi_{oo}^{\text{tree}}$  zu, siehe (C.7). Er besteht aus einem Term mit nackten Propagatoren  $d_o$  sowie aus etlichen Termen der Form

$$\delta\Pi^{\text{Bsp}} := g^2 N \sum \Delta_t \Delta_{t,\ell}^- f(p, k), \quad (4.9)$$

wobei  $f(p, k)$  eine beliebige Funktion der räumlichen Impulse  $\vec{p}$ ,  $\vec{k}$  und von  $Q$  sowie  $m$  sein kann. Wir untersuchen, ob  $\delta\Pi_{oo}^{\text{tree}}$  auf weiche Impulse beschränkt ist. Dazu wird der Limes  $P \gg Q, m$  durchgeführt, wobei Singularitäten in Lichtkegelnähe beachtet werden müssen. Der  $d_o$ -Term aus (C.7) bleibt dabei unverändert. In den Resttermen darf in den Propagatoren nicht naiv  $\Pi = 0$  gesetzt werden. Es gilt also nicht  $\Delta_t = \Delta_\ell = \Delta_o$ . Hier gilt es vielmehr, lichtartige Impulse zu beachten.

Am Beispielterm (4.9) wird das Vorgehen erläutert. Die Propagatoren werden durch spektrale Dichten ersetzt (Anhang A), so daß die Frequenzsumme ausführbar wird,

$$\delta\Pi^{\text{Bsp}} = -g^2 N \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dx n_b(x) \varrho_t(x, p) \Delta_{t,\ell}(Q_o - x, k) f(p, k). \quad (4.10)$$

Der äußere Impuls wird fortgesetzt,  $Q_o \rightarrow \omega + i\varepsilon$ , die Bezeichnung  $Q_o$  jedoch beibehalten. Der Propagator ist  $\Delta_{t,\ell}(Q_o - x, k) = [(Q_o - x)^2 - k^2 - \Pi_{t,\ell}(Q_o - x, k)]^{-1}$ . Für harte  $p$  nähert sich  $\varrho_t(x, p) \approx \delta[x^2 - \omega_t^2(p)]$ , so daß

$$\delta\Pi^{\text{Bsp}} = g^2 N \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{n_b(p)}{p} \frac{f(p, k)}{2Q_o \omega_t(p) - 2\vec{p}\vec{q} - Q^2 + \Pi_{t,\ell}(Q_o - \omega_t, k) - m_\infty^2}. \quad (4.11)$$

Abseits des Lichtkegels dürfen  $Q^2$ ,  $m_\infty^2$  sowie  $\Pi_t$  vernachlässigt werden. Auf dem Lichtkegel  $Q_o = q$  kann bei  $\vec{p}\vec{q} = pq$  der Nenner verschwinden. Dies ist die bekannte kollineare Singularität. Sie wird in (4.11) u.a. durch  $\Pi_t(q - \omega_t, q - p)$  reguliert, also von einer Selbstenergie  $\Pi(P)$ , deren Argument  $P$  ebenfalls (fast) lichtartig ist.

Das Beispiel wird verallgemeinert: Zur Bildung des harten Anteils von  $\delta\Pi_{oo}^{\text{tree}}$  dürfen die Selbstenergien in den Propagatoren nicht vernachlässigt werden, sondern müssen durch ihre Lichtkegel-Grenzwerte ersetzt werden:

$$\Pi_t \rightarrow \frac{g^2 N T^2}{6} =: m_\infty^2 \quad \text{sowie} \quad \Pi_\ell \rightarrow 0. \quad (4.12)$$

Durch diese Ersetzungen wird aus (C.7) [22]

$$\delta\Pi_{oo}^{\text{tree}} \rightarrow g^2 N \sum \left\{ 2(\Delta_m - \Delta_o) + 4p^2 (\Delta_m \Delta_m^- - \Delta_o \Delta_o^-) \right\}. \quad (4.13)$$

Dies ist das Analogon zur Selbstenergie-Korrektur aus der SED (3.4). Wie dort gezeigt, ist  $\delta\Pi^{\text{tree}}$  am Lichtkegel *nicht* auf Integrationen über weiche Impulse beschränkt, da die Differenz  $\Delta_m \Delta_m^- - \Delta_o \Delta_o^-$  nicht verschwindet. Also wird auch in der QCD zur Bildung der Korrektur ein ungeeigneter Subtraktionsterm verwendet.

Es ist somit gezeigt, daß  $\delta\Pi^{\text{tree}}$  am Lichtkegel noch Beiträge zur führenden Ordnung  $\Pi$  enthält.  $\Pi$  ist also auf eine inkonsistente Weise bestimmt worden. Wie dies zu berichtigen ist, wissen wir aus der SED. Wir müssen dafür Sorge tragen, daß die Differenzen aus

(4.13) für harte  $P$  tatsächlich verschwinden. Dazu sind die harten Propagatoren mit einer asymptotischen Masse zu resumieren. In Abschnitt 4.1 ist dies getan, wobei dort  $m_\infty$  noch unbekannt war. Die Masse läßt sich nun aus (4.13) und (4.12) bestimmen: Die Vermutung (4.1) ist richtig! Eine verbesserte Störungsrechnung muß zur Ausintegration der harten Impulse die Lagrangedichte (4.2) als Startpunkt haben.

### 4.3 Beiträge von HTL-Vertizes

Bislang sind die Beiträge der HTL-Vertizes nicht diskutiert worden. Wie oben angedeutet, verursachen auch sie kollineare Singularitäten in der Selbstenergie. Wir müssen nun die Frage beantworten, ob die soeben verbesserte Störungsreihe dies aushalten kann. Die Antwort wird zum Glück positiv ausfallen: Die Resummation der asymptotischen Massen ist konsistent. Doch bis wir dort angelangt sind, steht eine größere Rechnung bevor. Der vorliegende Abschnitt enthält die Diskussion der Philosophie und des Ergebnisses. Die Rechnung selbst ist im nachfolgenden Kapitel abgedruckt.

Bei den Beiträgen der HTL-Vertizes stoßen wir auf ein Problem: Oben wurde gezeigt, daß die bisherige führende Ordnung von  $\Pi$  nicht konsistent bestimmt ist. Letztere ist jedoch der Ausgangspunkt zur Herleitung der HTL-Vertizes, welche somit sicherlich ebenfalls in inkonsistenter Form vorliegen. Wir müssen also zunächst annehmen, die Resummation von  $m_\infty$  sei konsistent. Dann werden die HTL-Vertizes in verbesserter Version neu bestimmt, um schließlich  $\delta\Pi$  erneut zu untersuchen. Wenn wir feststellen, daß  $\delta\Pi$  die Störungsreihe intakt läßt, haben wir die Tauglichkeit der Massenresummation gezeigt. Leider scheitert dieses Arbeitsprogramm in der Praxis. In Kapitel 6 werden zwar verbesserte HTL-Vertizes hergeleitet, mit ihnen ist die Auswertung von  $\delta\Pi$  jedoch technisch zu schwer.

Wir gehen einen Schritt zurück und verwenden nicht die massiven Propagatoren, sondern halten uns an das Original-Schema von Braaten und Pisarski. Die Selbstenergie wird also wieder echte Singularitäten enthalten, so daß wir dem Lichtkegel nicht beliebig nahe kommen dürfen. Wir wagen uns auf der longitudinalen Massenschale nur soweit heran, daß

$$1 \ll \varepsilon^2 \ll g^2 \quad \text{mit} \quad \varepsilon^2 := Q^2/q^2. \quad (4.14)$$

In diesem Bereich ist die Resummation der asymptotischen Massen noch nicht notwendig. Dort sind wir in der Lage, aus analytischer Rechnung die  $\varepsilon$ -Asymptotik von  $\delta\Pi^{\text{HTLV}}$  zu ermitteln,

$$\delta\Pi_{\infty}^{\text{HTLV}} = m^2 g \left\{ \frac{a}{\varepsilon^2} + \frac{b \ln(\varepsilon)}{\varepsilon} + \frac{c}{\varepsilon} + d \ln(\varepsilon) + \dots \right\}. \quad (4.15)$$

Das  $\varepsilon$  kann nicht beliebig klein werden. Spätestens bei  $\varepsilon \sim g$  wird die asymptotische Masse  $m_\infty$  wichtig, so daß alle potentiellen Singularitäten in  $\varepsilon$  aus (4.15) bei  $\varepsilon \sim g$  reguliert werden. Direkt am Lichtkegel ist also

$$\delta\Pi_{\infty}^{\text{HTLV}} = m^2 g \left\{ \frac{a'}{g^2} + \frac{b' \ln(g)}{g} + \frac{c'}{g} + d' \ln(g) + \dots \right\}. \quad (4.16)$$



Wir nehmen nun an, daß ein Beitrag zu einem bestimmten Ordnung der Asymptotik (4.15) nicht zu einem Term größerer Ordnung aus (4.16) beitragen kann. Z. B. wird ein Beitrag zu  $c$  in (4.15) nicht zu  $a'$  aus (4.16) beitragen. Auf diesem Wege ist es möglich, aus der  $\varepsilon$ -Asymptotik von  $\delta\Pi^{\text{HLTV}}$  abseits des Lichtkegels Rückschlüsse auf die Eigenschaften in der Nähe des Lichtkegels zu ziehen.

Wir betrachten auf dem Lichtkegel die Bestimmungsgleichung (2.34),  $q^2 = -\bar{\Pi}_{oo}(Q)$ , für die Plasmon-Dispersionskurve. Die Bestimmungsgleichung ist komplex,  $Q_o = \Omega := \omega_\ell - i\gamma_\ell$ . Der Realteil hat mit (4.16) die Form

$$-q^2 = -3m^2 \ln\left(\frac{1}{g}\right) + m^2 g \left\{ \frac{a}{g^2} + \frac{b \ln(g)}{g} + \frac{c}{g} + \dots \right\}. \quad (4.17)$$

Die führende Ordnung der Selbstenergie ist nur dann durch  $3m^2 \ln\left(\frac{1}{g}\right)$  vollständig gegeben, wenn  $a = 0$  und  $b = 0$  gilt. Ansonsten wären diese Anteile der Korrektur  $\delta\Pi$  eigentlich  $\Pi$  zuzurechnen. Der Realteil von  $\delta\Pi$  muß also  $a = 0$  und  $b = 0$  als Konsistenzbedingung erfüllen. Wenn dies gilt, darf (2.38) zur Bestimmung von  $\delta\omega_\ell$  verwendet werden:

$$\delta\omega_\ell(q) = -\frac{\Re \delta\Pi_{oo}(\omega_\ell + i\varepsilon, q)}{\partial_\omega \Pi_{oo}(\omega, q)|_{\omega=\omega_\ell}} \sim -q \frac{m^2 g c / \varepsilon}{3m^2 / \varepsilon^2} = -q g \varepsilon c \quad (4.18)$$

mit  $\varepsilon \sim g$ . Die Gleichung (2.39) ist dann ebenfalls gültig,

$$\gamma_\ell(q) = \frac{\Im \delta\Pi_{oo}(\omega_\ell + i\varepsilon, q)}{\partial_\omega \Pi_{oo}(\omega, q)|_{\omega=\omega_\ell}}. \quad (2.39)$$

Die Dämpfung  $\gamma_\ell$  möge  $\gamma_\ell \ll \omega_\ell$  erfüllen, andernfalls beschreibt die Dispersionskurve keine physikalischen, sondern überdämpfte Anregungen. Dies stellt eine Konsistenzbedingung (wenn auch nur eine sehr schwache) an den Imaginärteil von  $\delta\Pi$ : Er darf in Lichtkegelnähe nicht stärker mit  $\varepsilon$  wachsen als  $\partial_\omega \Pi_{oo}$ . Nach (2.41) ist  $\partial_\omega \Pi_{oo} \sim 1/\varepsilon^2$ . Also darf  $\Im \delta\Pi$  keine stärkere  $\varepsilon$ -Potenz als  $1/\varepsilon^2$  liefern.

Wir fassen die Bedingungen zusammen:

- Der Realteil  $\Re \delta\Pi_{oo}$  darf sich maximal wie  $1/\varepsilon$
- und der Imaginärteil  $\Im \delta\Pi_{oo}$  möge sich maximal wie  $1/\varepsilon^2$  verhalten.

Ist dies erfüllt, so kann die Dispersionskurve des Plasmon konsistent ermittelt werden.

Um abzuschätzen, wie stark  $\delta\Pi_{oo}$  mit  $\varepsilon$  wachsen kann, sei ein Beispielterm betrachtet. Das Tadpol-Diagramm aus Abbildung 2.2 liefert den Beitrag (Anhang C)

$$\Sigma(Q) = g^2 N \int_{\mathcal{P}} [\Delta_t - \Delta_\ell] \frac{P^2}{p^2} \int_{\Omega} \frac{3m^2}{(YQ)^2} \left\{ \frac{P_o}{YP} - \frac{K_o}{YK} \right\}. \quad (4.19)$$

Er enthält einen quadratischen Nenner  $(YQ)^2$ , welcher zu einem Term der Ordnung  $1/\varepsilon^2$  führen kann. Jedoch kann  $\Sigma$  zu noch höheren Ordnungen beitragen, denn im  $(P_o = 0)$ -Anteil  $\Sigma_o$  kann  $Q^2 = 0$  auch den Infrarot-Bereich der  $p$ -Integration beeinflussen:

$$\Sigma_o(Q) = -g^2 NT \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{p^2} \int_{\Omega} \frac{3m^2}{(YQ)^2} \frac{Q_o}{YQ + \vec{e} \vec{p}}. \quad (4.20)$$

Am kollinearen Punkt, d.h.  $(YQ) = 0$ , verhält sich der Integrand wie  $1/p^3$ , so daß hier eine logarithmische IR-Divergenz entstehen könnte. Im exakten Resultat wird  $\Sigma$  zwar keine echte Divergenz enthalten, jedoch führt die „IR-Sensibilität“ dazu, daß  $\Sigma$  die Ordnung  $\ln(\varepsilon)/\varepsilon^2$  anstelle von  $1/\varepsilon^2$  entwickelt.

Die Auswertung von  $\delta\Pi$  ist also mit größter Sorgfalt vorzunehmen. Man hat nicht nur den kollinearen Punkt zu beachten, sondern muß auch Effekte kleiner  $p$  studieren. Die detaillierte Rechnung ist im folgenden Kapitel geschildert. Wir werden dort etliche Beiträge von  $\delta\Pi$  finden, welche eine Ordnung  $1/\varepsilon^2$  oder gar  $\ln(\varepsilon)/\varepsilon^2$  entwickeln.

Das Endresultat ist jedoch bemerkenswert schön und überraschend: In der Summe aller Terme kompensieren sich die gefährlichen  $\varepsilon$ -Potenzen.

$$\Re \delta\Pi_{oo} = m^2 g \left\{ 0 \cdot \frac{\ln(\varepsilon)}{\varepsilon^2} + 0 \cdot \frac{1}{\varepsilon^2} + 0 \cdot \frac{\ln(\varepsilon)}{\varepsilon} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \right\} \quad (4.21)$$

$$\Im \delta\Pi_{oo} = m^2 g \left\{ \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{3N}{8\pi} \frac{gT}{q} \ln\left(\frac{3m^2}{\mu^2}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \right\} \quad (4.22)$$

wobei  $\mu$  ein künstlicher IR-cut-off ist, vergleiche Abschnitt 2.5. Das Resultat bedeutet, daß  $\delta\Pi_{oo}$  die obigen Konsistenzbedingungen erfüllt! Die Resummation der asymptotischen Massen führt somit zu einer konsistenten Entwicklung der Plasmon-Dispersionskurve.

Als Nebenresultat können wir  $\delta\omega_\ell$  und  $\gamma_\ell$  in Lichtkegelnähe ausrechnen. Der Koeffizient von  $\Re \delta\Pi_{oo}$  der Ordnung  $1/\varepsilon$  ist leider nur numerisch zu ermitteln, wir geben ihn hier nicht an (vergleiche (5.71)). Für den Imaginärteil  $\Im \delta\Pi_{oo}$  haben wir jedoch ein analytisches Resultat erhalten, so daß für die Dämpfung aus (2.39) folgt,

$$\gamma_\ell|_{\text{LC}} = \frac{g^2 N T}{4\pi} \ln\left(\frac{3m^2}{\mu^2}\right). \quad (4.23)$$

Dies ist der Lichtkegel-Grenzwert von dem bekannten Ausdruck (2.52) für die Dämpfung  $\gamma_\ell$ . Auf diesem Wege können wir also bestätigen, daß die Rechnungen aus Kapitel 5 die korrekte Asymptotik in  $\varepsilon$  ergeben haben.

## 4.4 Konsistente Störungsreihe am Lichtkegel

Wir haben gezeigt, daß die Resummation der asymptotischer Massen

$$m_\infty^2 := \Pi_t(Q_o \rightarrow q) \quad , \quad Q_o, Q \sim T$$

auch im nichtabelschen Fall der QCD ausreichend zur Wiederherstellung der Konsistenz am Lichtkegel ist. Wie damit eine Störungsrechnung aufgezo-gen werden kann, ist uns aus dem Beispiel SED bekannt. Im nichtabelschen Fall müssen wir jedoch die Existenz der HTL-Vertizes beachten. Die Prozedur verläuft wie folgt:

Zur Bestimmung der führenden Ordnung der Gluon-Selbstenergie wird die zunächst unbekannte Masse  $m_\infty$  zu der Lagrangedichte der QCD hinzugefügt (4.2). Ein entsprechender Term wird anschließend subtrahiert. Er wird als Störung behandelt und kann hier

vernachlässigt werden. Der transversale Anteil des Gluon-Propagators erhält auf diesem Wege einen Masseneinsatz (4.3). In der Gluon-Selbstenergie werden dadurch die ursprünglich vorhandenen kollinearen Singularitäten abgeschirmt, siehe Gleichung (4.6).

Mit der verbesserten Selbstenergie können wir die effektive Wirkung der weichen Impuls-Skala in einer neuen Version ermitteln, siehe Kapitel 6. Die ursprünglichen HTL-Vertizes verursachen ebenfalls kollineare Singularitäten. In den verbesserten Vertizes werden diese durch die asymptotische Masse abgeschirmt. Somit ist auch die Korrektur  $\delta\Pi$  zur Selbstenergie am Lichtkegel endlich. Anstelle der Singularität wächst  $\delta\Pi_{\infty}$  stark an, allerdings wird dadurch die Konsistenz der Störungsreihe nicht erneut gefährdet.  $\delta\Pi$  wächst nur so stark, wie es die Konsistenzbedingungen aus dem letzten Abschnitt erlauben. Insbesondere ist in  $\delta\Pi$  die innere Summation jetzt durch die neue Wahl des Subtraktionstermes tatsächlich auf weiche Impulse beschränkt. Genau so ist es von der Renormierungs-Theorie gefordert.

#### 4.4 Konsistente Störungsreihe am Lichtkegel

Wir haben gezeigt, daß die Renormierung der asymptotischen Massen auch im nichtbedeutenden Fall der QCD ausreicht zur Wiederherstellung der Konsistenz am Lichtkegel ist. Wie damit eine Störungsreihe aufgezogen werden kann, ist nur am dem Beispiel SED bekannt. Im nichtbedeutenden Fall können wir jedoch die Existenz der HTL-Vertizes beachten. Die Propagator verhält wie folgt:

Zur Bestimmung der führenden Ordnung der Gluon-Selbstenergie wird die einfachste nicht-triviale Masse  $m_g$  zu der Lagrange-Dichte der QCD hinzugefügt (4.2). Ein entsprechender Term wird anschließend subtrahiert. Er wird als Störungsbehandlung und kann hier



## Kapitel 5

# Auswertung der HTL-Vertex-Anteile

In diesem Kapitel wird die Lichtkegel-Asymptotik derjenigen Anteile zur Plasmon-Selbstenergie ermittelt, welche HTL-Vertizes enthalten:  $\delta\Pi_{oo}^{\text{HTLV}}(Q)$ . Die notwendige Rechnung wird ausführlich dargestellt, so daß Leser, welche nicht sehr an technischen Details interessiert ist, den Abschnitt als Anhang betrachten mögen. Schließlich sind die hier gewonnenen Ergebnisse schon im vorangegangenen Kapitel vorweggenommen. Derjenige Leser, welcher sich an schöner Integrierkunst erfreuen kann, findet hier den Hauptteil der Arbeit.

Aufwendig wird die Auswertung dadurch, daß  $Q^2 > 0$  nicht nur im kollinearen Limes die Integrale endlich hält, sondern auch den infraroten Bereich kontrolliert. Als Beispiel haben wir im vorigen Kapitel den Null-Frequenz Anteil des Tadpol an der Stelle  $\omega \approx q$  betrachtet,

$$\Sigma_o(Q) \sim g^2 m^2 T \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{p^2} \frac{3m^2}{p^2 + 3m^2} \int_{\Omega} \frac{Q_o}{(YQ)^2} \frac{1}{\omega - \vec{e}\vec{q} + \vec{e}\vec{p}}. \quad (5.1)$$

Der kollineare Pol findet sich im Nenner  $1/(YQ)^2$ , der Rest scheint am Lichtkegel endlich. Versucht man, das Residuum des Poles zu bestimmen, d.h.  $\omega - \vec{e}\vec{q} + \vec{e}\vec{p} \approx \vec{q}\vec{p}/q$ , findet man zwar einen in  $\vec{p}\vec{q}$  ungeraden Integranden, jedoch auch eine logarithmische IR-Singularität im  $dp$ -Integral. Damit ist das Residuum bei dieser groben Herangehensweise unbestimmt. Die Lichtkegel-sensiblen Integrationsbereiche müssen also sorgfältig herauspräpariert und einzeln ausgewertet werden.

Gleichung (5.1) zeigt, daß von den HTL-Vertex-Anteilen ein starkes Anwachsen  $\sim 1/\varepsilon^2$  oder stärker für  $\varepsilon^2 = Q^2/q^2 \rightarrow 0$  erwartet werden muß. Im vorigen Kapitel haben wir gesehen, daß gewisse  $\varepsilon$ -Potenzen die Konsistenz der Störungsreihe zerstören können. Der Realteil von  $\delta\Pi_{oo}^{\text{HTLV}}(Q)$  darf maximal mit  $1/\varepsilon$  wachsen, der Imaginärteil kann jedoch ein  $1/\varepsilon^2$  verkraften. Da wir uns hier nur für die Konsistenz interessieren, werden wir uns auf die negativen Potenzen in  $\varepsilon$  konzentriert. Logarithmisch oder noch schwächer anwachsende Terme werden vernachlässigt.

Zunächst werfen wir einen Blick auf den vollständigen HTL-Vertex-Anteil der Plasmon Selbstenergie. Er ist je nach Typ der inneren Propagatoren in vier Teile zerlegt, vergleiche Anhang C.

$$\delta\Pi_{oo}^{\text{HTLV}}(Q) = \{ \Sigma + \Upsilon + \Phi + \Psi \} \quad (5.2)$$

mit

$$\Sigma = \frac{1}{2}g^2N \sum \Delta \delta\Gamma_{oooo} \quad (5.3)$$

$$\Upsilon = \frac{1}{2}g^2N \sum \Delta \Delta^- (\delta\Gamma_{ooo})^2 \quad (5.4)$$

$$\Phi = g^2N \sum \Delta_t \Delta^- \left\{ \delta\Gamma_{oo\mu} \delta\Gamma_{oo}{}^\mu + 2(P_o + Q_o) \delta\Gamma_{ooo} \right\} \quad (5.5)$$

$$\Psi = \frac{1}{2}g^2N \sum \Delta_t \Delta_t^- \delta\Gamma_{o\mu\nu} \delta\Gamma_o{}^{\mu\nu}, \quad (5.6)$$

sowie  $\Delta = (\Delta_t - \Delta_\ell)P^2/p^2$  und

$$\delta\Gamma_{oooo} = 6m^2 \int_{\Omega} \frac{1}{(YQ)^2} \left( \frac{P_o}{YP} - \frac{K_o}{YK} \right) ; \quad \delta\Gamma_{o\mu\nu} = 3m^2 \int_{\Omega} \frac{Y_\mu Y_\nu}{YQ} \left( \frac{P_o}{YP} - \frac{K_o}{YK} \right).$$

Dabei ist wie bisher  $Q$  der äußere Impuls, über  $P$  wird summiert und  $K = Q - P$ .

Wie sich herausstellt, tragen nur die ersten beiden Teile  $\Sigma$  und  $\Upsilon$  zu gefährlichen Potenzen von  $\varepsilon$  bei. Beide werden hier ausführlich diskutiert. Die Auswertung von  $\Phi$  und  $\Psi$  wird nicht dargestellt (ist aber vom Autor durchgeführt worden), denn sie tragen nicht zu den gesuchten  $\varepsilon$ -Potenzen bei. Der Hauptgrund dafür sind die Faktoren  $(YY')$  in ihren Zählern. Es gibt nur dann starke kollineare Singularitäten, wenn in beiden Winkelintegralen die Nenner  $(YQ)$  klein werden. D.h. es muß  $\vec{e}, \vec{e}' \approx \vec{q}/q$  gelten. Dann verschwindet jedoch auch  $(YY')$ . Damit enthält  $\Phi$  ( $\Psi$ ) effektiv einen (zwei) potentiell singulären Nenner weniger als z.B.  $\Upsilon$  und kann somit keine starken  $\varepsilon$ -Potenzen entwickeln.

## 5.1 Die Frequenzsumme

Im ersten Schritt führen wir die Frequenzsumme aus. Danach erst ist die Fortsetzung  $Q_o \rightarrow \omega + i\varepsilon$  erlaubt, welche zum Erreichen des Lichtkegel erforderlich ist. Mit den Standardmethoden [24] erhält man

$$\Sigma = g^2NT \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \int dx \frac{\varrho(x,p)}{x} \int_{\Omega} \frac{3m^2 Q_o}{(YQ)^2} \frac{1}{Q_o - x - \vec{e} \vec{k}} \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned} \Upsilon = & -g^2NT \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \int dx dy \frac{\varrho(x,p)\varrho(y,k)}{Q_o - x - y} \int_{\Omega\Omega'} \frac{3m^2}{YQ} \frac{3m^2}{Y'Q} \\ & * \left\{ \frac{1}{x} \frac{Q_o - x}{Q_o - x - \vec{e} \vec{k}} \frac{Q_o}{Q_o - x - \vec{e}' \vec{k}} - 2 \frac{Q_o}{Q_o - \vec{e} \vec{p} - \vec{e}' \vec{k}} \frac{1}{Q_o - x - \vec{e}' \vec{k}} \right\}. \quad (5.8) \end{aligned}$$

Hier wurde  $n_b(x) = \frac{T}{x}$  gesetzt, d. h. bereits ausgenutzt, daß alle inneren Impulse weich sind. Die Dichte  $\varrho(x,p)$  ist die spektrale Dichte (Anhang A) des Propagators  $\Delta$ .

Wie oben angedeutet, ist im infraroten Integrationsbereich ein endliches  $Q^2$  wichtig, um die Integration endlich zu halten. Der Bereich muß abgespalten werden. Alle bislang bekannten Infrarotdivergenzen [12, 19] beruhen auf der folgenden Eigenschaft der transversalen Dichte,

$$\frac{\varrho_t(x,p)}{x} \rightarrow \frac{1}{p^2} \delta(x) \quad \text{für} \quad p \rightarrow 0. \quad (5.9)$$

Dies ist äquivalent dazu, daß es in der Ordnung  $gT$  keine magnetische Masse gibt, vergleiche Abschnitt 2.5. Auch im vorliegenden Fall ist (5.9) für die Schwierigkeiten im IR verantwortlich. Also wird  $\Sigma$  und analog  $\Upsilon$  wie folgt unterteilt:

$$\Sigma = \Sigma_o + (\Sigma - \Sigma_o) = \Sigma_o + \Sigma_1. \quad (5.10)$$

Die IR-empfindlichen Anteile sind

$$\Sigma_o = g^2 NT \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \int dx \frac{\varrho(x, p)}{x} \int_{\Omega} \frac{3m^2 Q_o}{(YQ)^2} \frac{1}{Q_o - \vec{e} \vec{k}} \quad (5.11)$$

$$\begin{aligned} \Upsilon_o &= -g^2 NT \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \int dx dy \frac{\varrho(x, p) \varrho(y, k)}{Q_o - x - y} \int_{\Omega\Omega'} \frac{3m^2}{YQ} \frac{3m^2}{Y'Q} \\ &* \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{Q_o - y} \right) \frac{Q_o}{Q_o - \vec{e} \vec{k}} \frac{Q_o}{Q_o - \vec{e}' \vec{k}}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

In ihnen darf nicht  $p^2 \gg Q^2$  genähert werden. Dagegen ist dies in  $\Sigma_1$  und  $\Upsilon_1$  erlaubt. Die Unterteilung (5.10) ist gleichbedeutend mit der Abspaltung des ( $P_o = 0$ )-Anteils aus der Frequenzsumme.

## 5.2 IR-Anteil von $\Sigma$

Im IR-Anteil  $\Sigma_o$  werden zunächst Summenregeln (Anhang A) verwendet, um die  $x$ -Integration auszuführen. Nach der Winkelintegration (Anhang D) findet man

$$\begin{aligned} \Sigma_o &= \frac{1}{2} g^2 NT \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{p^2} \frac{3m^2}{p^2 + 3m^2} \frac{2m_{\infty}^2 \omega^2 (\vec{p} \vec{q} - p^2)}{\sqrt{(\vec{p} \vec{q})^2 + \varepsilon^2 p^2 q^2}^3} \\ &* \left\{ \ln \left( \frac{Q^2 + \vec{p} \vec{q} + \sqrt{\quad}}{Q^2 + \vec{p} \vec{q} - \sqrt{\quad}} \right) - i\pi \Theta(p^2 - 2\vec{p} \vec{q} - Q^2) \right\}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Eine geschwungene Klammer wie diese wird auch weiter unten bei der Diskussion von  $\Upsilon_o$  erscheinen. Insbesondere in der Theta-Funktion sieht man schön, daß  $Q^2$  als eine Art IR-cut-off wirkt.

Die Integranden werden via  $p \rightarrow \varepsilon q v$  und  $\vec{p} \vec{q} / pq \rightarrow \varepsilon u$  dimensionslos.

$$\begin{aligned} \Sigma_o &= \frac{1}{\varepsilon^2} \Gamma \int_0^{\infty} dv \int_{-1/\varepsilon}^{1/\varepsilon} du \frac{\alpha^2}{v^2 + \alpha^2} \frac{u - v}{v^2 \sqrt{1 + u^2}^3} \\ &* \left\{ \ln \left( \frac{\frac{1}{v} + u + \sqrt{\quad}}{\frac{1}{v} + u - \sqrt{\quad}} \right) - i\pi \Theta(v^2 - 2uv - 1) \right\} \end{aligned} \quad (5.14)$$

mit  $\Gamma = \frac{g^2 NT m_{\infty}^2 \omega^2}{(2\pi)^2 q^3}$  und  $\alpha^2 = \frac{3m^2}{\varepsilon^2 q^2}$ .

$\Sigma_o$  wird in Real- und Imaginärteil aufgeteilt. Nach einigen Standardintegrationen erhält man



$$\Im \Sigma_o = \frac{\pi \Gamma}{\varepsilon^2} \left\{ \frac{1}{1+\rho} \left[ \ln(1 + \alpha^2/\rho) - \rho \ln(1 + \alpha^2 \rho) \right] - 2r \right. \\ \left. + \frac{2}{\alpha} \frac{\sqrt{\rho}}{1+\rho} \arctan \left( \frac{\alpha(1-\rho)}{(\alpha^2+1)\sqrt{\rho}} \right) \right\} \quad (5.15)$$

$$= \frac{\pi \Gamma}{\varepsilon^2} \left( \ln(\alpha^2/\rho) - 2 + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right) \quad (5.16)$$

$$\Re \Sigma_o = \frac{1}{4\varepsilon^2} \Gamma \int_{-1}^1 dw \ln \left( \frac{1+w}{1-w} \right) \left\{ \ln \left( \frac{4\rho + \alpha^2[(1-w) + \rho(1+w)]^2}{4\rho + \alpha^2[(1+w) + \rho(1-w)]^2} \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{w^2} \ln \left( \frac{4\rho w^2 + \alpha^2[(1-w) - \rho(1+w)]^2}{4\rho w^2 + \alpha^2[(1+w) - \rho(1-w)]^2} \right) \right\} \quad (5.17)$$

$$= \frac{\Gamma}{\varepsilon^2} \left( -\pi^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right) \quad (5.18)$$

$$\text{mit } \rho = \frac{\sqrt{1+\varepsilon^2}-1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}+1} \sim \frac{\varepsilon^2}{4}.$$

### 5.3 IR-Anteil von $\Upsilon$

Der IR-Anteil von  $\Upsilon$  hat nach Anwendung der Summenregel und der Winkelintegration die Gestalt

$$\Upsilon_o = \frac{1}{2} g^2 N T \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{p^2} \frac{3m^2}{p^2 + 3m^2} \Delta(Q_o, k) \frac{m_\infty^4 \omega^2}{\sqrt{(\vec{p}\vec{q})^2 + \varepsilon^2 p^2 q^2}} \\ * \left\{ \ln \left( \frac{Q^2 + \vec{p}\vec{q} + \sqrt{\quad}}{Q^2 + \vec{p}\vec{q} - \sqrt{\quad}} \right) - i\pi \Theta(p^2 - 2\vec{p}\vec{q} - Q^2) \right\}^2. \quad (5.19)$$

Es findet sich wie in (5.13) die geschwungene Klammer mit der IR-regulierende Funktion von  $Q^2$ . Daher darf auch hier nicht  $p^2 \gg Q^2$  genähert werden. Das schränkt die Möglichkeiten sehr ein,  $\Upsilon_o$  zu vereinfachen. Die einzigen Näherungen sind im Propagator  $\Delta(Q_o, k)$  erlaubt.

#### 5.3.1 Der Propagator

In der weiteren Auswertung von  $\Upsilon_o$  werden die gleichen Substitutionen durchgeführt, welche auf (5.16) geführt hatten. Demnach sind sowohl  $p^2$ , als auch  $\vec{p}\vec{q}$  mit  $Q^2$  vergleichbar. Entsprechend darf  $q^2 \gg p^2$ ,  $\vec{p}\vec{q}$  ausgenutzt werden.

$$\Delta(Q_o, k) = \frac{1}{k^2} \left\{ \frac{Q_o^2 - k^2}{Q_o^2 - k^2 - \Pi_t} - \frac{Q_o^2 - k^2}{(Q_o^2 - k^2)(1 + \Pi_{oo}/k^2)} \right\}. \quad (5.20)$$

Der transversale Anteil wird nicht zum führenden Term beitragen, denn der Zähler verhält sich wie  $Q^2$  und  $\Pi_t$  verschwindet bei  $Q_o \approx k$  nicht.

$$\Delta(Q_o, k) \approx \frac{-1}{k^2 + 3m^2 \left[ 1 - \frac{1}{2} \frac{Q_o}{k} \ln \left( \frac{Q_o+k}{Q_o-k} \right) \right]}. \quad (5.21)$$

Bei Fortsetzung  $Q_o \rightarrow \omega + i\epsilon$  (anderes  $\epsilon!$ ) bekommt der Nenner neben dem üblichen [19]  $i\sigma\epsilon$ ,  $\sigma = \pm 1$ , einen weiteren Imaginärteil vom Schnitt des Logarithmus

$$\ln \left( \frac{Q_o + k}{Q_o - k} \right) \rightarrow \ln \left| \frac{\omega + k}{\omega - k} \right| - i\pi\Theta(k^2 - \omega^2) \quad (5.22)$$

und somit

$$\Delta(\omega, k) \approx \frac{-1}{k^2 + \Pi_{oo}(\omega, k) + i\pi m_\infty^2 \frac{\omega}{k} \Theta(k^2 - \omega^2) + i\epsilon\sigma}. \quad (5.23)$$

Im folgenden werden die Betragstriche um das Argument des Logarithmus weggelassen und als selbstverständlich vorausgesetzt.

Die Theta-Funktion läßt sich für eine Fallunterscheidung ausnutzen:

**$\Theta = 0$**

$$\Delta_0 = \frac{-1}{k^2 + \Pi_{oo}(\omega, k)} + i\pi\sigma\delta(k^2 + \Pi_{oo}) \quad (5.24)$$

$$= \frac{-1}{k^2 + \Pi_{oo}(\omega, k)} + i\pi\sigma \frac{\delta(k^2 - q^2)}{|1 + \partial_{q^2} \Pi_{oo}(\omega, q)|}, \quad (5.25)$$

wobei am Lichtkegel  $\sigma = 1$  und  $\partial_{q^2} \Pi_{oo} = -m_\infty^2/Q^2$  gilt. Zur Erinnerung:  $\omega = \omega_\ell(q)$  ist von außen vorgegeben, so daß  $k^2 + \Pi_{oo}(\omega, k)$  tatsächlich bei  $k^2 = q^2$  seine Nullstelle hat, denn dies ist die Gleichung zur Bestimmung der führenden Ordnung von  $\omega_\ell$ . Im folgenden werden wir von der longitudinalen Massenschale (lms) sprechen. Die Deltafunktion wird im weiteren den „Spielzeugterm“ (2.48) aus [19] liefern und die einzige echte IR-Divergenz enthalten. Sie muß mit einer künstlich eingesetzten Masse reguliert werden. Alle anderen Anteile werden IR-endlich sein.

**$\Theta = 1$** . Hier darf  $i\epsilon$  im Nenner vernachlässigt werden,

$$\Delta_1 = \frac{-1}{k^2 + \Pi_{oo}(\omega, k) + i\pi m_\infty^2 \frac{\omega}{k}}. \quad (5.26)$$

In beiden Fällen sorgt  $k^2 + \Pi_{oo}$  für ein kompliziertes Aussehen des Propagators. Ein paar vorsichtige Näherungen liefern jedoch entscheidende Vereinfachungen.

$$k^2 + \Pi_{oo}(\omega, k) = q^2 + p^2 - 2\vec{p}\vec{q} + 3m^2 \left[ 1 - \frac{1}{2} \frac{\omega}{\sqrt{q^2 + p^2 - 2\vec{p}\vec{q}}} \ln \left( \frac{\omega + \sqrt{\omega^2 - q^2}}{\omega - \sqrt{\omega^2 - q^2}} \right) \right]. \quad (5.27)$$

Wie angekündigt wird  $q^2, m^2 \gg p^2 - 2\vec{p}\vec{q}$  genähert, jedoch *nicht*  $Q^2 \gg p^2 - 2\vec{p}\vec{q}$ . Des weiteren befinden wir uns auf der longitudinalen Massenschale  $q^2 + 3m^2 \left[ 1 - \frac{1}{2} \frac{\omega}{q} \ln \left( \frac{\omega+q}{\omega-q} \right) \right] = 0$ . Man erhält

$$k^2 + \Pi_{oo}(\omega, k) \approx m_\infty^2 \ln \left( \frac{\omega^2 - k^2}{Q^2} \right). \quad (5.28)$$

Dies ist ausreichend einfach, so daß alle folgenden Integrationen machbar sind.

Die Fallunterscheidung in  $\Theta = 0$  und  $\Theta = 1$  wird weiter aufrecht erhalten. Entsprechend wird

$$\Upsilon_o = \Upsilon_o^0 + \Upsilon_o^1 \quad (5.29)$$

zerlegt. Die Stücke werden in den folgenden zwei Abschnitten einzeln behandelt.

5.3.2  $\Theta = 0$ 

$$\begin{aligned} \Upsilon_o^0 &= \frac{1}{2} g^2 NT \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{p^2} \frac{3m^2}{p^2 + 3m^2} \frac{m_\infty^4 \omega^2}{\sqrt{(\vec{p}\vec{q})^2 + \varepsilon^2 p^2 q^2}} \ln^2 \left( \frac{Q^2 + \vec{p}\vec{q} + \sqrt{\quad}}{Q^2 + \vec{p}\vec{q} - \sqrt{\quad}} \right) \\ &\quad * \Theta(\omega^2 - k^2) \left\{ \frac{-1}{m_\infty^2 \ln \left( \frac{\omega^2 - k^2}{Q^2} \right)} + i\pi\sigma \frac{\delta(k^2 - q^2)}{[1 + \partial_q^2 \Pi_{oo}(\omega, q)]} \right\}. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Es ist einfacher, Real- und Imaginärteil gesondert zu betrachten, zunächst der Realteil. Nach Skalierung  $p \rightarrow \varepsilon qv$  und  $\vec{p}\vec{q}/pq \rightarrow \varepsilon u$  ist

$$\Re \Upsilon_o^0 = \frac{1}{2\varepsilon^2} \Gamma \int_0^\infty dv \frac{1}{v^2} \frac{\alpha^2}{v^2 + \alpha^2} \int_{-1/\varepsilon}^{1/\varepsilon} du \frac{1}{u^2 + 1} \frac{\Theta(1 + 2uv - v^2)}{\ln(1 + 2uv - v^2)} \ln^2 \left( \frac{1/v + u + \sqrt{u^2 + 1}}{1/v + u - \sqrt{u^2 + 1}} \right) \quad (5.31)$$

mit  $\Gamma = \frac{g^2 NT}{(2\pi)^2} \frac{m_\infty^2 \omega^2}{q^3}$  und  $\alpha^2 = \frac{3m^2}{\varepsilon^2 q^2}$ . Das  $v$ -Integral ist an beiden Integrationsgrenzen endlich. Im UV wird es durch die Thetafunktion abgeschnitten. Im IR ist die Konvergenz etwas schwieriger zu sehen; man muß beide Logarithmen nach kleinen  $v^2$ ,  $uv$  entwickeln. Da keinerlei UV-Schwierigkeiten entstehen können, darf  $\alpha^2 \rightarrow \infty$  ausgeführt werden.

Nach  $v \rightarrow \sqrt{1+u^2}v - u$  und  $t = u/\sqrt{1+u^2}$  symmetrisieren wir in  $t$  und  $v$ . Schließlich hilft  $x = (1-v)/(1+v)$  sowie  $y = (1-t)/(1+t)$ , bei folgendem Resultat anzukommen:

$$\Re \Upsilon_o^0 = -\frac{1}{2\varepsilon^2} \Gamma \int_0^1 dx \int_\rho^1 dy \frac{1}{(x-y)^2(1-xy)^2} \frac{(x-y)^2 \ln^2(xy) + (1-xy)^2 \ln^2(x/y)}{\ln(x/y) - 2 \ln \left( \frac{1+x}{1+y} \right)} \quad (5.32)$$

mit  $\rho = \frac{\sqrt{1+\varepsilon^2}-1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}+1} \approx \varepsilon^2/4$ . Der Integrand  $F(x, y)$  ist antisymmetrisch unter Vertauschung der Argumente:  $F(x, y) = -F(y, x)$ . Dies führt auf

$$\Re \Upsilon_o^0 = \frac{1}{2\varepsilon^2} \Gamma \int_\rho^1 dx \int_\rho^1 dy F(x, y). \quad (5.33)$$

Nach Skalierung beider Integrationsvariablen mit  $\rho$ , Vernachlässigung der  $\rho \sim \varepsilon^2$  im Integranden sowie  $x \rightarrow 1/x$  erhält man

$$\Re \Upsilon_o^0 = -\frac{1}{2\varepsilon^2} \Gamma \int_0^1 dx \int_0^1 dy \frac{\ln(xy)}{(1-xy)^2} = \frac{1}{\varepsilon^2} \Gamma \left( \frac{\pi^2}{6} + \mathcal{O}(\rho \ln(\rho)) \right). \quad (5.34)$$

Im Imaginärteil von  $\Upsilon_o^0$  befindet sich die einzige echte IR-Singularität. Um sie zu regulieren, wird im transversalen Propagator eine Masse eingesetzt,  $\Delta_t(P_o = 0) = -(\vec{p}^2 + \mu^2)^{-1}$ . Sie sei klein gegenüber der weichen Skala,  $\mu \ll gT$ , ebenso sei der Quotient  $\mu/\varepsilon \ll gT$ . Dadurch beschränken wir uns auf  $\varepsilon$ -Werte, welche nicht vergleichbar klein wie  $g$  werden. Genau dies soll nach (4.14) gelten.

Wir nutzen zunächst die Deltafunktion in (5.30) aus und substituieren anschließend  $p \rightarrow \varepsilon qv$ . Da auch hier keine UV-Schwierigkeiten existieren, darf wiederum  $\alpha^2 \rightarrow \infty$



vorgenommen werden.

$$\Im m \Upsilon_o^0 = \frac{g^2 NT m_\infty^2 \omega^2}{(2\pi)^2 \varepsilon^2 q^3} \frac{\pi \sigma m_\infty^2}{\varepsilon^2 q^2 |1 + \partial_q^2 \Pi_{oo}|} \frac{1}{4} \int_0^{1/\varepsilon} dv \frac{1}{v} \frac{1}{(v^2 + 1)} \frac{1}{v^2 + b^2} \ln^2 \left( \frac{\sqrt{v^2 + 1} + v}{\sqrt{v^2 + 1} - v} \right) \quad (5.35)$$

mit  $b^2 = \mu^2 / (4q^2 \varepsilon^2)$ . Zu Gleichung (5.35) läßt sich der asymptotisch in  $\varepsilon$ -führende Term präparieren (Anhang E.1)

$$\Im m \Upsilon_o^0 = -\pi \frac{\Gamma}{2\varepsilon^2} \left\{ \ln \left( \frac{\mu^2}{q^2 \varepsilon^2} \right) + \frac{7}{4} \zeta(3) - 3 \right\}. \quad (5.36)$$

Den Logarithmus, welcher die Abhängigkeit vom IR-cutoff enthält, kennen wir aus [19]<sup>1</sup>.

### 5.3.3 $\Theta = 1$

Mit dem Propagator  $\Delta_1$  aus (5.26) ist

$$\begin{aligned} \Upsilon_o^1 &= \frac{1}{2} g^2 NT \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{p^2} \frac{3m^2}{p^2 + 3m^2} \frac{m_\infty^2 \omega^2}{\sqrt{(\vec{p} \vec{q})^2 + \varepsilon^2 p^2 q^2}} \frac{-\Theta(k^2 - \omega^2)}{2 \ln \left( \frac{\omega^2 - k^2}{Q^2} \right) + i\pi\omega/k} \\ &\quad * \left\{ \ln \left( \frac{Q^2 + \vec{p} \vec{q} + \sqrt{\quad}}{Q^2 + \vec{p} \vec{q} - \sqrt{\quad}} \right) - i\pi \right\}^2. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Nach den selben Substitutionen und Umformungen, welche schon bei  $\Re e \Upsilon_o^0$  geholfen haben, wird

$$\Upsilon_o^1 = -\frac{\Gamma}{2\varepsilon^2} \int_0^1 dx \int_\rho^1 dy \frac{1}{\mathcal{L} + i\pi} \left\{ \frac{(\ln(xy) + i\pi)^2}{(1 + xy)^2} + \frac{(\ln(\frac{x}{y}) + i\pi)^2}{(x + y)^2} \right\} \quad (5.38)$$

mit  $\mathcal{L} = \ln \left( \frac{x(1+y)^2}{y(1-x)^2} \right)$ . Nach Aufteilung in Real- und Imaginärteil bekommen wir

$$\Upsilon_o^1 = -\frac{\Gamma}{2\varepsilon^2} \int_0^1 dx \int_\rho^1 dy \frac{1}{\mathcal{L} + \pi^2} \{ F_R(x, y) - i\pi F_I(x, y) \} \quad (5.39)$$

$$F_R(x, y) = \frac{(\ln^2(xy) - \pi^2) \mathcal{L} + 2\pi^2 \ln(xy)}{(1 + xy)^2} + \frac{(\ln^2(\frac{x}{y}) - \pi^2) \mathcal{L} + 2\pi^2 \ln(\frac{x}{y})}{(x + y)^2} \quad (5.40)$$

$$F_I(x, y) = \frac{\ln^2(xy) - 2\mathcal{L} \ln(xy) - \pi^2}{(1 + xy)^2} + \frac{\ln^2(\frac{x}{y}) - 2\mathcal{L} \ln(\frac{x}{y}) - \pi^2}{(x + y)^2}. \quad (5.41)$$

Beide Integranden sind am Ursprung  $(x, y) = 0$  singulär, so daß für eine Asymptotik  $\rho$  nicht naiv Null gesetzt werden darf. Die gefährlichen Anteile (Index  $\S$ ) werden isoliert.

$$F_R^\S(x, y) = \frac{\ln(\frac{x}{y}) (\mathcal{L}^2 + \pi^2)}{(x + y)^2}, \quad F_I^\S(x, y) = -\frac{\mathcal{L}^2 + \pi^2}{(x + y)^2}. \quad (5.42)$$

<sup>1</sup>Der fehlende Faktor Zwei kommt von einem gleichen Beitrag aus  $K_o = 0$

Diese sind (bei Beachtung der Singularitäten) einfach auszuintegrieren

$$\int_0^1 dx \int_\rho^1 dy \frac{\ln\left(\frac{x}{y}\right)}{(x+y)^2} = -\frac{\pi^2}{6} + \mathcal{O}(\rho \ln(\rho)) \quad , \quad \int_0^1 dx \int_\rho^1 dy \frac{-1}{(x+y)^2} = \ln(\rho) + \ln(2) + \mathcal{O}(\rho) \quad (5.43)$$

Die verbliebenen Integrale sind im gesamten Integrationbereich brav, so daß für die asymptotisch führenden Terme die Integrationsgrenze  $\rho = 0$  gesetzt werden darf. Allerdings ist das Ausintegrieren nicht trivial<sup>2</sup>, siehe Anhang E.2.

$$\int_0^1 dx \int_0^1 dy \frac{1}{\mathcal{L}^2 + \pi^2} \{F_R(x, y) - F_R^\S(x, y)\} = -\frac{\pi^2}{2} \quad (5.44)$$

$$\int_0^1 dx \int_0^1 dy \frac{1}{\mathcal{L}^2 + \pi^2} \{F_I(x, y) - F_I^\S(x, y)\} = \frac{7}{4}\zeta(3) - \ln(2) - 1 \quad (5.45)$$

Zusammen ergibt sich

$$\Re e \Upsilon_o^1 = -\frac{\Gamma}{2\varepsilon^2} \left\{ -\frac{2\pi^2}{3} + \mathcal{O}(\rho \ln(\rho)) \right\} \quad (5.46)$$

$$\Im m \Upsilon_o^1 = \pi \frac{\Gamma}{2\varepsilon^2} \left\{ \ln(\rho) + \frac{7}{4}\zeta(3) - 1 \right\} \quad (5.47)$$

## 5.4 Zwischenresultat

Für die IR-Anteile der Plasmon-Selbstenergie sind die führenden Terme der Asymptotik in  $\varepsilon$  gefunden,

$$\Re e \delta\Pi_{oo} = \frac{1}{\varepsilon^2} \Gamma \pi^2 \left( -1 + 2 \left( \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right) = 0 + \mathcal{O}(1) \quad (5.48)$$

$$\begin{aligned} \Im m \delta\Pi_{oo} &= \frac{1}{\varepsilon^2} \Gamma \pi \left( \ln \left( \frac{3m^2}{q^2 \varepsilon^2} \frac{1}{\rho} \right) - 2 + \left( \ln(\rho) - \ln \left( \frac{\mu^2}{q^2 \varepsilon^2} \right) + 2 \right) \right) \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2} \Gamma \pi \ln \left( \frac{3m^2}{\mu^2} \right) \end{aligned} \quad (5.49)$$

mit  $\Gamma = \frac{g^2 N T m_\infty^2 \omega^2}{(2\pi)^2 q^3}$ . Damit verschwindet im Realteil der so gefährlich aussehende Term  $\sim 1/\varepsilon^2$ . Der Imaginärteil enthält jedoch weiterhin einen Beitrag dieser Ordnung. Wie in Kapitel 4 gezeigt, ruiniert er glücklicherweise nicht die Konsistenz der Störungsentwicklung.

## 5.5 Der Imaginärteil mit IR-cuttoff

In allen Rechnungen wurde bislang davon ausgegangen, daß  $\varepsilon$  zwar klein gegen 1 ist, jedoch nicht vergleichbar mit  $g$  wird. Diese Annahme war nötig, um die Resummation der

<sup>2</sup>Ich danke H. Schulz für die entscheidenden Hilfen

asymptotischen Massen zu vermeiden, vergleiche (4.14). Sie ist jedoch ebenso notwendig, um nicht mit unbekanntem Details der magnetischen Skala  $g^2T$  (z.B. der genauen Größe des IR-cutoffs  $\mu$ ) in Konflikt zu geraten, vergleiche die Diskussion nach (5.34). Wenn wir uns nun dem Lichtkegel nähern, also  $\varepsilon \gtrsim g$  werden lassen, kann die Skala  $g^2T$  die soeben gewonnenen Resultate beeinflussen. Wir werden in diesem Abschnitt untersuchen, wie stark dieser Effekt ist. Dazu betrachten wir den Imaginärteil der oben diskutierten IR-Anteile noch einmal und bauen in alle Terme einen IR-cutoff ein. Auch in jene Terme, welche keine echten IR-Singularitäten enthalten.

Der transversale Propagator wird wie in Abschnitt 5.3.2 mit einer Masse  $\mu$  versehen,

$$\Delta(P_0 = 0, \vec{p}) = \frac{-1}{p^2 + \mu^2} \quad \text{mit} \quad \mu^2 \sim g^4 T^2. \quad (5.50)$$

Die Masse  $\mu$  kommt im folgenden nie „pur“ vor, sondern dimensionslos in der Kombination  $b^2 := \mu^2/\varepsilon^2 q^2$ . Immer wenn  $b^2 \ll 1$  gilt, sind fast alle oben praktizierten Vereinfachungen möglich. Dies ist der Fall, wenn  $1 \gg \varepsilon^2 \gtrsim g^2$  gilt. An der unteren Schranke sorgt  $q^2$  für das kleine  $b$ , da bei  $\varepsilon \sim g$  auf der longitudinalen Massenschale  $q \sim g \ln(g)T$  gilt. Der Logarithmus macht  $b$  klein.

Bei allen Integralen wird also  $\varepsilon \ll 1$  und  $b \ll 1$  verwendet. Es darf allerdings nicht  $\varepsilon$  gegen  $b$  oder umgekehrt genähert werden. Solange  $\varepsilon \gg g$  gilt, darf  $b$  vernachlässigt werden. Dies haben wir in den vorangegangenen Kapiteln getan. Wird  $\varepsilon$  allerdings kleiner, dreht sich das Verhältnis:  $b \gg \varepsilon$  bei  $\varepsilon \sim g$ .

Der Imaginärteil von  $\Sigma_0$  läßt sich analytisch in strenge auswerten.

$$\begin{aligned} \Im \Sigma_0 &= -\pi g^2 N T \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{p^2 + \mu^2} \frac{3m^2}{p^2 + 3m^2} \frac{m_\infty^2 \omega^2 (\vec{p}\vec{q} - p^2)}{\sqrt{(\vec{p}\vec{q})^2 + \varepsilon^2 p^2 q^2}^3} \Theta(k^2 - \omega^2) \quad (5.51) \\ &= \frac{\pi \Gamma}{\varepsilon^2} \left\{ \frac{1}{1 + \rho} \left[ \ln \left( \frac{\rho + \alpha^2}{\rho + b^2} \right) - \rho \ln \left( \frac{1 + \alpha^2 \rho}{1 + b^2 \rho} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{\alpha} \frac{\sqrt{\rho}}{1 + \rho} \arctan \left( \frac{\alpha(1 - \rho)}{(\alpha^2 + 1)\sqrt{\rho}} \right) - \frac{2}{b} \frac{\sqrt{\rho}}{1 + \rho} \arctan \left( \frac{b(1 - \rho)}{(b^2 + 1)\sqrt{\rho}} \right) \right\} \\ &\approx \frac{\pi \Gamma}{\varepsilon^2} \left\{ \ln \left( \frac{\alpha^2}{\rho + b^2} \right) - \frac{\varepsilon^2 q}{\mu} \arctan \left( \frac{2\mu}{q\varepsilon^2} \right) \right\}. \quad (5.52) \end{aligned}$$

Für  $\Upsilon_0^0$  kann das Resultat (5.36) übernommen werden, denn dort wurde nur  $b \ll 1$  ausgenutzt, was ja noch immer gilt. Für  $\Upsilon_0^1$  ergibt sich trotz  $\mu$  ein zu (5.38) bemerkenswert ähnlicher Ausdruck:

$$\Upsilon_0^1 = -\frac{\Gamma}{2\varepsilon^2} \int_0^1 dx \int_0^1 dy \frac{1}{\mathcal{L} + i\pi} \left\{ \frac{(\ln(xy) + i\pi)^2}{(1 + xy)^2 + b^2 y(1 - x)^2} + \frac{(\ln(\frac{x}{y}) + i\pi)^2}{(x + y)^2 + b^2 y(1 - x)^2} \right\}. \quad (5.53)$$

Zur Auswertung kann an der bisherigen Philosophie festgehalten werden: Der Integrand ist im Ursprung singulär (der zweite Term), von dort kommt die wesentliche Abhängigkeit



von  $\rho$  und  $b$ . Für den regulären Anteil kann (5.45) übernommen werden. Der singuläre Rest wird wie in (5.42) isoliert und ausgerechnet:

$$-\pi \frac{\Gamma}{2\varepsilon^2} \int_0^1 dx \int_\rho^1 dy \frac{1}{(x+y)^2 + b^2 y} \approx \pi \frac{\Gamma}{2\varepsilon^2} \left\{ \ln(\rho + b^2) + \ln(2) + \frac{\varepsilon^2 q}{\mu} \arctan\left(\frac{2\mu}{q\varepsilon^2}\right) - 2 \right\}. \quad (5.54)$$

Zusammengefaßt ergibt sich:

$$\Im m \Upsilon_0^0 = \pi \frac{\Gamma}{2\varepsilon^2} \left\{ -\ln\left(\frac{\mu^2}{q^2\varepsilon^2}\right) - \frac{7}{4}\zeta(3) + 3 \right\} \quad (5.55)$$

$$\Im m \Upsilon_0^1 = \pi \frac{\Gamma}{2\varepsilon^2} \left\{ \ln(\rho + b^2) + \frac{\varepsilon^2 q}{\mu} \arctan\left(\frac{2\mu}{q\varepsilon^2}\right) + \frac{7}{4}\zeta(3) - 3 \right\}. \quad (5.56)$$

Wenn wir dies mit  $\Sigma_0$  zusammensetzen, kommen wir exakt bei dem alten Resultat (5.49) an. Damit ist gezeigt, daß auch bei  $\varepsilon \sim g$  die Plasmon-Selbstenergie nicht von der expliziten Struktur der magnetischen Skala abhängt. Die bekannte logarithmische Abhängigkeit von  $\mu$  erhält keinen Zusatz.

## 5.6 IR-unempfindliche Anteile

Bei den IR-unempfindlichen Anteilen ist nicht mehr mit so starken Potenzen wie  $1/\varepsilon^2$  zu rechnen, allerdings ist durch bestimmte Überlappungen der Singularitäten die ungewöhnliche Ordnung  $1/\varepsilon = q/\sqrt{Q^2}$  möglich. Nach diesen Termen wird hier gesucht. Wie bisher werden schwächer anwachsende (z.B.  $\log(\varepsilon)$ ) vernachlässigt. Des weiteren ist eine Untersuchung des Imaginärteiles nicht mehr notwendig. Der asymptotisch führende Term ist in (5.49) schon gefunden, eine vergleichbare Ordnung wird hier nicht mehr erreicht. Damit dürfen wir uns auf den Realteil konzentrieren.

$$\Sigma_1 = g^2 NT \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \int dx dy \frac{\rho(x, p)}{x} \int_\Omega \frac{3m^2 Q_0}{(YQ)^2} \left( \frac{1}{Q_0 - x - \vec{e} \vec{k}} - \frac{1}{Q_0 - \vec{e} \vec{k}} \right) \quad (5.57)$$

$$\begin{aligned} \Upsilon_1 = & g^2 NT \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \int dx dy \frac{\rho(x, p)\rho(y, k)}{Q_0 - x - y} \int_{\Omega\Omega'} \frac{3m^2}{YQ} \frac{3m^2}{Y'Q} \\ & * \left\{ \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{Q_0 - y} \right) \frac{Q_0}{Q_0 - \vec{e} \vec{k}} \frac{Q_0}{Q_0 - \vec{e}' \vec{k}} - \frac{1}{x} \frac{Q_0 - x}{Q_0 - x - \vec{e} \vec{k}} \frac{Q_0}{Q_0 - x - \vec{e}' \vec{k}} \right. \\ & \left. + 2 \frac{Q_0}{Q_0 - \vec{e} \vec{p} - \vec{e}' \vec{k}} \frac{1}{Q_0 - x - \vec{e}' \vec{k}} \right\}. \quad (5.58) \end{aligned}$$

Für  $\Upsilon_1$  empfiehlt sich eine weitere Unterteilung in

$$\Upsilon_1 = \Upsilon_1^{\text{entkoppelt}} + \Upsilon_1^{\text{gekoppelt}}. \quad (5.59)$$

Die Winkelintegrationen über  $\Omega$  und  $\Omega'$  sind im ersten Fall entkoppelt (mittlere Zeile in (5.58)) und im zweiten gekoppelt (letzte Zeile in (5.58)). Der gekoppelte Fall bereitet bei der Auswertung die meisten Schwierigkeiten. Jedoch findet sich genau dort der einzige Anteil der Ordnung  $1/\varepsilon$ .

5.6.1  $\Sigma_1$ 

Die Beschränkung auf den Realteil erlaubt zunächst  $Q_o \rightarrow \omega$ . Anders als bisher gewohnt, wird im ersten Schritt die Winkelintegration aus  $d^3p$  ausgeführt, danach erst die Integration  $\int_\Omega$ . Man erhält so einen Ausdruck, in dem nur wenige Terme bei  $\omega = q$  groß werden können. Diese sind (ohne weitere Näherungen)

$$\begin{aligned} \Sigma_1^{\text{krit}} := & g^2 NT \frac{m_\infty^2}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dp p \int dx \frac{\varrho(x, p)}{x} \\ & \left\{ \frac{1}{x+p} \ln \left( \frac{(\omega-q)^2 - (x+p)^2}{(\omega-q)^2} \right) - \frac{1}{p} \ln \left( \frac{(\omega-q)^2 - p^2}{(\omega-q)^2} \right) \right. \\ & \left. + \frac{1}{\omega-q} \left[ \ln \left( \frac{\omega-q+x+p}{\omega-q-x-p} \right) - \ln \left( \frac{\omega-q+p}{\omega-q-p} \right) \right] \right\}. \quad (5.60) \end{aligned}$$

Nachdem (5.60) nicht mehr empfindlich auf  $p = 0$  reagiert, bleibt noch die Stelle  $x = p$ , welche mit Vorsicht behandelt werden muß. Dort verhält sich die Dichte  $\varrho$  jedoch lang nicht so spektakulär (vgl. (5.9)), sie verschwindet sogar. Allerdings verschwindet sie nur logarithmisch, so daß eine genauere Diskussion notwendig ist.

Interessant ist in diesem Zusammenhang nur der Schnitt-Anteil der spektralen Dichte (Anhang A). Der Pol-Anteil der transversalen Dichte kommt nicht in die kritische Region  $x \approx p$ , sondern bleibt in einem Abstand  $x^2 - p^2 \sim m_\infty^2$ . Der Pol-Anteil der longitudinalen Dichte nähert sich zwar dem Punkt  $x = p$  exponentiell mit  $p$  an, das Residuum verschwindet jedoch aufgrund des Faktors  $(x^2 - p^2)$  ebenso exponentiell, so daß von  $\varrho_l^{\text{pol}}$  kein Beitrag kommen kann.

Die Substitutionen  $x \rightarrow pz$ ,  $p \rightarrow qv$  sowie ggf.  $v \rightarrow v/(z+1)$  bilden die interessanten Regionen  $x = p$  und  $p = 0$  beide auf  $v = 0$  ab.

$$\Sigma_1^{\text{krit}} = g^2 NT \frac{q}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dv \left[ \ln \left( 1 - \frac{v^2}{\varepsilon^4} \right) + \frac{2v}{\varepsilon^2} \ln \left( \frac{\varepsilon^2 + 2v}{\varepsilon^2 - 2v} \right) \right] \left\{ \mathcal{I}_1 \left( \frac{q^2 v^2}{m_\infty^2} \right) - \mathcal{I}_2 \left( \frac{q^2 v^2}{m_\infty^2} \right) \right\}. \quad (5.61)$$

Die  $\mathcal{I}_{1/2}$  sind Integrale über die spektrale Dichte,

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1(a) &= \int_{-1}^1 dz \left\{ \frac{2}{[2a + 2\frac{z^2}{1-z^2} + z\mathcal{L}]^2 + [\pi z]^2} + \frac{1}{[a + 2 - z\mathcal{L}]^2 + [\pi z]^2} \right\} \\ \mathcal{I}_2(a) &= \int_{-1}^1 dz \left\{ \frac{2/(1+z)^2}{[\frac{2a}{(1+z)^2} + 2\frac{z^2}{1-z^2} + z\mathcal{L}]^2 + [\pi z]^2} + \frac{1/(1+z)^2}{[\frac{a}{(1+z)^2} + 2 - z\mathcal{L}]^2 + [\pi z]^2} \right\}. \end{aligned}$$

mit  $\mathcal{L} = \ln \left( \frac{1+z}{1-z} \right)$ .  $\mathcal{I}_1$  kann analytisch mit Hilfe von Summenregeln ausgewertet werden, für  $\mathcal{I}_2$  ist jedoch eine Numerik notwendig. Das Resultat findet sich in Abb. 5.1. Man sieht, daß es für kleine  $a$  anwächst, was in (5.61) zu zusätzlichen  $\varepsilon$ -Potenzen führen kann.

Der einzige mit  $a \rightarrow 0$  anwachsende Anteil der  $\mathcal{I}$  befindet sich im zweiten Term von

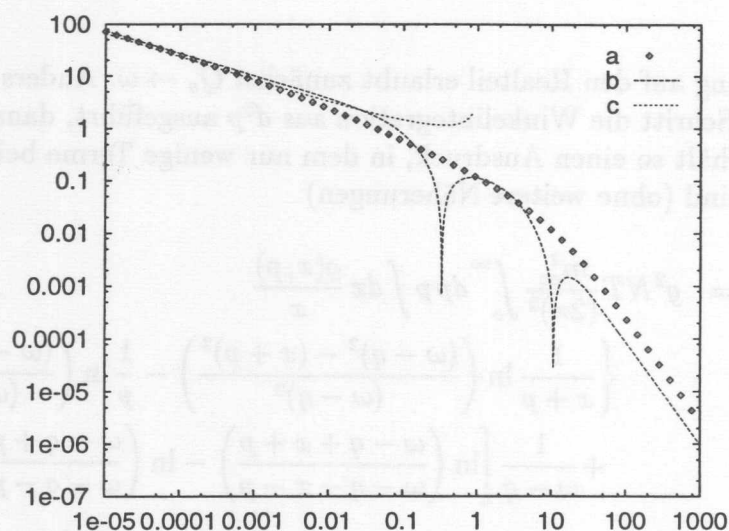


Abbildung 5.1: Die Differenz  $|\mathcal{I}_1(a) - \mathcal{I}_2(a)|$ , in logarithmischer Skala aufgetragen (Kurve b). Für kleine  $a$  verhält sie sich wie  $\mathcal{I}_{\text{krit}}(a)$  (Kurve a), welche wie  $1/\sqrt{-a \ln(a)}$  wächst (Kurve c).

$\mathcal{I}_2$ . Er läßt sich schreiben als<sup>3</sup>

$$\mathcal{I}_{\text{krit}}(a) := \frac{1}{2} \int_0^1 dz \frac{z^2}{[a/4 + z^2 \ln(z)]^2 + \pi^2 z^4} \approx \frac{1}{\sqrt{-2a \ln(a)}}. \quad (5.62)$$

Die Differenz der  $\mathcal{I}$  wächst also nur sehr schwach mit  $\frac{1}{\sqrt{a}}$  als oberer Schranke. Dies kann (5.61) gerade noch vertragen, ohne Potenzen von  $\varepsilon$  zu erzeugen. Es bleiben nur Logarithmen, welche vernachlässigt werden dürfen.

$$\int_0^1 dv \frac{1}{v} \left[ \ln \left( 1 - \frac{v^2}{\varepsilon^2} \right) + \frac{2v}{\varepsilon^2} \ln \left( \frac{\varepsilon^2 + 2v}{\varepsilon^2 - 2v} \right) \right] = \ln^2(\varepsilon^2) + 4 \ln(\varepsilon^2) + \mathcal{O}(1). \quad (5.63)$$

Damit ist gezeigt, daß  $\Sigma_1$  nicht zu den gesuchten  $\varepsilon$ -Potenzen beiträgt. Es wächst zwar mit  $\varepsilon$  an, jedoch schwach, d.h. logarithmisch.

### 5.6.2 $\Upsilon_1^{\text{entkoppelt}}$

Die zwei entkoppelten Winkelintegrale können mit den Mitteln aus Anhang D ausgeführt werden.

$$\Upsilon_1^{\text{entkoppelt}} = g^2 NT \frac{m_\infty^4}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dp p^2 \int_{-1}^1 du \int dx dy \frac{\varrho(x, p) \varrho(y, k)}{Q_0 - x - y}$$

<sup>3</sup>H. Schulz hat die Asymptotik dieses Integrales analytisch gefunden.



$$\left\{ \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{Q_o - y} \right) \frac{\omega^2}{(\vec{p}\vec{q})^2 + Q^2 p^2} \left[ \ln \left( \frac{\vec{p}\vec{q} + Q^2 + \sqrt{(\vec{p}\vec{q})^2 + Q^2 p^2}}{\vec{p}\vec{q} + Q^2 - \sqrt{(\vec{p}\vec{q})^2 + Q^2 p^2}} \right) - i\pi \Theta(k^2 - \omega^2) \right]^2 \right. \\ \left. - \frac{1}{x} \frac{\omega(\omega - x)}{(\omega x - \vec{p}\vec{q})^2 + Q^2(p^2 - x^2)} \left[ \ln \left( \frac{\omega x - \vec{p}\vec{q} - Q^2 - \sqrt{(\omega x - \vec{p}\vec{q})^2 + Q^2(p^2 - x^2)}}{\omega x - \vec{p}\vec{q} - Q^2 + \sqrt{(\omega x - \vec{p}\vec{q})^2 + Q^2(p^2 - x^2)}} \right) \right. \right. \\ \left. \left. - i\pi \Theta(k^2 - (\omega - x)^2) \right]^2 \right\}. \quad (5.64)$$

mit  $u = \vec{p}\vec{q}/pq$ . Im allgemeinen findet sich die einzige Divergenz für  $Q^2 \rightarrow 0$  in den Logarithmen, welche wie bisher nicht von Interesse ist. Es kann allerdings zu  $\varepsilon$ -Potenzen kommen, wenn  $u \approx \varepsilon$  bzw.  $\omega x - \vec{p}\vec{q} \approx pq\varepsilon$ . Daß dort dennoch keine Gefahr lauert, zeigt man mit der Substitution  $\xi = \frac{1}{\varepsilon}u$  bzw.  $\xi = \frac{1}{\varepsilon} \frac{x-pu}{\sqrt{p^2-x^2}}$ .

$$\Gamma_1^{\text{entkoppelt}} = g^2 NT \frac{m_\infty^4}{(2\pi)^2} \frac{1}{\varepsilon} \int d\xi \frac{1}{\xi^2 + 1} \left\{ \ln \left( \frac{\sqrt{\xi^2 + 1} + \xi}{\sqrt{\xi^2 + 1} - \xi} \right) - i\pi \right\}^2 \\ \int_0^\infty dp \int_{-p}^p dx \left\{ \frac{\varrho(x, p)}{x} \Delta(Q_o, k_1) - \frac{q-x}{qx} \frac{p}{\sqrt{p^2-x^2}} \varrho(x, p) \Delta(Q_o - x, k_2) \right\} \quad (5.65)$$

mit  $k_1 = \sqrt{p^2 + q^2}$  und  $k_2 = \sqrt{p^2 - 2pqx + q^2}$ . Wie bei (5.61) darf man sich auf den Schnitt-Anteil der spektralen Dichte beschränken. Man findet zwar eine negative  $\varepsilon$ -Potenz, aber

$$\int d\xi \frac{1}{\xi^2 + 1} \left\{ \ln \left( \frac{\sqrt{\xi^2 + 1} + \xi}{\sqrt{\xi^2 + 1} - \xi} \right) - i\pi \right\}^2 = 0. \quad (5.66)$$

Damit man sicher sein kann, kein  $1/\varepsilon$  verpaßt zu haben, muß natürlich die Restintegration existieren. Das ist der Fall, siehe Abb. 5.2. Die obigen Näherungen in  $\varepsilon$  hatten als Voraussetzung, daß sich bei  $x^2 - p^2$  kein Pol befindet, welcher ebenfalls  $\varepsilon$ -Potenzen entwickeln könnte. Auch dies ist erfüllt, denn  $\varrho(x, p) \Delta(Q_o - x, k_2)$  verschwindet bei  $x = \pm p$  so schnell, daß sogar in der ersten Korrektur in  $\varepsilon$  die Restintegrale bei  $x = \pm p$  keinen Pol enthalten.

### 5.6.3 $\Gamma_1^{\text{gekoppelt}}$

Im gekoppelten Fall ist es leider nicht mehr möglich, die Winkelintegrale exakt auszuführen. Zunächst wird fortgesetzt,  $Q_o \rightarrow \omega + i\varepsilon$ , und der Realteil gebildet,

$$\Gamma_1^{\text{gekoppelt}} = 2g^2 NT \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \int dx dy \frac{\varrho(x, p) \varrho(y, k)}{Q_o - x - y} \int_{\Omega\Omega'} \frac{3m^2}{YQ} \frac{3m^2}{Y'Q} \\ * \left\{ -\omega \pi^2 \delta(\omega - \vec{e}\vec{p} - \vec{e}'\vec{k}) \delta(\omega - x - \vec{e}\vec{k}) + \frac{\omega}{\omega - \vec{e}\vec{p} - \vec{e}'\vec{k}} \frac{1}{\omega - x - \vec{e}\vec{k}} \right\} \quad (5.67)$$

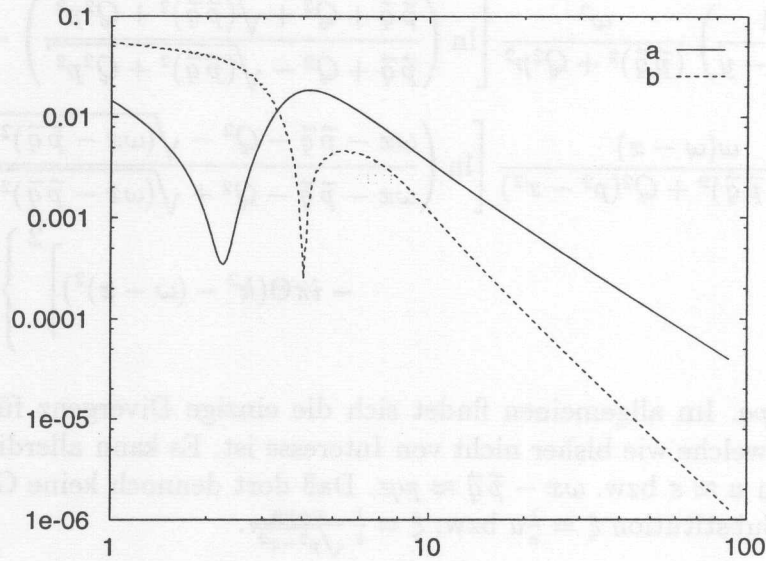


Abbildung 5.2: Die Restintegrale aus (5.65) (Kurve a) und (5.70) (Kurve b) in logarithmischer Skala aufgetragen.

Die Winkelintegrationen über die Deltafunktionen sind trivial, diejenigen über den zweiten Term der Klammer jedoch nicht. Letztere werden in Anhang E.3 diskutiert. Wir erhalten als Ergebnis, daß dort keine  $1/\varepsilon$ -Terme entstehen können.

Die Deltafunktionen in (5.67) hingegen führen zu einem Anteil der Ordnung  $1/\varepsilon$ . Wir betrachten ihn genauer. Nach der Winkelintegration ist

$$\Upsilon_1^{\text{gekoppelt}} = 2g^2 NT \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \int dx dy \frac{\varrho(x, p)\varrho(y, k)}{Q_0 - x - y} * \left\{ -\omega\pi^2 \left( \frac{3m^2}{2} \right)^2 \frac{\Theta[k^2 - (\omega - x)^2]\Theta[p^2 - x^2]}{(\omega x - \vec{p}\vec{q})^2 + Q^2(p^2 - x^2)} \right\}. \quad (5.68)$$

Der Nenner ist für kleine  $Q^2$  eine Darstellung der Deltafunktion,

$$\frac{\sqrt{Q^2(p^2 - x^2)}}{(\omega x - \vec{p}\vec{q})^2 + Q^2(p^2 - x^2)} = \pi\delta(\omega x - \vec{p}\vec{q}) \quad \text{für } Q^2 \rightarrow 0, \quad (5.69)$$

so daß

$$\Upsilon_1^{\text{gekoppelt}} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{g^2 NT}{2q} m_\infty^4 \pi \int_0^\infty dp p \int_{-p}^p dx \frac{\varrho(x, p)}{\sqrt{p^2 - x^2}} \Delta(\omega - x, k_2). \quad (5.70)$$

Somit ist der angekündigte Term  $\sim 1/\varepsilon$  gefunden. Um sicherzugehen, daß keine höheren  $\varepsilon$ -Potenzen verpaßt wurden, muß wiederum die Restintegration existieren. Dies ist der Fall, siehe Abbildung 5.2 und die Diskussion nach (5.66)

## 5.7 Endresultat

Die Lichtkegel-Asymptotik in  $\varepsilon^2 = Q^2/q^2$  von  $\delta\Pi_{oo}^{\text{HTLV}}(Q)$  ist bestimmt worden. Wir finden etliche Anteile, welche gefährliche  $\varepsilon$ -Potenzen enthalten. Im Endresultat kompensieren sie sich jedoch vollständig. Wir haben den führenden Beitrag zum Realteil in Gleichung (5.70) gefunden,

$$\Re \delta\Pi_{oo}(Q) = \frac{1}{\varepsilon} \frac{g^2 NT}{2q} m_\infty^4 \pi \int_0^\infty dp p \int_{-p}^p dx \frac{\varrho(x, p)}{\sqrt{p^2 - x^2}} \Delta(\omega - x, k_2), \quad (5.71)$$

wobei der Zahlenwert des Koeffizient numerisch aus der Restintegration ermittelt werden muß. Er verhält sich in Lichtkegelnähe wie  $1/\varepsilon$ . Das ist diejenige Ordnung, welche nach unseren Konsistenzüberlegungen aus Abschnitt 4.3 gerade noch erlaubt ist.

Der führende Term des Imaginärteil findet sich in (5.49),

$$\Im \delta\Pi_{oo}(Q) = \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{g^2 NT}{4\pi} \frac{m_\infty^2}{q} \ln \left( \frac{3m^2}{\mu^2} \right). \quad (5.72)$$

Hier bleibt also ein Term  $\sim 1/\varepsilon^2$  übrig. Im Imaginärteil ist diese recht starke  $\varepsilon$ -Abhängigkeit jedoch erlaubt.

Die konkrete Rechnung bestätigt, daß  $\delta\Pi_{oo}$  die Konsistenzbedingungen von Abschnitt 4.3 erfüllt. Somit ist die vorgeschlagene Resummation der asymptotischen Massen ausreichend zur Bestimmung der Plasmon-Dispersion einschließlich der Nähe zum Lichtkegel.



## 5.7. Badresulter

Die Lichtkegel-Asymptotik in  $k^2 = Q^2/\Lambda^2$  von  $\text{Im} \Pi_{\text{HTL}}(Q)$  ist bestimmt worden. Wir haben einige Anteile, welche gebirgige  $\epsilon$ -Potenzen enthalten, im Badresulter kompensieren sie sich jedoch vollständig. Wir haben den führenden Beitrag zum Realteil in Gleichung (5.75) gefunden.

$$\text{Re} \Pi_{\text{HTL}}(Q) = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{VT}}{\pi} m_{\text{HTL}}^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[ \frac{1}{\sqrt{x^2 - \Delta(w - z, \epsilon)}} \right] \quad (5.77)$$

Wobei der Zahlenwert des Koeffizienten zum Realteil aus der Bestimmung ermittelt werden muss. Er verhält sich in Lichtkegelnähe wie  $1/\epsilon$ . Das ist diejenige Ordnung, welche nach unseren Konstruktionsbedingungen aus Abschnitt 4.3 genau noch erlaubt ist.

Der führende Term des Imaginärteils findet sich in (5.73).

$$\text{Im} \Pi_{\text{HTL}}(Q) = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{VT}}{\pi} m_{\text{HTL}}^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx \left( \frac{\text{Im} \Pi_{\text{HTL}}(Q)}{w^2} \right) \quad (5.73)$$

Hier bleibt also ein Term  $\sim 1/\epsilon^2$  übrig. Im Imaginärteil ist dies recht stark  $\epsilon$ -abhängig, bei jedoch erlaubt.

Die konkrete Rechnung bestätigt, dass  $\text{Im} \Pi_{\text{HTL}}$  die Konstruktionsbedingungen von Abschnitt 4.3 erfüllt. Somit ist die vorgeschlagene Rekonstruktion der asymptotischen Masse ausser- und innerhalb der Planck-Dimension einschließlich der Nähe zum Lichtkegel.

# Kapitel 6

## Die verbesserte effektive Wirkung

Die Selbstenergien von Photon (Kapitel 3) und Gluon (Kapitel 4) haben wir neu bestimmt. Die dabei verwendete Resummation der asymptotischen Massen ist notwendig, um kollineare Singularitäten in Lichtkegelnähe zu regulieren. Häufig ist jedoch bei Eichtheorien der Einbau von Massen mit Brechung der Eichinvarianz verbunden. Im vorliegenden Kapitel werden wir sehen, auf welchem Wege es dennoch möglich sein wird, aus den Selbstenergien eine eichinvariante effektive Wirkung zur Beschreibung der weichen Impulsskala zu gewinnen. Die neue Herleitung hält sich in sehr eng an die ursprüngliche (Kapitel 2). Die Resultate sehen sogar formal genau gleich aus. Die Buchstaben in den Formeln bekommen lediglich eine leicht veränderte Bedeutung. Die Ergebnisse des vorliegenden Kapitels sind zusammen mit Anton Rebhan veröffentlicht worden [23].

### 6.1 Skalare Elektrodynamik

Die Selbstenergie des Photons haben wir in (3.22) neu bestimmt.

$$\Pi_{oo}(Q) = 3m^2 + 2e^2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} n'(p) \frac{Q_o^2 \omega_p^2}{(p^2 + m_\infty^2) Q_o^2 - (\vec{p}\vec{q})^2}. \quad (3.22)$$

Aus ihr wird eine neue, verbesserte Version der effektiven Wirkung (3.2) hergeleitet. Die ursprüngliche Version liefert keinerlei HTL-Vertizes, wir dürfen dasselbe von der neuen erwarten. Daher wird die Wirkung nicht in der Form von Frenkel, Taylor und Pisarski (2.25) bestimmt, sondern in der eleganteren und kürzeren von Braaten und Pisarski (2.26).

Der entscheidende Schritt, welcher die enge Analogie zur alten Herleitung ermöglicht, ist die Umschreibung von (3.22) auf eine neue „Y-Sprache“ (2.18). Die dortige Winkelintegration  $\int_\Omega$  kann als eine Mittelung über die Richtungen des Einheitsvektors  $\vec{e}$  verstanden werden,  $\int_\Omega \dots =: \langle \dots \rangle$  mit  $\langle 1 \rangle = 1$ . Auch die Integrationen in (3.22) sind eine Mittelung,

$$\langle \dots \rangle := \frac{3}{\pi^2} \int_0^\infty d\alpha \frac{\alpha^2 e^{-\alpha}}{(1 - e^{-\alpha})^2} \frac{1}{4\pi} \int d^2\Omega \equiv \int_\alpha \int_\Omega, \quad (6.1)$$

wobei die Integration über  $\alpha$  aus derjenigen über  $p$ -Betrag hervorging sowie die Winkelintegration  $\int_{\Omega}$  wie bisher aus derjenigen über die Richtungen von  $\vec{p}/p$ . Die Definition

$$Y_{\mu} = (Y_0, \vec{e}) \quad \text{mit} \quad Y_0 = \sqrt{1 + \mu^2/\alpha^2} \quad (6.2)$$

mit  $\mu = m_{\infty}/T$  erlaubt die Umschreibung der verbesserten Selbstenergie auf die kompakte Form des ursprünglichen  $\Pi$ ,

$$\Pi_{\mu\nu}(Q) = 3m^2 \left\langle U_{\mu}U_{\nu} - \frac{UQ}{YQ} Y_{\mu}Y_{\nu} \right\rangle. \quad (6.3)$$

Zur Erinnerung: Wir bestimmen die effektive Wirkung, indem wir als „Anfangsbedingung“ fordern, daß sie den mit der Selbstenergie resummierten Propagator enthält. Die Forderung nach Eichinvarianz liefert dann alle höheren Vertizes. Im abelschen Fall ist Eichinvarianz schon dadurch erfüllt, daß die Anfangsbedingung nicht mit den Feldern  $A_{\mu}$ , sondern mit dem Feldtensor  $F_{\mu\nu}$  formuliert wird, denn  $F_{\mu\nu}$  ist für sich eichinvariant. Im nicht-abelschen Fall liefert die Formulierung mit den Feldern  $A_{\mu}^a$  eine Differentialgleichung, deren Lösung eichinvariant ist. Bei Formulierung mit  $F_{\mu\nu}^a$  ersetzt man alle vorkommenden Ableitungen durch ihre kovariante Form und erfüllt auf diesem Wege Eichinvarianz.

Man könnte meinen, mit (6.3) sei die Bildung der verbesserten effektiven Wirkung trivial. Man müsse nur den alten Ausdruck (3.2) übernehmen und die neuen Bedeutungen der Buchstaben einsetzen. Dies ist jedoch nicht so. Leider ergibt sich nach dem oben genannten Schema aus (6.3) eine Wirkung, welche nicht die ursprünglich und gewünscht einfache Gestalt hat. Statt dessen formen wir die Selbstenergie ein weiteres Mal um,

$$\begin{aligned} \Pi_{00} &= 2e^2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} n'(p) \frac{\vec{p}\vec{q}}{\omega_p Q_0 - \vec{p}\vec{q}} \\ &= 2e^2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{n(p)}{p} \left\{ 2 - 2 \frac{pQ_0}{\omega_p Q_0 - \vec{p}\vec{q}} - \frac{m_{\infty}^2 Q_0^2}{(\omega_p Q_0 - \vec{p}\vec{q})^2} \right\}. \end{aligned} \quad (6.4)$$

wobei sich letzteres nach partieller Integration in  $p$  ergibt. Auch die Integrationen in (6.4) sind eine Mittelung,

$$\Pi_{00} = 3m^2 \left\langle 1 - \frac{Q_0}{YQ} - \frac{1}{2} \frac{\mu^2}{\alpha^2} \frac{Q_0^2}{(YQ)^2} \right\rangle_{\text{B}} \quad \text{mit} \quad \langle \quad \rangle_{\text{B}} = \frac{6}{\pi^2} \int_0^{\infty} d\alpha \alpha n(\alpha) \int_{\Omega} \quad (6.5)$$

und  $Y$  aus (6.2). Obwohl der dritte Term von  $\Pi_{00}$  in (6.5) auf den ersten Blick als Korrektur  $\sim e^2$  erscheint, darf er am Lichtkegel  $Q^2 = 0$  nicht vernachlässigt werden. Durch den quadratischen Nenner enthält er potentiell eine lineare kollineare Singularität, welche  $e^2$  kompensieren kann. Also ist er von der Ordnung Eins. Die beiden Mittelungen sind somit nicht äquivalent, und wir müssen sie sorgfältig unterscheiden.

Als Anfangsbedingung fordern wir, daß  $\delta\mathcal{L}$  die Selbstenergie (3.22) als Zweipunktfunktion liefert. Die Lagrangedichte

$$\delta\mathcal{L}_{\text{photon}} = -\frac{3m^2}{4} F^{\mu\rho} \left\langle \frac{Y_{\rho}Y_{\sigma}}{(Y\partial)^2} \right\rangle_{\text{B}} F^{\sigma}_{\mu}. \quad (6.6)$$



erfüllt diese Forderung: Sie liefert  $\Pi$  in der Form (6.5). Eichinvarianz ist in (6.6) offensichtlich gegeben. Zusammen mit (3.23) ist damit für die SED die verbesserte effektive Wirkung der weichen Skala hergeleitet. In einem etwas anderen Zusammenhang ist Braaten auf (6.6) gestoßen [47]: In einem nicht-ultrarelativistischen QED-Plasma darf die Elektronenmasse  $m_e$  nicht vernachlässigt werden. Dann ist  $\delta\mathcal{L}$  ebenfalls die effektive Wirkung der weichen Skala.

## 6.2 QCD ohne Quarks

Die Verwandtschaft zwischen QCD und SED ist sehr stark. Die Photon- und die Gluon-Selbstenergie haben bis auf den numerischen Wert der thermischen Massen  $m$  und  $m_\infty$  exakt die gleiche Gestalt. Wir dürfen daher die „Y-Sprache“ und die Definition der zwei Mittelungen von der SED auf die QCD übertragen. Die Gleichungen (6.1), (6.2), (6.3) und (6.5) gelten für die Gluon-Selbstenergie. Der wesentliche Unterschied zwischen abelscher und nicht-abelscher Theorie ist die Existenz der HTL-Vertizes. Um sie aus einer verbesserten effektiven Wirkung zu bestimmen, ist es vorteilhaft, sich nicht nur auf die manifest eichinvariante Form analog zu (6.6) zu konzentrieren. Bei Bestimmung der Vertizes ist eine Version nach Frenkel und Taylor (2.25) vorzuziehen.

Die manifest eichinvariante Version ist aus den Ergebnissen des vorangegangenen Abschnittes sehr einfach zu bestimmen. Da die Selbstenergien übereinstimmen, gilt die Anfangsbedingung (6.6) hier ebenfalls. Im nicht-abelschen ist der Feldtensor jedoch nicht eichinvariant. Für manifeste Eichinvarianz werden die Ableitungen  $\partial_\mu$  im Nenner durch ihre kovariante Form  $\mathcal{D}_\mu$  ersetzt.

$$\delta\mathcal{L}_{\text{gluon}} = -\frac{3m^2}{4} F_a^{\mu\rho} \left\langle \frac{Y_\rho Y_\sigma}{(Y\mathcal{D}_{ab})^2} \right\rangle_B F_b^{\sigma\mu}. \quad (6.7)$$

Dies ist die verbesserte effektive Wirkung für die gluonische QCD in manifest eichinvarianter Form. Sie hat wie angekündigt ihre ursprüngliche Gestalt (2.26) beibehalten. Nur die Bedeutung der Buchstaben ist geändert.

Die zweite Form der effektiven Wirkung bestimmen wir aus der Anfangsbedingung

$$\mathcal{S}_2[A] = \frac{1}{3} NT^2 \text{Sp} \int^\beta d^4x \left\langle [H_o(x)]^2 - H(x) \frac{Y_o \partial_o}{Y \partial} H(x) \right\rangle \quad (6.8)$$

mit den Bezeichnungen von (2.25). Dies liefert die Selbstenergie in der Form (6.3). Mit der Mittelung  $\langle \dots \rangle$  ist diejenige aus (6.1) gemeint, daher fehlt der Index 'B'. Bei der folgenden Herleitung nach Pisarski [33] darf die genaue Art der Mittelung keine Rolle spielen. Dies ist tatsächlich der Fall, so daß die Herleitung wörtlich aus [33] übernommen werden darf.

Aus dem Ansatz

$$\mathcal{S}[A] = \frac{1}{3} NT^2 \text{Sp} \int^\beta d^4x \left\langle [H_o(x)]^2 - \phi[H] \right\rangle \quad (6.9)$$

wird aus der Forderung nach Eichinvarianz mit der Anfangsbedingung (6.8) ein entsprechendes Funktional  $\phi[H]$  bestimmt. Unter einer infinitesimalen Eichtransformation mit Parameter  $\omega = \omega^a T^a$  verhalten sich die Felder wie

$$\delta_\omega H_o = gY_o \partial_o \omega - ig[H_o, \omega] \quad \text{und} \quad \delta_\omega H = gY \partial \omega - ig[H, \omega] =: g\mathbf{D}\omega. \quad (6.10)$$

Eichinvarianz der Wirkung heißt  $\delta_\omega \mathcal{S}[A] = 0$  für alle  $\omega$ . Dies erfordert nach Ansatz

$$2\langle Y_o \partial_o H \rangle = \langle \mathbf{D} \partial_H \phi[H] \rangle. \quad (6.11)$$

Bis auf Terme, die unter der Mittelung verschwinden, ist die Lösung gegeben durch

$$\partial_H \phi[H] = \frac{2}{\mathbf{D}} Y_o \partial_o H \quad \text{mit} \quad \frac{1}{\mathbf{D}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{Y\partial} [iH, *]} \frac{1}{Y\partial} = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{Y\partial} [iH, *] \right\}^n \frac{1}{Y\partial}. \quad (6.12)$$

Der Stern \* verweist auf alle Terme rechts des Kommutators. Zählt man nur die explizit auftauchenden  $g$ , also nicht diejenigen in  $Y_o$ , dann gilt  $g\partial_g \phi[H] = \text{Sp} \int^\beta d^4x H \partial_H \phi[H]$  und somit

$$g\partial_g \phi[H] = 2\text{Sp} \int^\beta d^4x \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{Y\partial} [iH, *] \right\}^n \frac{1}{Y\partial} Y_o \partial_o H. \quad (6.13)$$

Die Integration bezüglich  $g$  ist nahezu trivial. Die Anfangsbedingung (6.8) bestimmt die Integrationskonstante zu Null, so daß das Endresultat lautet

$$\delta \mathcal{S} = \frac{1}{3} NT^2 \text{Sp} \int^\beta d^4x \left\langle (H_o)^2 + (Y_o \partial_o H) F \left( \frac{1}{Y\partial} [iH, *] \right) \frac{1}{Y\partial} H \right\rangle \quad (6.14)$$

mit der schon bekannten Funktion  $F(z) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n+2}$ . Dies ist die verbesserte effektive Wirkung in der zur Bestimmung der HTL-Vertizes idealen Gestalt. Auch sie hat ihre ursprüngliche Form bis auf die Bedeutung der Buchstaben beibehalten. Wie angekündigt hat die spezielle Art der Mittelung in obiger Herleitung keinerlei Rolle gespielt.

Die verbesserten Vertizes sind mit (6.14) auf die einfachst mögliche Weise zu gewinnen. Sie behalten ihre alte Form, wiederum ändern nur die Buchstaben ihre Bedeutung.

$$\delta \Gamma_{\mu\nu e} = 3m^2 \left\langle Y^\mu Y^\nu Y^e \left\{ \frac{P_o}{(YQ)(YP)} - \frac{K_o}{(YQ)(YK)} \right\} \right\rangle \quad (6.15)$$

$$\delta \Gamma_{\mu\nu e\lambda} = 6m^2 \left\langle Y^\mu Y^\nu Y^e Y^\lambda \left\{ \frac{P_o}{(YQ)^2(YP)} - \frac{K_o}{(YQ)^2(YK)} \right\} \right\rangle \quad (6.16)$$

vergleiche (2.29) und (2.30). Sie sind ebenfalls durch Auswertung der HTL-Diagramme (2.21) und (2.22) zu erhalten, wobei die transversalen Anteile der inneren harten Propagatoren die asymptotischen Massen enthalten müssen. Diese Rechnung ist gemacht [23] und das Resultat stimmt mit den oben angegebenen Vertizes überein. Insbesondere ist dadurch bestätigt, daß als Mittelung (6.1) verwendet werden muß, nicht etwa (6.5).

## 6.3 Einbau von Fermionen

Bislang sind in dieser Arbeit keine Fermionen (Quarks) diskutiert worden. Der vorliegende Abschnitt gibt einen kurzen Überblick über das Verhalten der fermionischen Selbstenergie am Lichtkegel. Er endet mit einer verbesserten effektiven Wirkung für die Wechselwirkung von Quarks und Gluonen bei weichen Impulsen, so daß damit die Wirkung der QCD vollständig ist.

Der Fermion-Propagator muß in der weichen Impulsskala analog zum bosonischen Fall mit HTL-Einsetzungen resummiert werden. Er hat die Gestalt

$$*S(Q) = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{\hat{Q}_+}{D_+} + \frac{\hat{Q}_-}{D_-} \right\}, \quad (6.17)$$

wobei die Bezeichnungen Anhang B entnommen sind. Für weiche Impulse enthält er neben dem Quark eine zweite, kollektive Anregung: das Plasmino. Dessen Dispersionskurve (Abbildung B.1) erinnert stark an das bosonische Plasmon. Insbesondere nähert sie sich für große  $q$  exponentiell dem Lichtkegel an. Dem liegt ebenfalls eine kollineare Singularität in der Selbstenergie zugrunde.

Doch auch der fermionische Propagator kann keine kollinearen Singularitäten enthalten. Betrachtet man die entsprechende Dyson-Gleichung, sind alle inneren Linien vollständig resummiert zu nehmen. Es gibt keine nackten inneren Propagatoren. Für die HTL-Näherung der Quark-Selbstenergie bedeutet dies, daß am Lichtkegel analog zum bosonischen Fall asymptotische Massen mitzunehmen sind. Der resummierte Propagator  $*S(Q)$  verhält sich für  $Q_0, q \gg gT$  wie

$$*S(Q^2) = -\frac{Q + \mathcal{O}(M^2/q)}{Q^2 - M_\infty^2 + \mathcal{O}(M^4/q^2)} = -\left( Q - \frac{M_\infty^2}{2q^2} Q_0 \psi \right)^{-1} \quad (6.18)$$

mit  $M_\infty^2 = 2M_f^2$ . Entsprechend sind bei allen höheren HTL-Diagrammen die inneren Propagatoren mit  $M_\infty^2$  zu resummierten.

Diagramme, deren äußeren Beine nur aus bosonischen Linien bestehen, im Inneren jedoch eine Fermion-Schleife besitzen, generieren die gleichen HTL-Resultate wie die im vorangegangenen betrachteten Boson-Schleifen. Sie unterscheiden sich lediglich im Vorfaktor durch  $N_f/2$  anstelle von  $N^2$ . Am Lichtkegel ersetzt die fermionische Masse  $M_\infty$  die bosonische  $m_\infty$ . Der Gluon-Anteil der effektiven Wirkung (6.7) bekommt einen entsprechenden additiven Zusatz.

Diagramme, welche neben bosonischen auch zwei äußere fermionische Linien enthalten, benötigen eine etwas detailliertere Diskussion. Sie bestehen notwendigerweise im Inneren sowohl aus Fermion- als auch aus Bosonpropagatoren, welche am Lichtkegel mit unterschiedlichen asymptotischen Massen resummiert sind. Dies wird dem Wechselwirkungsterm zwischen Quarks und Gluonen der effektiven Wirkung eine Gestalt geben, welche in rein bosonischen Theorien nicht vorkommt. Das einfachste Diagramm dieser Klasse ist die HTL-Näherung der Fermion-Selbstenergie. Es besteht aus zwei äußeren fermionischen und keinen weiteren äußeren bosonischen Linien. Im Inneren wird über einen fermionischen und einen bosonischen Propagator summiert.



Wir werden die Fermion-Selbstenergie  $\Sigma(Q)$  jetzt unter Berücksichtigung der asymptotischen Massen neu bestimmen. Sie wird wiederum als Ausgangspunkt zur Bestimmung der effektiven Wirkung dienen. Nach Summation über die fermionischen Matsubara-Frequenzen ist

$$\Sigma(Q) = -\frac{1}{2}g^2C_f \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{N(p)}{p^2} \left\{ \frac{p\gamma_0 - \vec{p}\vec{\gamma}}{Q_0 - \omega_p + \tilde{\omega}_k} + \frac{p\gamma_0 + \vec{p}\vec{\gamma}}{Q_0 + \omega_p - \tilde{\omega}_k} \right\} \quad (6.19)$$

mit  $\omega_p^2 = p^2 + m_\infty^2$ ,  $\tilde{\omega}_p^2 = p^2 + M_\infty^2$  und  $N(p) = n_b(p) + n_f(p)$ . Die HTL-Näherungen ( $p \ll q$ ) liefert analog zu (3.21) für die Nenner

$$\omega_p - \tilde{\omega}_k = \frac{\vec{p}\vec{q}}{p} \left( 1 - \frac{M_\infty^2}{2p^2} \right) + \frac{1}{2} \frac{m_\infty^2 - M_\infty^2}{p} - \frac{1}{2} \frac{p^2q^2 - (\vec{p}\vec{q})^2}{p^3} + \mathcal{O}(q^3/p^2). \quad (6.20)$$

Abseits des Lichtkegel gilt  $\omega_p - \tilde{\omega}_k \approx \vec{p}\vec{q}/p$ . Diese Näherung würde uns den bekannten Ausdruck für  $\Sigma(Q)$  liefern. Am Lichtkegel kann der Nenner am kollinearen Punkt  $\vec{p}\vec{q} = \pm pq$  klein werden, so daß die Korrekturterme wichtig werden. Der letzte Term in (6.20) verschwindet bei  $\vec{p}\vec{q} = \pm pq$  und ist eine 'echte' Korrektur. Beide Terme, welche die Massen enthalten, sind jedoch nicht vernachlässigbar, auch wenn sie von unterschiedlicher Größenordnung sind. Unten wird die Bestimmung der Vertizes eine Möglichkeit aufzeigen, bei der die Massendifferenz  $m_\infty^2 - M_\infty^2$  allein nicht ausreicht, um alle kollinearen Singularitäten zu regulieren.

$$\omega_p - \tilde{\omega}_k = \frac{\vec{p}\vec{q}}{\tilde{\omega}_p} + \frac{1}{2} \frac{m_\infty^2 - M_\infty^2}{p} + \mathcal{O}(q^2/p). \quad (6.21)$$

Die Selbstenergie bekommt damit die Gestalt

$$\begin{aligned} \Sigma(Q) &= -\frac{1}{2}g^2C_f \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{N(p)}{p} \left\{ \frac{p\gamma_0 - \vec{p}\vec{\gamma}}{\tilde{\omega}_p Q_0 - \vec{p}\vec{q} - \frac{m_\infty^2 - M_\infty^2}{2}} + \frac{p\gamma_0 + \vec{p}\vec{\gamma}}{\tilde{\omega}_p Q_0 + \vec{p}\vec{q} + \frac{m_\infty^2 - M_\infty^2}{2}} \right\} \\ &= -M_f^2 \left\langle \frac{Y^\mu \gamma_\mu}{YQ - \frac{dm}{\alpha}} + \frac{Y^\mu \gamma_\mu}{YQ + \frac{dm}{\alpha}} \right\rangle_f, \end{aligned} \quad (6.22)$$

wobei es uns im letzten Schritt gelungen ist,  $\Sigma(Q)$  in „Y-Sprache“ zu formulieren. Die Vektoren  $Y_\mu$  unterscheiden sich von ihrem bosonischen Gegenpart (6.2) kaum, die fermionische Mittelung enthält jedoch Überreste der Fermi-Funktion  $n_f$ .

$$\langle \rangle_f := \frac{4}{\pi^2} \int_0^\infty d\alpha \frac{\alpha e^\alpha}{e^{2\alpha} - 1} \frac{1}{4\pi} \int d^2\Omega, \quad Y_\mu = (Y_0, \vec{e}), \quad Y_0 = \sqrt{1 + M_\infty^2/(T\alpha)^2} \quad (6.23)$$

sowie  $dm = (m_\infty^2 - M_\infty^2)/(2T)$ .

Aus der Selbstenergie in Gestalt (6.22) läßt sich nun die effektive Wirkung für die Quark-Gluon Wechselwirkung bei weichen Impulsen ablesen.

$$\delta\mathcal{L} = -\bar{\psi} M_f^2 \left\langle \frac{Y^\mu}{iY\mathcal{D} - \frac{dm}{\alpha}} + \frac{Y^\mu}{iY\mathcal{D} + \frac{dm}{\alpha}} \right\rangle_f \gamma_\mu \psi, \quad (6.24)$$

wobei  $D_\mu = \partial_\mu + igT^a A_\mu^a$  die kovariante Ableitung ist. Ersetzt man sie durch die einfache Ableitung  $\partial_\mu$ , findet man die Selbstenergie (6.22). Dies ist wiederum die Anfangsbedingung zur Bestimmung von (6.24) gewesen.

Oben wurde behauptet, daß sowohl der Massenzusatz in  $Y_o \approx 1 + \frac{1}{2}M_\infty^2/(T\alpha)^2$  als auch die Massendifferenz  $dm$  zur Regularisierung der kollinearen Singularitäten notwendig sind. Vergleicht man die Größenordnungen der beiden Terme, wäre auf den ersten Blick die Näherung  $Y_o = 1$  erlaubt. Dies ist jedoch nicht so. In Kapitel 7 werden wir den Vierervertex benötigen. An seinem Beispiel werden wir zeigen, weshalb die Setzung  $Y_o = 1$  trotz  $dm$  noch zu singulären Ausdrücken führen kann.

Wir bestimmen den Vierer-Vertex (zwei fermionische und zwei bosonische äußere Linien) für den Spezialfall, daß jeweils die beiden Fermion-Impulse  $P$  und die Boson-Impulse  $Q$  übereinstimmen. Die Lagrangedichte (6.24) liefert

$$\begin{aligned} {}^* \Gamma_{\mu\nu} = & -e^2 M_f^2 \left\langle \frac{Y_\mu Y_\nu Y_\rho \gamma^\rho}{(YP + \frac{dm}{\alpha})^2} \left\{ \frac{1}{Y(P-Q) + \frac{dm}{\alpha}} + \frac{1}{Y(P+Q) + \frac{dm}{\alpha}} \right\} \right. \\ & \left. + \frac{Y_\mu Y_\nu Y_\rho \gamma^\rho}{(YP - \frac{dm}{\alpha})^2} \left\{ \frac{1}{Y(P-Q) - \frac{dm}{\alpha}} + \frac{1}{Y(P+Q) - \frac{dm}{\alpha}} \right\} \right\rangle_f \end{aligned} \quad (6.25)$$

Die Nenner scheinen keinerlei Singularitäten mehr zu enthalten. In der Rechnung von Kapitel 7 wird jedoch der bosonische Impuls lichtartig sein,  $Q^2 = 0$ , und über den fermionische Impuls  $P$  wird summiert. Es empfiehlt sich dann eine Partialbruchzerlegung bezüglich  $P$ ,

$${}^* \Gamma_{\mu\nu} = -e^2 M_f^2 \left\langle \frac{Y_\mu Y_\nu Y_\rho \gamma^\rho}{(YQ)^2} \left\{ \frac{1}{Y(P-Q) + \frac{dm}{\alpha}} + \frac{1}{Y(P+Q) + \frac{dm}{\alpha}} - \frac{2}{YP + \frac{dm}{\alpha}} \right\} \right\rangle_f \quad (6.26)$$

plus dem entsprechenden Term mit  $dm \rightarrow -dm$ . Wir sehen, daß auf diese Weise ein Nenner  $(YQ)^2$  entstanden ist, welcher *nicht* die Massendifferenz  $dm$  enthält. Hier lauert bei  $Y_o = 1$  eine potentielle Singularität. Diese wird durch den Massenzusatz zu  $Y_o$  reguliert. Die Näherung  $Y_o = 1$  ist dann verboten. In der Veröffentlichung [23] ist diese Falle leider nicht bemerkt, die dortige Gleichung (48) definiert  $Y_o = 1$ . Der Fehler sei mit der Neudefinition aus (6.23) berichtigt.

Die Lagrangedichte (6.24) impliziert eine Besonderheit: Jeder HTL-Vertex muß in zwei Teile zerfallen, welche sich durch das Vorzeichen vor  $dm$  unterscheiden. Diese Unterteilung sollte sich auch nach direkter Auswertung der entsprechenden HTL-Diagramme ergeben. Dies ist tatsächlich der Fall. Die Diagramme zum Dreier- und Vierer-Vertex sind explizit ausgewertet worden. Die Vertizes stimmen mit denjenigen überein, welche man aus der funktionalen Ableitung von (6.24) erhält. Für höhere Vertizes kann man einen induktiven Beweis finden [23], daß auch dann die Diagramme die Unterteilung liefern.

## 6.4 Eindeutigkeit der effektiven Wirkung

Die soeben aufgestellten effektiven Wirkungen beseitigen sämtliche kollineare Singularitäten aus der diagrammatischen Entwicklung. Die Resummation der asymptotischen

Masse hat sich mit einer überwältigenden Einfachheit in das bestehende Braaten-Pisarski-Schema eingefügt. Wäre die „Schönheit der Physik“ ein anerkanntes *first principle*, dann wäre die Eindeutigkeit der Wirkungen bewiesen. Statt dessen stellt sich die Frage, ob andere Möglichkeiten zur Beseitigung der kollinearen Singularitäten existieren, oder ob es Zusätze zum vorgestellten Schema geben kann. Wir haben gesehen, daß die asymptotischen Massen die Konsistenz der Störungsentwicklung bis einschließlich der ersten Ordnung wiederherstellt. Ob sie in höheren Ordnung ebenfalls ausreichend ist, können wir anhand der vorliegenden Rechnungen sicherlich nicht entscheiden.

Die Einführung der asymptotischen Massen ist kein Willkürakt. Ihre Notwendigkeit ist aus der Analyse der Lichtkegel-Singularitäten der Selbstenergie klar zu erkennen. Anders (willkürlicher) sind wir dagegen mit IR-Divergenzen umgegangen. Dort haben wir einen cutoff  $\lambda$  benötigt, welcher in den Integrationen das physikalische Wissen über die magnetische Masse ersetzte. Im Falle der kollinearen Singularitäten haben wir genügend Kenntnis: Der Blick auf die Dyson-Gleichung zeigte, daß jegliches Vorkommen nackter Propagatoren stets auf eine unzureichende Entwicklung hindeutete. Die Selbstenergie der vollen Theorie enthält nur vollständig resummierte Propagatoren. Wir benötigen also zu einer konsistenten Entwicklung Propagatoren, welche mit gewissen Anteilen der Selbstenergie resummiert sind. Dabei half die Feststellung, daß jene Anteile unempfindlich auf lichtartige Impulse sind, so daß wir die ursprüngliche Berechnung der Selbstenergie zu ihrer Bestimmung ausnutzen konnten. Wir fanden die asymptotischen Massen. Ihre Resummation ist damit durch Rechnung sehr gut legitimiert.

Neben den asymptotischen Massen kann es weitere Anteile der Selbstenergie geben, welche ebenfalls in Lichtkegelnähe wichtig werden können. Die Masse  $m_\infty$  rührte vom Realteil der Selbstenergie her. Letztere ist jedoch komplex. Ihr Imaginärteil liefert nach Kapitel 2 eine Dämpfung des Gluons bzw Plasmons. In einigen Arbeiten, z.B. [48, 49, 50], wird diskutiert, ob nicht eventuell auch eine bestimmte Dämpfung zur Beseitigung der kollinearen Singularitäten beitragen kann. Daß dies möglich ist, werden wir im folgenden sehen. Eine entsprechende Resummation oder sogar eine entsprechende effektive Wirkung ist jedoch bislang noch nicht befriedigend implementiert worden.

Anhand der klassischen Beschreibung durch die Boltzmann-Gleichung werden wir nun deutlich machen, weshalb Anteile der Dämpfung am Lichtkegel interessant scheinen. Wir betrachten das System von Abschnitt 3.4 und lassen zusätzlich einen Relaxationsmechanismus zu. Er wird in bekannter einfacher Weise in die Boltzmann-Gleichung eingebaut:

$$\partial_t f(\vec{p}; \vec{r}, t) = -e \vec{E} \cdot \nabla_p f(\vec{p}; \vec{r}, t) - \vec{v}(\vec{p}) \cdot \nabla_r f(\vec{p}; \vec{r}, t) - \gamma_r [f(\vec{p}; \vec{r}, t) - n(p)] , \quad (6.27)$$

wobei die Dämpfung  $\gamma_r$  hier als die Inverse der mittleren Relaxationszeit eingeführt worden ist. Nach Kapitel 2 ist  $\gamma_r \sim e^2 T$ .

Wir fragen, ob sich im System eine longitudinale Welle ausbreiten kann. Aufgrund der Relaxation wird sie gedämpft sein:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{q}}{q} E_0 \cos(\omega(q)t - \vec{q} \cdot \vec{r}) e^{-\gamma(q)t} . \quad (6.28)$$



Gesucht sind nun Frequenz  $\omega(q)$  und Dämpfung  $\gamma(q)$  der Welle. Die Boltzmann-Gleichung wird wie in Abschnitt 3.4 linearisiert. Der Ansatz für  $\vec{E}$  liefert

$$\delta f(\vec{p}; \vec{r}, t) = -eE_0 \frac{n'(\sqrt{\phantom{x}})}{\sqrt{\phantom{x}}} \frac{\vec{p}\vec{q}}{q} \frac{(\omega - \vec{p}\vec{q}/\sqrt{\phantom{x}})S - (\gamma - \gamma_r)C}{(\omega - \vec{p}\vec{q}/\sqrt{\phantom{x}})^2 + (\gamma - \gamma_r)^2} e^{-\gamma t} \quad (6.29)$$

mit  $\sqrt{\phantom{x}} = \sqrt{p^2 + m^2}$  sowie  $\begin{pmatrix} S \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \\ \cos \end{pmatrix}(\omega t - \vec{q}\vec{r})$ . Mit Hilfe der Maxwellgleichung (3.28) erhalten wir die Bestimmungsgleichungen für Frequenz und Dämpfung

$$\gamma(q) = -2e^2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{n'(p)}{p^2} \frac{(\vec{p}\vec{q})^2}{q^2} \frac{(\gamma - \gamma_r)}{(\omega - \vec{p}\vec{q}/\sqrt{\phantom{x}})^2 + (\gamma - \gamma_r)^2} \quad (6.30)$$

$$\omega(q) = -2e^2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{n'(p)}{p^2} \frac{(\vec{p}\vec{q})^2}{q^2} \frac{(\omega - \vec{p}\vec{q}/\sqrt{\phantom{x}})}{(\omega - \vec{p}\vec{q}/\sqrt{\phantom{x}})^2 + (\gamma - \gamma_r)^2}, \quad (6.31)$$

wobei  $\sqrt{\phantom{x}} \approx p + \frac{1}{2}m^2/p$  genähert werden darf. Beide Gleichungen haben den bekannten Nenner, welcher am Lichtkegel  $\omega = q$  die kollineare Singularität entwickelt. Wir untersuchen ihn genauer: Die Singularität befindet sich bei  $\vec{p}\vec{q} = pq$ . Genau an diesem Punkt wird der Nenner zu  $(q\frac{m^2}{2p^2})^2 + (\gamma - \gamma_r)^2$ . Das bedeutet, daß die Differenz der Dämpfungen  $(\gamma - \gamma_r)^2 \sim g^4 T^2$  der wesentliche Regulator sein könnte, da  $(qm^2/2p^2)^2 \sim g^6 T^2$ . Auf dieser Beobachtung fußen die genannten Arbeiten [48, 49, 50].

In dem hier verwendeten Modell-System ist die Dämpfung jedoch nur scheinbar wichtiger als die asymptotische Masse. Denn nicht die Dämpfung selbst, sondern die Differenz  $\gamma - \gamma_r$  reguliert die Singularität. Die Differenz kann klein werden, wenn  $\gamma \rightarrow \gamma_r$ , und kann somit vergleichbar mit oder kleiner als der Massenterm  $qm^2/p^2$  werden. Dies ist hier tatsächlich der Fall. Angenommen die Differenz ist wichtiger als der Massenterm, dann dürfen wir  $m = 0$  setzen. In diesem Spezialfall kann  $\gamma(q)$  aus (6.30) bestimmt werden,

$$\gamma(q) = \gamma_r \frac{1}{1 - 1/\kappa(q)} \quad \text{mit} \quad \kappa(q) = 2 - \frac{3m^2}{q^2} \left(1 + \frac{\omega^2}{Q^2}\right). \quad (6.32)$$

Nähern wir uns mit  $Q$  dem Lichtkegel, verschwindet die Differenz  $\gamma - \gamma_r$  mit  $\varepsilon^2 = Q^2/q^2$  wie

$$\gamma - \gamma_r \approx -\gamma_r \frac{Q^2}{3m^2} \sim g^2 T \varepsilon^2. \quad (6.33)$$

Damit ist  $\gamma - \gamma_r$  als alleiniger Regulator der kollinearen Divergenz untauglich. Bestenfalls ist er mit der asymptotischen Masse gleichwertig.

In der vorliegenden Arbeit favorisieren wir die Resummation der asymptotischen Massen. Wir können keinen endgültigen Beweis liefern, daß dies in allen Ordnung zu konsistenter Bestimmung der Plasmon-Dispersion ausreichend ist. Wir können lediglich gute Gründe angeben, weshalb man es vor einer Dämpfungs-Resummation mit der asymptotischen Masse versuchen sollte.

**Erstens:** Der tatsächliche Effekt der Dämpfung kann viel kleiner sein als der scheinbare. Ein Beispiel dafür haben wir in unserem Modellsystem gesehen: Die Differenz  $\gamma - \gamma_r$  verschwindet am Lichtkegel. Dies ist jedoch sicherlich in den Unzulänglichkeiten des Modells begründet. Streng quantenfeldtheoretische Rechnungen zeigen jedoch gern, daß sich

Beiträge aus Resummation von Dämpfungen wegheben. Z.B. kompensieren sie sich in der SED gegen Beiträge von Vertizes, welche zur Wahrung der Eichinvarianz notwendigerweise mitzunehmen sind [21]. In einem jüngst erschienenen Preprint [51] wurde dieses Verhalten für recht allgemeine Theorien bestätigt. Allerdings beschränkte sich der Beweis [51] auf nicht-lichtartige Impulse. Die Autoren von [51] versuchen momentan, ihren Beweis zu verallgemeinern.

**Zweitens:** Eichinvarianz und andere Symmetrien des Lagrangian. Resummation war für uns stets gleichbedeutend damit, daß wir im Lagrangian etwas addiert und subtrahiert haben:  $\mathcal{L} = \mathcal{L} + \delta\mathcal{L} - \delta\mathcal{L} =: \mathcal{L}_{\text{eff}} - \delta\mathcal{L}$ . Der effektiven Lagrangedichte wurden die resummierten Propagatoren entnommen,  $\delta\mathcal{L}$  wurde als Korrektur behandelt. Es wäre schön, wenn man eine Dämpfungs-Resummation ebenfalls auf diese Weise verstehen könnte. Es ist jedoch offen, wie man in einer Lagrangedichte eine Dämpfung einbauen kann. Neben Eichinvarianz wären natürlich alle Symmetrien der ursprünglichen Theorie zu wahren. Insbesondere ist nicht klar, auf welche Weise man trotz Dämpfung die Zeitumkehr-Invarianz und Energie-Erhaltung der Theorie beibehalten kann.

**Drittens:** Dämpfung ist Effekt der weichen Impulsskala. Unser Ziel war eine effektive Wirkung, welche die weiche Impulsskala richtig beschreibt. Bei ihrer Bestimmung ist es nur erlaubt, harte Impulse auszuintegrieren. Es dürfen keine Beiträge der weichen Skala einfließen. Die Dämpfung, welche man aus harter Skala erhält, hat jedoch die Größenordnung  $\gamma \sim g^4 T$  und ist somit auf jeden Fall vernachlässigbar. Erst bei Summation über weiche Impulse erhält man die ungewöhnlich große Dämpfung  $\gamma \sim g^2 T$ . Die in dieser Arbeit vorgeschlagenen effektiven Wirkungen sind also im Sinne der Renormierungs-Theorie korrekt und eindeutig.

**Viertens:** Bislang ist keine Notwendigkeit für einen Dämpfungseinbau zu erkennen. Bei „vergessener“ Resummation sollte die Störungsentwicklung Inkonsistenzen zeigen. Davon ist in den hier durchgeführten Rechnungen nichts zu sehen. Entwickelt man z. B. (6.31) zu

$$\omega(q) = -2e^2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{n'(p)}{p^2} \frac{(\vec{p}\vec{q})^2}{q^2} \left\{ \frac{1}{\omega - \vec{p}\vec{q}/\sqrt{p^2}} - \frac{(\gamma - \gamma_r)^2}{(\omega - \vec{p}\vec{q}/\sqrt{p^2})^3} \right\}, \quad (6.34)$$

entsteht im Korrekturterm eine quadratische kollineare Singularität. Solche Terme haben wir in der QCD tatsächlich erhalten, allerdings kompensieren sie sich im Endresultat vollständig.

Zusammenfassend können wir zwar nicht eine irgendwie geartete Dämpfungs-Resummation ausschließen. Forschungsarbeit ist in dieser Richtung sicherlich erforderlich. Jedoch sind die einschlägigen Arbeiten zur Zeit noch in einem Stadium, welches nicht an die Konsistenz und Schlüssigkeit der hier vorgestellten verbesserten effektiven Wirkungen heranreicht.

Die zugehörige Kopplungskonstante  $\alpha_s$  ist im Vergleich zu  $\alpha$  so klein, daß das Plasma zu-  
 sehen elektrischer Wechselwirkungen jeweils wieder den Gleichgewichtsstand erreicht,  
 und das Photon nur über Erzeugung des Plasmas ohne weitere Wechselwirkung ver-  
 lassen. Photonen sehen nicht thermisiert.

Die Photon-Produktionsrate beschreibt den Übergang des Systems aus dem Gleich-  
 gewicht unter Aussendung eines Photons  $\gamma$  in einen Zustand  $|i\rangle$ .  
 Element aus dem QCD-Zustandsraum ist  $|i\rangle$ .

# Kapitel 7

## Photon-Produktionsrate

In diesem Kapitel wenden wir uns der Photon-Produktionsrate zu. Sie ist wie die Plasmon-  
 Dispersionskurve eine Meßgröße, welche den Zustand des Quark-Gluon Plasma beschreibt.  
 Im Gegensatz zum Plasmon ist sie sogar „physikalisch“ mit einem Detektor meßbar. Sie  
 gilt als eine der möglichen experimentellen Signaturen des Plasmas.

Die Plasmon-Dispersion kommt nur an einem einzigen Punkt in die Nähe des Licht-  
 kegels. Man darf sich fragen, ob dieser eine Punkt die Aufstellung einer neuen Störungs-  
 theorie lohnt. Im folgenden werden wir die Photon-Produktionsrate mit der Photon-  
 Selbstenergie in Zusammenhang bringen, wobei letztere auf dem Lichtkegel auszuwerten  
 ist. Dies führt wiederum zu kollinearen Singularitäten. Wir sind nun in der Lage, mit  
 ihnen umzugehen. Wir werden die bekannten Rechnungen zur Photon-Produktionsrate  
 wiedergegeben und kritisch kommentieren. Bei Verwendung der neuen effektiven Wir-  
 kung ergeben sich endliche Resultate anstelle der alten, divergenten Ausdrücke. Jedoch  
 wird deutlich, daß die vorliegenden Versuche nicht die vollständige Rechnung darstellen  
 können. Erst eine viel aufwendigere Behandlung einer größeren Anzahl Diagramme hat  
 eine Chance, verläßliche Ergebnisse zu liefern. Einen entsprechenden Vorschlag versuchen  
 wir in Abschnitt 7.3.3.

Zunächst leiten wir einen Ausdruck für die Photon-Produktionsrate her, welcher analog  
 zum Plasmon die Benutzung des Matsubara-Formalismus erlaubt. Das Resultat weicht ein  
 wenig von dem in der Literatur üblichen ab. Der neue Zugang vermeidet eine mögliche  
 Inkonsistenz beim Auftreten starker (linearer) kollinearere Singularitäten.

### 7.1 Gleichgewichtsrate

Ein Quark-Gluon-Plasma befinde sich im Gleichgewicht, beschrieben durch die Dichte-  
 matrix

$$\rho_{QCD} = \sum_i \frac{1}{Z} e^{-\beta H_{QCD}} |i\rangle \langle i|. \tag{7.1}$$

Die Summe laufe über eine vollständige Basis  $|i\rangle$  des QCD-Zustandsraumes. Das Plasma  
 ist elektrisch neutral, es kann jedoch über geladene Quarks mit Photonen wechselwirken.



Die zugehörige Kopplungskonstante  $e$  sei im Vergleich zu  $g$  so klein, daß das Plasma zwischen elektrischen Wechselwirkungen jeweils wieder den Gleichgewichtszustand erreicht, und daß Photonen nach ihrer Erzeugung das Plasma ohne weitere Wechselwirkung verlassen. Photonen seien nicht thermalisiert.

Die Photon-Produktionsrate beschreibt den Übergang des Systems aus dem Gleichgewicht unter Aussendung eines Photons  $\gamma$  in einen Zustand  $|f, \gamma\rangle$ , wobei  $|f\rangle$  wiederum ein Element aus dem QCD-Zustandsraum ist [52, 53].

$$dR = \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\tau} \sum_{if} \frac{e^{-\beta E_i}}{Z} |\langle i | \mathcal{H}_{\text{int}} | f, \gamma \rangle|^2 \quad (7.2)$$

mit  $\tau = \int dt$ . Der Wechselwirkungs-Hamiltonian ist

$$\mathcal{H}_{\text{int}} = \int d^4x j_\mu(x) A_\mu^q(x) \quad (7.3)$$

Der Strom  $j_\mu$  ist wie üblich aus den Materiefeldern (Quarks) zusammengesetzt und enthält keine Photon- oder Gluonanteile.

Die Kopplung  $e$  ist klein. Entsprechend soll  $R$  in führender Ordnung in  $e$  ausgerechnet werden. Damit darf das Photonfeld  $A_\mu$  als äußeres Feld klassisch angenommen werden.

$$A_\mu^q(x) = \frac{\varepsilon_\mu}{\sqrt{2q_0 V}} (e^{iQx} + e^{-iQx}) \quad (7.4)$$

mit  $Q^2 = 0$ . Natürlich kann anstelle nur einer einzigen Fourierkomponente auch ein Wellenpaket betrachtet werden. Dies führt jedoch nicht zu qualitativ neuen Resultaten.

Das klassische Photonfeld kennt, sofern richtig eichfixiert wurde, nur zwei Polarisationsrichtungen  $\varepsilon_\mu^{1,2}$ . Wir dürfen sie räumlich transversal wählen. Im Plasma ist keine Richtung ausgezeichnet, so daß es ausreichend ist, einen bestimmten Polarisationsvektor  $\varepsilon_\mu$  auszuwählen, und  $dR$  mit Faktor Zwei zu multiplizieren.

$$dR = \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{2\varepsilon^\mu \varepsilon^\nu}{q} f_{\mu\nu}(Q) \quad (7.5)$$

mit

$$f_{\mu\nu}(Q) := \sum_{if} \frac{e^{-\beta E_i}}{Z} (2\pi)^4 \delta^4(Q - P_i + P_f) \langle i | j_\mu(0) | f \rangle \langle f | j_\nu(0) | i \rangle \quad (7.6)$$

Die Dichte  $f_{\mu\nu}$  ist das Analogon zur Dichte  $\sigma_{\mu\nu}$  aus (2.6). Anhang F bringt  $f$  in Zusammenhang mit der retardierten thermischen Photon-Selbstenergie<sup>1</sup>  $\Pi_{\mu\nu}^R$ , welche wir aus dem Matsubara-Formalismus mit der bekannten Fortsetzung  $i\omega_n \rightarrow \omega + i\varepsilon$  ermitteln können.

$$dR = \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{\varepsilon^\mu \varepsilon^\nu}{q} n_b(q) \Im \Pi_{\mu\nu}(Q_0 \rightarrow q + i\varepsilon, \vec{q}). \quad (7.7)$$

Die Gleichung (7.7) gibt die Rate in führender Ordnung einer Entwicklung in  $e$  an, ist jedoch exakt in der starken Kopplungskonstanten  $g$ .

Die Struktur der thermischen Photon-Selbstenergie ist in dieser Arbeit schon genügend diskutiert worden. Sie läßt sich zerlegen in  $\Pi_{\mu\nu} = \Pi_t A_{\mu\nu} + \Pi_\ell B_{\mu\nu}$ . Es gibt für die (abelsche) Photon-Selbstenergie keinen  $C_{\mu\nu}$ - oder  $D_{\mu\nu}$ -Anteil<sup>2</sup>. Im Produkt mit dem raumartigen

<sup>1</sup>Von hier an bezeichnet  $\Pi$  die Photon-Selbstenergie, nicht mehr die gluonische!

<sup>2</sup>Auch in der nichtabelschen QCD ist der *elektromagnetische* Strom erhalten. Also gilt  $Q^\mu \Pi_{\mu\nu}(Q) = 0$ .

Vektor  $\varepsilon_\mu$  verschwindet der  $B_{\mu\nu}$ -Term. Der einzige Beitrag kommt von  $\Pi_t$ .

$$dR = -\frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{n_b(q)}{q} \Im \Pi_t(Q_0 \rightarrow q + i\varepsilon, \vec{q}). \quad (7.8)$$

Dies ist der Ausgangspunkt für die nachfolgenden Rechnungen. Die Berechnung der Photon-Produktionsrate ist auf die Auswertung der Photon-Selbstenergie zurückgeführt. Für letztere existiert eine diagrammatische Entwicklung.

In der Literatur [52, 53, 7] findet sich eine etwas andere Version von (7.8): Anstelle von  $\Pi_t$  wird  $\Pi_g := \Pi_\mu^\mu$  verwendet. Bei der Herleitung wird in (7.5) nicht eine bestimmte Polarisationsrichtung  $\varepsilon_\mu$  ausgewählt, sondern über alle (vier) möglichen summiert. Anschließend wird  $\sum_\lambda \varepsilon_\mu^\lambda \varepsilon_\nu^\lambda = -g_{\mu\nu}$  ausgenutzt. Dabei wird jedoch übersehen, daß zum Beweis dieser Relation [54] kein Anteil von  $\Pi_{\mu\nu}$  bei  $Q^2 = 0$  divergieren darf<sup>3</sup>.

Im thermischen Fall können wir die Gefahr besonders gut sehen. Da  $Q^\mu \Pi_{\mu\nu}(Q) = 0$  und  $A_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - B_{\mu\nu} - D_{\mu\nu}$  gilt, folgt

$$2\Pi_t(Q) = \Pi_g(Q) + \frac{Q^2}{q^2} \Pi_{oo}(Q). \quad (7.9)$$

Am Lichtkegel ist  $Q^2 = 0$ , also scheint der zweite Term zu verschwinden. Allerdings darf  $\Pi_{oo}$  dann keinen Pol entwickeln, was nach den bisherigen Erfahrungen jedoch nicht ungewöhnlich ist. Somit stimmen  $\Pi_t$  und  $\Pi_g$  nicht notwendig miteinander überein.

Wohlgermerkt gibt es in der vollen Theorie weder kollineare noch infrarote Singularitäten. Sie sind durch die diversen Abschirm-Mechanismen im Plasma reguliert (z.B. Debye-Screening). Daher ist es für nichtperturbative Rechnungen erlaubt, den zweiten Term in (7.9) wegzulassen. Jedoch kann es in einer Entwicklung zu Singularitäten kommen. Die Verwendung von  $\Pi_t$  anstelle von  $\Pi_g$  ist dann als Vorsichtsmaßnahme erforderlich, um unphysikalische Divergenzen zu vermeiden.

## 7.2 Produktion harter Photonen

Baier et. al. haben die Produktionsrate harter ( $\sim T$ ) Photonen sowohl für das Gleichgewichts-Plasma [14] als auch für ein Nichtgleichgewichts-Modell [55] berechnet. Die Diagramme zur führenden Ordnung in  $g$  finden sich in Abbildung 7.1. Im Diagramm (a) ist der umlaufende Impuls weich, daher ist eine Quark-Linie resummiert. Die andere Linie sowie die Vertizes müssen nicht resummiert werden, da der äußere Impuls hart ist. In den Diagrammen (b) und (c) sind beide innere Impulse hart. Diagramme, welche nur aus einer einzigen Schleife mit hartem inneren Impuls bestehen, tragen aus kinematischen Gründen nicht bei.

Interessant an der Rechnung [14] ist die Tatsache, daß sowohl Diagramm (a) als auch die Diagramme (b) und (c) für sich genommen von  $q^*$  (dem Cutoff zwischen harter und

<sup>3</sup>Diese Gefahrenstelle wurde bei Diskussionen mit A. Rebhan entdeckt.

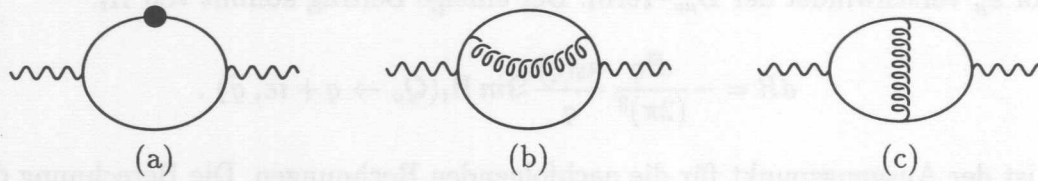


Abbildung 7.1: Die Produktion harter Photonen in führender Ordnung

weicher Skala) abhängen. Die Zweischleifer (b) und (c) würden also ohne Resummation eine IR-Divergenz enthalten. Erst in der Summe aller drei Diagramme heben sich die  $q^*$ -Abhängigkeiten weg. Dies ist ein schönes Beispiel dafür, wie die Betrachtung eines vollständigen Satzes von Diagrammen zu endlichen Ergebnissen führt.

Die  $q^*$ -Abhängigkeit des weichen Einschleifers Abb. 7.1.a ist recht einfach zu erhalten. Zur Vereinfachung der Rechnung wird trotz der oben genannten Bedenken  $\Pi_g$  statt  $\Pi_t$  ausgewertet, da es in der interessierenden Ordnung noch keine starken kollinearen Singularitäten gibt.

$$\Im \Pi_g^{1ls} = -\Im e^2 \not{P} \sum_{s=\pm} \frac{\hat{P}_s^\mu K_\mu}{D_s K^2}. \quad (7.10)$$

Nach Einführung der spektralen Dichte des Fermion-Propagators (siehe Anhang B) wird die Frequenzsumme ausgeführt. Für  $p \gg M_f$  darf man die Asymptotik (B.14) verwenden,

$$\begin{aligned} \Im \Pi_g^{1ls} &= e^2 \pi \left( n_f(q) - \frac{1}{2} \right) \int_0^{q^*} \frac{dp}{(2\pi)^2} p^2 \sum_{s=\pm} \int_{-1}^1 du \varrho_s(pu, p) \frac{1-su}{2} \\ &\approx e^2 M_f^2 \pi \left( n_f(q) - \frac{1}{2} \right) \int_{M_f}^{q^*} \frac{dp}{(2\pi)^2} \frac{1}{p} \\ &= \frac{e^2 M_f^2}{4\pi} \left( n_f(q) - \frac{1}{2} \right) \ln \left( \frac{q^*}{M_f} \right) \end{aligned} \quad (7.11)$$

Aus den Zweischleifern läßt sich die  $q^*$ -Abhängigkeit nicht so einfach herauspräparieren. In Feynman-Eichung (beide Diagramme sind eichinvariant) ist Abb. 7.1.b der einzige Beitrag. Nach Frequenzsummation und Übergang zu reellen Viererimpulsen erhält man einen Ausdruck vom Typ

$$\Im \Pi_g^{2lh} \sim e^2 g^2 C_f \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} N(p_o, l_o) (2\pi)^3 \delta(L^2) \delta(K^2) \delta(R^2) \frac{2LQ}{P^2}. \quad (7.12)$$

Dabei ist  $P$  der fermionische und  $L$  der bosonische Schleifenimpuls,  $N(x, y)$  ist eine Funktion zusammengesetzt aus diversen Bose- und Fermifunktionen sowie  $R = P - L$ ,  $K = P + Q$ ,  $Q$  ist der äußere Impuls. Der Nenner  $1/P^2$  ist dafür verantwortlich, daß die  $d^3 p$ -Integration im Infraroten eine  $q^*$ -Abhängigkeit entwickelt<sup>4</sup>. Letztere kompensiert genau diejenige aus

<sup>4</sup>Bemerkenswert ist, daß hier eine fermionische Linie für IR-Divergenzen sorgt. Üblicherweise sind Bosonen aufgrund des Verhaltens der Bosefunktion kritischer.



(7.11), so daß

$$\Im m \Pi_g^{\text{gesamt}} = \frac{e^2 M_f^2}{4\pi} \left( n_f(q) - \frac{1}{2} \right) \left[ \ln \left( \frac{T}{M_f} \right) + \mathcal{O}(1) \right]. \quad (7.13)$$

Damit erhält man eine endliche Rate ohne  $q^*$ -Abhängigkeit.

### 7.3 Produktion weicher Photonen

Zur Produktionsrate weicher Photonen zeigt die Literatur, daß bislang noch keine vollständige und divergenzfreie Rechnung gelungen ist. Der wesentliche Mangel ist das Fehlen eines zu gegebener Ordnung in  $g$  vollständigen und konsistenten Diagrammsatzes, welcher die folgenden Bedingungen erfüllt: Er muß eichinvariant und transversal sein, darf keine  $q^*$ -Abhängigkeiten im Ultravioletten oder Infraroten haben und darf natürlich keine unabgeschirmten Singularitäten enthalten. Bisherige Arbeiten behandeln offensichtlich unvollständige Sätze.

Baier et. al. [20, 56] betrachten die weichen Einschlierer aus Abbildung 7.2. Ihr Resultat ist in zweifacher Hinsicht divergent: Zum einen hängt es vom cutoff  $q^*$  ab. Die Diagramme sind für sich genommen also UV-divergent. Es wird erwartet, daß sich die  $q^*$ -Abhängigkeit analog zu Abschnitt 7.2 zusammen mit bestimmten Diagrammen mit harten inneren Impulsen weghebt. Wie sich zeigen wird, sind dazu mindestens drei harte Schleifen notwendig, welche dann natürlich zu einem vollständigen Diagrammsatz dazugehören müssen.

Zum anderen enthält Baiers Resultat eine kollineare Divergenz, welche mit dem lichtartigen äußeren Impuls  $Q^2 = 0$  zusammenhängt, und welche von den HTL-resummierten Vertizes verursacht wird. Diese Singularität kann mit den verbesserten HTL-Vertizes aus Kapitel 6 reguliert werden. Ein Satz bestehend aus Abb. 7.2 und den oben angesprochenen Dreischleifern liefert damit ein endliches Resultat.

Vor kurzem haben Aurenche et. al. [57, 58] einen weiteren Diagrammsatz (Abbildung 7.4) untersucht. Sie finden grundsätzlich die selbe Größenordnung in  $g$  wie Baier, so daß beide Sätze zu dem gesuchten vollständigen gehören werden. Zusätzlich enthalten die Diagramme am Lichtkegel lineare kollineare Singularitäten, welche nach Regularisierung die  $g$ -Ordnung explodieren lassen. In diesem Fall ist nicht die Resummation der weichen Gluon-Linien ursächlich für die Divergenz, sondern die (HTL-)Näherungen in den harten Linien. Die asymptotischen Massen führen auch hier zu einer Regularisierung.

Die beiden genannten Arbeiten werden in den folgenden zwei Abschnitten detaillierter vorgestellt und kommentiert. Die Rechnungen werden aus zwei Gründen wiederholt. Es soll getestet werden, inwiefern die Verwendung von  $\Pi_t$  in Gleichung (7.8) anstelle von  $\Pi_g$  das Verhalten der kollinearen Divergenzen ändert. Das Resultat ist in beiden Fällen negativ, die kollinearen Singularitäten bleiben unverändert erhalten. Die zweite Motivation ist die Suche nach Hinweisen, welche Diagramme einer zukünftigen Bestimmung der Photon-Produktionsrate zugrunde liegen können. Hier ist das Resultat positiv; der letzte Abschnitt dieses Kapitels enthält einen Vorschlag für einen vollständigen Diagrammsatz.

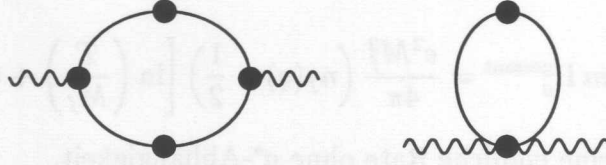


Abbildung 7.2: Die Diagrammauswahl zur Produktion weicher Photonen von Baier et. al. Die inneren Schleifenimpulse sind ebenfalls weich, und alle Linien sowie Vertizes sind resummiert.

### 7.3.1 Die Diagrammauswahl nach Baier et. al.

Baier, Peigne und Schiff verwenden die Diagramme aus Abbildung 7.2 zur Approximation der Photon-Selbstenergie  $\Pi_{\mu\nu}$  in Gleichung (7.8). Beide Diagramme sind zuvor erfolgreich von Braaten, Pisarski und Yuan [13] zur Bestimmung der Produktionsrate virtueller Photonen (bzw. realer Dileptonen) angewendet worden. Sie sind eichinvariant sowie transversal, wie man mittels Ward-Identitäten schnell sieht, und somit eine vernünftige Approximation.

$$\Pi_{\mu\nu}^{\text{Baier}}(Q) = \Pi_{\mu\nu}^{\text{Tad}}(Q) + \Pi_{\mu\nu}^{\text{Loop}}(Q) \quad (7.14)$$

mit

$$\Pi_{\mu\nu}^{\text{Tad}} = e^2 \sum_P {}^*S^{ab}(P) {}^*\Gamma_{\mu\nu}^{ba}(P, P; Q, -Q) \quad (7.15)$$

$$\Pi_{\mu\nu}^{\text{Loop}} = e^2 \sum_P {}^*\Gamma_{\mu}^{ba}(P, P+Q; -Q) {}^*S^{ad}(P) {}^*\Gamma_{\nu}^{dc}(P+Q, P; Q) {}^*S^{cb}(P+Q) \quad (7.16)$$

wobei  ${}^*S$  der resummierte Fermion-Propagator (Anhang B) und  ${}^*\Gamma$  die resummierten Vertizes sind,

$${}^*\Gamma_{\mu}^{ab}(Q, K; P) = \gamma_{\nu}^{ab} \left\{ g_{\mu}^{\nu} + M_f^2 \int_{\Omega} \frac{Y_{\mu} Y^{\nu}}{(YK)(YQ)} \right\} \quad (7.17)$$

$${}^*\Gamma_{\mu\nu}^{ab}(P, P; Q, -Q) = \gamma_{\rho}^{ab} M_f^2 \int_{\Omega} \frac{Y_{\mu} Y_{\nu} Y^{\rho}}{(YQ)^2} \left\{ \frac{2}{YP} + \frac{1}{Y(Q-P)} - \frac{1}{Y(Q+P)} \right\} \quad (7.18)$$

Wie bisher ist  $Q$  der äußere Impuls, über  $P$  wird summiert und  $K = Q - P$ . Beide Impulse  $Q$  und  $P$  seien weich, also  $\sim gT \ll T$ . Damit dies sichergestellt werden kann, benötigt die räumliche  $d^3p$ -Integration einen UV-cuttoff  $gT \ll q^* \ll T$ .

Baier bestimmt die Spur  $\Pi_{\mu}{}^{\mu}(Q)$ . Dabei verschwindet  $\Pi^{\text{Tad}}$ , denn  $Y^2 = 0$ . Diese Vereinfachung fällt bei der hier bevorzugten Spur  $\Pi_t$  leider weg. Jedoch stellt man bei der Auswertung von  $\Pi_t$  fest, daß die oben erwähnte Abhängigkeit von  $q^*$  nicht von beiden Anteilen herrührt, sondern allein von  $\Pi_t^{\text{Tad}}$  [59]. Bei Beschränkung auf den divergenten Anteil ist die neu vorgeschlagene Spurbildung somit sogar einfacher als die bekannte.

Nach Frequenzsumme und  $\gamma$ -Spurbildung ist

$$\Im \Pi_t^{\text{Tad}} = -e^2 M_f^2 \frac{\pi\omega}{q^2 T} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{p} \int_{\Omega} \frac{(\vec{e}\vec{q})^2 - q^2}{(\omega - \vec{e}\vec{q})^2} \sum_{s=\pm} \rho_s(\omega - \vec{e}\vec{k}, p)(p - s\vec{e}\vec{p}). \quad (7.19)$$

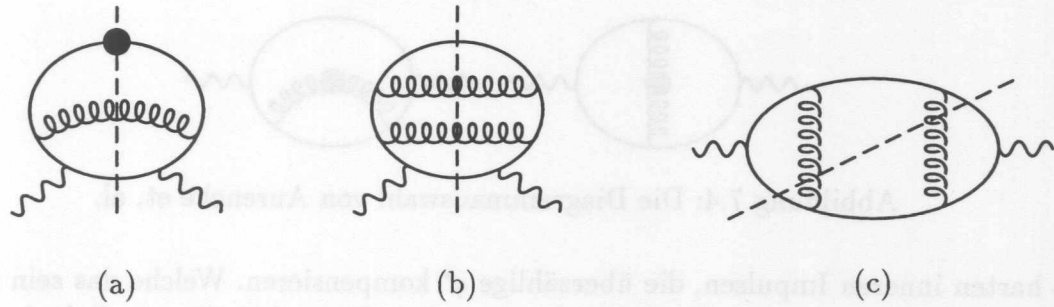


Abbildung 7.3: „Aufgeblasene“ weiche Einschleifer. Die gestrichelten Linien deuten die Schnitte an, welche zu den elementaren physikalischen Prozessen führen.

Das Winkelintegral  $\int_{\Omega}$  des resummierten Vertex enthält für  $\omega = q$  eine logarithmische Singularität. Den führenden Anteil findet man in dem Bereich  $M_f < p < q^*$ . Dort darf die asymptotischen Dichte (B.14) verwendet werden. Die Aufteilung nach Pol- und Schnitt-Anteil der Dichte in  $\Im m \Pi^{\text{Tad}} = \Pi^{\delta} + \Pi^{\ominus}$  liefert

$$\Pi_t^{\ominus} = 2 \frac{e^2 M_f^4 \pi \omega}{q^2 T} \ln \left( \frac{\omega + q}{\omega - q} \right) \int_{M_f}^{q^*} \frac{dp}{(2\pi)^2 p} \quad (7.20)$$

$$\Pi_t^{\delta} = \frac{e^2 M_f^2 \pi \omega}{q^2 T} \int_{M_f}^{q^*} \frac{dp}{(2\pi)^2} \left\{ q - \frac{M_f^2}{p} \ln \left( \frac{2pq}{M_f^2} \right) \right\} \quad (7.21)$$

Beide Anteile sind abhängig von  $q^*$ , zusätzlich ist  $\Pi_t^{\ominus}$  bei  $\omega = q$  kollinear divergent.  $\Pi_t^{\delta}$  hängt zwar sehr stark (linear) von  $q^*$  ab, jedoch verschwinden diese Terme zusammen mit  $\Pi_t^{\text{Loop}}$  [59].  $\Pi_t^{\ominus}$  enthält den einzigen nicht-verschwindenden Beitrag zur logarithmisch führenden Ordnung,

$$\Im m \Pi_t^{\text{Baier}} = \frac{e^2 M_f^4}{qT} \frac{1}{2\pi} \ln \left( \frac{q^*}{M_f} \right) \left\{ \ln \left( \frac{4q^2}{Q^2} \right) + \mathcal{O}(1) \right\}. \quad (7.22)$$

Das Resultat von Baier enthält also eine logarithmische Abhängigkeit von  $q^*$  sowie eine logarithmische Singularität für  $Q^2 \rightarrow 0$ .

Wir wiederholen die Betrachtung der transversalen Spur von (7.15) mit dem verbesserten Vertex (6.26) anstelle von (7.18), beschränken uns jedoch auf den Anteil  $\Pi^{\ominus}$ . Es kann nun keine kollineare Singularität mehr geben, denn der Nenner  $(YQ)^2$  verschwindet auch bei  $Q^2 = 0$  nicht. Nach etwas Rechnung erhalten wir

$$\Im m \Pi_t^{\text{Baier,neu}} = \frac{e^2 M_f^4}{qT} \frac{1}{2\pi} \ln \left( \frac{q^*}{M_f} \right) \left\{ \ln \left( \frac{4T^2}{M_{\infty}^2} \right) + \mathcal{O}(1) \right\}. \quad (7.23)$$

Der singuläre Logarithmus  $\ln(q^2/Q^2)$  aus (7.21) wird also durch den endlichen Term  $\ln(T^2/M_{\infty}^2)$  ersetzt.

Dagegen bleibt die  $q^*$ -Abhängigkeit bestehen. Sie zeigt deutlich, daß der Diagrammsatz aus Abbildung 7.2 noch nicht der vollständige sein kann. Es gibt sicherlich Diagramme



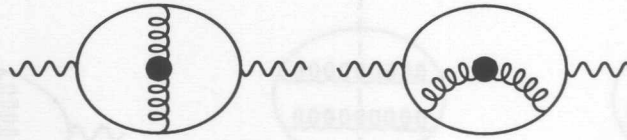


Abbildung 7.4: Die Diagrammauswahl von Aurenche et. al.

mit harten inneren Impulsen, die überzählige  $q^*$  kompensieren. Welche das sein müssen, kann aus der Rechnung zu (7.22) abgelesen werden. Dazu „bläst“ man diejenigen HTL-resummierten Linien und Vertizes auf, welche zu den kollinearen Singularitäten geführt haben, siehe Abbildung 7.3. Im vorliegenden Fall wird der HTL-Vierervertex durch die ursprüngliche harte Schleife ersetzt, was von Abb. 7.2 auf Abb. 7.3.a führt. Im weichen Propagator gab der Pol-Anteil der spektralen Dichte keine  $q^*$ -Abhängigkeit, sondern allein der Schnitt-Anteil. Somit entwickelt auch die ehemals weiche Quark-Linie für harte Impulse einen weiteren Schleifeneinsatz, Abb. 7.3.b. Die gesuchten kompensierenden Diagramme enthalten also mindestens drei harte Schleifen.

Zum selben Ergebnis kommt man, wenn man die Rechnung von Baier nachvollzieht [59], also die Spur  $\Pi_{\mu}^{\mu}$  bestimmt. Hier resultiert der einzige Beitrag aus dem Term, in welchem bei beiden Dreiervertizes aus  $\Pi^{\text{Loop}}$  die HTL-Anteile und bei den Quark-Linien die Pol-Anteile der Dichten mitzunehmen sind. Dies führt für harte Impulse auf das Diagramm 7.3.c, welches ebenfalls einen harten Dreischleifer darstellt.

### 7.3.2 Der „enhancement“-Mechanismus von Aurenche et. al.

Aurenche, Gelis, Kobes und Petitgirard [57, 58] haben kürzlich einen weiteren Diagrammsatz untersucht, siehe Abbildung 7.4. Er besteht aus Zweischleifern mit einem harten ( $P$ ) und einem weichen ( $L$ ) inneren Impuls, wobei der weiche durch eine bosonische Gluon-Linie läuft. Mit einer einfachen Abschätzung kann man sehen, daß sie ebenfalls zur Größenordnung  $e^2 g^3 T^2$  beitragen können: Die harten fermionischen Linien liefern jeweils ein  $1/P$ , und die weiche bosonische Linie trägt ein  $1/L^2$  bei. Zusätzlich sorgt die Bosefunktion der weichen Linie für ein weiteres  $1/g$ . Also werden sich die Diagramme wie  $\Pi \sim e^2 g^2 \sum_{P,L} \frac{1}{P^4 L^2} \frac{1}{g} \sim e^2 g^3 T^2$  verhalten. Aurenche et. al. hofften, mittels der neuen Diagramme eventuell die kollinearen Divergenzen der bekannten kompensieren zu können. Statt dessen fanden sie weitaus stärkere Singularitäten.

Die neuen Diagramme sind eichinvariant und transversal, wie man mittels Ward-Identitäten sieht. Zu ihrer weiteren Auswertung wird der Startpunkt aus [58] übernommen. Die Spur über die Viererindizes sowie die Spur über die Gamma-Matrizen wird erneut gebildet. Dabei hilft das Computerprogramm FORM [60]. Die führenden Terme sind

$$\Im \Pi_i^{\text{Aur}}(Q) = e^2 g^2 T C_f \int \frac{d^4 P}{(2\pi)^4} q n'(p_0) \int \frac{d^4 L}{(2\pi)^4} \frac{\rho(l_0, l)}{l_0} (2\pi)^2 \delta(P^2) \delta[(P+Q+L)^2] \left\{ \frac{4L^2 p^2}{(P+Q)^2 (P+L)^2} - \frac{8p^4 Q^2 / q^2}{(P+Q)^4} - \frac{8p^4 Q^2 / q^2}{(P+Q)^2 (P+L)^2} \right\}. \quad (7.24)$$

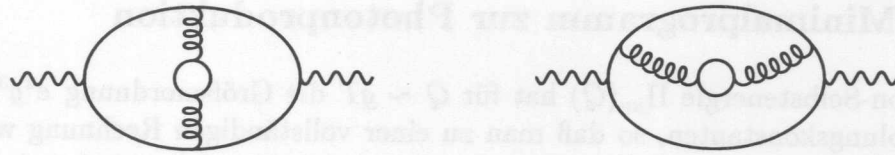


Abbildung 7.5: Harte Dreischleifer, welche ebenfalls den „enhancement“-Mechanismus enthalten könnten.

Die Nenner in (7.24) sind aufgrund der Deltafunktionen sowie  $Q^2 = 0$  keine Quadrate von harten Impulsen. Vielmehr gilt

$$(P + Q)^2 = 2PQ \quad \text{sowie} \quad (P + L)^2 = -2PQ - 2LQ. \quad (7.25)$$

Führt man die üblichen HTL-Näherungen durch (d.h.  $LQ \ll PQ$ ), erhält man Nenner  $\sim (PQ)^2$ . Dies hat lineare kollineare Singularitäten zur Folge, welche sich bei  $PQ = p\omega - \vec{p} \cdot \vec{q}$  in den Endpunkten der Winkelintegration über  $\vec{p} \cdot \vec{q}/pq$  finden.

Aurenche et. al. haben erkannt, daß die Näherung  $LQ \ll PQ$  nicht mehr erlaubt ist, wenn der Punkt  $PQ = 0$  wichtig wird. Sie führen die Integrationen in (7.24) ohne die angesprochene Näherung aus. Im Resultat finden sie statt der linearen kollinearen Singularität ein starkes Anwachsen („enhancement“)  $\sim 1/g^2$  des ersten Terms der geschweiften Klammer zuzüglich einer logarithmischen kollinearen Singularität. Letztere läßt sich durch Verwendung der mit  $M_\infty^2$  resummierten Propagatoren in einen Logarithmus  $\ln(g)$  wandeln. Ihr Resultat hat dann die Größenordnung

$$\Im m \Pi_t^{\text{Aur}} \sim e^2 g^3 T^2 \frac{1}{g^2} \ln \left( \frac{1}{g} \right) = e^2 g T^2 \ln \left( \frac{1}{g} \right) \quad (7.26)$$

Es ist also sehr viel größer als dasjenige von Baier et. al. Die Vermutung liegt nahe, daß der Diagrammsatz aus Abbildung 7.4 der gesuchte vollständige Satz der führenden Ordnung sei.

Das Resultat von Aurenche et. al. ist insbesondere unabhängig von  $q^*$ . Dennoch kann es Diagramme mit harten Impulsen geben, welche ebenfalls eine Art „enhancement“-Mechanismus enthalten. Kandidaten sind in Abbildung 7.5 gezeichnet. Sie werden zwar keine starke kollineare Singularität entwickeln, denn der Impuls  $L$  der Gluon-Linie ist nicht weich. Dennoch sollte das Enhancement für kleine  $L$  zu spüren sein, wahrscheinlich als lineare  $q^*$ -Abhängigkeit im IR der  $L$ -Integration. Möglicherweise kann sich hier eine Vermutung von Grandou [61] bestätigen, daß sich IR und kollineare Singularitäten kompensieren können.

Der „enhancement“-Mechanismus ist kein Grund, an der Konsistenz der in dieser Arbeit entwickelten Störungstheorie zu zweifeln. Die asymptotische Masse erfüllt ihre Aufgabe sogar ausgezeichnet, schließlich reguliert sie die verbliebene kollineare Singularität in (7.26). Wir haben im Fall der Plasmon-Dämpfung gesehen, daß der Imaginärteil der Gluon-Selbstenergie stark  $\sim 1/\varepsilon^2$  in Lichtkegelnähe wachsen durfte, ohne die Konsistenz der Störungsreihe zu gefährden. Im vorliegenden Fall scheint ein Konsistenzschema zu fehlen, welches entweder das „enhancement“ erklären kann oder zeigt, daß (7.26) tatsächlich die führende Ordnung liefert.

### 7.3.3 Minimalprogramm zur Photonproduktion

Die Photon-Selbstenergie  $\Pi_{\mu\nu}(Q)$  hat für  $Q \sim gT$  die Größenordnung  $e^2 g^3 T^2$ . Das sind fünf Kopplungskonstanten, so daß man zu einer vollständigen Rechnung wahrscheinlich Diagramme mit bis zu drei Schleifen auswerten muß. Das folgende ist ein Minimalprogramm. Weitere Viel-Schleifer könnten natürlich bei entsprechend ungünstigen Überschneidungen von Singularitäten ebenfalls die betrachtete Ordnung erlangen, dies ist jedoch erfahrungsgemäß sehr unwahrscheinlich.

- Einschleifer mit hartem inneren Impuls tragen nicht bei, denn die Streuprozesse, welche man durch Zerschneiden der Selbstenergie erhält, sind kinematisch verboten.
- Einschleifer mit weichem Impuls sind ausgewertet, siehe Abschnitt 7.3.1.
- Zweischleifer mit zwei harten Impulsen können beitragen. Nach Abzählen der Kopplungen haben sie zwar die Ordnung  $e^2 g^2 T^2$ , jedoch ist der Imaginärteil um eine Ordnung in  $g$  kleiner. Die zugehörigen Streuprozesse sind „fast“ verboten, nur in einem kleinen Impulsbereich dürfen sie beitragen, siehe (7.13):  $(n_f(q) - \frac{1}{2}) \sim q$  für  $q \rightarrow 0$ .
- Zweischleifer mit einem harten und einem weichen Impuls tragen bei, siehe Abschnitt 7.3.2. Insbesondere diejenigen mit einer weichen bosonischen Linie. Allerdings müssen auch diejenigen mit weicher fermionischer Linie gerechnet werden.
- Dreischleifer mit harten inneren Linien tragen bei, siehe Abschnitt 7.3.1. Nach Abzählen der Kopplungen sind sie von der Ordnung  $e^2 g^4 T^2$ , sie müssen also durch einen noch unbekanntem Mechanismus um ein  $g$  wachsen.
- Bei Verwendung der effektiven Wirkung für weiche Impulse dürfen die entsprechenden Counter-Terme nicht vergessen werden.

Bei allen vorgeschlagenen Diagrammklassen sollten die HTL-Näherungen streng eingehalten werden. Nur in diesem Falle ist eine konsistente Störungsrechnung bekannt. Es gibt genügend Hoffnung, daß sie mit Hilfe unserer verbesserten effektiven Wirkung auf Phänomene bei lichtartigen Impulsen verallgemeinert werden kann.

Insbesondere die Auswertung der Dreischleifer ist spannend. Man weiß aus zahlreichen Rechnungen, daß hier eine Vielzahl von Singularitäten im Spiel sein können. Sehr interessant scheint in diesem Zusammenhang die Vermutung [61], daß sich IR-Singularitäten (bzw.  $q^*$ -Abhängigkeiten harter Diagramme) zusammen mit kollinearen Singularitäten kompensieren können. Diese Möglichkeit ist bislang von niemandem für die Photonproduktionsrate ausprobiert worden. Eine explizite Rechnung, die alle Singularitäten der Dreischleifer herauspräpariert, ist dringend notwendig.



## Kapitel 8

### Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Aufstellung einer konsistenten Störungstheorie zur Beschreibung eines Quark-Gluon-Plasmas. Wir haben gesehen, daß die führenden Ordnungen der Selbstenergien von Gluon, Quark und Photon für lichtartige äußere Impulse mit den herkömmlichen Methoden nicht vollständig ermittelt werden können. Vielmehr sind Beiträge von thermischen Massen der Teilchen im Plasma zu beachten. Andernfalls bricht die Störungsreihe aufgrund von kollinearen Singularitäten zusammen.

Eine Verbesserung des Resummationsverfahrens von Braaten und Pisarski wird vorgeschlagen. Die zusätzliche Resummation von bestimmten asymptotischen Massen berücksichtigt die neuen Beiträge zu den Selbstenergien. Es gelingt, das verbesserte Verfahren in die elegante Form einer effektiven Wirkung zu bringen. Die Herleitung der Wirkung ist in enger Anlehnung an jene von Braaten und Pisarski sowie Frenkel und Taylor möglich. Lediglich die Bedeutungen der Formelbuchstaben sind neu festzulegen. Die hier vorgestellte verallgemeinerte Wirkung ist für lichtartige Impulse wohldefiniert, und sie ist frei von kollinearen Singularitäten.

Das Wohlverhalten der Dispersionskurve des Plasmons dient als Test der neuen Störungsreihe. Dazu wird die führende Ordnung und die erste Korrektur der Gluon-Selbstenergie in Lichtkegelnähe ausgewertet. Es wird gezeigt, daß sie gewisse Konsistenzbedingungen erfüllt. Die Umstrukturierung der Störungsentwicklung ist somit gelungen. Nebenresultat der Rechnung ist die Plasmon-Frequenz und die Plasmon-Dämpfung am Lichtkegel einschließlich der ersten Ordnung in der Kopplung.

Schließlich wird die neue Störungsreihe zur Neubestimmung der Produktionsrate weicher Photonen angewendet. Hier waren die bisherigen Rechnungen ebenfalls mit Schwierigkeiten durch kollineare Singularitäten belastet. In den Zugängen von Baier et. al. sowie von Aurenche et. al. kann die Resummation der asymptotischen Masse jeweils die divergenten Resultate durch endliche ersetzen. Jedoch wird deutlich, daß für die Photon-Produktionsrate noch kein Schema existiert, welches zu gegebener Ordnung die Auswahl eines vollständigen Diagrammsatzes ermöglicht. Bevor dies nicht gelingt, sind die vorliegenden Resultate nur erste Schritte auf einem längeren Weg.

# Kapitel 8 Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Aufstellung einer konsistenten Störungstheorie zur Beschreibung eines Quark-Gluon-Plasmas. Wir haben gesehen, dass die folgenden Überlegungen der Selbstenergie von Gluon, Quark und Photon für Lichtstreuung in einem Plasma mit dem herkömmlichen Methoden nicht vollständig erfüllt werden können. Vielmehr sind Beiträge von thermischen Klassen der Teilchen im Plasma zu beachten. Andererseits bricht die Störungstheorie aufgrund von kollektiven Störungsarten zusammen.

Eine Verbesserung des Renormierungsverfahrens von Hirschen und Parnis wird vorgeschlagen. Die zusätzliche Renormierung von bestimmten asymptotischen Massen berücksichtigt die neuen Beiträge zu den Selbstenergien. Es gelingt, das verbesserte Verfahren in die elegante Form einer effektiven Wirkung zu bringen. Die Herleitung der Wirkung ist in enger Ähnlichkeit zu jener von Hirschen und Parnis sowie Hirschen und Taylor möglich. Lediglich die Herleitungen der Formfaktoren sind neu festzulegen. Die hier vorgestellte verfeinerte Wirkung ist für Lichtstreuung in einem Plasma wohldefiniert, und sie ist bei von kollektiven Störungsarten.

Das Wohlverhalten der Dispersionskurve des Plasmons dient als Test der neuen Störungstheorie. Dazu wird die führende Ordnung und die erste Korrektur der Gluon-Selbstenergie in Lichtstreuung ausgerechnet. Es wird gezeigt, dass die gewisse Konsistenzbedingungen erfüllt. Die Unstimmigkeiten der Störungstheorie sind somit gelöst. Nebenher ist die Plasmone-Frequenz und die Fermion-Dämpfung am Lichtwellenlängen der ersten Ordnung in der Koppelung.

Schließlich wird die neue Störungstheorie zur Herleitung der Produktionsrate von Photonen angewendet. Hier waren die bisherigen Rechnungen ebenfalls mit Schwierigkeiten durch höhere Störungsarten belastet. In den Vorlesungen von Hirschen et al. wie von Arnsperger et al. kann die Herleitung der asymptotischen Masse jeweils die divergenten Beiträge durch endliche ersetzen. Jedoch wird deutlich, dass für die Produktionsrate noch kein Schema existiert, welches zu korrekter Ordnung die Auswahl eines vollständigen Diagrammsatzes ermöglicht. Bevor dies nicht gelingt, sind die folgenden Beiträge zur ersten Schritte auf einem längeren Weg.

# Anhang A

## Der Eichboson-Propagator

Der resummierte Propagator eines weichen Eichbosons ist [62]

$$*G_{\mu\nu}(Q) = \Delta_t(Q)A_{\mu\nu}(Q) + \Delta_\ell(Q)B_{\mu\nu}(Q) + \alpha\Delta_o(Q)D_{\mu\nu}(Q) \quad (\text{A.1})$$

mit  $\Delta_o(Q) = 1/Q^2$ ,  $\Delta_{t,\ell} = [Q^2 - \Pi_{t,\ell}(Q)]^{-1}$  sowie

$$\Pi_t(Q) = \frac{3}{2}m^2 \left\{ z^2 - \frac{1}{2}z(z^2 - 1) \ln \left( \frac{z+1}{z-1} \right) \right\} \quad (\text{A.2})$$

$$\Pi_\ell(Q) = 3m^2(1 - z^2) \left\{ 1 - \frac{1}{2}z \ln \left( \frac{z+1}{z-1} \right) \right\} . \quad (\text{A.3})$$

und  $z = Q_o/q$ . Die Projektoren in (A.1) entstammen der Matrixbasis

$$A = g - B - D \quad , \quad B = \frac{V \circ V}{V^2} \quad , \quad C = \frac{V \circ Q + Q \circ V}{\sqrt{2} Q^2 q} \quad \text{und} \quad D = \frac{Q \circ Q}{Q^2} \quad (\text{A.4})$$

mit  $V = Q^2 U - (UQ)Q$  und  $U = (1, \vec{0})$ .

Jeder der beiden Nenner liefert eine positive Lösung  $\omega_{t,\ell}(q)$  von

$$\omega_t^2 - q^2 = \Pi_t(\omega_t, q) \quad \text{bzw.} \quad \omega_\ell^2 - q^2 = \Pi_\ell(\omega_\ell, q) . \quad (\text{A.5})$$

Sie haben die Asymptotiken

$$\begin{aligned} \omega_\ell &= m + \frac{3}{10} \frac{q^2}{m} - \frac{3}{280} \frac{q^4}{m^3} + \mathcal{O}(q^6) \\ \omega_t &= m + \frac{3}{5} \frac{q^2}{m} - \frac{9}{35} \frac{q^4}{m^3} + \mathcal{O}(q^6) \end{aligned} \quad \text{für } q \rightarrow 0 \quad (\text{A.6})$$

sowie

$$\begin{aligned} \omega_\ell &= q + 2q e^{\frac{-3q^2}{2m^2}} \\ \omega_t &= q + \frac{3m^2}{4q} \end{aligned} \quad \text{für } q \rightarrow \infty . \quad (\text{A.7})$$

Die Dispersionskurve  $\omega_t(q)$  beschreibt das Gluon und  $\omega_\ell(q)$  beschreibt das 'Plasmon'.



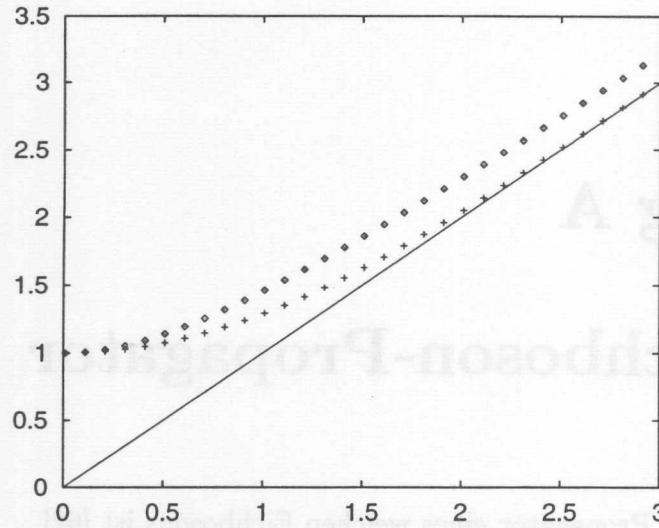


Abbildung A.1: Die zwei bosonischen Dispersionskurven. Die obere ist das Photon, die untere das Plasmon.

Die  $Q_o$ -Abhängigkeit der  $\Delta_{t,\ell}$  kann mittels spektraler Dichten expliziert werden [63]

$$\Delta_{t,\ell}(Q_o, q) = \int dx \frac{\rho_{t,\ell}(x, q)}{Q_o - x}. \quad (\text{A.8})$$

Die Dichten haben einen Pol- und einen Schnittbeitrag,  $\rho = \rho^{\text{pol}} + \rho^{\text{cut}}$ .

$$\rho_\ell^{\text{pol}} = \frac{\omega_\ell}{3m^2 - \omega_\ell^2 + q^2} [\delta(x - \omega_\ell) - \delta(x + \omega_\ell)] \quad (\text{A.9})$$

$$\rho_t^{\text{pol}} = \frac{\omega_t(\omega_t^2 - q^2)}{3m^2\omega_t^2 - (\omega_t^2 - q^2)^2} [\delta(x - \omega_t) - \delta(x + \omega_t)] \quad (\text{A.10})$$

$$\rho_\ell^{\text{cut}} = \frac{1}{m^2} \frac{-6z}{1 - z^2} \frac{\Theta(1 - z^2)}{\left[2\frac{q^2}{m^2} + 6 - 3z \ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)\right]^2 + 9\pi^2 z^2} \quad (\text{A.11})$$

$$\rho_t^{\text{cut}} = \frac{1}{m^2} \frac{12z}{1 - z^2} \frac{\Theta(1 - z^2)}{\left[4\frac{q^2}{m^2} + 6\frac{z^2}{1-z^2} + 3z \ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)\right]^2 + 9\pi^2 z^2} \quad (\text{A.12})$$

mit  $z = x/q$ .

Für die Dichten gelten diverse Summenregeln. Man erhält sie aus (A.8), indem man die Asymptotiken  $Q_o \rightarrow 0$  und  $Q_o \rightarrow \infty$  bestimmt. Die wichtigsten Regeln sind

$$\int dx \frac{\rho_t(x, q)}{x} = \frac{1}{q^2} \quad (\text{A.13}) \quad \int dx \frac{\rho_\ell(x, q)}{x} = \frac{1}{3m^2 + q^2} \quad (\text{A.15})$$

$$\int dx x \rho_{t,\ell}(x, q) = 1 \quad (\text{A.14}) \quad \int dx x^3 \rho_{t,\ell}(x, q) = m^2 + q^2. \quad (\text{A.16})$$

## Anhang B

### Der Fermion-Propagator

Der resummierte Propagator eines weichen Fermion ist [64]

$$*S(Q) = -\frac{(1+a)Q_o\gamma_o - (1+b)\vec{q}\vec{\gamma}}{D_+D_-} \quad (\text{B.1})$$

mit  $D_{\pm}(Q_o, q) = (1+a)Q_o \mp (1+b)q$  (Beachte die VZ!)

$$a = -\frac{M_f^2}{2qQ_o} \ln\left(\frac{z+1}{z-1}\right), \quad b = \frac{M_f^2}{q^2} \left\{ 1 - \frac{1}{2}z \ln\left(\frac{z+1}{z-1}\right) \right\} \quad (\text{B.2})$$

und  $z = Q_o/q$  sowie  $M_f = \frac{1}{8}g^2C_fT^2$ . Er läßt sich zerlegen in

$$*S(Q) = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{\hat{Q}_+}{D_+} + \frac{\hat{Q}_-}{D_-} \right\} \quad (\text{B.3})$$

mit  $\hat{Q}_{\pm} = (1, \pm\vec{q}/q)$ . Jeder der beiden Nenner hat eine positive Lösung  $\omega_{\pm}(q)$  zu positivem  $q$  von

$$D_{\pm}(\omega_{\pm}, q) = 0. \quad (\text{B.4})$$

Da  $D_{\pm}(\omega, q) = -D_{\mp}(-\omega, q)$  gilt ebenso  $D_{\pm}(-\omega_{\mp}, q) = 0$ . Die Frequenzen haben folgende Asymptotiken:

$$\omega_{\pm} = M_f \pm \frac{1}{3}q + \mathcal{O}(q^2) \quad \text{für } q \rightarrow 0 \quad (\text{B.5})$$

und

$$\begin{aligned} \omega_+ &= q + \frac{M_f^2}{q} + \frac{M_f^4}{2q^3} \ln\left(\frac{M_f^2}{2q^2}\right) \\ \omega_- &= q + 2qe^{-\frac{2q^2}{M_f^2}} \end{aligned} \quad \text{für } q \rightarrow \infty. \quad (\text{B.6})$$

Die Dispersionskurve  $\omega_+(q)$  beschreibt das quark und  $\omega_-(q)$  das 'Plasmino'.

Die  $Q_o$ -Abhängigkeit der  $D_{\pm}$  kann mittels spektraler Dichten expliziert werden [65]

$$\frac{1}{D_{\pm}(Q_o, q)} = \int dx \frac{\rho_{\pm}(x, q)}{Q_o - x}. \quad (\text{B.7})$$

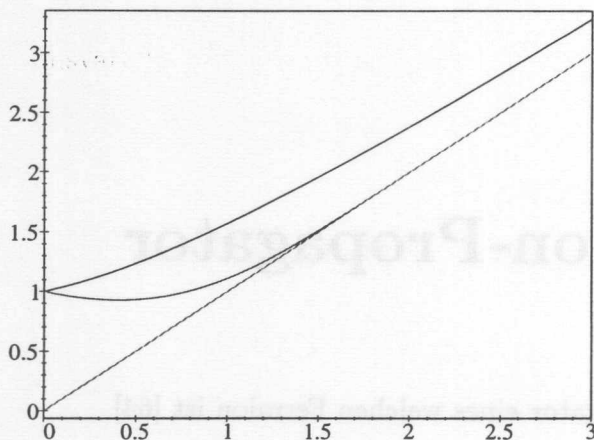


Abbildung B.1: Die zwei fermionischen Dispersionskurven. Die obere ist das quark, die untere das Plasmino.

Die Dichten haben einen Pol- und einen Cutbeitrag  $\rho = \rho^{\text{pol}} + \rho^{\text{cut}}$ .

$$\rho_+^{\text{pol}}(x, q) = \frac{x^2 - q^2}{2M_f^2} [\delta(x - \omega_+(q)) + \delta(x + \omega_-(q))] \quad (\text{B.8})$$

$$\rho_+^{\text{cut}}(x, q) = \frac{1}{q} \frac{2q^2}{M_f^2(1-z)} \frac{\Theta(1-z^2)}{\left[ \frac{2q^2}{M_f^2} + \frac{2}{1-z} + \ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right) \right]^2 + \pi^2} \quad (\text{B.9})$$

und  $\rho_-(x, q) = \rho_+(-x, q)$ . Die Vorfaktoren der Deltafunktionen heißen Residuen der jeweiligen Anregung,  $r_{\pm}(q) = (\omega_{\pm}^2(q) - q^2)/2M_f^2$ .

Für die Dichten gelten diverse Summenregeln. Man erhält sie aus (B.7), indem man die Asymptotiken  $Q_0 \rightarrow 0$  und  $Q_0 \rightarrow \infty$  bestimmt. Die wichtigsten Regeln sind:

$$\int dx \rho_+(x, q) = 1 \quad (\text{B.10}) \quad \int dx x \rho_+(x, q) = q \quad (\text{B.12})$$

$$\int dx x^2 \rho_+(x, q) = q^2 + M_f^2 \quad (\text{B.11}) \quad \int dx \frac{1}{x} \rho_+(x, q) = \frac{q}{q^2 + M_f^2} \cdot (\text{B.13})$$

Für große  $q$  verschwindet das Residuum des Plasminos  $r_-(q)$ , da sich  $\omega_-(q)$  exponentiell dem Lichtkegel nähert. Das Residuum  $r_+(q)$  des quark wird Eins, was die Namensgebung 'quark' rechtfertigt. Die cut-parts verschwinden schön zügig, allerdings entwickeln sie am Lichtkegel eine gefährlich große Spitze. Folgendes  $\rho^\infty$  enthält alles wichtige:

$$\rho_s^{\text{cut}}(x, q) \rightarrow \frac{M_f^2}{2q^2} \frac{1}{q - sx + M_f^2/q} = \frac{M_f^2}{2q^2} \frac{1}{\omega_+(q) - sx} \quad \text{für } q \gg M_f. \quad (\text{B.14})$$



## Anhang C

### Die Korrektur $\delta\Pi$

Dieser Anhang enthält ein paar wichtige Formeln zur Korrektur der Gluon-Selbstenergie  $\delta\Pi$ . Für weitere Details siehe [22] und [37].

Die Korrektur zur Gluon-Selbstenergie ist in (2.42) gegeben. Die Summation über die Vierer-Indizes wird ausgeführt. Wann immer ein Produkt  $P^\mu \delta\Gamma_{\mu\nu\rho}$  entsteht, können die Ward-Identitäten (2.31) ausgenutzt werden. Die so entstehenden Selbstenergien im Nenner werden entweder via z.B.  $\Delta_\ell \Pi_\ell(P) = -1 + P^2 \Delta_\ell$  gegen Propagatoren gekürzt, oder mit Hilfe der Massenschalen-Bedingung  $\Pi_\ell(Q) = Q^2$  eliminiert. Man erhält auf diese Weise

$$\delta\Pi_{oo} = g^2 N \sum \left( c_o + \Delta_\ell^- \Delta_\ell c_{\ell\ell} + \Delta_\ell^- \Delta_t c_{t\ell} + \Delta_t^- \Delta_t c_{tt} \right) \quad (\text{C.1})$$

mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned} c_o &= -2\Delta_o - 4\Delta_o^- \Delta_o p^2 \\ c_{\ell\ell} &= \frac{P^2 K^2}{2p^2 k^2} \mathcal{X}^2 + \frac{1}{4} \mathcal{W} \left( \frac{K^2}{k^2} \delta_\ell - \frac{P^2}{p^2} \delta_\ell^- \right) \\ c_{t\ell} &= -\frac{P^2 K^2}{p^2 k^2} \mathcal{X}^2 - \frac{K^2}{k^2} \mathcal{Y}^2 + \delta_\ell^- \frac{P^2}{2p^2} \mathcal{W} \\ c_{tt} &= \frac{P^2 K^2}{2p^2 k^2} \mathcal{X}^2 + \frac{K^2}{2k^2} \mathcal{Y}^2 + \frac{P^2}{2p^2} \mathcal{Z}^2 + \frac{1}{2} \mathcal{Z}^2 + \frac{P_o K_o}{P^2 K^2} \delta_\ell^- \delta_\ell - \frac{3\delta_t}{2} - \frac{3\delta_t^-}{2} \end{aligned}$$

sowie

$$\delta_t \equiv P^2 - \Pi_t(P) \quad , \quad \delta_\ell \equiv P^2 - \Pi_\ell(P) = 3P^2 - 3m^2 - 2\delta_t \quad (\text{C.2})$$

Natürlich kann (C.1) sofort via  $\Delta\delta = 1$  weiter vereinfacht werden. Die HTL-Vertex-Zusätze finden sich in

$$\mathcal{W} = \delta\Gamma_{oooo} \quad , \quad \mathcal{X} = \delta\Gamma_{ooo} \quad (\text{C.3})$$

$$\mathcal{Y}^2 = \delta\Gamma_{oo\mu} \delta\Gamma_{oo}{}^\mu \quad , \quad \mathcal{Z}^2 = \delta\Gamma_{o\mu\nu} \delta\Gamma_o{}^{\mu\nu} \quad (\text{C.4})$$

Die Impulsargumente der Vertizes sind  $(Q, -Q, -P, P)$  bzw.  $(Q, -K, -P)$ . Die gesternt Versionen sind die entsprechenden Bildungen mit den vollen Vertizes,

$$\begin{aligned} {}^*\mathcal{Y}^2 &= {}^*\Gamma_{oo\mu} {}^*\Gamma_{oo}{}^\mu \\ &= \mathcal{Y}^2 + (2P_o - 4Q_o) \mathcal{X} - 4\frac{p^2}{P^2} \delta_\ell + 2\frac{k^2}{K^2} \delta_\ell^- + 5p^2 - 4k^2 - 4q^2 \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

$$\begin{aligned} {}^*\mathcal{Z}^2 &= {}^*\Gamma_{o\mu\nu} {}^*\Gamma_o{}^{\mu\nu} \\ &= \mathcal{Z}^2 - 2\frac{p^2}{P^2} \delta_\ell - 2\frac{k^2}{K^2} \delta_\ell^- + 3(2P_o - Q_o)^2 + p^2 + k^2 - 8q^2. \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

Der Ausdruck (C.1) für die Selbstenergie ist die Grundlage zu jeglicher weiteren Auswertung von  $\delta\Pi$ . Eine etwas allgemeinere Form findet sich im Anhang zu [19]. Sie gilt nicht nur auf der longitudinalen Massenschale  $Q^2 = \Pi_\ell$ , vielmehr ist sie zur Auswertung sowohl auf der longitudinalen als auch auf der transversalen Massenschale geeignet.

Im Haupttext 4.2 wird die Unterteilung  $\delta\Pi =: \delta\Pi_{oo}^{\text{tree}} + \delta\Pi_{oo}^{\text{HTLV}}$  benötigt. Im ersten Anteil befinden sich keine Beiträge von den HTL-Vertexzusätzen. Man erhält ihn aus (C.1), indem man  $\mathcal{W} = \mathcal{X} = \mathcal{Y}^2 = \mathcal{Z}^2 = 0$  setzt.

$$\delta\Pi_{oo}^{\text{tree}} = g^2 N \sum \left( d_o + \Delta_\ell^- \Delta_\ell d_{\ell\ell} + \Delta_\ell^- \Delta_t d_{\ell t} + \Delta_t^- \Delta_t d_{tt} \right) \quad (\text{C.7})$$

mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned} d_o &= -2\Delta_o - 4\Delta_o^- \Delta_o p^2 \\ d_{\ell\ell} &= 0 \\ d_{\ell t} &= \frac{K^2}{k^2} \left[ 4\frac{p^2}{P^2} \delta_\ell - 2\frac{k^2}{K^2} \delta_\ell^- - 5p^2 + 4k^2 + 4q^2 \right] \\ d_{tt} &= +\frac{P^2}{p^2} \left[ 2\frac{p^2}{P^2} \delta_\ell - 4\frac{k^2}{K^2} \delta_\ell^- + 5k^2 - 4p^2 - 4q^2 \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[ -2\frac{p^2}{P^2} \delta_\ell - 2\frac{k^2}{K^2} \delta_\ell^- + 3(2P_o - Q_o)^2 + p^2 + k^2 - 8q^2 \right] \\ &\quad + \frac{P_o K_o}{P^2 K^2} \delta_\ell^- \delta_\ell - \frac{3\delta_t}{2} - \frac{3\delta_t^-}{2} \end{aligned}$$

Der zweite Anteil  $\delta\Pi_{oo}^{\text{HTLV}}$  enthält dagegen nur die HTL-Vertexzusätze.

$$\delta\Pi_{oo}^{\text{HTLV}} = g^2 N \sum \left( \Delta_\ell^- \Delta_\ell d'_{\ell\ell} + \Delta_\ell^- \Delta_t d'_{\ell t} + \Delta_t^- \Delta_t d'_{tt} \right) \quad (\text{C.8})$$

mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned} d'_{\ell\ell} &= \frac{P^2 K^2}{2p^2 k^2} \mathcal{X}^2 - \frac{1}{2} \mathcal{W} \frac{P^2}{p^2} \delta_\ell^- \\ d'_{\ell t} &= -\frac{P^2 K^2}{p^2 k^2} \mathcal{X}^2 - \frac{K^2}{k^2} \left[ \mathcal{Y}^2 + (2P_o - 4Q_o) \mathcal{X} \right] + \delta_\ell^- \frac{P^2}{2p^2} \mathcal{W} \\ d'_{tt} &= \frac{P^2 K^2}{2p^2 k^2} \mathcal{X}^2 + \frac{P^2}{p^2} \left[ \mathcal{Y}^2 + 2(P_o + Q_o) \mathcal{X} \right] + \frac{1}{2} \mathcal{Z}^2. \end{aligned}$$

## Anhang D

### Winkelintegrale

Wann immer man Diagramme mit Hard-Thermal-Loop-Vertizes auszurechnen hat, kommt man um Winkelintegrale vom Typ

$$\mathcal{J} = \int_{\Omega} \frac{1}{Q_o - \vec{e}\vec{q}} \frac{1}{Q_o - x - \vec{e}\vec{k}} \quad (\text{D.1})$$

mit  $\vec{k} = \vec{q} - \vec{p}$  nicht herum. Dieser Anhang zeigt, wie man sie löst.

Zunächst wird  $Q_o \rightarrow \omega + i\epsilon$  fortgesetzt. Den einzigen Imaginärteil bekommt  $\mathcal{J}$  vom zweiten Nenner. Der erste ist rein reell, da  $\omega \geq q$  gilt.

$$\mathcal{J} = \int_{\Omega} \frac{1}{\omega - \vec{e}\vec{q}} \left\{ \frac{1}{\omega - x - \vec{e}\vec{k}} - i\pi\delta(\omega - x - \vec{e}\vec{k}) \right\}. \quad (\text{D.2})$$

Natürlich sind bei Integrationen über Pole ab jetzt die Hauptwerte gemeint.

Für die Winkelintegration muß ein Koordinatensystem gewählt werden, (Abb. D.1). Dessen  $z$ -Achse zeige in  $\vec{k}$ -Richtung und die  $xz$ -Ebene werde durch  $\vec{k}$  und  $\vec{q}$  aufgespannt,

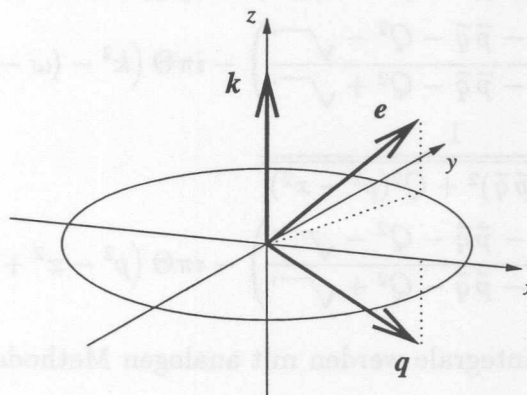


Abbildung D.1: Das Koordinatensystem für  $\vec{e}$



das heißt

$$\vec{k} = k(0, 0, 1) \quad , \quad \vec{q} = q(S, 0, C) \quad , \quad \vec{e} = (s \cos(\phi), s \sin(\phi), c) \quad (D.3)$$

mit  $C = \vec{k}\vec{q}/kq$  und  $c = \vec{e}\vec{k}/k$  sowie  $S^2 = 1 - C^2$  und  $s^2 = 1 - c^2$ .  $S$  und  $s$  sind beide positiv. Als Integrationsvariable wählen wir  $c$  und  $\phi$ .

$$\mathcal{J} = \frac{1}{2kq} \int_{-1}^1 dc \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \frac{1}{a - cC - sS \cos(\phi)} \left\{ \frac{1}{b - c} - i\pi \delta(b - c) \right\} \quad , \quad (D.4)$$

wobei  $a = \omega/q$  und  $b = (\omega - x)/k$ . Es ist wohlgermerkt  $a \geq 1$ . Somit hat der erste Nenner in (D.4) keinen Pol.

Die Integrationen sind jetzt ausführbar. Mit der Substitution  $t = \tan(\phi/2)$  findet man

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \frac{1}{a - cC - sS \cos(\phi)} = \frac{1}{\sqrt{(c - aC)^2 + \gamma^2}} \quad (D.5)$$

mit  $\gamma^2 = (a^2 - 1)(1 - C^2)$ . Das  $c$ -Integral über die Deltafunktion in (D.4) ist trivial. Im Realteil von  $\mathcal{J}$  benötigt man

$$\partial_c \ln \left( \frac{c - b + \sqrt{(c - aC)^2 + \gamma^2} + \sqrt{(b - aC)^2 + \gamma^2}}{c - b + \sqrt{(c - aC)^2 + \gamma^2} - \sqrt{(b - aC)^2 + \gamma^2}} \right) = \frac{\sqrt{(b - aC)^2 + \gamma^2}}{\sqrt{(c - aC)^2 + \gamma^2}} \frac{1}{b - c} \quad (D.6)$$

Mit etwas Umformung ergibt sich

$$\int_{-1}^1 dc \frac{1}{\sqrt{(c - aC)^2 + \gamma^2}} \frac{1}{b - c} = \frac{1}{\sqrt{(b - aC)^2 + \gamma^2}} \ln \left( \frac{C - ab - \sqrt{\gamma^2}}{C - ab + \sqrt{\gamma^2}} \right) \quad (D.7)$$

Insgesamt ergibt sich

$$\mathcal{J} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{(xq - a\vec{p}\vec{q})^2 + (a^2 - 1)(p^2q^2 - (\vec{p}\vec{q})^2)}} * \left\{ \ln \left( \frac{\omega x - \vec{p}\vec{q} - Q^2 - \sqrt{\gamma^2}}{\omega x - \vec{p}\vec{q} - Q^2 + \sqrt{\gamma^2}} \right) - i\pi \Theta(k^2 - (\omega - x)^2) \right\} \quad (D.8)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{(\omega x - \vec{p}\vec{q})^2 + Q^2(p^2 - x^2)}} * \left\{ \ln \left( \frac{\omega x - \vec{p}\vec{q} - Q^2 - \sqrt{\gamma^2}}{\omega x - \vec{p}\vec{q} - Q^2 + \sqrt{\gamma^2}} \right) - i\pi \Theta(p^2 - x^2 + 2(\omega x - \vec{p}\vec{q}) - Q^2) \right\} \quad (D.9)$$

Alle zu  $\mathcal{J}$  verwandten Integrale werden mit analogen Methoden gelöst.

# Anhang E

## Details zu Kapitel 5

### E.1 Asymptotik des Imaginärteils von $\Upsilon_0^0$

Wir benötigen in (5.36) die  $b$ -Asymptotik des Integrals

$$\int_0^\infty dv \frac{1}{v} \frac{1}{v^2 + b^2} \frac{1}{v^2 + 1} \ln^2 \left( \frac{\sqrt{v^2 + 1} + v}{\sqrt{v^2 + 1} - v} \right) \quad (\text{E.1})$$

Nach Partialbruchzerlegung in  $v^2$  zerfällt es in zwei Teile

$$\int_0^\infty dv \frac{1}{v} \frac{1}{v^2 + 1} \ln^2 \left( \frac{\sqrt{v^2 + 1} + v}{\sqrt{v^2 + 1} - v} \right) = \frac{7}{2} \zeta(3) \quad (\text{E.2})$$

$$\int_0^\infty dv \frac{1}{v} \frac{1}{v^2 + b^2} \ln^2 \left( \frac{\sqrt{v^2 + 1} + v}{\sqrt{v^2 + 1} - v} \right) =: \mathcal{J}, \quad (\text{E.3})$$

wobei  $b \ll 1$  gelten soll. Es interessiert im weiteren der führende Term von  $\mathcal{J}$  in einer Asymptotik in  $b$ . Nach Substitutionen  $t = \sqrt{v}/v$  und  $x = (1+t)/(1-t)$  erhält man

$$\mathcal{J} = 2 \int_1^\infty dx \frac{x+1}{x-1} \frac{\ln^2(x)}{(x-1)^2 + 4b^2x}. \quad (\text{E.4})$$

Das Integral reagiert auf  $b = 0$  mit einer 'IR'-Singularität bei  $x = 1$ . Der gefährliche Anteil wird abgespalten,  $\mathcal{J} = \mathcal{J}_0 + \mathcal{J}_1$ .

$$\mathcal{J}_0 = 2 \int_1^\Lambda dx \frac{x+1}{x-1} \frac{\ln^2(x) - (x-1)^2}{(x-1)^2 + 4b^2x} \quad (\text{E.5})$$

$$\mathcal{J}_1 = 2 \int_1^\Lambda dx \frac{x+1}{x-1} \frac{(x-1)^2}{(x-1)^2 + 4b^2x} \quad (\text{E.6})$$

Die Aufspaltung beschert leider ein UV-Problem, welches mit  $\Lambda$  kontrolliert wird. Natürlich muß jegliche Abhängigkeit von  $\Lambda$  im Endresultat verschwinden, was es auch tut. In  $\mathcal{J}_0$  darf  $b = 0$  gesetzt werden, hier besteht keinerlei Gefahr mehr. Die Restintegrale sind Standard.

$$\mathcal{J} = -2 \ln(4b^2) + 6 + \mathcal{O}(b). \quad (\text{E.7})$$

Bemerkenswert ist, daß hier tatsächlich eine Korrektur der Ordnung  $b \sim g$  auftaucht.

## E.2 Zu Integrationen in $\Upsilon_o^1$

In Real- und Imaginärteil von  $\Upsilon_o^1$  sind nicht-triviale Integrale zu lösen. Wir werden uns an Methoden von H. Schulz halten und als Beispiel das Integral (5.45) aus dem Imaginärteil in einem schön geradlinigen und straffen Weg knacken. Dasjenige des Realteils (5.44) ist auf analogem Weg zu lösen. Wir zeigen

$$\mathcal{K} = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \frac{1}{\mathcal{L}^2 + \pi^2} \{F_I(x, y) - F_I^\S(x, y)\} = \frac{7}{4}\zeta(3) - \ln(2) - 1 \quad (\text{E.8})$$

mit  $\mathcal{L} = \ln\left(\frac{x(1+y)^2}{y(1-x)^2}\right)$  und

$$F_I(x, y) - F_I^\S(x, y) = \frac{(\ln(xy) - \mathcal{L})^2 - (\mathcal{L}^2 + \pi^2)}{(1 + xy)^2} + \frac{\left(\ln\left(\frac{x}{y}\right) - \mathcal{L}\right)^2}{(x + y)^2}. \quad (\text{E.9})$$

Der erste Bruch aus (E.9) läßt sich in zwei Teile zerlegen, was die Möglichkeit gibt,  $\mathcal{K}$  in  $\mathcal{K} = \mathcal{K}_o + \mathcal{K}_1$  aufzuspalten mit

$$\mathcal{K}_o = - \int_0^1 dx \int_0^1 dy \frac{1}{(1 + xy)^2} = -\ln(2) \quad (\text{E.10})$$

$$\mathcal{K}_1 = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \frac{1}{\mathcal{L}^2 + \pi^2} \left\{ \frac{(\ln(xy) - \mathcal{L})^2}{(1 + xy)^2} + \frac{\left(\ln\left(\frac{x}{y}\right) - \mathcal{L}\right)^2}{(x + y)^2} \right\} \quad (\text{E.11})$$

Es bleibt  $\mathcal{K}_1 = \frac{7}{4}\zeta(3) - 1$  zu zeigen. Dazu substituieren man im zweiten Term von (E.11)  $y \rightarrow 1/y$ , um anschließend  $y$  ein  $1/x$  ausspucken zu lassen. Damit können beide Teile von  $\mathcal{K}_1$  vereint werden.

$$\mathcal{K}_1 = \int_0^1 dx \frac{1}{x} \int_0^\infty dy \frac{1}{(1 + y)^2} \frac{4 \ln^2\left(\frac{1}{y} \frac{x+y}{1-x}\right)}{\ln^2\left(\frac{1}{y} \frac{x+y}{1-x}\right) + \pi^2} \quad (\text{E.12})$$

Die Argumente der Logarithmen müssen vereinfacht werden: Wir substituieren  $x \rightarrow v = \frac{1}{y} \frac{x+y}{1-x}$ , danach  $y \rightarrow \frac{1}{v^2} y$ . Schließlich liefert  $v \rightarrow 1/v$  und  $y \rightarrow 1/y$

$$\mathcal{K}_1 = \int_0^1 dv \frac{4 \ln^2(v)}{(1 - v)^2} \int_0^\infty dy \left( \frac{1}{y + v^2} + \frac{1}{y + v} \right) \frac{1}{\ln^2(y) + \pi^2} \quad (\text{E.13})$$

Die Logarithmen werden mit  $\tau = \ln(y)$  und  $x = \ln(v)$  ganz zum Verschwinden gebracht.

$$\mathcal{K}_1 = \int_0^\infty dx \frac{4e^{-x} x^2}{(1 - e^{-x})^2} \int_{-\infty}^\infty d\tau \frac{1}{\tau^2 + \pi^2} \left( \frac{e^\tau}{e^\tau + e^{-2x}} - \frac{e^\tau}{e^\tau + e^{-x}} \right) \quad (\text{E.14})$$

Jetzt wird es schön: Das  $\tau$ -Integral wird in der oberen komplexen  $\tau$ -Ebene geschlossen. Die Integrations-Kontour umläuft dann die folgenden Polstellen:

$$\begin{array}{ll} \tau = i\pi & \text{Residuum: } \frac{1}{2\pi i} \left( \frac{1}{1 - e^{-2x}} - \frac{1}{1 - e^{-x}} \right) \\ \tau = -2x + (2n - 1)i\pi & \text{" } \frac{1}{[2x - (2n - 1)i\pi]^2 + \pi^2} \\ \tau = -x + (2n - 1)i\pi & \text{" } \frac{-1}{[x - (2n - 1)i\pi]^2 + \pi^2} \end{array} \quad (\text{E.15})$$



mit  $n = 1, 2, \dots, \infty$ . Noch schöner wird es, wenn wir uns die Summen über  $n$  hinschreiben und versuchen, sie zu vereinfachen: Fast alles hebt sich dabei weg. Übrig bleibt lediglich

$$\mathcal{K}_1 = \int_0^\infty dx \frac{4e^{-x}x^2}{(1-e^{-x})^2} \left\{ \frac{1}{1-e^{-2x}} - \frac{1}{1-e^{-x}} + \frac{1}{2x} \right\}. \quad (\text{E.16})$$

Der Rest ist nun Standard. Nach den Partialbruchzerlegungen

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-e^{-2x}} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1-e^{-x}} + \frac{1}{1+e^{-x}} \right) \\ \frac{1}{(1-e^{-x})^2} \frac{1}{1+e^{-x}} &= \frac{1}{4} \left( \frac{2}{(1-e^{-x})^2} + \frac{1}{1-e^{-x}} + \frac{1}{1+e^{-x}} \right) \end{aligned}$$

sowie

$$\frac{1}{1-e^{-x}} = \sum_{m=0}^{\infty} e^{-mx} \quad ; \quad \frac{2e^{-x}}{(1-e^{-x})^3} = \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)e^{-mx} \quad (\text{E.17})$$

kommt man nach etwas Rechnung bei dem Wunschresultat (E.8) an. ((Vorsicht jedoch bei den Summendarstellungen: Man schreibe den Integranden immer so, daß keine IR-Singularitäten entstehen.))

### E.3 Das gekoppelte Winkelintegral

In Gleichung (5.67) benötigen wir das Integral

$$\mathcal{J} := 2 \int_{\Omega\Omega'} \frac{1}{YQ} \frac{1}{Y'Q} \frac{1}{\omega - \vec{e}\vec{p} - \vec{e}'\vec{k}} \frac{1}{\omega - x - \vec{e}'\vec{k}}. \quad (\text{E.18})$$

Das ungestrichene Winkelintegral ist für uns mittlerweile Routine, wir können nach Anhang D verfahren. Ebenso das erste Teilintegral des gestrichenen Winkelintegrals. Übrig bleibt eine einzige Integration,

$$\mathcal{J} = \frac{1}{2k^2q^2} \int_{-1}^1 dc \frac{1}{(c-aC)^2 + \gamma^2} \frac{1}{b-c} \ln \left( \frac{ac-C-Q^2/kq - \sqrt{(c-aC)^2 + \gamma^2}}{ac-C-Q^2/kq + \sqrt{(c-aC)^2 + \gamma^2}} \right), \quad (\text{E.19})$$

wobei die Bezeichnungen aus Anhang D entnommen sind. Wir nehmen nun an, daß der  $Q^2$ -Term im Argument des Logarithmus vernachlässigt werden darf. Das heißt in der folgenden Rechnung darf  $ac-C$  nur mit  $\varepsilon$  vergleichbar klein werden, nicht aber mit  $\varepsilon^2$ . Bei dieser Annahme ist  $\mathcal{J}$  lösbar.

Nach entsprechenden Substitutionen wird

$$\mathcal{J} = \frac{1}{2k^2q^2} \frac{1}{\gamma^2} \int_{-(1+aC)/\gamma}^{(1-aC)/\gamma} dx \frac{1}{1+x^2} \frac{1}{y-x} \ln \left( \frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+x} \right) \quad (\text{E.20})$$

mit  $y = (b-aC)/\gamma$ . In dieser Form ist  $\mathcal{J}$  lösbar. Wir werden zur Vereinfachung ausnutzen, daß  $\gamma^2 \sim \varepsilon^2$ , und entsprechend die Integrationsgrenzen ins Unendliche legen. Dann läßt sich zeigen, daß

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= \frac{1}{2k^2q^2} \frac{1}{\gamma^2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{1+x^2} \frac{1}{y-x} \ln \left( \frac{\sqrt{x^2+1} - x}{\sqrt{x^2+1} + x} \right) \\ &= \frac{1}{4k^2q^2} \frac{1}{\gamma^2} \frac{1}{1+y^2} \left\{ \pi^2 - \ln^2 \left( \frac{\sqrt{y^2+1} - y}{\sqrt{y^2+1} + y} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{E.21})$$

Wir steigen auf die alten Bezeichnungen um,

$$\mathcal{J} = \frac{1/4}{(\omega x - \vec{p}\vec{q})^2 + Q^2(p^2 - x^2)} \left\{ \pi^2 - \ln^2 \left( \frac{\omega x - \vec{p}\vec{q} - \sqrt{(\omega x - \vec{p}\vec{q})^2 + Q^2(p^2 - x^2)}}{\omega x - \vec{p}\vec{q} + \sqrt{(\omega x - \vec{p}\vec{q})^2 + Q^2(p^2 - x^2)}} \right) \right\} \quad (\text{E.22})$$

Mit diesem Resultat können wir analog zu  $\Upsilon_1^{\text{entkoppelt}}$  weiterverfahren. Insbesondere Gleichung (5.66) zeigt, daß von  $\mathcal{J}$  kein Term der Ordnung  $1/\varepsilon$  resultieren kann.

# Anhang F

## Korrelationsfunktion zweier Ströme

In diesem Anhang werden einige Eigenschaften der Korrelationsfunktion  $\mathcal{W}$  diskutiert,

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{\mu\nu}(x) &= \langle \mathcal{T} j_\mu(x) j_\nu(0) \rangle \\ &= \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\phi_a j_\mu(x) j_\nu(0) \exp \left\{ i \int d^4x \mathcal{L}(A, \phi_a) \right\} \end{aligned} \quad (\text{F.1})$$

wobei  $j_\mu$  der elektromagnetische Stromoperator ist (zusammengesetzt aus den Materiefeldern  $\phi_a$ ). Es bleibe zunächst offen, ob in (F.1) der thermische oder der Grundzustands-Erwartungswert gemeint ist. Die Lagrangedichte lautet

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \mathcal{L}_{gf} + e j^\mu A_\mu + \mathcal{L}_M. \quad (\text{F.2})$$

Der abelsche Feldtensor  $F_{\mu\nu}$  ist wie üblich definiert. Die Eichfixierung sei in  $\mathcal{L}_{gf}$  implementiert, die Details der Fixierung sind nicht interessant.  $\mathcal{L}_M$  enthält die gesamte Dynamik der Materiefelder  $\phi_a$  (Das sind z.B. Elektronen oder sogar die volle QCD inklusive Gluonen). Auch die Wechselwirkung der  $\phi_a$  untereinander sei in  $\mathcal{L}_M$  enthalten, jedoch nicht deren Wechselwirkung mit dem Photon. Diese sei vollständig in  $j^\mu A_\mu$  zu finden, wobei die elektromagnetische Kopplung  $e$  klein sei.

Zunächst wird eine Interpretation von  $\mathcal{W}_{\mu\nu}$  gesucht. Dazu betrachte man den vollen Photonpropagator

$$G_{\mu\nu}(P) = \frac{i}{Z} \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\phi_a A_\mu(P) A_\nu(-P) \exp \left\{ i \int d^4x \left( -\frac{1}{2} A^\mu (G^o)_{\mu\nu}^{-1} A^\nu + e j^\mu A_\mu + \mathcal{L}_M \right) \right\} \quad (\text{F.3})$$

Die Verschiebung  $A_\mu \rightarrow A_\mu + e G_{\mu\nu}^o j^\nu$  entkoppelt das Pfadintegral über das Photon vom 'Rest der Welt'.

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu}(P) &= \frac{i}{Z} \int \mathcal{D}A \left[ A_\mu(P) A_\nu(-P) + e^2 G_{\mu\rho}^o(P) j^\rho(P) j^\sigma(-P) G_{\sigma\nu}^o(P) \right] \\ &\quad \times \exp \left\{ -\frac{i}{2} \int d^4x A^\mu (G^o)_{\mu\nu}^{-1} A^\nu \right\} \int \mathcal{D}\phi_a \exp \left\{ i \int d^4x \left( \frac{1}{2} j^\mu G_{\mu\nu}^o j^\nu + \mathcal{L}_M \right) \right\} \end{aligned} \quad (\text{F.4})$$

$$= G_{\mu\nu}^o(P) + i e^2 G_{\mu\rho}^o(P) \mathcal{W}^{\rho\sigma}(P) G_{\sigma\nu}^o(P). \quad (\text{F.5})$$



Dies ist die übliche Definition der Selbstenergie:  $\mathcal{W}_{\mu\nu}$  ist die *uneigentliche* Photon-Selbstenergie  $-i\Pi_{\mu\nu}$ . Es ist nicht die eigentliche, denn in (F.5) sind nur freie Photon-Propagatoren  $G_{\mu\nu}^o$  zu finden, nicht etwa volle  $G_{\mu\nu}$ . Um  $\mathcal{W}_{\mu\nu}$  zu bestimmen, müssen alle Diagramme mit zwei äußeren Photon-Linien ausgewertet werden, inklusive der Ein-Teilchen reduzierbar. Im Haupttext (Kapitel 7) liegt das Interesse allerdings in einer Entwicklung in  $e$ . In führender Ordnung sind die eigentliche und die uneigentliche Selbstenergie identisch.

In Kapitel 7 wird eine Relation zwischen der Dichte  $f_{\mu\nu}$

$$f_{\mu\nu}(Q) = \sum_{if} \frac{e^{-\beta E_i}}{Z} (2\pi)^4 \delta^4[Q - (P_i - P_f)] \langle i | j_\mu(0) | f \rangle \langle f | j_\nu(0) | i \rangle. \quad (\text{F.6})$$

und der thermischen Photon-Selbstenergie  $\Pi_{\mu\nu}(q)$  benötigt. Die Dichte hat die Eigenschaften  $f_{\mu\nu}^*(Q) = f_{\nu\mu}(Q)$  und  $f_{\mu\nu}(-Q) = e^{\beta q_0} f_{\mu\nu}^*(Q)$ . Im Haupttext wird der symmetrische (und reelle) Anteil von  $f_{\mu\nu}$  benötigt.

Soeben wurde gezeigt, daß die Selbstenergie gleich der Korrelationsfunktion zweier Ströme ist. Im Matsubaraformalismus, d.h.  $x = (-i\tau, \vec{r})$  und  $Q = (i\omega_n, \vec{q})$ ,  $\omega_n = 2\pi nT$ , ist also

$$\Pi_{\mu\nu}(Q) = \int_0^\beta d\tau \int d^3r e^{iQx} \sum_i \frac{e^{-\beta E_i}}{Z} \langle i | j_\mu(x) j_\nu(0) | i \rangle \quad (\text{F.7})$$

Mit Hilfe von  $j(x) = e^{H\tau} e^{-i\vec{p}\vec{r}} j(0) e^{-H\tau} e^{i\vec{p}\vec{r}}$  bekommt man schnell

$$\Pi_{\mu\nu}(Q_0, \vec{q}) = \int \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{1 - e^{\beta\omega'}}{\omega' - Q_0} f_{\mu\nu}(\omega', \vec{q}) \quad (\text{F.8})$$

Nach Fortsetzung  $Q_0 \rightarrow \omega + i\varepsilon$  kann man mittels  $\frac{1}{x-i\varepsilon} = \mathcal{P}\frac{1}{x} + i\pi\delta(x)$  nach der Dichte auflösen,

$$f_{\mu\nu}(\omega, \vec{q}) = \frac{2}{1 - e^{\beta\omega}} \Im \Pi_{\mu\nu}(Q_0 \rightarrow \omega + i\varepsilon, \vec{q}). \quad (\text{F.9})$$

Dies ist die gewünschte Bestimmungsgleichung für die Dichte  $f_{\mu\nu}$ .

Die Gleichung (F.9) stellt den Zusammenhang zwischen Übergangsraten und dem Imaginärteil einer bestimmten Selbstenergie her. Dieser Zusammenhang ist sehr fundamental, man findet ihn häufig unter dem Stichwort 'cutting rules'. Ein bestimmtes Diagramm zur Selbstenergie enthält genau die Prozesse der Übergangsrate, deren Diagramme man durch „Zerschneiden“ des Selbstenergie-Diagrammes erhält. Ein Beispiel findet sich in Abb. F.1.

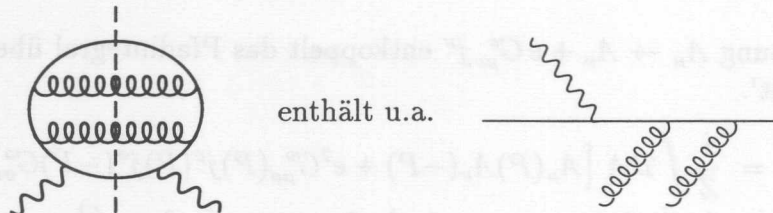


Abbildung F.1: Beispiel zu 'cutting rules'.

# Literaturverzeichnis

- [1] L.D. McLerran, Rev. Mod. Phys. 58 (1986) 1021
- [2] E. Laermann, in QUARK MATTER 96, Nucl. Phys. A 610 (1996) 1c
- [3] C. Itzykson und J. Zuber, „Quantum Field Theory“, McGraw Hill, New York 1985
- [4] T.P. Cheng und L.F. Li, „Gauge Theory of Elementary Particle Physics“, Oxford, 1984
- [5] Particle Data Group, Phys. Rev. D54 (1996) 1
- [6] J.I. Kapusta, „Finite Temperature Field Theory“, Cambridge University Press 1989
- [7] M. Le Bellac, „Thermal Field Theory“, Cambridge University Press 1996
- [8] E. Braaten und R.D. Pisarski, Nucl. Phys. B337 (1990) 569  
R.D. Pisarski, Phys. Rev. Lett 63 (1989) 1129
- [9] E. Braaten und R.D. Pisarski, Phys. Rev. D42 (1990) 2156,  
E. Braaten und R.D. Pisarski, Phys. Rev. D46 (1992) 1829
- [10] P. Arnold und O. Espinosa, Phys. Rev. D47 (1993) 3546  
P. Arnold und C. Zhai, Phys. Rev. D51 (1995) 1906  
B. Kastening und C. Zhai, Phys. Rev. D52 (1995) 7232
- [11] E. Braaten, A. Nieto, Phys. Rev. D53 (1996) 3421  
E. Braaten, A. Nieto, Phys. Rev. D51 (1995) 6990  
A. Nieto, Int. J. Mod. Phys. A12 (1997) 1431
- [12] H. Schulz, Nucl. Phys. B413 (1994) 353
- [13] E. Braaten, R.D. Pisarski und T.C. Yuan, Phys. Rev. Lett. 64 (1990) 2242  
S.M.H. Wong, Z. Phys C53 (1992) 465
- [14] R. Baier, H. Nakkagawa, A. Niegawa und K. Redlich, Z. Phys. C53 (1992) 433
- [15] A. Linde, Rep. Prog. Phys 42 (1979) 389  
A. Linde, Phys. Lett B96 (1980) 289
- [16] D. Gross, R.D. Pisarski und L.G. Yaffe, Rev. Mod. Phys 53 (1981) 43

- [17] G. Alexanian und V.P. Nair, Phys. Lett. B352 (1995) 435
- [18] W. Buchmüller und O. Philipsen, Phys. Lett. B397 (1997) 112
- [19] F. Flechsig, A.K. Rebhan und H. Schulz, Phys. Rev. D52 (1995) 2994
- [20] R. Baier, S. Peigne und D. Schiff, Z. Phys. C62 (1994) 337
- [21] U. Kraemmer, A.K. Rebhan und H. Schulz, Ann. Phys. 238 (1995) 286
- [22] F. Flechsig und H. Schulz, Phys. Lett. B349 (1995) 504
- [23] F. Flechsig und A.K. Rebhan, Nucl. Phys. B464 (1996) 279
- [24] N.P. Landsmann und C.G. van Weert, Phys. Reports 145 (1987) 141
- [25] A. Fetter und J.D. Walecka, „Quantum Theory of Many-Particle Systems“, McGraw Hill, New York, 1971
- [26] R. Kobes, G. Kunstatter und A.K. Rebhan, Phys. Rev. Lett. 64 (1990) 2992 und Nucl. Phys. B355 (1991) 1
- [27] M. Abramowitz und I.A. Stegun, Handbook of Mathematical Functions, Verlag Harry Deutsch, Frankfurt, 1984
- [28] J. Frenkel und J.C. Taylor, Nucl. Phys. B334 (1990) 199
- [29] G. P. Lepage, in FROM ACTIONS TO ANSWERS, World Scientific 1989
- [30] E. Braaten, „Renormalization Group Approach to Thermal Gauge Theories“ aus HOT SUMMER DAZE, World Scientific 1992
- [31] J.C. Taylor und S.M. Wong, Nucl. Phys. B346 (1990) 115
- [32] J. Frenkel und J.C. Taylor, Nucl. Phys. B374 (1992) 156
- [33] R.D. Pisarski, „A Shortcut to Hard Thermal Loops“ aus FROM FUNDAMENTAL FIELDS TO NUCLEAR PHENOMENA, World Scientific 1991
- [34] E. Braaten und R.D. Pisarski, Phys. Rev. D45 (1992) 1827
- [35] E. Braaten und R.D. Pisarski, Nucl. Phys. B339 (1990) 310
- [36] G. Kunstatter, Can. J. Phys. 71 (1993) 256
- [37] F. Flechsig, Diplomarbeit, Institut für Theoretische Physik der Universität Hannover, 1994
- [38] S. Weinberg, „The Quantum Theory of Fields, Volume I“, Cambridge University Press 1995
- [39] A. Rebhan, Nucl. Phys. B430 (1994) 319



- [40] U.M. Heller, F. Karsch und J. Rank, „The Gluon Propagator at High Temperature“, preprint BI-TP 97/36 (hep-lat/9710033)
- [41] E. Braaten, Phys. Rev. Lett. 74 2164
- [42] Y. Schröder und H. Schulz, Phys. Rev. D54 (1996) 7677
- [43] R.D. Pisarski, Phys. Rev D47 (1993) 5589
- [44] H.T. Elze und U. Heinz, Phys. Rep. 183 (1989) 81
- [45] P.F. Kelly, Q. Liu, C. Lucchesi und C. Manuel, Phys. Rev. D50 4209
- [46] M. Kreutzer, A. Rebhan und H. Schulz, Phys. Lett B244 (1990) 58
- [47] E. Braaten, Can. J. Phys. 71 (1993) 215
- [48] V.V. Lebedev und A.V. Smilga, Physika A181 (1992) 187
- [49] A. Niegawa, Phys. Rev. D56 (1997) 1073  
A. Niegawa, Mod. Phys. Lett. A10 (1995) 379
- [50] P.A. Henning und E. Quack, Phys. Rev. D54 (1996) 3125
- [51] M. Carrington, R. Kobes und E. Petitgirard, „Cancellation of Ladder Graphs“, preprint WIN-97-12 (hep-ph/9708412)  
M. Carrington und R. Kobes, „The general cancellation of ladder graphs at finite temperature“, preprint hep-ph-9712280
- [52] C. Gale und J.I. Kapusta, Nucl. Phys B357 (1991) 65
- [53] L.D. McLerran und T. Toimela, Phys. Rev. D31 (1985) 545
- [54] J.D. Bjorken und S.D. Drell, „Relativistische Quantenfeldtheorie“, BI Wissenschaftsverlag, 1967
- [55] R. Baier, M. Dirks, K. Redlich und D. Schiff, Phys. Rev. D56 (1997) 2548
- [56] P. Aurenche, T. Becherawy und E. Petitgirard, preprint ENSLAPP-A-452/93 (hep-ph/9403320), unveröffentlicht
- [57] P. Aurenche, F. Gelis, R. Kobes und E. Petitgirard, Phys. Rev. D54 (1996) 5274
- [58] P. Aurenche, F. Gelis, R. Kobes und E. Petitgirard, Z. Phys. C75 (1997) 315
- [59] F. Flechsig, private Aufzeichnungen sowie F. Flechsig und A. Rebhan, in Vorbereitung
- [60] J. Vermaseren, FORM Version 1.1 (1993), via FTP erhältlich auf <ftp://ftp.nikhef.nl/pub/form/>

- [61] T. Grandou, Phys. Lett. B367 (1996) 229  
T. Grandou, M. Le Bellac und D. Poizat, Nucl. Phys. B358 (1991) 408
- [62] O.K. Klashnikov und V.V klimov, Sov. J. Nucl. Phys. 31 (1980) 699  
H.A. Weldon, Phys. Rev. D26 (1982) 1394
- [63] R.D. Pisarski, Physika A158 (1989) 146  
H. Schulz, Phys. Lett. B291 (1992) 448
- [64] V.V. Klimov, Sov. J. Nucl. Phys. 33 (1981) 934  
H.A. Weldon, Phys. Rev. D26 (1982) 2789  
H.A. Weldon, Phys. Rev. D40 (1989) 2410
- [65] H.A. Weldon, Physika A158 (1989) 169  
R.D. Pisarski, Nucl. Phys. A498 (1989) 423

## Danksagung

Mein Dank gilt vor allem meinem Doktorvater Hermann Schulz für die faszinierende Thematik, seine hilfreiche Betreuung, die zahlreichen Diskussionen und die fast familiäre Atmosphäre in seiner Arbeitsgruppe. Während der gesamten Arbeit bestand ein reger Kontakt zu Anton Rebhan aus Wien. Ihm danke ich für zahlreiche Anregungen und Kommentare sowie für die Gastfreundschaft während meiner Aufenthalte in Wien.

Weiterhin gilt mein Dank P. Aurenche und dem ENSLAPP in Annecy für die Gastfreundschaft während eines Forschungsaufenthaltes.

Der Deutschen Forschungsgemeinschaft danke ich für die großzügige finanzielle Unterstützung und dem Institut für Theoretische Physik der Universität Hannover für die idealen Arbeitsbedingungen.

Ein besonderer Dank geht an meine Eltern, welche mir Studium und Promotion ermöglicht haben. Ferner an eine große Anzahl von Freunden und Bekannten, insbesondere Volker Gies, Jens Hörner, Martin Kammler, Thomas Lüthi, York Schröder und Dr. Hubert Temmen.

Schließlich danke ich meiner lieben Martina für die Geduld und Aufmunterungen bei all den Höhen und Tiefen, welche während der letzten Jahre zu durchschreiten waren.



