Inklusive Meson-Produktion in tief-inelastischer Elektron-Proton-Streuung in nächstführender Ordnung der QCD

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
des Fachbereichs Physik
der Universität Hamburg

vorgelegt von
Peter Büttner
aus Aschaffenburg

Hamburg
1998

Inclusive meson-production in deep-inelastic electron-proton-scattering in next-to-leading order in QCD

PhD thesis
Departement of Physics
University of Hamburg

by
Peter Büttner

Hamburg
1998

Zusammenfassung

Gegenstand der folgenden Arbeit ist eine vollständige Berechnung der inklusiven Einteilchenproduktion in der tief-inelastischen Elektron-Proton-Streuung in nächstführender Ordnung der QCD. Die Rechnungen werden für eine hohe Virtualität Q^2 des ausgetauschten Photons durchgeführt und umfassen Korrekturen der Ordnung $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$. Diese Reaktionen bieten eine hervorragende Möglichkeit, sowohl die perturbativen, harten Streuprozesse, als auch nicht-perturbative Effekte der QCD wie Parton-Verteilungsfunktionen und Fragmentationsfunktionen zu untersuchen. Die numerische Berechnung der Integrale über die Faltung der analytisch berechneten, harten Prozesse mit diesen Funktionen führt zu 1-Teilchen inklusiven Wirkungsquerschnitten, die mit den Ergebnissen der Experimente H1 und ZEUS am HERA Speichering des Deutschen-Elektronen-Synchrotrons (DESY) in Hamburg verglichen werden.

Abstract

A complete next-to-leading order calculation in QCD of one-particle-inclusive hadronproduction in deep-inelastic scattering is presented in this thesis. The calculations have been done for the exchange of a highly virtual photon and include corrections up to the order $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$. These reactions offer an excellent possibility to study perturbative impacts of the QCD like the hard-scattering cross-section, as well as perturbative aspects like fragmentation functions and parton distributions. The numerical calculation of the hard process, convoluted with these functions leads to one-particle inclusive cross-sections. These can be compared with experimantal results from the H1- and ZEUS-collaborations.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **1**

2 Tief-inelastische Streuung und Wirkungsquerschnitte **5**
2.1 DIS und das Parton-Modell 5
2.2 Die Tensorstruktur des Streuquerschnitts 7
2.3 Der Wirkungsquerschnitt für inklusive Reaktionen 9

3 Die Born-Beiträge **13**
3.1 Der $2 \to 2$ Phasenraum 13
3.2 Die partonischen Born-Prozesse 14
3.3 Der Wirkungsquerschnitt auf Born-Niveau 17

4 Die Korrekturen zur Ordnung $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$ **19**
4.1 Singularitäten und Faktorisierung 19
4.2 Die virtuellen Beiträge 21
4.3 Die reellen Beiträge 23

5 Die Integration der reellen Korrekturen **31**
5.1 Die Struktur der Integrale 31
5.2 Die Winkelintegration 33
5.3 Die Energieintegration 35

6 Numerische Ergebnisse **39**
6.1 FF's und PDF's, Eingangsparameter 39
6.2 P_T-Spektren 41
6.3 Die Skalenabhängigkeit des Wirkungsquerschnitts 46
6.4 Hadronproduktion bei ZEUS 50
6.5 Hadronproduktion bei H1 54

7 Zusammenfassung **59**

8 Anhang **61**
8.1 Definitionen 61
8.2 Die Kinematik im $2 \to 3$ Prozeß 62
8.3 Die analytische Form der virtuellen Korrekturen 65
8.4 Die Winkelintegration 67
8.5 Singularitäten der Anfangszustände 72
8.6 Singularitäten der Endzustände 74

Literatur **77**

Abbildungsverzeichnis **81**

1 Einleitung

Die tief-inelastische Streuung (DIS) bildet seit vielen Jahren eine Quelle für Informationen über den Aufbau und die Physik der Hadronen [1, 2, 3, 4]. Eine Vielzahl von Experimenten bietet sich hierzu an. Dabei können sowohl Elektronen als auch Myonen sowie Neutrinos als Sondenteilchen dazu benutzt werden, die Struktur der Hadronen aufzuklären. Dies kann entweder durch den Austausch geladener Teilchen erfolgen, die als Ströme von $W^{\pm}$-Bosonen bezeichnet werden, oder durch neutrale Teilchen, den Strömen von Photonen oder der Z^0-Teilchen. Als Targetteilchen dienen hierbei Protonen, Neutronen sowie Mesonen. Neben Aufschlüssen über die Natur der Kräfte auf kleinsten Längenskalen lassen sich hierbei ebenso makroskopische Größen, wie zum Beispiel der Spin der Nukleonen untersuchen. Insbesondere in jüngster Zeit konnte die schwierige, experimentelle Datennahme bei DIS-Experimenten stark verbessert werden [5, 6]. Thema dieser Arbeit ist die Elektron-Proton-Streuung, wie sie am H1 und ZEUS Experiment des HERA Beschleunigers am Deutschen Elektronen-Synchrotron (DESY) in Hamburg untersucht wird.
Als grundlegende Theorie für die Beschreibung der Physik der Hadronen wird derzeit die Quantenchromodynamik (QCD) betrachtet [7], eine nicht-abelsche SU(3)-Eichfeld-Theorie. Sie beschreibt die Art und Wechselwirkung der die Hadronen aufbauenden Quarks und Gluonen [8]. Eine wesentliche Besonderheit der QCD, die asymptotische Freiheit [9], ermöglicht den mathematischen Zugang zur Beschreibung der Streuung stark wechselwirkender Teilchen. Die Hauptkonsequenz der asymptotische Freiheit der QCD ist, daß die Stärke der Kopplungskonstanten α_s skalenabhängig wird und für sehr große Skalen $\mu^2 \to \infty$ verschwindet. μ^2 ist dabei eine freie Größe und wird in DIS üblicherweise gleich der größten, bei dem betrachteten Prozeß auftretenden Impulsskala Q^2 gewählt. Mit wachsendem Impuls, oder dazu äquivalent kleineren Entfernungen, gilt $\alpha_s(Q^2) << 1$, wodurch eine störungstheoretische Behandlung für hinreichend große Q^2 gerechtfertigt wird.
Die ein Hadron bildenden Partonen bewegen sich innerhalb des Hadrons nahezu frei und spüren erst mit wachsendem Abstand eine stärker werdende Kernkraft, welche sie zum Hadron bindet. Diese Eigenschaft, welche in der Literatur als Confinement bezeichnet wird [10], verbietet freie Partonzustände (Quarks oder Gluonen) in der Natur. Demnach muß jede starke Wechselwirkung zwischen einzelnen Partonen im Experiment zu beobachtbaren, hadronischen Endzuständen führen. Die getrennte Betrachtung der Prozesse auf verschiedenen Längenskalen wird in der QCD durch das Faktorisierungstheorem [11] möglich. Dieses sagt aus, daß der Wirkungsquerschnitt in QCD Streuprozessen in zwei separat behandelbare Bereiche faktorisiert. Zum einen in den sogenannten harten Prozeß, bei dem die Kopplung klein ist und man die Wechselwirkung mit den Methoden der Störungsrechnung beschreiben kann, zum anderen in den nicht-störungstheoretischen Bereich, in dem die Kopplung groß und die Störungstheorie nicht anwendbar ist. Die Physik in diesem Bereich wird durch zwei universelle Verteilungen beschrieben. Die erste bilden die sogenannten Parton-Verteilungsfunktionen, die im folgenden als PDF's (Parton Distribution Functions) bezeichnet werden und die Wahrscheinlichkeit angeben, unter gegebenen kinematischen Bedingungen ein Quark oder Gluon im einlaufenden Hadron zu finden. Bei der zweiten Verteilung handelt es sich um die sogenannten Fragmentationsfunktionen (im folgenden FF's), welche analog zu den den PDF's die Wahrscheinlichkeit der

Fragmentation eines Quarks oder Gluons in ein Hadron liefern. Universell bedeutet in diesem Zusammenhang, daß die PDF's und FF's von den Eigenschaften des spezifischen harten Streuprozeßes unabhängig sind. Für beide Verteilungen muß zunächst dem Experiment bei einer bestimmten Impulsskala ein Wert entnommen werden. Die Evolution zu anderen Skalen wird durch DGLAP-Gleichung (Dockshitser-Gribov-Lipatov-Altarelli-Parisi-Gleichung) beschrieben [12, 13, 14, 15].
Ein Ziel der Untersuchungen bei HERA und aller vorhergehenden DIS Experimenten ist es, die Vorhersagen der QCD für Prozesse der Art

$$e^- + p \quad \rightarrow \quad e^- + h + X \tag{1.1}$$

zu testen. e^- bezeichnet hier das Elektron, p das Proton, h ein beliebiges Hadron im Endzustand und X den Rest der nicht beobachtbaren Teilchen des Experimentes. Das Elektron, welches als Sondenteilchen zur Auflösung der Hadronstruktur dient, kann mit dem Proton entweder elektromagnetisch durch Austausch eines Photons oder schwach via neutraler (Z_0) oder geladener Ströme ($W^{\pm}$) wechselwirken. In dieser Arbeit wird ausschließlich der Fall der elektromagnetischen Wechselwirkung unter Austausch eines virtuellen Photons mit der Virtualität Q^2 betrachtet.
Die Physik der tief-inelastischen-Streuung bei hohen Q^2 wird hierbei sehr gut durch das Faktorisierungstheorem und die DGLAP-Gleichung beschrieben. Beim Übergang zu kleinen Q^2 oder zu höheren Schwerpunktsenergien ist der Zugang über die perturbative QCD jedoch nicht mehr gerechtfertigt. Die Physik in diesem Bereich wird als "small-x-physics" bezeichnet, da der zugrundeliegende Bjoerken-Skalenparameter x_{Bj}, $x_B = \frac{Q^2}{S+Q^2}$ sehr klein wird. Da die perturbative QCD eine Reihenentwicklung und Summation über Potenzen von $(\alpha_s \ln Q^2)^n$ darstellt, sind für kleine x_B keine sinnvollen Beschreibungen der Natur zu erwarten. Andere Zugänge, wie zum Beispiel die BFKL-Formalismus [16, 17], beschreiben die Physik in diesen Bereichen besser. Dies liegt jedoch außerhalb des Rahmens dieser Arbeit, weshalb daauf im folgenden nicht näher eingegangen wird.
Die zu untersuchenden Prozesse bieten eine Fülle von Informationen zum Test der Vorhersagen der QCD oder zur Bestimmung der laufenden Kopplung $\alpha_s(Q^2)$. Eine Vielzahl theoretischer und experimenteller Arbeiten wurde in letzter Zeit auf dem Gebiet der Jet-Physik veröffentlicht [4, 18, 19]. Diese Experimente fragen allerdings nicht nach dem hadronischen Endzustand der detektierten Teilchen. Gerade Experimente der DIS bieten hervorragende Möglichkeiten, diese Aspekte der Theorie zu untersuchen. PDF's, die zum Beispiel aus Analysen der Reaktion $e + p \rightarrow X$ gewonnen werden, und FF's aus Daten der e^+e^-- Vernichtung unter inklusiver Hadronproduktion, liefern gemeinsam mit dem harten Streuquerschnitt eine theoretische Beschreibung von Prozessen mit inklusiver Einteilchenproduktion. Es wurde bereits in den Arbeiten [20, 21] erläutert, daß die einfachste Observable in diesem Zusammenhang der differentielle Wirkungsquerschnitt $\frac{d\sigma}{d\xi' dQ^2}$ ist. Die Variable ξ' bezeichnet dabei den Bruchteil am Impuls des fragmentierenden Partons, den das Hadron trägt. In Rechnungen zur Ordnung $\mathcal{O}(\alpha_s^0)$ tragen hierzu in den PDF's und FF's jedoch nur die Quarkanteile bei. Gluonen sind an der Lepton-Nukleon-Streuung erst ab der Ordnung $\mathcal{O}(\alpha_s)$ über die sogenannten Boson-Gluon-Fusion beteiligt. Es ist jedoch schon lange bekannt [22], daß der Gluon-Anteil am Gesamtimpuls des Protons ca. 50% ausmacht. Somit wird die Boson-Gluon-Fusion in höheren Ordnungen der

QCD einen wichtigen Anteil am Streuprozeß liefern und muß unbedingt berücksichtigt werden. Die am einfachsten zu messende Größe, um Effekte der QCD zur Ordnung $\mathcal{O}(\alpha_s)$ oder höheren Ordnungen zu untersuchen, ist der differentielle Wirkungsquerschnitt $\frac{d\sigma}{d\xi' dQ^2 dP_T}$ im $\gamma-$Parton - System [20, 21, 23]. P_T steht hier für den Transversalimpuls des detektierten Hadrons.
Zweck dieser Arbeit ist die Berechnung der $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$-Korrekturen zum Wirkungsquerschnitt für inklusive Einteilchenproduktion in tief-inelastischer Streuung und der Vergleich der Ergebnisse mit experimentellen Daten. Neben einem weiteren Test der Vorhersagen der QCD ist eine wichtige Motivation für die Berechnung der $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$-Korrekturen die Reduktion Skalenabhängigkeit des Wirkungsquerschnitts durch die höheren Beiträge. In [24] wurde bereits das Auftreten von drei verschiedenen Skalen in inklusiver Einteilchenproduktion diskutiert und die damit verbundenen theoretischen Schwierigkeiten erläutert. Zum Beispiel ist aus der Renormierungstheorie bekannt [15], daß durch die Renormierung eine Massenskala μ eingeführt werden muß, um die Dimensionslosigkeit des Wirkungsquerschnitts bzw. der Lagrangedichte in $4-2\epsilon$ Dimensionen zu garantieren. Die Entwicklung der laufenden Kopplungskonstanten α_s in der QCD wird durch folgende Gleichung gegeben

$$\frac{d\alpha_s(\mu^2)}{d\ln(\mu^2)} = -\frac{\beta_0}{4\pi}\alpha_s^2 - \frac{\beta_1}{(4\pi)^2}\alpha_s^3 - \frac{\beta_2}{(4\pi)^3}\alpha_s^4 + \mathcal{O}(\alpha_s^5) \tag{1.2}$$

μ ist die Skala von α_s, die in dem betreffenden Prozeß gewählt wird. β_i sind die Beiträge der Betafunktion, die derzeit bis zur Ordnung β_3 bestimmt sind. Da μ^2 eine freie, nicht beobachtbare Größe ist, darf bei der Summation der Beiträge aller Ordnungen der Wirkungsquerschnitt nicht abhängig von μ sein. In der Praxis wird eine solche Störungsreihe jedoch ab einer bestimmten Ordnung abgebrochen, wodurch der Wirkungsquerschnitt skalenabhängig wird. Die starke Abhängigkeit in führender Ordnung in α_s sollte durch Beiträge höherer Ordnung verringert werden, weshalb die Berechnung der $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$ Beiträge äußerst wichtig wird.
Die Arbeit ist wie folgt gegliedert. In Kapitel 2 wird eine Einführung in die tief-inelastische Streuung gegeben. Es werden die gebräuchlichen kinematischen Konventionen und der Zusammenhang zwischen dem hadronischen Wirkungsquerschnitt, dem Lepton- und Hadrontensor, den PDF's und FF's sowie dem partonischen Wirkungsquerschnitt erläutert. Der nächste Abschnitt behandelt die Ergebnisse der Rechnungen für Prozesse in niedrigster Ordnung α_s [23]. In Kapitel 4 wird zunächst auf die wesentlichen Ideen des Faktorisierungstheorems in der QCD eingegangen. Danach erfolgt eine Beschreibung der virtuellen Korrekturen zur $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$. Abschließend werden die reellen Korrekturen zur $\mathcal{O}(\alpha_s)$ in Form von Cut-Diagrammen vorgestellt und klassifiziert. Die Hauptarbeit wird in Kapitel 5 und 6 beschrieben. Kapitel 5 umfaßt die Berechnung der Korrekturen zur $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$. Diese Rechnungen sind in der vorliegenden Form noch nicht durchgeführt worden und umfassen alle Beiträge zur Elektron-Proton-Streuung der $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$ unter Ausintegration des vollständigen 3-Teilchen Phasenraumes. Das Renormierungsschema wird in dieser Arbeit das $\overline{\text{MS}}$-Schema sein.
Abschnitt 6 beinhaltet die numerische Auswertung der Ergebnisse und den Vergleich mit den Experimenten. Das letzten Kapitel faßt die erzielten Ergebnisse zusammen und schließt mit einer Diskussion der Resultate.

2 Tief-inelastische Streuung und Wirkungsquerschnitte

Dieses Kapitel behandelt die Grundlagen der tief-inelastischen Streuung. Zunächst werden die gebräuchlichen kinematischen Größen zur Beschreibung von DIS-Ereignissen eingeführt. Danach wird auf den Zusammenhang zwischen dem hadronischen Streuquerschnitt und den partonischen Subprozessen eingegangen und die Verknüpfung des störungstheoretisch zugänglichen Bereiches, des harten Streuprozesses, mit den nicht-störungstheoretischen PDF's und FF's angeben. Explizit zeigt sich dies an einer Zerlegung des Hadrontensors $W_{\mu\nu}$, die der Zerlegung des Hadrontensores $\widehat{W}_{\mu\nu}$ in die Strukturfunktionen F_1, F_2 und F_3 in der total- inklusiven Streuung entspricht. Auf diesen Zusammenhang und die Kontraktion des Hadrontensors $W_{\mu\nu}$ mit dem Leptontensor $L^{\mu\nu}$ wird im zweiten Teil gesondert eingegangen.

2.1 DIS und das Parton-Modell

Bei der Beschreibung von Phänomenen in DIS Experimenten steht man grundsätzlich vor dem Problem der Verknüpfung von Bereichen, die der Theorie zugänglichen sind, und solchen, die noch nicht durch theoretische Modelle befriedigend beschrieben werden können. Den störungstheoretischen Zugang zu DIS Experimenten liefert das Parton-Modell der tief-inelastischen Streuung [8, 15]. In diesem Modell wird ein hochenergetisches Hadron als ein Verbund von Substituenten, den Partonen, angesehen, die sich innerhalb der Grenzen des Hadrons kräftefrei bewegen. Tritt ein solches Hadron durch Austausch eines Vektorbosons in Wechselwirkung mit einem Lepton, so wird diese Wechselwirkung nicht als Lepton-Hadron-Streuung betrachtet, sondern als Streuung an einem Parton innerhalb des Hadrons. Die asymptotischen Freiheit der QCD [9] gewährleistet dabei, daß die Kopplung α_s klein und somit die Störungstheorie anwendbar ist. Durch die hohe Schwerpunktsenergie des Hadron-Lepton-Systems wird die Zeitspanne, während der die Wechselwirkung stattfinden kann, sehr kurz und unterbindet somit Mehrfachstreuung innerhalb des Hadrons. Der störungstheoretisch zugängliche Streuprozeß stellt sich also als eine inkohärente Summe der Einzelstreuungen des übertragenen Vektorbosons an den Partonen des Hadrons dar [25].
Der Teil, der der Theorie nicht zugänglich ist, die Einbindung der Partonen in den Hadronverbund und die Umwandlung des gestreuten Partons in ein Hadron, wird durch zwei universelle Funktionen, die PDF's und FF's beschrieben. Der experimentell meßbare, differentielle Wirkungsquerschnitt ergibt sich schließlich aus einer Faltung der PDF's und FF's mit dem perturbativen, harten Streuprozeß

$$d\sigma \;=\; \sum_{a,b} \int \bar{f}_{P\to p_i}(\xi) \times \sigma_i \times \bar{D}^{P'}_{p_b}(\xi') \tag{2.1}$$

Dabei beschreibt die unrenormierte PDF $\bar{f}_{P\to p_i}(\xi)$ ein Parton p_i im einlaufenden Hadron mit Impulsanteil $\xi = \frac{p_i}{P}$ am Impuls P des Hadrons zu finden. Entsprechend erhält man aus der unrenormierten FF $\bar{D}_{p_b\to P'(\xi')}$ die Wahrscheinlichkeit, mit der sich ein auslaufendes Parton p_b in ein Hadron P' mit Impulsanteil $\xi' = \frac{P}{p_b}$ am Impuls des auslaufenden Partons umwandelt. Die Summation erfolgt über alle ein- und auslaufenden Partonen. Der harte Streuquerschnitt wird als σ_i bezeichnet.

Im folgenden bezeichnen k, k' und $q = k - k'$ die Impulse des ein- bzw. auslaufenden Elektrons und des virtuellen Photons, wobei für letzteres gilt: $-q^2 = Q^2 > 0$. Es seien weiterhin P der Impuls des einlaufenden Protons, $p_a = \xi P$ und p_b die Impulse des ein- bzw. auslaufenden, gestreuten Partons. Das detektierte Meson besitzt den Impuls $P' = \xi' p_b$
Für ein DIS-Ereignisse der Art

$$e^- + p \quad \rightarrow \quad e^- + h + X \tag{2.2}$$

verwendet man üblicherweise den Satz von Bjorken-Variablen x_{Bj}, y und Z

$$x_{Bj} = \frac{Q^2}{2Pq}, \quad y = \frac{Pq}{Pk} \quad Z = \frac{PP'}{Pq}$$

sowie die Größen p_T, Φ und S. Durch den Winkel Φ ist die Orientierung des auslaufenden Leptons zum hadronischen System gegeben, p_T steht für den Transversalimpuls des auslaufenden Teilchens relativ zur z-Achse und S bezeichnet die Schwerpunktsenergie (vgl.Abbildung 1).

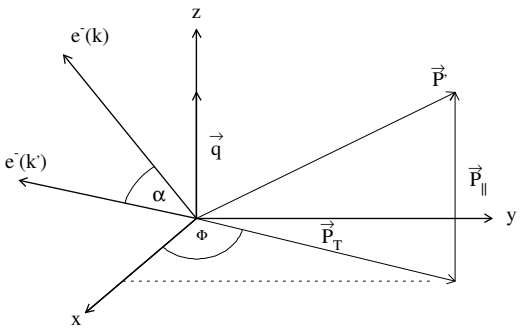

Abbildung 1: Die Kinematik im Hadron-Photon-Schwerpunktsystem

Der harte Wirkungsquerschnitt σ_i wird allgemein durch die Gleichung

$$d\sigma_{ab} \quad = \quad \frac{1}{\text{Fluß}} \left| \bar{M}(e^+ p_a \rightarrow e^+ + p_b + X) \right|^2 d\,PS \tag{2.3}$$

beschrieben. Hier bezeichnet wie in der Hochenergiephysik üblich Fluß den Flußfaktor, $\left|\bar{M}\right|$ die Summe der den Streuprozeß beschreibenden Matrixelemente und PS den Phasenraum der

beteiligten Teilchen. Abbildung 2 verdeutlicht die Einbettung des harten, partonischen Subprozesses in die experimentelle Lepton-Hadron-Streuung.

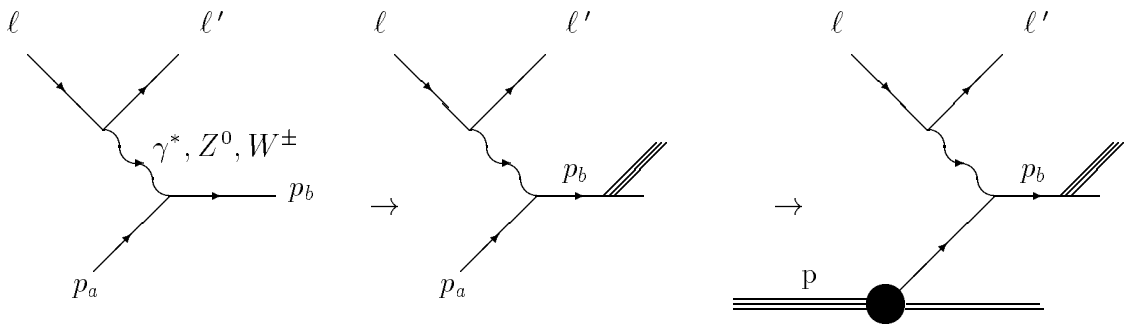

Abbildung 2: Der Streuprozeß in DIS

Für die Schwerpunktsenergie S des Hadron-Elektron-Systems und die invariante Masse des Hadron-Photon-Systems W findet man die Beziehungen

$$\begin{aligned} S &= (P+k)^2 \\ Q^2 &= S x_{Bj} y \\ W^2 &= (P+q)^2 = S(1-x_{Bj})y \end{aligned} \tag{2.4}$$

Analog gilt für die partonischen Subprozesse

$$\begin{aligned} x &= \frac{Q^2}{2p_a q} = \frac{Q^2}{2\xi P q} = \frac{x_{Bj}}{\xi} \\ y &= \frac{p_a q}{p_a k} = y \\ z &= \frac{p_a p_b}{p_a q} = \frac{1}{\xi'} Z \end{aligned} \tag{2.5}$$

2.2 Die Tensorstruktur des Streuquerschnitts

Da sich aufgrund der ausgedehnten Struktur des Protons die Lepton-Nukleon-Streuung nicht als Streuung zweier Punktteilchen beschreiben läßt, macht man für Gleichung (2.2) in der tief-inelastischen Streuung folgenden Ansatz [19, 25]

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{1}{\text{Fluß}} \left| \bar{M}(e^+ p \to e^+ + h + X) \right|^2 d\,PS \\ &= \frac{1}{4\sqrt{p_0 k}} \frac{1}{4(Q^2)^2} dPS^{(l)} L^{\ell}_{\mu\nu} W^{\mu\nu} \end{aligned} \tag{2.6}$$

$4\sqrt{p_0 k}$ ist der Flußfaktor und $\frac{1}{4(Q^2)^2}$ der Photonpropagator, gemittelt über die Spins der einlaufenden Teilchen. $dPS^{(l)}$ bezeichnet den Phasenraum des Leptons und $L^{\ell}_{\mu\nu}$, $W^{\mu\nu}$ sind wie in der HEP üblich der Lepton- bzw. Hadron-Tensor.
Der Leptontensor $L^{\ell}_{\mu\nu}$ beschreibt die Streuung des Leptons und nimmt keinen Einfluß auf den Hadronischen Endzustand. Für den Lepton-Tensor gilt

$$\begin{aligned} L^{\ell}_{\mu\nu} &= 4e^2\mu^{2\epsilon} Tr[\not{k}'\gamma^{\mu}\not{k}\gamma^{\nu}] = 4e^2\mu^{2\epsilon}(k^{\mu'}k^{\nu} + k^{\nu'}k^{\mu} - k'k g^{\mu\mu}) \\ &= 4e^2\mu^{2\epsilon} l^{\ell}_{\mu\nu} \end{aligned} \tag{2.7}$$

Der Lepton-Phasenraum in d-Dimensionen lautet

$$\begin{aligned} dPS^{(l)} &= \frac{d^d\ell'}{(2\pi)^{d-1}}\delta(\ell'^2) \\ &= \frac{(Q^2\pi(1-y))^{-\epsilon}}{(2\pi)^{d-1}} \frac{\pi}{\Gamma(1-\epsilon)} \frac{ys}{2} dy\, dx \frac{d\Phi}{N} \end{aligned} \tag{2.8}$$

Hierbei beschreibt Φ die Polarwinkel des auslaufenden Leptons und N ist ein Normierungsfaktor, der folgender Gleichung genügt

$$\int d\Phi = N$$

Der Hadrontensor $W^{\mu\nu}$ läßt sich darstellen als Produkt aus N-Teilchen Phasenraum und dem Übergangsamplitudenquadrat, summiert über die Zahl der Endzustände

$$W^{\mu\nu} = \sum_N d^{d,N} PS^{(N)}\, H_{\mu\nu} \tag{2.9}$$

Dabei bezeichnet $d^n PS^{(N)}$ den Lorentz-invarianten N-Teilchen Phasenraum in d Dimensionen

$$dPS^{d,N} = (2\pi)^d \left(\prod_{i=1}^{N} \frac{d^d p_i \delta(p_i^2)}{2\pi^{d-1}} \right) \delta^d(p + q - \sum_{i=1}^{N} p_i) \tag{2.10}$$

Wird dies in (2.5) eingesetzt und die Feinstrukturkonstante $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$ verwendet, so erhält man für den differentiellen Wirkungsquerschnitt

$$\frac{ds}{dx\, dy} = (4\pi^2)^{\epsilon-2} \alpha \mu^{2\epsilon} \frac{1}{s} \frac{1}{Q^4} (2\pi)^{d-1} dPS^l l^{\ell}_{\mu\nu} W^{\mu\nu} \tag{2.11}$$

Bettet man den partonischen Subprozeß noch in den Hadronischen Gesamtprozeß ein, faltet also das Ergebnis (2.11) mit den PDF's und FF's, so folgt für den Wirkungsquerschnitt

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dx dy} &= \sum_i \int_x^1 d\xi \bar{f}_{P\to p_i}(\xi)\delta(x - \xi x) \int_z^1 d\xi' \bar{D}^{P'}_{p_b}(\xi')\delta(z - \xi' z) \frac{ds}{dx\, dy} \\ &= \sum_i \int_x^1 dx \int_z^1 dz \frac{\bar{f}_{P\to p_i}(\xi)}{\xi} \frac{\bar{D}^{P'}_{p_b}(\xi')}{\xi'} \\ &\qquad (4\pi^2)^{\epsilon-2} \alpha \mu^{2\epsilon} \frac{1}{s} \frac{1}{Q^4} (2\pi)^{d-1} dPS^l l^{\ell}_{\mu\nu} W^{\mu\nu} \end{aligned} \tag{2.12}$$

Bevor im nächsten Abschnitt die Kontraktion des Lepton- und des Hadrontensors genauer eingegangen wird, sei hier noch angemerkt, daß sich der Hadrontensor für vollständig inklusive Reaktionen auf folgende Weise darstellen läßt

$$\widehat{W}^{\mu\nu} = \mathcal{F}_1(x,Q^2)\left(-g^{\mu\nu}+\frac{q^\mu q^\nu}{q^2}\right)+\mathcal{F}_2(x,Q^2)\frac{x}{pq}\left(p^\mu+\frac{pq}{Q^2}q^\mu\right)\left(p^\nu+\frac{pq}{Q^2}q^\nu\right) \quad (2.13)$$

In der allgemeinsten Form ist noch eine Komponente $\mathcal{F}_3$ vorhanden, die jedoch für nicht-paritätsverletzende Prozesse, wie dem Photonaustausch, verschwindet. Setzt man

$$\mathcal{F}_L = (1-\epsilon)(\mathcal{F}_2-\mathcal{F}_1) \quad (2.14)$$

so kann der Wirkungsquerschnitt für vollständig inklusive Reaktionen als eine Kombination zweier Strukturfunktionen dargestellt werden, die in der Literatur als $\mathcal{F}_2$ und $\mathcal{F}_L$ bekannt sind.

$$\frac{d^2\sigma}{dx\,dy} = \left(\frac{Q^2(1-y)}{4\pi}\right)^{-\epsilon}\frac{1}{\Gamma(1-\epsilon)}\frac{2\pi\alpha^2}{Q^4}s \left([1+(1-y)^2]\mathcal{F}_2(x,Q^2)-y^2\mathcal{F}_L(x,Q^2)\right) \quad (2.15)$$

2.3 Der Wirkungsquerschnitt für inklusive Reaktionen

Durch Integration der Winkelfreiheitsgrade Φ läßt sich das Produkt aus Lepton- und Hadrontensor in Anteile bezüglich unterschiedlicher Polarisationen des Photons zerlegen. Es läßt sich zeigen, daß folgende Zerlegung des Leptontensors nach Integration der Winkelfreiheitsgrade stets möglich ist [26]

$$\frac{1}{Q^2}\frac{1}{N}\int d\Phi l^{\mu\nu} = \frac{1+(1-y)^2-\epsilon y^2}{2(1-\epsilon)y^2}(-g^{\mu\nu}-\epsilon_q^{\mu\nu})+ \frac{4(1-\epsilon)(1-y)+1+(1-y)^2-\epsilon y^2}{2(1-\epsilon)y^2}(\epsilon_R^{\mu\nu}-\epsilon_0^{\mu\nu}). \quad (2.16)$$

Die darin auftretenden Größen sind folgendermaßen definiert

$$\epsilon_q^{\mu\nu} = \frac{1}{Q^2}q^\mu q^\nu \quad (2.17)$$

$$\epsilon_R^{\mu\nu} = \frac{1}{Q^2}\left(q^\mu q^\nu+2x(p_0^\mu q^\nu p_0^\nu)\right) \quad (2.18)$$

$$\epsilon_0^{\mu\nu} = \frac{4x_p^2}{Q^2}p_0^\nu p_0^\nu \quad (2.19)$$

Mit den Bezeichnungen

$$h_g := (-g^{\mu\nu})H_{\mu\nu} \quad (2.20)$$

$$h_0 := (\epsilon_0^{\mu\nu})H_{\mu\nu} \quad (2.21)$$

und der aufgrund der Stromerhaltung geltenden Identität

$$\epsilon_q^{\alpha\mu} H_{\mu\nu} = \quad \epsilon_R^{\alpha\mu} H_{\mu\nu} \quad = 0 \tag{2.22}$$

findet man schließlich für die Kontraktion der beiden Tensoren

$$\begin{aligned}
\frac{1}{Q^2}\frac{1}{N}\int d\Omega l^{\mu\nu} H_{\mu\nu} &= \frac{1+(1-y)^2-\epsilon y^2}{2(1-\epsilon)y^2}(-g_{\mu\nu})H^{\mu\nu} + \\
&\quad \frac{4(1-\epsilon)(1-y)+1+(1-y)^2-\epsilon y^2}{2(1-\epsilon)y^2}\epsilon_0^{\mu\nu} H^{\mu\nu} \\
&= \frac{1+(1-y)^2-\epsilon y^2}{2(1-\epsilon)y^2} h_g + \\
&\quad \frac{4(1-\epsilon)(1-y)+1+(1-y)^2-\epsilon y^2}{2(1-\epsilon)y^2} h_0 \\
&= \frac{1+(1-y)^2-\epsilon y^2}{2(1-\epsilon)y^2}(-g_{\mu\nu}+\epsilon_0)H^{\mu\nu} + \\
&\quad \frac{4(1-\epsilon)(1-y)}{2(1-\epsilon)y^2}\epsilon_0^{\mu\nu} H^{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{2.23}$$

In dieser Gleichung beschreibt der Metrische Tensor $g_{\mu\nu}$ eine Überlagerung longitudinaler und transversaler Polarisationsfreiheitsgrade des einlaufenden Photons, $\epsilon_0^{\mu\nu}$ rein longitudinale Polarisation. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wurde der Phasenraum sowie das Summationszeichen aus Gleichung 2.9 weggelassen. Das Zwischenergebnis in Gleichung (2.23) wurde angegeben, um die Äquivalenz der möglichen Zerlegungen zu zeigen. Eine neben der Zerlegung in h_g und h_0 gebräuchliche Konvention ist auch, den Wirkungsquerschnitt nach den Größen

$$\begin{aligned}
h_u &= H_{\mu\nu}(-g_{\mu\nu}+\epsilon_0^{\mu\nu}) \\
h_L &= \frac{1}{2} H_{\mu\nu}\epsilon_0^{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{2.24}$$

aufzuteilen [23, 28].
Setzt man die Gleichungen (2.7, 2.11 und 2.23) in Gleichung(2.12) ein, so ergibt sich schließlich

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma}{dxdy} &= \sum_i \int_x^1 d\hat{x} \int_z^1 dz \frac{\bar{f}_{P\to p_i}(\xi)}{\xi}\frac{\bar{D}_{p_b}^{P'}(\xi')}{\xi'} \\
&\quad \times \left(\frac{(4\pi)^\epsilon (Q^2(1-y))^{-\epsilon}}{\Gamma(1-\epsilon)}\right)\alpha\mu^{2\epsilon}\frac{1}{Q^2}\frac{1}{s} dPS^{(d,N)} \\
&\quad \times \left(\frac{1+(1-y)^2-\epsilon y^2}{2(1-\epsilon)y^2} h_g \right. \\
&\quad \left. + \frac{4(1-\epsilon)(1-y)+1+(1-y)^2-\epsilon y^2}{2(1-\epsilon)y^2} h_0\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
= & \sum_i \int_x^1 d\hat{x} \int_z^1 dz \frac{\bar{f}_{P\to p_i}(\xi)}{\xi} \frac{\bar{D}_{p_b}^{P'}(\xi')}{\xi'} dPS^{(d,N)} \\
& \times \left(\frac{(4\pi)^\epsilon (Q^2(1-y))^{-\epsilon}}{\Gamma(1-\epsilon)} \right) \alpha \mu^{2\epsilon} \frac{1}{Q^2} \frac{1}{s} \\
& \times \Big([1+(1-y)^2] h_u - y^2 h_L \Big)
\end{aligned} \tag{2.25}
$$

In Rechnungen führender Ordnung sind die Beiträge σ_L schon länger bekannt [23, 29] und werden in dieser Ordnung mitberücksichtigt. Bei diesen Rechnungen in höherer Ordnung in QCD wird nur den Beitrag unpolarisierter Photonen betrachtet, weshalb ab hier für die Polarisation des virtuellen Photons

$$
\sum_\lambda \epsilon_\mu(\lambda) \epsilon_\nu^*(\lambda) \quad = \quad -g_{\mu\,\nu} \tag{2.26}
$$

verwendet wird.

3 Die Born-Beiträge

An dieser Stelle wird der Wirkungsquerschnitt in führender Ordnung (LO) berechnet. Da zur Ordnung $\mathcal{O}(\alpha)$ für nicht-verschwindende P_T keine Beiträge auftreten, werden im folgenden die Beiträge zur Ordnung $\mathcal{O}(\alpha\alpha_s)$ als Leading-Order(LO)-Beiträge bzw. Born-Beiträge bezeichnet. Für $P_T \neq 0$ treten in DIS keine Singularitäten auf, sodaß die entsprechenden Beiträge nicht regularisiert werden müssen. Dennoch erhält man eine Skalenabhängigkeit durch das Vorhandensein einer freien Skala μ in der starken Kopplung α_s. In führender Ordnung ist α_s durch die folgende Gleichung gegeben:

$$\begin{aligned} \alpha_s(\mu^2) &= \frac{g_s^2}{4\pi} = \frac{4\pi}{\beta_0 \log(\frac{\mu^2}{\Lambda^2_{QCD}})} \\ \beta_0 &= 11 - \frac{2}{3} n_f \end{aligned} \tag{3.1}$$

n_f bezeichnet die Anzahl der aktiven Quark-Flavours und β_0 den führenden Term in der Entwicklung der β-Funktion. Die Skala μ ist generell unbestimmt, doch in Hinblick auf die spätere Renormierung in den Beiträgen höherer Ordnung wählt man für μ die größte, dem betrachteten Prozeß zugrundeliegende Impulsskala.
Im folgenden wird zunächst den Phasenraum und die Kinematik für $2 \to 2$ Prozesse erläutert. Danach wird auf die Matrixelemente der Bornprozesse sowie den Hadronischen Wirkungsquerschnitt eingegangen.

3.1 Der $2 \to 2$ Phasenraum

Die partonischen Subprozesse für die Quark-Photon-Streuung $\gamma + q \to q + g$ bzw. $\gamma + \bar{q} \to \bar{q} + g$ sowie die Boson-Gluon-Fusion $\gamma \oplus g \to q + /\bar{q}$, bei der ein Gluon durch den Zerfall in ein Quark-Antiquark-Paar mit dem Photon in Wechselwirkung tritt (vgl Abb. 3), werden durch den 2-Teilchen Phasenraum beschrieben. Dieser ergibt sich aus Gleichung 2.10 zu [19, 27]

$$dPS^{(2)} = V(\epsilon)\,\frac{1}{8\pi} dz \tag{3.2}$$

mit

$$V(\epsilon) = \frac{(4\pi)^\epsilon}{\Gamma(1-\epsilon)} \left(Q^2 \frac{x_{Bj} - x_{Bj}x}{x_{Bj}x} \right)^{-\epsilon} (z(1-z))^{-\epsilon} \tag{3.3}$$

Da keine Winkelabhängigkeit vom Azimutwinkel Φ betrachtet wird, wurde dieser Winkel bereits ausintegriert (vgl. Abb. 1).
Obwohl in LO keine Regularisierung notwendig ist, wird aus Konsistenzgründen schon jetzt den Phasenraum in $4 - 2\epsilon$ Dimensionen definiert.
Den hadronischen Wirkungsquerschnitt erhält man aus der Faltung der partonischen Prozesse mit den PDF's und FF's. Dabei sind allerdings noch kinematische Beschränkungen an den Transversalimpuls der auslaufenden Teilchen zu beachten.

Werden zunächst den partonischen Subprozeß $p_a + \gamma \to p_b$ betrachtet, so findet man mit den Bezeichnungen aus Kapitel 2.2

$$\begin{aligned} (p_a + q)^2 &= s = p_b^2 \\ q^2 + 2p_a q &= -Q^2 + xQ^2 = 0 \\ x &= \frac{Q^2}{2p_a q} = 1 \qquad (3.4) \\ u &= (p_a - p_b)^2 = (-q)^2 \\ z &= \frac{p_a p_b}{p_a q} = 1 \qquad (3.5) \end{aligned}$$

Somit folgt für den Wirkungsquerschnitt zur $\mathcal{O}(\alpha)$

$$\frac{d\sigma}{dp_T dx dz} \sim \delta(p_T)\ \delta(x-1)\ \delta(z-1) \qquad (3.6)$$

Dieser liefert also keinen Beitrag für nicht-verschwindende P_T (siehe Gleichung 3.8).
In Prozesse der $\mathcal{O}(\alpha\alpha_s)$, also eine Parton-Photon-Fusion unter Produktion eines zusätzlichen Gluons, wird das inklusives Hadron im Endzustand nur mit einen nicht-verschwindenden Transversalimpuls P_T' im $\gamma-$Hadron Schwerpunktsystem produziert. Nach kurzer Rechnung läßt sich zeigen:

$$\begin{aligned} stu &= p_T^2 (s + Q^2)^2 \\ \Rightarrow p_T^2 &= \frac{stu}{(s+Q^2)^2} \qquad (3.7) \end{aligned}$$

Mit den Größen x, z und Q^2 liefert Gleichung [3.7]

$$p_T^2 = \frac{Q^2 z(1-x)(1-z)}{x} \qquad (3.8)$$

Somit gilt für den partonischen Wirkungsquerschnitt in LO

$$\frac{d\sigma}{dp_T dx dz} \sim \delta\left(\mathbf{p_T}^2 - \frac{Q^2 z(1-x)(1-z)}{x}\right) \qquad (3.9)$$

An x und z sind dabei keine weiteren Forderungen gestellt, außer daß sie im Intervall [0:1] liegen.

3.2 Die partonischen Born-Prozesse

Auf Born-Niveau tragen die partonischen Prozesse aus Abbildung 3 zur Streuung bei.
Die Lepton-Streuung erfolgt in einen Phasenraum, welcher durch die Parameter y und z ausgedrückt wird. Der Gesamtprozeß läßt sich, wie in Kapitel 2.3 beschrieben, in einen leptonischen- und hadronischen Teil separieren. Da der harte Subprozeß unabhängig von der Leptonstreuung

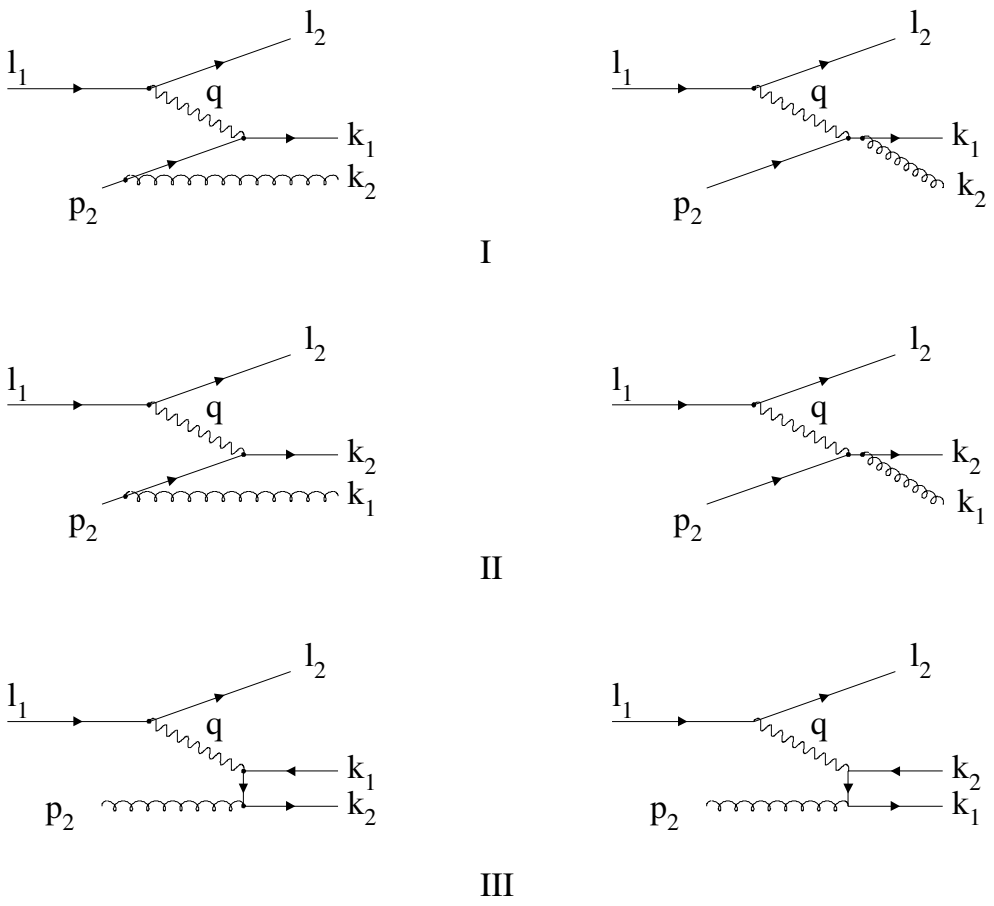

Abbildung 3: Die partonischen Born-Prozesse

ist (vorausgesetzt, die kinematischen Größen für das ausgetauschte Photon sind bekannt), werden im folgenden nur noch die partonischen Subprozesse betrachtet.
Auf Born-Niveau findet man grundsätzlich zwei verschieden Arten von Streuprozessen, solche mit einlaufendem Gluon und solche mit einlaufendem Quark. Für die dabei auftretenden Symmetriefaktoren gilt:

- einlaufendes Photon $\frac{1}{2(1-\epsilon)}$
- einlaufendes Gluon $\frac{1}{4\,N_c\,C_f(1-\epsilon)}$
- einlaufendes Quark $\frac{1}{2\,N_c}$
- N gleiche Teilchen im Endzustand $\frac{1}{N!}$

Hierbei ist $N_c = 3$ die Anzahl der Colours und $C_f = \frac{(N_c^2-1)}{2N_c} = \frac{4}{3}$ der Colour-Faktor. Der sich aus den oben genannten Regeln ergebenden Symmetriefaktor zusammen mit der starken Kopplung des entsprechenden Prozesses wird im folgenden mit S_{xy} bezeichnet.

Die Übergangsamplituden für einlaufende Antiquarks entsprechen denen für einlaufende Quarks. Zu Beachten ist, daß der Prozeß zur Ordnung $\mathcal{O}(\alpha_s)$ der erste ist, bei dem die Gluonen einen Beitrag zum Wirkungsquerschnitt liefern.
Abgesehen von Symmetriefaktoren und Kopplungen findet man für die Amplitudenquadrate im Falle des einlaufenden Quarks

$$\gamma(q) + q(p_{q,i}) \quad \rightarrow \quad q(p_{q,f}) + g(p_{g,f}) \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned} \sigma^B_{\gamma q} &= S_{q,\gamma}\, 8 \left\{ (1-\epsilon) \left(\frac{(p_{q,i} - p_{g,f})^2}{(p_{q,f} + p_{g,f})^2} + \frac{(p_{q,f} + p_{g,f})^2}{(p_{q,i} - p_{g,f})^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{2Q^2 (p_{q,i} - p_{q,f})^2}{(p_{q,i} - p_{g,f})^2 (p_{q,f} + p_{g,f})^2} + 2\epsilon \right\} \end{aligned} \tag{3.11}$$

Für ein einlaufendes Gluon gilt

$$\gamma(q) + g(p_{g,i}) \quad \rightarrow \quad q(p_{q,f}) + \bar{q}(p_{\bar{q},f}) \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned} \sigma^B_{\gamma g} &= S_{g,\gamma}\, 8 \left\{ (1-\epsilon) \left(\frac{(p_{g,i} - p_{q,f})^2}{(p_{g,i} - p_{\bar{q},f})^2} + \frac{(p_{g,i} - p_{\bar{q},f})^2}{(p_{g,i} - p_{q,f})^2} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{2Q^2 (p_{q,f} + p_{\bar{q},f})^2}{(p_{g,i} - p_{q,f})^2 (p_{gi} - p_{\bar{q},f})^2} - 2\epsilon \right\} \end{aligned} \tag{3.13}$$

Drückt man die Matrixelemente durch die Mandelstammvariablen s, t und u bzw. die gebräuchlichen Größen x und z aus, so finden wir

- einlaufendes Quark - fragmentierendes Quark

$$\begin{aligned} M_{q \rightarrow q} &= S_{q,\gamma}\, 8(1-\epsilon) \left\{ (1-\epsilon) \left(-\frac{t}{s} - \frac{s}{t} \right) + \frac{2Q^2 u}{st} + 2\epsilon \right\} \\ &= S_{q,\gamma}\, 8\,(1-\epsilon) \left\{ (1-x)(1-z) - 2xz + \right. \\ &\quad \left. \frac{1 + x^2 z^2}{(1-x)(1-z)} - \frac{(x-z)^2}{(1-x)(1-z)} \epsilon \right\} \\ S_{q,\gamma} &= \frac{N_c C_f\, 4\pi \alpha_s \mu^{2\epsilon}}{4 N_c\,(1-\epsilon)} = \frac{C_f \pi \alpha_s \mu^{2\epsilon}}{(1-\epsilon)} \end{aligned} \tag{3.14}$$

- einlaufendes Quark - fragmentierendes Gluon

$$\begin{aligned} M_{q\to g} &= S_{q,\gamma}\, 8\,(1-\epsilon)\left\{(1-\epsilon)\left(-\frac{u}{s}-\frac{s}{u}\right)+\frac{2Q^2t}{su}+2\epsilon\right\} \\ &= S_{q,\gamma}\, 8\,(1-\epsilon)\left\{(1-x)z-2x(1-z)+\frac{1+x^2(1-z)^2}{(1-x)z}\right. \\ &\quad \left.+\frac{(z+x)^2-2x-2z+1}{(x-1)z}\epsilon\right\} \\ S_{q,\gamma} &= \frac{N_c C_f\, 4\pi\alpha_s\mu^{2\epsilon}}{4N_c\,(1-\epsilon)} = \frac{C_f\,\pi\alpha_s\mu^{2\epsilon}}{(1-\epsilon)} \end{aligned} \tag{3.15}$$

- einlaufendes Gluon - fragmentierendes Quark/Antiquark

$$\begin{aligned} M_{g\to q} &= S_{g,\gamma}\, 8\,(1-\epsilon)\left\{(1-\epsilon)\left(\frac{u}{t}+\frac{t}{u}\right)-\frac{2Q^2s}{tu}-2\epsilon\right\} \\ &= S_{g,\gamma}\, 8\,(1-\epsilon)\left\{\left(x^2+(1-x^2)\right)\frac{z^2+(1-z^2)}{z(1-z)}\right. \\ &\quad \left.-4x(1-x)+\frac{\epsilon}{(z-1)z}\right\} \\ S_{g,\gamma} &= \frac{N_c C_f\, 4\pi\alpha_s\mu^{2\epsilon}}{8N_c C_f\,(1-\epsilon)^2} = \frac{\pi\alpha_s\mu^{2\epsilon}}{2(1-\epsilon)} \end{aligned} \tag{3.16}$$

3.3 Der Wirkungsquerschnitt auf Born-Niveau

Der differentielle Wirkungsquerschnitt für den Gesamtprozeß ergibt sich aus der Überschiebung des partonischen Wirkungsquerschnitts mit dem Leptontensor und einer anschließenden Faltung mit den PDF's und den FF's. Dieser Wirkungsquerschnitt lautet [23]

$$\frac{d\sigma^{ep}}{dx_{Bj}\,dy\,dZ\,dP_T\,d\Phi} = (A_0+A)+B\cos\Phi+C\cos 2\Phi \tag{3.17}$$

A_0 ist der Beitrag $\mathcal{O}(\alpha_s)$, der für endliche P_T verschwindet. Bei Integration über Φ verschwinden ebenfalls die Beiträge B und C. Danach gilt für den Wirkungsquerschnitt

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma^{ep}}{dx_{Bj}\,dy\,dZ\,dP_T} &= \frac{\alpha^2}{4\pi Q^2}\int_x^1\frac{dx}{x}\int_z^1\frac{dz}{z}\times\delta\left(P_T^{'}-\sqrt{\frac{Q^2z^2(1-z)(1-x)}{xz}}\right) \\ &\quad \sum_{i=I}^{III}(4(1-y)M_i^L+\left[1+(1-y)^2\right](M_i^{g_{\mu\nu}}+M_i^L))\times H_i \end{aligned} \tag{3.18}$$

$M^{g_{\mu\nu}}_{i=q\to q,q\to g,g\to q}$ bezeichnet die im letzten Abschnitt berechneten, quadrierten und mit $(-g^{\mu\nu})$ kontrahierten Matrixelemente für die Prozesse I, II und III aus Abbildung 4.

$M^L_{i=I,II,III}$ sind die longitudinalen Anteile

$$\begin{aligned} M^L_{q\to q} &= 2xz \\ {}_qM^L_{q\to g} &= 2x(1-z) \\ M^L_{g\to q} &= 4x(1-x) \end{aligned} \tag{3.19}$$

Die Funktionen $H_{i=I,II,III}$ enthalten die entsprechenden Kombinationen von PDF's und FF's. Mit $f^R_{P\to q_i}(\xi) := f_{q_i}(\xi)$ und $D^R_{q_b\to P'}(\xi') := D_{q_b}(\xi')$

$$\begin{aligned} H_I &= \frac{1}{9}\,(4(f_u(\xi)\,D_u(\xi') + f_{\bar u}(\xi)\,D_{\bar u}(\xi') + f_c(\xi)\,D_c(\xi') + f_{\bar c}(\xi)\,D_{\bar c}(\xi')) \\ &\quad + f_d(\xi)\,D_d(\xi') + f_{\bar d}(\xi)\,D_{\bar d}(\xi') + f_s(\xi)\,D_s(\xi') + f_{\bar s}(\xi)\,D_{\bar s}(\xi')) \\ H_{II} &= \frac{1}{9}\,(4(f_u(\xi) + f_{\bar u}(\xi) + f_c(\xi) + f_{\bar c}(\xi)) + f_d(\xi) + f_{\bar d}(\xi) + f_s(\xi) + f_{\bar s}(\xi))\; D_g(\xi') \\ H_{III} &= \frac{1}{9}\,(4(D_u(\xi') + D_{\bar u}(\xi') + D_c(\xi') + D_{\bar c}(\xi')) \\ &\quad + D_d(\xi') + D_{\bar d}(\xi') + D_s(\xi') + D_{\bar s}(\xi'))\; f_g(\xi) \end{aligned} \tag{3.20}$$

Auf Born-Niveau ist es ausreichend, die Formeln in 4 Dimensionen zu berechnen, da ein endliches P_T den Prozeß regularisiert, sodaß keine Singularitäten auftreten. Für eine ausführlichere Diskussion der Born-Resultate wird auf die Arbeiten [23, 29] verwiesen.
In späteren Rechnungen wird der Wirkungsquerschnitt stets auf den totalen Wirkungsquerschnitt zur $\mathcal{O}(\alpha)$ normiert werden. Für diesen Prozeß gilt

$$\frac{d\sigma_{tot}}{dx_{Bj}\,dy} = (1+(1-y)^2)\,2\,S\,\frac{\alpha^2\pi}{Q^4}\mathcal{F}_2(x_{Bj}) \tag{3.21}$$

mit

$$\mathcal{F}_2(x_{Bj}) = x_{Bj}\sum_{k=-n_f}^{n_f} f_k(x_{Bj}) \tag{3.22}$$

Streng genommen sollten hierbei die LO PDF's bei der Normierung von Born-Prozessen sowie die NLO PDF's bei der Normierung von NLO Rechnungen verwendet werden. Da sich aber herausstellt, daß die Unterschiede in diesem Prozeß bei Verwendung von PDF-Sets unterschiedlicher Ordnung sehr gering sind, werden hier stets die LO PDF's verwendet.

4 Die Korrekturen zur Ordnung $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$

Der Hauptteil der Arbeit besteht in der Berechnung der Korrekturen zum Born-Prozeß, welche proportional zu α_s^2 sind. Es existieren zwei grundsätzlich verschiedene Arten von Korrekturen zur $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$, die virtuellen und reellen Beiträge.
Die virtuellen Korrekturen ergeben sich aus Multiplikation von LO-Born-Graphen mit Selbstenergie-Diagrammen unb Vertexkorrekturen mit den LO Born-Prozessen. Beispiele für solche Korrekturen zeigen die Abbildungen 5.a und 5.b.
Bei den reellen Korrekturen findet man drei Arten von Beiträge, die in den Abbildungen 6 und 7 dargestellt sind. Es handelt sich dabei um Streuungen mit einlaufendem Quark und zwei Gluonen und einem Quark im Endzustand, die in Abbildung 6 dargestellt sind. Abbildung 7 zeigt Prozesse mit einlaufendem Quark und einem Endzustand, der aus zwei Quarks und einem Antiquark besteht. Ferner müssen noch die Streuungen mit einlaufendem Antiquark bzw. Gluon berücksichtigt werden. Diese sind hier nicht gesondert aufgeführt, da sie sich aus dem Kreuzen des einlaufenden Quarks mit einem auslaufenden Quark bzw. Gluon ergeben.
Das Kapitel gliedert sich folgendermaßen: zu Beginn wird auf die Problematik der in Rechnungen höherer Ordnung in der QCD auftretenden Singularitäten eingegangen. Anschließend werden die virtuellen Korrekturen vorgestellt, bevor zur Diskussion der reellen Korrekturen übergegangen wird.

4.1 Singularitäten und Faktorisierung

Ein grundsätzliches Problem aller Rechnungen in höherer Ordnung der QCD ist das Auftauchen von Singularitäten. Solche Singularitäten entstehen, wenn der reelle Endzustand aus mehr als 2 Partonen besteht. Betrachtet man als Beispiel den in Abbildung 4 dargestellten Teilprozeß, in dem ein einlaufendes Quark mit Impuls q ein Gluon mit Impuls k emittiert, so gilt für den Propagator

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{(q-k)^2} = \frac{1}{-2qk} \\ &= \frac{1}{2q_0k_0(1-\cos\theta)} \end{aligned} \tag{4.1}$$

für den Fall masseloser Quarks und Gluonen. An diesem Propagator ist zu erkennen, daß er divergiert, falls $\cos\theta = 1$ wird und k_0 verschwindet. Im ersten Fall spricht man von einer kollinearen Singularität, da sie auftritt, wenn sich zwei Teilchen parallel bewegen. Der letzte Fall wird in der Literatur als Infrarot(IR)- oder auch als softe Singularität bezeichnet. Diese kann nur auftreten, wenn das betrachtete Teilchen ein Gluon ist. Aufgrund der Struktur dieser Pole ergibt sich selbst bei verschwindenden Quarkmassen $q_0 = 0$ keine Singularität. Bei inklusiver Einteilchenproduktion in der QCD tauchen diese Singularitäten auch schon in der Ordnung $\mathcal{O}(\alpha_s)$ auf, jedoch nicht im Falle eines endlichen Transversalimpulses P_T der auslaufenden Teilchen (vgl. Kapitel 3, sowie [23]). Bei 3 Teilchen im Endzustand zeigt eine einfache kinematische Betrachtung, daß hier trotz endlichen P_T-Grenzen Singularitäten auftreten. Zusätzlich zu den

oben genannten reellen Beiträgen tragen in den höheren Ordnungen der QCD auch die bereits erwähnten vituellen Korrekturen bei. Diese Diagramme enthalten sowohl IR- als auch Ultraviolett(UV)- Divergenzen. Die UV-Divergenzen resultieren aus Diagrammen, die Integrale enthalten, welche für große Impulse divergieren. Durch Addition eines Counterterms werden diese Divergenzen in die renormierte Quarkladung, sowie in die renormierten Quark-und Gluonfelder absorbiert, wodurch diese skalenabhängig werden. Nach dieser Renormierung verbleiben auch in den virtuellen Korrekturen nur noch IR-Divergenzen.
Bei vollständiger Ausintegration der auslaufenden Teilchen sagt das aus der QED bekannte Kinoshita-Lee-Nauenberg Theorem voraus [32], daß sich alle Singularitäten wegheben müssen. Dies gilt jedoch nicht für den Fall der inklusiven Prozesse. Es zeigt sich, daß die dort auftretenden Singularitäten bei Addition der virtuellen und reellen Beiträge nicht nicht alle verschwinden. Die konsistente theoretische Behandlung dieses Problems besteht in der Regularisierung der divergenten Ausdrücke und der anschließenden Renormierung. Im ersten Schritt, der Regularisierung, werden die Pole von den endlichen Anteilen extrahiert. In dieser Arbeit wird als Regularisierungsverfahren die dimensionale Regularisierung und das von Buras et al. [30, 31] vorgeschlagene $\overline{\text{MS}}$-Schema verwendet. In der dimensionalen Regularisierung werden alle Rechnungen in $4-2\epsilon$ Dimensionen durchgeführt. Die Singularitäten äußern sich dabei als Pole in $\frac{1}{\epsilon}$ bzw. $\frac{1}{\epsilon^2}$.
Nach erfolgter Regularisierung heben sich die $\frac{1}{\epsilon^2}$ Divergenzen aus den virtuellen Korrekturen mit solchen aus den reellen Beiträgen auf. Ferner werden alle IR-Divergenzen aus den virtuellen Beiträgen durch entsprechende Terme in den reellen Korrekturen kompensiert, sodaß die verbleibenden virtuellen Beiträge endlich und integrabel sind. Das Verschwinden der singulären Beiträge ist am Vergleich der Ergebnisse (4.4) und (4.5) mit jenen aus Anhang (8.5) und (8.6) deutlich zu sehen.
Für die verbleibenden IR-Singularitäten aus den reellen Beiträgen sagt das Faktorisierungstheorem aus [11, 36], daß diese universell sind. Universell bedeutet in diesem Zusammenhang, daß diese Singularitäten in einer Störungsreihe in α_s in jeder Ordnung die gleiche Form besitzen und der Wirkungsquerschnitt in einen endlichen Teil und einen singulären Teil faktorisiert. Der singuläre Anteil ist dabei unabhängig vom betrachteten, partonischen Subprozeß und kann in die PDF's und FF's absorbiert werden. Die Struktur einer kollinearen Singularität in Abbildung 4 dargestellt. Die Singularität wird dabei durch Emission einer parallelen Gluons durch ein einlaufendes Quark hervorgerufen. Der Wirkungsquerschnitt faktorisiert dabei in einen singulären Anteil, symbolisiert durch $\otimes$, und einen LO-Subprozeß. Das einlaufende Quark im faktorisierten LO-Prozeß trägt dabei den Impulsbruchteil z des einlaufenden Quarks im Ausgangsprozeß. Die analytische Form des singulären Anteils sind die sogenannten Altarelli-Parisi-Kerne, welche anschaulich die Wahrscheinlichkeitsdichte angeben, ein Parton j mit Impulsanteil z im einlaufenden Parton zu finden. Diese Terme lauten

$$
\begin{aligned}
P_{q\leftarrow q}(z) &= C_F\left[\frac{1+z}{(1-z)_+}+\frac{3}{2}\delta(1-z)\right] \\
P_{g\leftarrow q}(z) &= C_F\left[\frac{z^2-2z+2}{z}\right]
\end{aligned}
$$

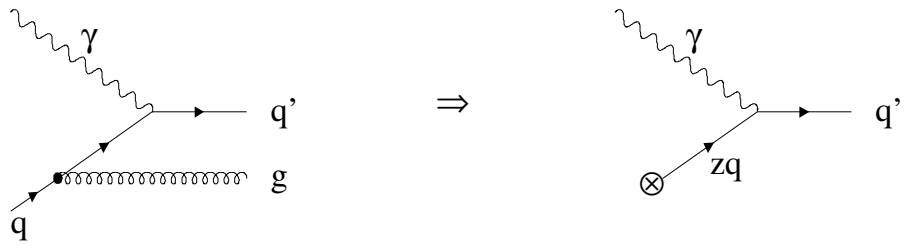

Abbildung 4: Beispiel für eine kollineare Singularität

$$\begin{aligned} P_{q\leftarrow g}(z) &= \frac{1}{2}\left[2z^2-2z+1\right] \\ P_{g\leftarrow g}(z) &= 2N_C\left[\frac{1}{(1-z)_+}+\frac{1}{z}+z(z-1)-2\right]+\left[\frac{11}{6}N_C-\frac{1}{3}N_f\right]\delta(1-z) \end{aligned} \tag{4.2}$$

In der nun folgenden Renormierung werden die extrahierten, universellen, singulären Anteile in die unrenormierten PDF's und FF's absorbiert. Die physikalischen, renormierten PDF's erhalten dadurch die Form

$$\begin{aligned} f^R_{P\to p_i}(\mu_f,\xi) &= \int_\xi^1 \frac{dU}{U}\bar{f}_{P\to p_i}(\xi)\left(\delta_{ij}\delta(1-U)-\frac{1}{\epsilon}\frac{\alpha_s(\mu^2)}{2\pi}\frac{\Gamma(1-\epsilon)}{\Gamma(1-2\epsilon)}\left(\frac{4\pi\mu^2}{\mu_P^2}\right)^{\epsilon}P_{i\leftarrow j}(U)\right. \\ &\quad \left.+C_{i\leftarrow j}(U,M^2)\right) \end{aligned} \tag{4.3}$$

Dabei sind $P_{i\leftarrow j}(U)$ die Altarelli-Parisi-Kerne und die $C_{i\leftarrow j}(U,M^2)$ Anteile, die vom gewählten Renormierungsschema abhängen. μ bezeichnet die Renormierungsskala und μ_P ist die Faktorisierungsskala, die den perturbativ gültigen Bereich vom nicht-perturbativen Bereich abgrenzt. Die $C_{i\leftarrow j}(U,M^2)$ verschwinden im $\overline{\text{MS}}$-Renormierungsschema.
Das gleiche gilt analog für die Absorption der singulären Anteile, die durch auslaufende Teilchen verursacht werden. Die Faktorisierungsskala wird dabei durch die Fragmentationsskala μ_F ersetzt, die ebenfalls entsprechend den PDF's den Bereich der nicht-perturbativen Fragmentation vom harten Streuprozeß separiert [34, 33].
Man beachte, daß die Rechnungen für die tief-inelastische, ein-Teilchen-inklusive Streuung nun von drei Skalen μ, μ_F und μ_P abhängen. Die Renormierungsskala μ aufgrund der Renormierung der Fermionfelder durch die starke Kopplung α_s, sowie die Faktorisierungsskala μ_F und die Fragmentationsskala μ_P, welche perturbative von nicht-perturbativen Bereichen separieren.

4.2 Die virtuellen Beiträge

Virtuelle Beiträge müssen zur $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$ mitberücksichtigt werden und treten in Form von Vertexkorrekturen und Selbstenergiediagrammen auf. Beispiele hierfür zeigt Abbildung 5.a und 5.b. Eine vollständige Auflistung der Diagramme findet sich in [26]. In nächstführender Ordnung der

QCD müssen diese mit den Borntermen multipliziert werden. Die daraus resultierenden Beiträge enthalten sowohl Infrarot-(IR) als auch Ultraviolett-(UV) Divergenzen. Letztere werden durch Addition eines Counterterms eliminiert, wodurch die Kopplung skalenabhängig wird. Nach Addition des Counterterms und unter Berücksichtigung der Symmetriefaktoren erhalten die Beiträge für einlaufendes Quark bzw. Gluon folgende Form ([26])

- einlaufendes Quark

$$
\begin{aligned}
{}_qM_v &= S^v_{q,\gamma}\, 8(1-\epsilon)\,\Big[C_f E_{1,q} - \frac{1}{2}N_c\, E_{2,q} + \\
&\quad \frac{1}{\epsilon}(\frac{1}{3}N_f - \frac{11}{6}N_c)\sigma^B_{\gamma q}\Big] + \mathcal{O}(\epsilon) \\
{}_qM_{v,div} &= S^v_{q,\gamma}\, 8(1-\epsilon)\sigma^B_{\gamma q} \\
&\quad \Big\{C_f(-\frac{2}{\epsilon^2} + \frac{1}{\epsilon}\left(\ln(\frac{1-z_g}{x}) + \ln(\frac{z_q(s+Q^2)}{Q^2}) - \frac{6}{2}\right)) \\
&\quad -\frac{1}{2}N_c(\frac{2}{\epsilon^2} + \frac{1}{\epsilon}\left(\ln(\frac{x^2}{(1-x)(1-z_q)})\right)) + \frac{5}{3}\frac{1}{\epsilon} \\
&\quad +\frac{1}{\epsilon}\ln(\frac{1-z_g}{1-x}) + \frac{1}{\epsilon}\ln(\frac{z_q}{1-z_q}) + N_f\frac{1}{3}\frac{1}{\epsilon}\Big\} \\
S^v_{q,\gamma} &= 2\, C_f \alpha_s^2 \left(\frac{4\,\pi\,\mu^2}{Q^2}\right)^{\epsilon} \frac{\Gamma(1-\epsilon)}{\Gamma(1-2\epsilon)}
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

- einlaufendes Gluon

$$
\begin{aligned}
{}_gM_v &= S^v_{g,\gamma}\, 8(1-\epsilon)\,\Big[C_f^2 E_{1,g} - \frac{1}{2}N_c E_{2,g} + \\
&\quad \frac{1}{\epsilon}(\frac{1}{3}N_f - \frac{11}{6}N_c)\sigma^B_{\gamma g}\Big] + \mathcal{O}(\epsilon) \\
{}_gM_{v,div} &= S^v_{g,\gamma}\, 8(1-\epsilon)\sigma^B_{\gamma g} \\
&\quad \Big\{C_f(-\frac{1}{\epsilon^2} + \frac{1}{\epsilon}\left(\ln(\frac{1-x}{x}) - \frac{3}{2}\right)) \\
&\quad -\frac{1}{2}N_c(\frac{2}{\epsilon^2} + \frac{1}{\epsilon}(\ln(\frac{1-x}{1-z_{\bar{q}}}) + \ln(\frac{1-x}{1-z_q})) + \frac{5}{3}\frac{1}{\epsilon} \\
&\quad +\frac{1}{\epsilon}(-\ln(\frac{(s+Q^2)^2 z_q(1-z_q)}{(Q^2)^2}) + \frac{11}{3}) + N_f\frac{1}{3}\frac{1}{\epsilon}\Big\} \\
S^v_{g,\gamma} &= \alpha_s^2 \left(\frac{4\,\pi\,\mu^2}{Q^2}\right)^{\epsilon} \frac{\Gamma(1-\epsilon)}{\Gamma(1-2\epsilon)}
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

Die Funktionen $E_{1,q}, E_{2,q}, E_{1,g}, E_{2,g}$ sind im Anhang 8.3 angegeben. $\sigma^B_{\gamma q}$ bzw. $\sigma^B_{\gamma g}$ bezeichnen das Born-Matrixelement für einlaufendes Quark bzw. Gluon (vgl. Kapitel 3.2). Der Index bei z_q bzw. z_g bezeichnet hier die Art des auslaufenden Partons (Quark oder Gluon).

An dieser Stelle wurden bereits die divergenten Anteile gesondert angegeben, um den Vergleich mit den Divergenzen aus den reellen Anteilen zu erleichtern. Nach Subtraktion der divergenten Anteile tragen nur noch endliche Anteile zum Streuprozeß bei. In der Betrachtung des Gesamtprozeß muß noch zwischen fragmentierendem Quark/Antiquark bzw. Gluon unterschieden werden, was analog zum Born-Fall (Kap. 3.3) geschieht. Auf eine explizite Darstellung der Matrixelemente wird hier verzichtet.

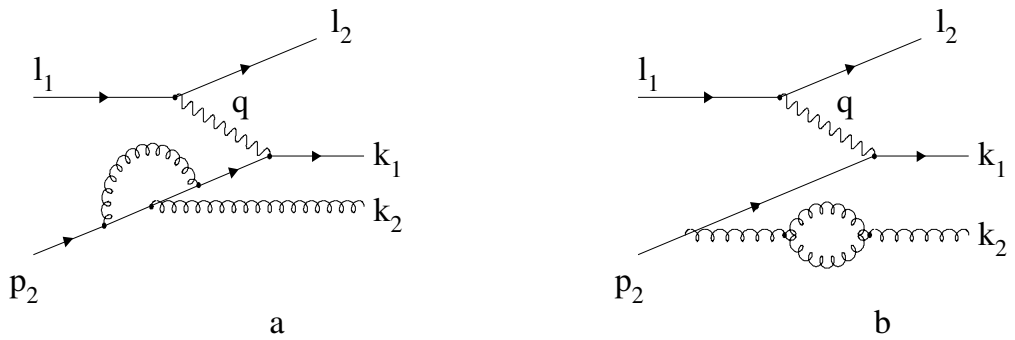

Abbildung 5: Beispiele für virtuelle Korrekturen, Vertexkorrektur (a) und Selbstenergie(b)

4.3 Die reellen Beiträge

Die in nächstführender Ordnung QCD beitragenden, reellen Korrekturen sind in den Abbildungen 6 und 7 dargestellt. Die für die theoretische Berechnung des Streuprozesses relevanten Größen, die Quadrate der Summe der Graphen mit gleichen Anfangs- und Endzuständen, werden in vier Klassen eingeteilt, um die Berechnung der Amplitudenquadrate möglichst einfach zu gestalten. Tabelle 2 gibt die Einteilung dieser Klassen an:
Für den Hadronischen Gesamtprozeß muß weiterhin die Permutationen der Impulse im Endzu-

Graphenklasse	Colourfaktor	Endzustand
A	$N_c\, C_f^2$	qgg bzw. $\bar{q}gg$
B	$N_c\, C_f\, (C_f - \frac{1}{2} N_c)$	qgg / $\bar{q}gg$ bzw. $qq\bar{q}$ / $q\bar{q}\bar{q}$
C	$N_c^2\, C_f$	qgg bzw. $\bar{q}gg$
D	$\frac{1}{2}\, N_c\, C_f$	$qq\bar{q}$ bzw. $q\bar{q}\bar{q}$

Tabelle 1: Die Graphenklassen der Ordnung $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$

stand sowie die Prozesse mit einlaufendem Gluon bzw. Antiquark betrachtet werden. Aufgrund von Symmetrieüberlegungen zeigt sich, daß nicht alle Amplitudenquadrate gesondert berechnet werden müssen, sondern sich ein Großteil aus Permutationen der Impulse ausgewählter Elemente ergibt. Diese ausgewählten Elemente sind in Form von Cut-Graphen in den Abbildungen 8 und 9 dargestellt. Die vertikale Cut-Linie bzw. Cut-Linien bezeichnen die reelle Teilchen auf der Massenskala [36, 37], deren Impulse in den Diagrammen k_1, k_2, k_3 und p_2 lauten, gelesen

am linken Teil von oben nach unten. k_1 bezeichnet immer das fragmentierende Teilchen, $-p_2$ das einlaufende Parton.
Die Vertauschungen und die daraus resultierenden Amplitudenquadrate sind in den Tabellen 2-5 dargestellt [37]. Die erste Zeile benennt das Amplitudenquadrat für die Impulskombination (k_1, k_2, k_3, p_2), die weiteren die entsprechenden Elemente, die sich bei der in Spalte 1 angegebenen Vertauschung ergeben. Es wird hier nur auf den Prozeß mit einlaufendem Quark und fragmentierendem Quark eingegangen, die weiteren Prozesse ergeben sich durch Kreuzen der entsprechenden Teilchen bzw. Permutation der Impulse im Endzustand.

- $\gamma + q \to q + g + g$, Klassen A und B

	A1	A2	A3	A4	B1	B2	B3	B4
(k_1, k_2, k_3, p_2)	I · I	II · II	I · II	I · IV	I · V	I · III	I · VI	II · III
$(k_2 \leftrightarrow k_3)$	V · V	III · III	III · V	V · VI		II · V	IV · V	
$(k_1 \leftrightarrow p_2)$	VI · VI		III · VI			II · VI		
$(k_1 \leftrightarrow p_2)(k_2 \leftrightarrow k_3)$	IV · IV		II · IV		IV · VI	III · IV		

Tabelle 2: Die Symmetrietabelle der Klasse A und B

- $\gamma + q \to q + g + g$, Klasse C

	C1	C2	C3	C4	C5
(k_1, k_2, k_3, p_2)	VII · VII	VII · VIII	I · VII	I · VIII	II · VII
$(k_2 \leftrightarrow k_3)$	VIII · VIII		V · VII	V · VIII	III · VII
$(k_1 \leftrightarrow p_2)$			VI · VIII	VI · VII	III · VIII
$(k_1 \leftrightarrow p_2)(k_2 \leftrightarrow k_3)$			IV · VIII	IV · VII	II · VIII

Tabelle 3: Die Symmetrietabelle der Klasse C

- $\gamma + q \to q + q + \bar{q}$, Klasse B

	B5	B6	B7	B8	B9	B10
(k_1, k_2, k_3, p_2)	I' · III'	I' · IV'	VI' · VIII'	IV' · VI'	III' · V'	III' · VI'
$(k_1 \leftrightarrow k_2)$		II' · III'		II' · VIII'	I' · VII'	I' · VIII'
$(k_3 \leftrightarrow p_2)$		VI' · VII'				IV' · V'
$(k_1 \leftrightarrow k_2)(k_3 \leftrightarrow p_2)$	V' · VII'	V' · VIII'	II' · IV'			II' · VII'

Tabelle 4: Die Symmetrietabelle der Klasse B

- $\gamma + q \to q + q + \bar{q}$, Klasse D

	D1	D2	D3	D4	D5	D6
(k_1, k_2, k_3, p_2)	I' · I'	II' · II'	I' · II'	II' · VI'	I' · V'	I' · VI'
$(k_1 \leftrightarrow k_2)$	III' · III'	VIII' · VIII'	III' · IV'	IV' · VIII'	III' · VII'	III'· VIII'
$(k_3 \leftrightarrow p_2)$	VII' · VII'	IV' · IV'	VII' · VIII'			IV' · VII'
$(k_1 \leftrightarrow k_2)(k_3 \leftrightarrow p_2)$	V' · V'	VI' · VI'	V' · VI'			II' · V'

Tabelle 5: Die Symmetrietabelle der Klasse D

Die Klasse A enthält die Produkte der Graphen aus Abbildung 6 mit dem Colourfaktor $N_c C_f^2$. Klasse B ist proportional zum Colourfaktor $N_c C_f (C_f - \frac{1}{2} N_c)$. Sie enthält Produkte von Graphen, bei denen die Reihenfolge des Auftretens der Gluonvertices bezüglich des Photonvertex gegenüber den Graphen aus Klasse A vertauscht ist. Die Cut-Diagramme $B_1 - B_4$ repräsentieren Amplitudenprodukte des Prozesses $\gamma + q \to qgg$ bzw. $\gamma + g \to q\bar{q}g$, $B_5 - B_{10}$ enthalten die Produkte für $\gamma + q \to qq\bar{q}$ bzw. $\gamma + \bar{q} \to q\bar{q}\bar{q}$.
Die Graphen der Klasse C entsprechen Produkte von Graphen, bei denen beide Matrixelemente einen 3-Gluon-Vertex besitzen (C_1, C_2), und solchen, bei denen in lediglich einer Amplitude der 3-Gluon-Vertex auftaucht (C_3, C_4, C_5). Diese Klasse ist proportional zu dem Farbfaktor $-\frac{1}{2} N_c^2 C_f$. Zusätzlich zu den in Tabelle 3 angegebenen Diagrammen müssen noch sogenannte Geist-Diagramme addiert werden. Es ist schon seit einiger Zeit bekannt, daß man in der QCD im Falle eines geschlossenen Gluon-Loops über zu viele Freiheitsgrade summiert bzw. integriert. Aus diesem Grund wurden von Fadeev und Poppov skalare Felder eingeführt, sogenannte Fadeev-Popov-Geister, die diese unphysikalischen Freiheitsgrade gerade ausgleichen [38]. Die Geist-Graphen werden in dieser Arbeit nicht explizit aufgeführt. Die korrekte Behandlung der Geist-Felder wurde durch expliziten Vergleich mit anderen Arbeiten [35, 39, 33] gezeigt und Übereinstimmung erreicht.
Die Klasse D schließlich enthält die Produkte der Amplituden des Prozesses $\gamma + q \to qq\bar{q}$ bzw. $\gamma + \bar{q} \to q\bar{q}\bar{q}$ mit zwei geschlossenen Fermionloops.
Bei der Integration der Matrixelemente zeigt sich explizit, daß die Summe der Elemente $B_5 - B_{10}$ und $D_4 - D_6$, alle angegebenen Permutationen eingeschlossen, regulär und damit integrabel ist. Diese Klasse entspricht Ereignissen mit 3-Quark-Endzuständen, wie aus den Tabellen 4 und 5 zu sehen ist. An dieser Stelle muß jedoch darauf hingewiesen werden, daß dies keinesfalls für die einzelnen Amplitudenquadrate gilt. Vielmehr ist fast jedes Übergangselement für sich genommen bei Integration über den 3-Teilchen-Endzustand divergent und muß nach der in Kapitel 5 beschriebenen Methode zerlegt und untersucht werden. Dabei zeigt sich, daß die Summe aller beitragender Terme dieser Klassen endlich ist.

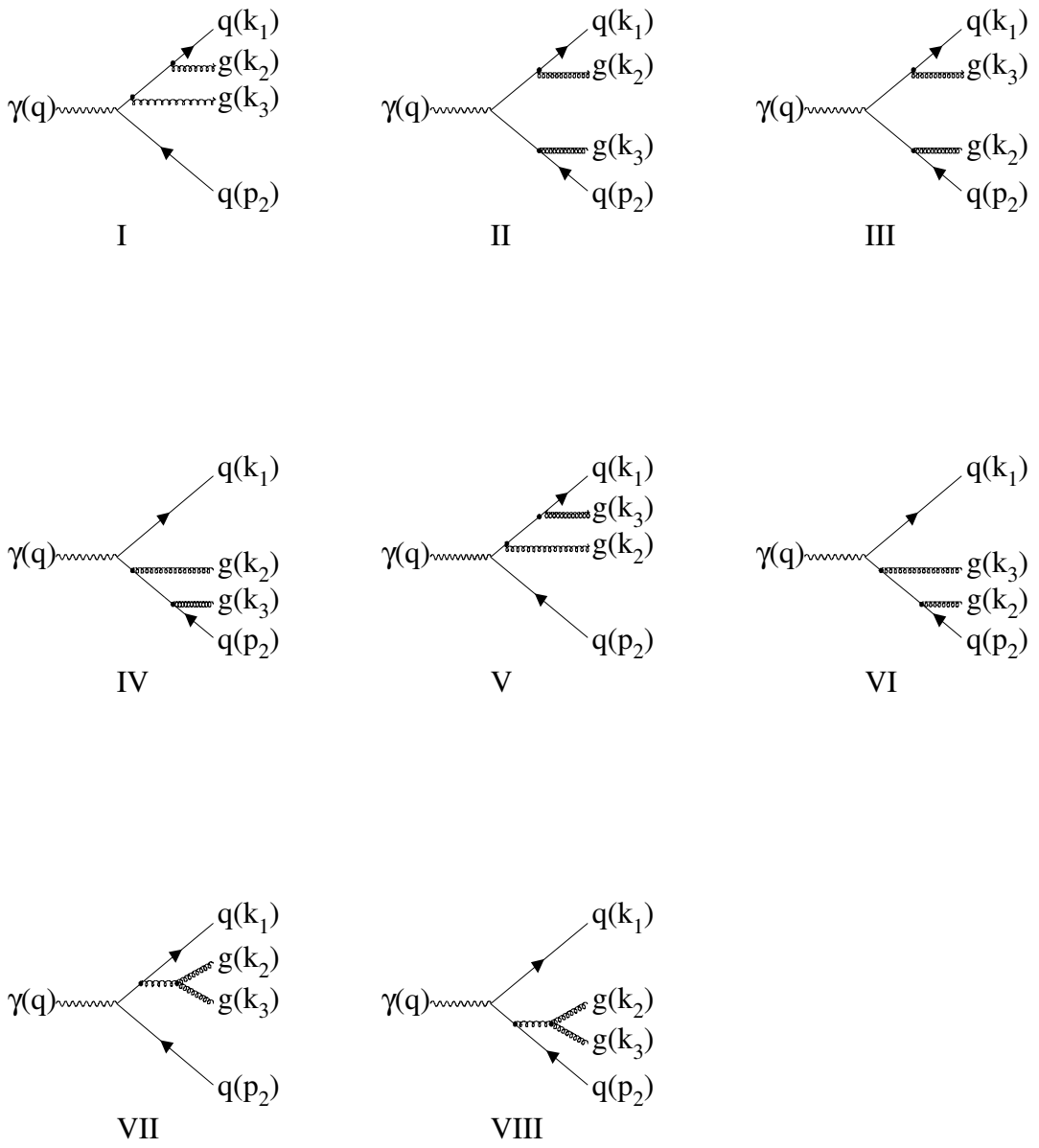

Abbildung 6: Die Prozesse mit dem Endzustand $\gamma + q \to qgg$. Die Amplituden für die Boson-Gluon-Fusion $\gamma + g \to q\bar{q}g$ ergeben sich durch Kreuzen eines Gluons in den Anfangszustand und des einlaufenden Quarks in den Endzustand

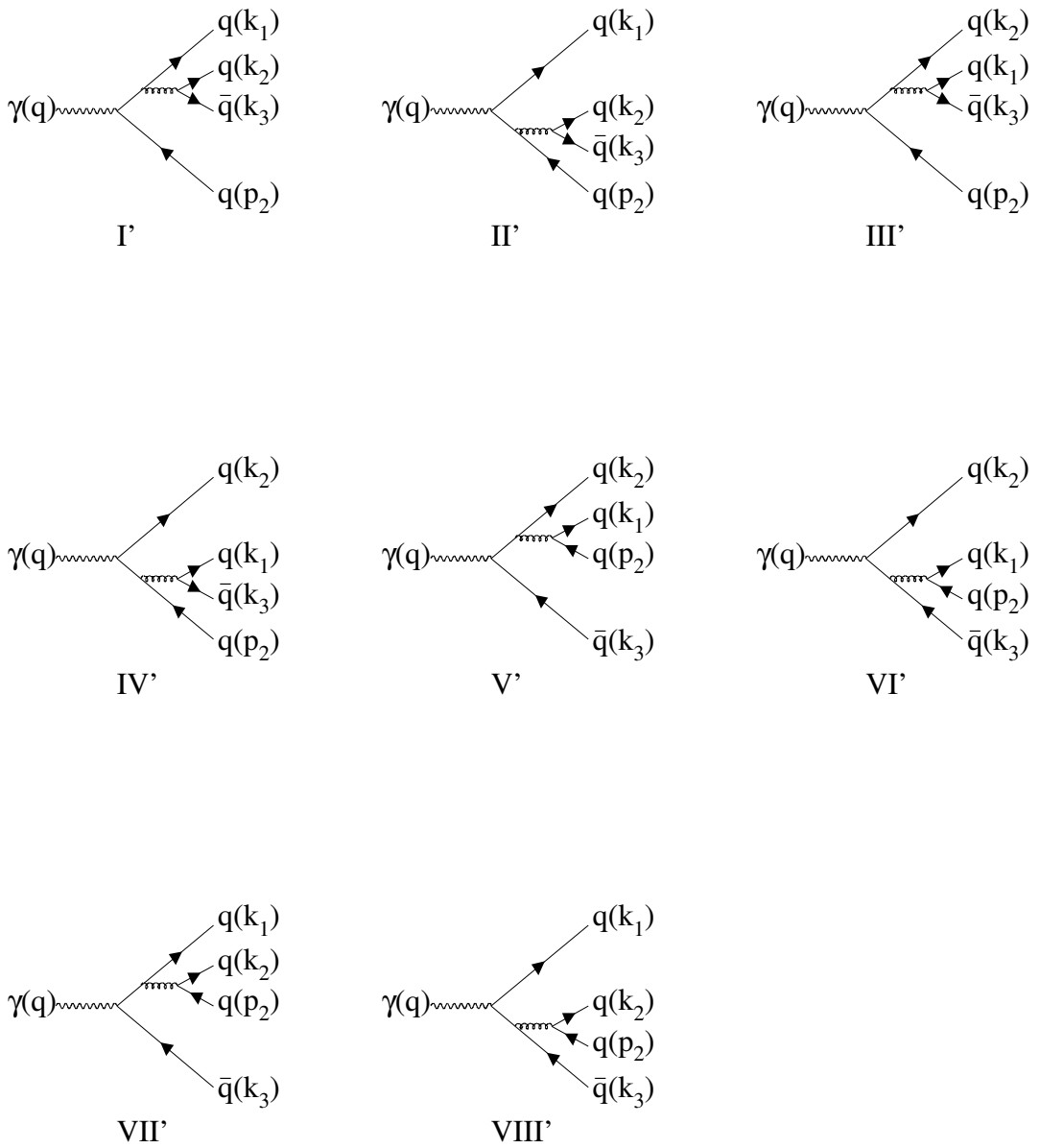

Abbildung 7: Die Prozesse mit dem Endzustand $qq\bar{q}$ bzw. $\bar{q}\bar{q}q$

Die restlichen Klassen besitzen alle Singularitäten.
Alle bis hierhin durchgeführten Rechnungen wurden im Limes $Q^2 \to 0$ mit [35] und für $Q^2 \neq 0$ mit [39, 33] verglichen. In beiden Fällen wurde Übereinstimmung mit den dort angegebenen Ergebnissen festgestellt (man beachte den Druckfehler in der Arbeit [35], vgl. [40]).
Die den Farbklassen entsprechenden Cut-Diagramme, Coulorfaktoren und die Symmetriefaktoren sind abschließend in den Tabellen 6 und 7 zusammengefaßt.

- einlaufendes Quark

Farbklasse	Cut-Diagramme	Colourfaktor	Phasenraumfaktor
A	A1,A2, A3, A4	$N_c\, C_f^2$	$\alpha_s^2 \left(\frac{4\,\pi\,\mu^4}{Q^2}\right)^{\epsilon} \frac{\Gamma(1-\epsilon)}{\Gamma(1-2\epsilon)} \frac{1}{2!} \frac{1}{4N_c(1-\epsilon)}$
B	B1, B2, B3, B4	$N_c\, C_f\, (C_f - \frac{1}{2}N_c)$	$\alpha_s^2 \left(\frac{4\,\pi\,\mu^4}{Q^2}\right)^{\epsilon} \frac{\Gamma(1-\epsilon)}{\Gamma(1-2\epsilon)} \frac{1}{2!} \frac{1}{4N_c(1-\epsilon)}$
C	C1, C2, C3, C4, C5	$-\frac{1}{2}N_c^2\, C_f$	$\alpha_s^2 \left(\frac{4\,\pi\,\mu^4}{Q^2}\right)^{\epsilon} \frac{\Gamma(1-\epsilon)}{\Gamma(1-2\epsilon)} \frac{1}{2!} \frac{1}{4N_c(1-\epsilon)}$
D	D1, D2, D3	$\frac{1}{2}N_c\, C_f$	$\alpha_s^2 \left(\frac{4\,\pi\,\mu^4}{Q^2}\right)^{\epsilon} \frac{\Gamma(1-\epsilon)}{\Gamma(1-2\epsilon)} \frac{1}{4N_c(1-\epsilon)}$
E	D4, D5, D6	$N_c\, C_f\, (C_f - \frac{1}{2}N_c)$	$\alpha_s^2 \left(\frac{4\,\pi\,\mu^4}{Q^2}\right)^{\epsilon} \frac{\Gamma(1-\epsilon)}{\Gamma(1-2\epsilon)} \frac{1}{2!} \frac{1}{4N_c(1-\epsilon)}$
F	B5, B6, B7, B8, B9, B10	$\frac{1}{2}N_c\, C_f$	$\alpha_s^2 \left(\frac{4\,\pi\,\mu^4}{Q^2}\right)^{\epsilon} \frac{\Gamma(1-\epsilon)}{\Gamma(1-2\epsilon)} \frac{1}{2!} \frac{1}{4N_c(1-\epsilon)}$

Tabelle 6: Die Farb- und Symmetriefaktoren für einlaufendes Quark

- einlaufendes Gluon

Farbklasse	Cut-Diagramme	Colourfaktor	Phasenraumfaktor
A	A1,A2, A3, A4	$N_c\, C_f^2$	$\alpha_s^2 \left(\frac{4\,\pi\,\mu^4}{Q^2}\right)^{\epsilon} \frac{\Gamma(1-\epsilon)}{\Gamma(1-2\epsilon)} \frac{1}{2!} \frac{1}{8N_c C_f(1-\epsilon)^2}$
B	B1, B2, B3, B4	$N_c\, C_f\, (C_f - \frac{1}{2}N_c)$	$\alpha_s^2 \left(\frac{4\,\pi\,\mu^4}{Q^2}\right)^{\epsilon} \frac{\Gamma(1-\epsilon)}{\Gamma(1-2\epsilon)} \frac{1}{2!} \frac{1}{8N_c C_f(1-\epsilon)^2}$
C	C1, C2, C3, C4, C5	$-\frac{1}{2}N_c^2\, C_f$	$\alpha_s^2 \left(\frac{4\,\pi\,\mu^4}{Q^2}\right)^{\epsilon} \frac{\Gamma(1-\epsilon)}{\Gamma(1-2\epsilon)} \frac{1}{2!} \frac{1}{8N_c C_f(1-\epsilon)^2}$

Tabelle 7: Die Farb- und Symmetriefaktoren für einlaufendes Gluon

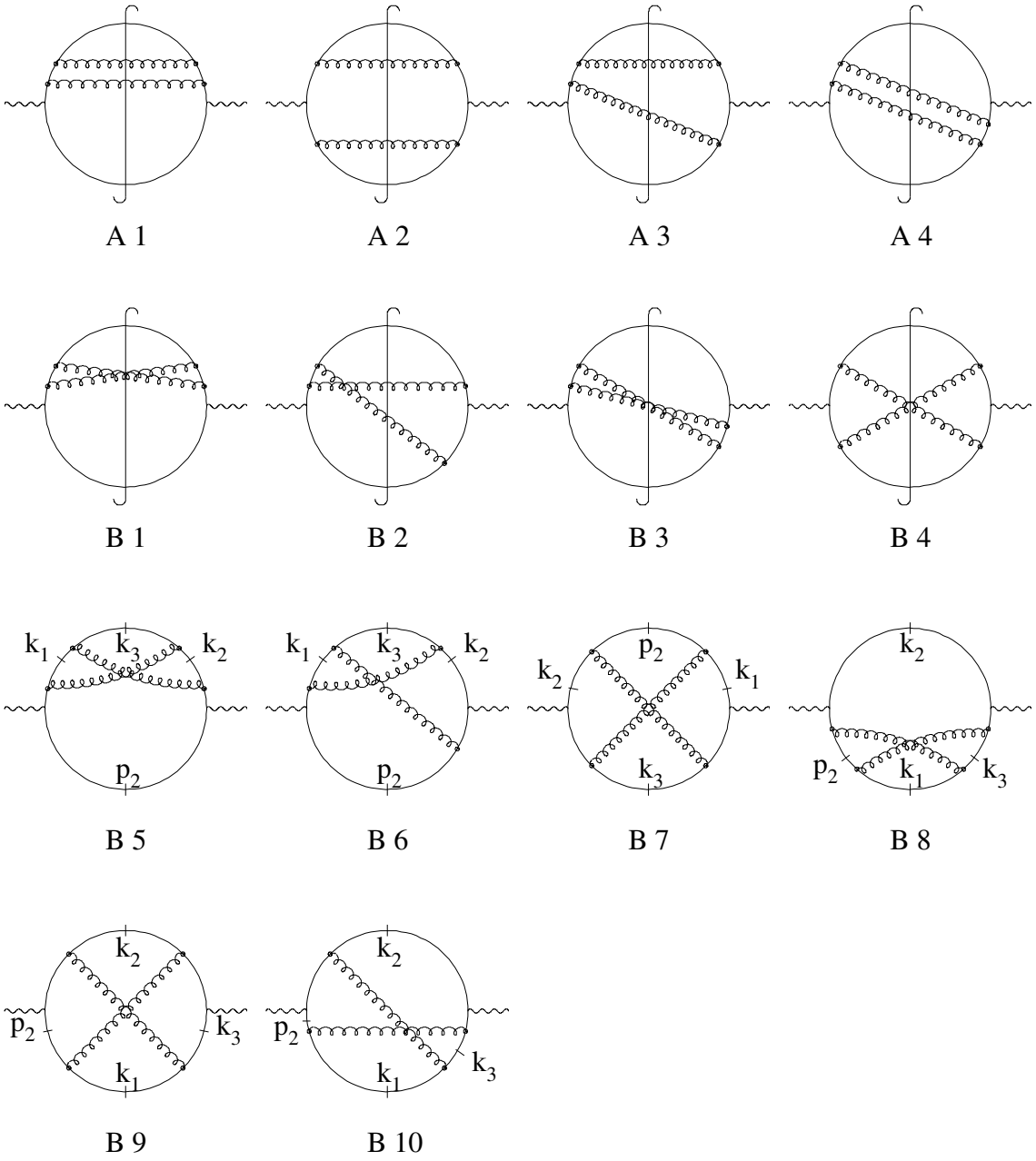

Abbildung 8: Die Cut-Diagramme der Graphenklassen A und B

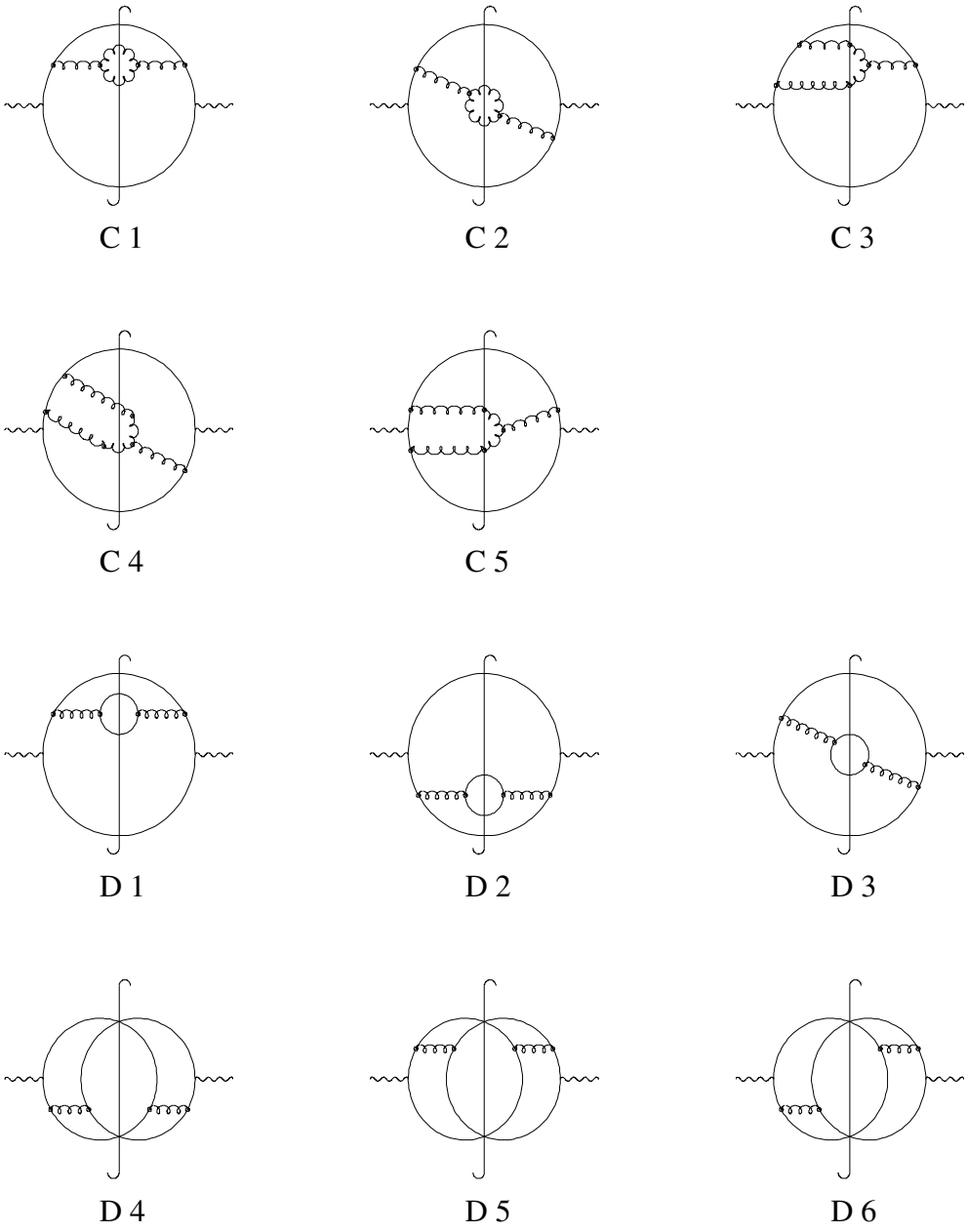

Abbildung 9: Die Cut-Diagramme der Graphenklassen C und D

5 Die Integration der reellen Korrekturen

Gegenstand des folgenden Kapitels ist die Integration der Übergangsamplituden über die beiden unbeobachteten Teilchen im Endzustand. Es wird zunächst die allgemeine Methode erläutert, nach der diese Amplituden zerlegt werden müssen, um sie in eine analytisch und später auch numerisch handhabbare Form zu verwandeln. Nach dieser Zerlegung und der Ausführung der anschließenden Winkelintegration erhält ein Teil der Integrale Pole. Die Separation dieser Pole wird Gegenstand der Kapitel 5.2 und 5.3 sein.

5.1 Die Struktur der Integrale

Für den 3-Teilchen-Phasenraum erhält man aus Gleichung 2.10 [26]

$$dPS^{(3)} = V(\epsilon)\,\frac{1}{128\pi^3}\,s_{23}^{-\epsilon}ds_{23}\,z^{-\epsilon}dz\,\frac{1}{2\pi}\,\sin(\Theta_1)^{1-2\epsilon}d\Theta_1\,(\sin\Theta_2)^{-2\epsilon}d\Theta_2 \tag{5.1}$$

mit

$$V(\epsilon) = \frac{(16\pi^2)^\epsilon}{\Gamma(1-2\epsilon)}(s\,y\,(\zeta-x)(1-z)-s_{23})^{-\epsilon} \tag{5.2}$$

Im analytischen Teil der Arbeit wird zunächst die Winkelintegration in Gleichung 5.1 durchgeführt. Im Gegensatz zu der in der Jet-Physik oft verwendeten Phase-Space-Slicing Methode, bei der grob gesprochen die Winkelintegration numerisch über den Teil des Phasenraums ausgeführt wird, in dem keine Singularitäten auftreten, und der Bereich der kollinearen sowie soften Singularitäten durch einen Cut-Parameter abgetrennt und gesondert behandelt wird, integrieren man bei der hier verwendeten Methode den 3-Teilchen-Phasenraum über die beiden auslaufenden Teilchen voll aus. Diese Methode besitzt den Nachteil, daß im analytischen Teil des Phasenraumes keine Näherungen gemacht werden können, welche im Fall der Phase-Space-Slicing-Methode die Matrixelemente stark vereinfachen. Demgegenüber steht der Vorteil, daß kein von Hand eingeführter Cut-Parameter verwendet werden muß und somit die Ergebnisse nach Addition der numerischen und analytischen Teile nicht auf Cut-Unabhängigkeit überprüfen müssen. Außerdem zeigt dieses Verfahren noch intuitiver die Erwartungen des Faktorisierungstheorems. Wie später gezeigt wird, ergibt die Winkelintegration Ergebnisse proportional zu $\frac{1}{\epsilon}$ und ϵ^0. Es zeigt sich, daß bei den Ergebnissen proportional zu $\frac{1}{\epsilon}$ das entsprechende Born-Element ausfaktorisiert (gemeinsam mit der entsprechenden Splitting-Funktion), ohne a priori eine spezielle Vorgabe an die Lage der beiden Teilchen zueinander oder an deren Energie gemacht zu haben (in der Phase-Space-Slicing-Methode ist das Ausfaktorisieren des Born-Matrixelementes bei paralellen Singularitäten zwangsläufig). Natürlich identifiziert man den Pol $\frac{1}{\epsilon}$ als kollineare oder softe Singularität, aber er ergibt sich eben nicht aus impliziten Annahmen, sondern aus der konsistenten Behandlung der Integration in $4-2\epsilon$-Dimensionen. Aus der Beschreibung der Kinematik im $2 \to 3$ Prozeß in Anhang 8.2 ist zu sehen, daß sich sich jeder $2 \to 3$ Prozeß durch 10 Invarianten [41], die Produkte der Vierimpulse der ein- und auslaufenden Teilchen, beschreiben läßt. Von diesen 10 Invarianten sind jedoch nur 5 unabhängig, die restlichen lassen sich durch diese 5 Größen ausdrücken.

In dieser Arbeit werden folgende Größen als unabhängige Variablen gewählt:

$$\begin{aligned} s &= (q+p_2)^2 \\ s_1 &= (k_1+k_2)^2 \\ t_1 &= (q-k_1)^2 \\ t_2 &= (q-k_3)^2 \\ u &= (p_2-k_1)^2 \end{aligned} \tag{5.3}$$

Es zeigt sich bei der Betrachtung der Matrixelemente, daß diese aus Produkten von maximal 4 unterschiedlichen Vierimpulsquadraten $(y_{i,j})^l = ((p_i \pm p_j)^2)^l$ ergeben, welche die zu integrierenden Winkel enthalten.
Mit dieser Reduktion auf 5 Invarianten läßt sich die Winkelintegration im 3-Teilchen-Phasenraum (Gleichung 5.1) allerdings noch nicht durchführen. Das Matrixelement muß noch in eine Form gebracht werden, in der es maximal zwei verschiedene $(y_{i,j})$ enthält, da sich sonst die Struktur der Singularitäten nicht zeigt (zum Beispiel treten scheinbare Doppelpole auf). Die Zerlegung der Terme erfolgt durch die sogenannte Partialbruchzerlegung. Anhand eines einfachen Beispiels läßt sich diese Methode gut erläutern.
Generell läßt sich ein Term der Art $\frac{1}{xy}$ wie folgt zerlegen:

$$\frac{1}{xy} = \frac{1}{x+y}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) \tag{5.4}$$

Bei Anwendung in Rechnungen dieser Arbeit entsprechen x und y zwei Viervektorprodukten, welche jeweils abhängig von einem der beiden Winkel sind. Ist deren Summe unabhängig von diesem Winkel, so läßt sich das Produkt umschreiben in eine Summe mit jeweils nur einem winkelabhängigem Term. Betrachten man als Beispiel ein Element aus der Gruppe C, welches folgende allgemeine Form besitzt:

$$|M|^2 = \frac{1}{((q-k_2)^2)^2}\frac{1}{(p_2-k_3)^2}\frac{1}{(k_1+k_3)^2} \tag{5.5}$$

Dieses Element enthält 3 Terme, die alle über die Winkel der auslaufenden Teilchen k_2 und k_3 integriert werden müssen. In der oben angegebenen Form ist dies analytisch ohne weiteres nicht möglich. Unter Anwendung von Gleichung 5.4 läßt sich der Term nach längerer Umformung wie folgt zerlegen:

$$|M|^2 = \frac{1}{u}\left(\frac{1}{p_2k_3}+\frac{1}{k_1k_3}\right)\left(\frac{1}{((q-k_2)^2)^2}-\frac{1}{u}\frac{1}{(q-k_2)^2}+\frac{1}{u}\frac{1}{u+(q-k_2)^2}\right) \tag{5.6}$$

In dieser Form enthält jeder Term nur noch zwei Teile, welche die fraglichen Winkel enthalten. Weiterhin wurden durch diese Art der Zerlegung Anteile separiert, die man als Anfangs- oder Endzustandssingularitäten bezeichnet. Eine Anfangszustandssingularität ist dabei eine Prozeß, bei dem die Singularität durch das einlaufende Quark oder Gluon hervorgerufen wird. Entsprechend bedeutet eine Endzustandssingularität, daß der Pol entweder durch ein fragmentierendes

Quark oder Gluon verursacht wurde, oder durch das Verschwinden der Energie der beiden ausintegrierten Teilchen.

5.2 Die Winkelintegration

Die zu berechnenden Integrale besitzen nun die Form

$$\begin{aligned} I^{(n,m)} &= \int_0^\pi \int_0^\pi (\sin\theta_1)^{1-2\epsilon} (\sin\theta_2)^{-2\epsilon} (a - b\cos\theta_1)^{-n} \\ &\quad (A + B\cos\theta_1 + C\sin\theta_1\cos\theta_2)^{-m} d\theta_1 d\theta_2 \end{aligned} \tag{5.7}$$

Im analytischen Teil der Behandlung der NLO-Korrekturen führt man die Integration über die Polarwinkel in Gleichung (5.7) aus. θ_1 und θ_2 entsprechen dabei den Winkeln, welche die Lage der auszuintegrierenden Teilchen k_1 und k_2 zueinander beschreiben (siehe auch Anhang 8.2). Führt man nun die im vorigen Abschnitt beschriebene Partialbruchzerlegung konsequent durch, so läßt sich jedes Matrixelement in Terme der Form (5.5) zerlegen. Im Falle der in dieser Arbeit betrachteten Prozesse erhält man dadurch 739 verschiedene Terme, die die oben genannten Integrale in verschiedenen Kombinationen der Parameter m und n enthalten. Die Zerlegung wurde dabei mit Hilfe der Mathematikprogramme REDUCE [42], MATHEMATICA [43] und MAPLE [44] durchgeführt.
Allerdings ist die Anzahl der dabei auftretenden Integrale der Form 5.7, gegeben durch Kombinationen der ganzzahligen Exponenten m und n, beschränkt. Es zeigt sich, daß für den Wertebereich der beiden Variablen $m \in [-2, 2]$ und ebenfalls $n \in [-2, 2]$ gilt. Zur Lösung der auftauchenden Integrale empfiehlt es sich, in Gleichung (5.7) folgende Ersetzungen durchzuführen

$$\begin{aligned} v &= \frac{1}{2}(1 - \cos\theta_1) \\ &\rightarrow \cos\theta_1 = 1 - 2v \\ &\quad \sin\theta_1 = 2v^{\frac{1}{2}}(1-v)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad d\theta_1 = 2\frac{dv}{\sin\theta_1} \\ w &= \frac{1}{2}(1 - \cos\theta_2) \\ &\rightarrow \cos\theta_2 = 1 - 2w \\ &\quad \sin\theta_1 = 2w^{\frac{1}{2}}(1-w)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad d\theta_2 = 2\frac{dw}{\sin\theta_2} \end{aligned} \tag{5.8}$$

Damit erhält man für Gleichung (5.7)

$$\begin{aligned} I^{(n,m)} &= \int_0^1 \int_0^1 2\,(4^{-2\epsilon})\, v^{-\epsilon}(1-v)^{-\epsilon}\, w^{-\frac{1}{2}-\epsilon}\,(1-w)^{-\frac{1}{2}-\epsilon}\,(a - b(1-2v))^{-n} \\ &\quad \Big(A + B(1-2v) + C2v^{\frac{1}{2}}(1-v)^{\frac{1}{2}}(1-2v)\Big)^{-m}\, dv\, dw \end{aligned} \tag{5.9}$$

Die hier verwendeten Parameter v und w dürfen dabei nicht mit den gleichnamigen kinematischen Größen aus Anhang 8.2 verwechselt werden, auf die auch im Verlauf der Behandlung der Energieintegration im nachfolgenden Kapitel noch zu sprechen sein wird. Für die Darstellung der oben genannten Integrale hat sich die Verwendung von v und w lediglich in der Literatur etabliert.
In dieser Form können diese Integrale entweder durch die wohlbekannten Eigenschaften der Beta-Funktion [46, 47] gelöst werden oder lassen sich mit Hilfe der hypergeometrischen Differentialgleichung bzw. der daraus resultierenden Integraldarstellung [46] errechnen. Die Ergebnisse sind in Anhang 8.4 angegeben.
Bei der Berechnung ist zu beachten, daß die Lösungen in 4 Klassen eingeteilt werden können, welche sich durch die Struktur ihrer Singularitäten unterscheiden. Klasse 1 enthält Integrale ohne Pole. Hier gilt für den Wertebereich der Exponenten $n \leq 0$ und $m \leq 0$. Die Klassen 2 und 3 enthalten Lösungen für die Situationen, in denen der erste Quotient in Gleichung (5.8) zu einer Singularität führt ($n > 0$ und a=-b) oder der zweite Quotient eine solche hervorruft ($m > 0$ und $A^2 = B^2 + C^2$). Klasse 4 schließlich enthält Integrale, die keine Singularitäten besitzen, für die aber $n > 0$ gilt (somit also $a \neq -b$, was durch die Lösungen in Klasse 1 nicht abgedeckt ist).
Wie in Anhang 8.2 beschrieben ist, läßt sich stets zwischen drei 'Sets' von Darstellungen der auszuintegrierenden Teilchen wählen. Unter 'Sets' versteht man dabei die unterschiedlichen Möglichkeiten, die räumliche Orientierung der Vektoren zueinander und zum auslaufenden Teilchen zu beschreiben [2]. Da über die darin verwendeten Winkel θ_1 und θ_2 integriert wird, sie also für die Beobachtung im Experiment keine Rolle spielen, können diese gleichwertig verwendet werden. Damit läßt sich stets ein Set finden, in dem die auftretenden Produkte von Viervektoren aus Gleichung (5.5) in eine der 4 oben genannten Lösungsklassen übergeführt werden kann. Ferner garantiert die Tatsache, daß nur Prozesse mit endlichem, nicht-verschwindedem Q^2 betrachtet werden das Auftreten von höchstens einfachen Polen in den dargestellten Integralen. Dies bedeutet, daß entweder $n < 0$ und $a = -b$ oder $m < 0$ und $A^2 = B^2 + C^2$ sein kann, niemals aber beides gemeinsam.
Ein Großteil der Ergebnisse aus der Arbeit [45] mußte in dieser Arbeit mit Hilfe von [46, 47] neu berechnet werden, da die dort angegebenen Resultate zumeist nur die Pole und Korrekturen zur Ordnung ϵ^0 enthalten (Klassen 2 und 3.) oder nur in 4 Dimensionen gerechnet wurden, wie z.B. die Integrale mit der Klasse 1. Die Integrale der Klasse 4 wurde gänzlich neu berechnet.
Daß dies nötig ist, kann man sich leicht an dem Beispiel klarmachen, in dem die anschließende Energieintegration über die Schwerpunktsenergie der beiden Teilchen zu einer weiteren Singularität führt. Tritt eine solche auf, so kann sich der die Singularität verursachende Faktor $\frac{1}{\epsilon}$ mit demjenigen aus den Termen der Winkelintegrationen, die proportional zu ϵ sind, aufheben und endliche Beiträge liefern. Die Energieintegration wird Gegenstand des nächsten Kapitels sein.
Die endlichen Anteile wurden numerisch mit Hilfe der Programmpakete MAPLE [44] und MATHEMATICA [43] für verschiedene, kleine ϵ numerisch überprüft.
Nach erfolgter Partialbruchzerlegung und Winkelintegration erhält man wie vorher dargestellt Beiträge der $\mathcal{O}(\epsilon^{-1}), \mathcal{O}(\epsilon^0)$ sowie höhere Ordnungen in ϵ. Erstere divergieren im Fall $\epsilon \to 0$, was physikalisch bedeutet, daß sich entweder das einlaufende Parton parallel zu einem auslaufenden Teilchen bewegt (Anfangszustandssingularität) oder zwei auslaufende Teilchen (Endzustand-

singularität) den Pol verursachen. Anschaulich läßt sich dies gut in Abbildung 10 sehen, wo im Falle eine kollinearen Singularität als Faktor vor den divergenten Termen das entsprechende 2→2 Born-Element verbleiben muß. Im hier beispielhaft gezeigten Fall einer Endzustandssingularität muß der Impuls des am Bornprozeß auslaufenden Partons gerade die Summe der Impulse der beiden parallelen Teilchen sein.

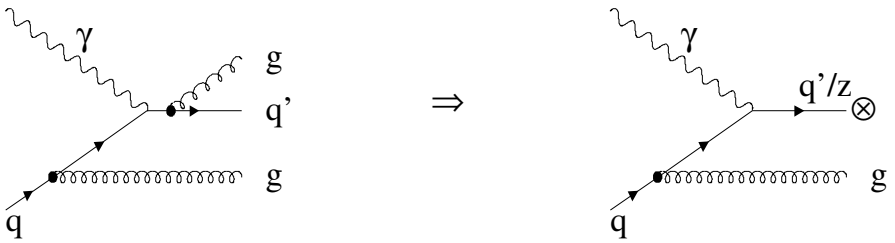

Abbildung 10: Beispiel für eine Endzustandssingularität

Die in dieser Arbeit durchgeführten Rechnungen bestätigen eindeutig dieses anschauliche Ergebnis. Ohne a priori gemachte Einschränkungen an den Phasenraum bzw. die Beschränkung auf Betrachtung bestimmter (singulären) Bereiche, in denen die Singularitäten bereits implizit vorausgesetzt werden, zeigt sich die erwartete Struktur. Die Ergebnisse für die Singularitäten sind in Anhang 8.5 (Anfangszustandssingularitäten) und Anhang 8.6 (Endzustandssingularitäten) angegeben. Hier ist auch bereits die im nächsten Kapitel zu besprechende Energieintegration durchgeführt. Die endlichen Anteile sind in dieser Arbeit nicht explizit angegeben, da diese in geschlossener Form nur sehr umfangreich darzustellen sind. Auf die numerische Auswertung der endlichen Anteile wird in Kapitel 6 eingegangen.

5.3 Die Energieintegration

Für eine vollständige Berechnung der Integrale sowie Extraktion der Singularitäten bleibt nun nach erfolgter Winkelintegration noch diejenige über die Schwerpunktsenergie s_{23} der beiden auslaufenden Teilchen 2 und 3 (vgl. Anhang 8.2). Es zeigt sich, daß diese am einfachsten durch folgende Variablentransformation durchzuführen ist:

$$\begin{aligned} t &\rightarrow v, \quad t = v(s+Q^2) - 1 \\ u &\rightarrow w, \quad u = -w(s+t+Q^2) \\ &\Rightarrow s_{23} = (s+Q^2)v(1-w) \end{aligned} \tag{5.10}$$

(Vergleiche dazu auch Anhang 8.2)
Pole, die bei der Integration über s_{23} entstehen zeigen sich dabei als Singularitäten für $w \rightarrow 1$. Diese Integration wird mit der bei dieser Form von Integration üblichen Methode der "+" -Distributionen durchgeführt. Die "+" -Ditribution ist streng genommen nur mit einer im

Grenzwert der betreffenden Variable existierenden Funktion $f(x)$ definiert. Für die Integration über den singulären Bereich ergibt sich

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{(1-x)^{1+\epsilon}}dx \;=\; -\frac{1}{\epsilon}f(1) + \int_0^1 f(x)\left(\frac{1}{1-w}\right)_+ - \epsilon\int_0^1 f(w)\left(\frac{\ln(1-w)}{1-w}\right)_+ \qquad (5.11)$$

(zur Definition der "+" Funktion siehe Anhang 8.1)
Auf diese Weise werden die divergenten Anteile extrahiert und die verbleibenden Integrale können mit numerischen Methoden gelöst werden. Die Summe bzw. das Produkt der Divergenzen aus den Winkel- und Energieintegrationen führt nun zu Termen der $\mathcal{O}(\frac{1}{\epsilon^2})$ und $\mathcal{O}(\frac{1}{\epsilon})$. Nach Addition der virtuellen Korrekturen fallen die Terme $\sim \frac{1}{\epsilon^2}$ heraus. Die verbleibenden Pole sind entweder proportional zu den Altarelli-Parisi-Kernen und können in die nackten Struktur- bzw Fragmentationsfunktionen integriert werden oder heben sich gegen Pole aus den virtuellen Korrekturen weg. Dies kann am expliziten Vergleich der Ergebnisse von Kapitel 4.2 und Anhang 8.5 und 8.6 gesehen werden.
Die anschließende Integration über die partonischen Parameter v und w kann nun numerisch durchgeführt werden. Allerdings sind die Grenzen bzw. Einschränkungen des Phasenraums nicht sofort offensichtlich, sodaß an dieser Stelle darauf etwas genauer darauf eingegangen wird.
Für die Reaktion

$$q \;+\; p_a \;=\; p_1 + p_2 + p_3 \qquad (5.12)$$

lautet Gleichung 2.10 in 4 Dimensionen [27]

$$\begin{aligned}
dPS^{(4,3)} &= \frac{1}{(2\pi)^5}d^4p_1\; d^4p_2\; d^4p_2\; \delta(p_1^2)\; \delta(p_2^2)\; \delta(p_3^2)\; \delta^{(4)}(p_a+q-p_1-p_2-p_3) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}d^4p_1\; d^4p_2\; d^4p_{23}\; \delta^{(4)}(p_{23}-p_2-p_3) \\
&\quad \delta(p_1^2)\; \delta(p_2^2)\; \delta(p_3^2)\; \delta^{(4)}(p_a+q-p_1-p_2-p_3) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}d^4p_1\; d^4p_{23}\; \delta(p_1^2)\; \delta(p_{23}^2-s_{23})\; \delta^{(4)}(p_a+q-p_1-p_{23}) \\
&\quad \frac{1}{(2\pi)^3}d^4p_1\; d^4p_2\; \delta(p_2^2)\; \delta(p_3^2)\; \delta^{(4)}(p_{23}-p_2-p_3) \\
&= dPS^{(2)}\; d\hat{PS}^{(2)}
\end{aligned} \qquad (5.13)$$

Der 2-Teilchen Phasenraum $d\widehat{PS}^{(2)}$ wurde bereits in Kapitel 3 berechnet. $dPS^{(2)}$ berechnet man am besten im Ruhesystem der einlaufenden Teilchen $\vec{q}+\vec{p_a}=0$:

$$\begin{aligned}
dPS^{(2)} &= \frac{1}{(2\pi)^2}\frac{d^3p_1}{2E_1}\; \delta((q+p_a-p_1)^2-s_{23}) \\
&= \frac{\pi}{(2\pi)^2}p_T dp_T \frac{dz}{z_p}\; \delta(s+t+u+Q^2-s_{23})
\end{aligned} \qquad (5.14)$$

Der Übergang vom Differential d^3p_1 zu dp_T und dz ergibt sich dabei aus elementaren Phasenraumtransformationen. Die Bedeutung der δ-Funktion für die Kinematik sieht man am einfachsten, wenn man die Mandelstamm-Variablen durch die neuen partonischen, kinematischen Variablen z und p_T ersetzt. Mit $p_T = \frac{P_T}{\xi'}$ und $p_a = \xi P$ (vergleiche auch Kapitel 2) gilt

$$\begin{aligned} s &= \xi(W^2+Q^2) - Q^2 \\ u &= -\xi(W^2+Q^2)z \\ t+Q^2 &= -\frac{(\frac{P_T^2}{\xi'^2})}{z} + Q^2 z \\ \Rightarrow \xi &= \frac{(\frac{P_T^2}{\xi'^2}) + Q^2 z(1-z) + s_{23}z}{(W^2+Q^2)z(1-z)} \\ &= \frac{(\frac{P_T^2}{\xi'^2}) + Q^2 z(1-z)}{(W^2+Q^2)z(1-z)(1-\frac{v-z}{1-z})} \end{aligned} \tag{5.15}$$

In der letzten Gleichung wurde für s_{23} Gleichung (5.9) eingesetzt.
Den Impulsbruchteil ξ' des auslaufenden Hadrons am fragmentierenden Parton erhält man direkt aus den Gleichungen (5.9)

$$\xi' = \frac{z}{vw} \tag{5.16}$$

Damit erhält man für das Integral über die Strukturfunktionen

$$\begin{aligned} & \int \frac{d\xi}{\xi}\frac{d\xi'}{\xi'}\delta(s+t+u+Q^2-s_{23}) \\ = & \int \frac{d\xi}{\xi}\frac{d\xi'}{\xi'}\frac{1}{(W^2+Q^2)(1-z)}\left(\xi - \frac{(\frac{P_T^2}{\xi'^2}) + Q^2z(1-z)+s_{23}z}{(W^2+Q^2)z(1-z)}\right) \\ = & \int \frac{d\xi'}{\xi'}\frac{z}{(\frac{P_T^2}{\xi'^2}) + Q^2z(1-z)+s_{23}z} \end{aligned} \tag{5.17}$$

Wird das aus Kapitel 3 bekannte Ergebnis für den $2 \to 2$ Phasenraum benutzt und die Jacobi-Matrix für den Übergang zu den Variablen v und w berücksichtigt,

$$\frac{\partial(\xi,\xi')}{\partial(v,w)} = -v\frac{Q^2}{x} \tag{5.18}$$

so erhält man für den Wirkungsquerschnitt (vgl. 2.12, 3.18)

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma^{ep}}{dx\,dy\,dz\,dP_T} = & \sigma_{Bo}\frac{\alpha^2}{14\pi^2Q^2y}\int_{v_{min}}^{v_{max}} dv \int_{w_{min}}^{1} dw(-v\frac{Q^2}{x}) \times \\ & \left(\frac{(\frac{P_T}{\xi'})}{(\frac{P_T}{\xi'})^2 + Q^2vw(1-vw)+s_{23}vw}\right) \\ & \sum_{i=I}^{V}\left[1+(1-y)^2\right]M_i^{g_{\mu\nu}} \times H_i \end{aligned} \tag{5.19}$$

σ_{Bo} ist hier der in Kapitel 3 berechnete Born-Beitrag. $M^{g_{\mu\nu}}_{i=q\to q,q\to g,g\to q,g\to g}$ bezeichnet analog zu Kapitel 3 die virtuellen und reellen Beiträge in NLO, welche, wie in Kapitel 4 und 5 beschrieben, berechnet, mit $(-g^{\mu\nu})$ kontrahiert und anschließend renormiert wurden. In den Matrixelementen sind die Phasenraumfaktoren aus Tabelle 7 schon enthalten.
Ebenfalls analog zu Kapitel 3 sind die Funktionen $H_{I,\ldots,VI}$ definiert. Zusätzlich zu Kapitel 3 kommen in Rechnungen in nächstführender Ordnung Prozesse vor, bei denen einlaufendes und fragmentierendes Quark verschiedene Flavours besitzen. Dies tritt zum Beispiel bei 3-Quark Endzuständen auf, wenn zwei geschlossene Fermion-Loops im Matrixelement auftauchen. Die dadurch bedingte Summation wird durch die Funktionen H_{IV} und H_V beschrieben, wobei erstere Prozesse beschreibt, bei denen das einlaufende Parton an das Photon koppelt, letztere dann entsprechend solche, bei denen das fragmentierende Parton mit dem Photon in Wechselwirkung tritt. Die Funktion H_{VI} beschreibt schließlich den Prozeß, bei dem ein Gluon einläuft und fragmentiert.

$$\begin{aligned}
H_{IV} &= \frac{1}{9}\,([4(f_u(\xi)+f_{\bar u}(\xi)+f_c(\xi)+f_{\bar c}(\xi))+f_d(\xi)+f_{\bar d}(\xi)+f_s(\xi)+f_{\bar s}(\xi)] \\
&\quad [D_u(\xi')+D_{\bar u}(\xi')+D_c(\xi')+D_{\bar c}(\xi')+D_d(\xi')+D_{\bar d}(\xi')+D_s(\xi')+D_{\bar s}(\xi')]) \\
H_V &= \frac{1}{9}\,([(f_u(\xi)+f_{\bar u}(\xi)+f_c(\xi)+f_{\bar c}(\xi)+f_d(\xi)+f_{\bar d}(\xi)+f_s(\xi)+f_{\bar s}(\xi)] \\
&\quad [4(D_u(\xi')+D_{\bar u}(\xi')+D_c(\xi')+D_{\bar c}(\xi'))+D_d(\xi')+D_{\bar d}(\xi')+D_s(\xi')+D_{\bar s}(\xi')]) \\
H_{VI} &= \frac{10}{9}\,[f_g(\xi)D_g(\xi')] \qquad (5.20)
\end{aligned}$$

Die kinematischen Grenzen von v und w ergeben sich aus den Bedingungen für ξ und ξ'

$$\begin{aligned}
x_{Bj} \le\ & \xi\ & \le 1 \\
Z \le\ & \xi'\ & \le 1 \qquad (5.21)
\end{aligned}$$

Man findet damit für v und w

$$\begin{aligned}
v &\in \left[z; 1+\frac{Q^2 z-\frac{P_T^2}{z}-Q^2}{W^2+Q^2}\right] \\
w &\in \left[\frac{z}{1+\frac{Q^2 z-\frac{P_T^2}{z}-Q^2}{W^2+Q^2}}; 1\right] \qquad (5.22)
\end{aligned}$$

6 Numerische Ergebnisse

Das folgende Kapitel behandelt die numerische Auswertung der in den Abschnitten 3 bis 5 gewonnen Ergebnisse. Die nun regularisierten und renormierten Integrale beinhalten keine weiteren Singularitäten und können mit den Standardmethoden der numerischen Mathematik integriert und ausgewertet werden. Für die im folgenden angeführten Rechnungen wurde die Integrationsroutine VEGAS [48] verwendet.
Die numerische Auswertung gliedert sich in zwei Teile. Zum einen werden verschiedene P_T-Spektren diskutiert. Weiterhin wird die Abhängigkeit des Wirkungsquerschnitts von der Skala μ sowie der Faktorisierungsskalen in den PDFs und FFs untersucht. Im zweiten Teil werden Rechnungen zu Experimenten der ZEUS- und H1-Gruppe vorgestellt und mit experimentellen Daten verglichen.

6.1 FF's und PDF's, Eingangsparameter

Für die folgenden Rechnungen wird für die FF's die BKS (Binnewies, Kniehl, Kramer) Parametrisierung [34]. Im Gegensatz zu den PDF's, die aus Messungen in tief-inelastischen Experimenten oder Proton-Proton Streuung entnommen werden können, ist die geeigneteste Reaktion zur Bestimmung der FF's die e^+e^--Vernichtung. Der Grund hierfür ist die Abwesenheit zusätzlicher, nicht-störungstheoretischer Größen bei der e^+e^- Vernichtung. Der Prozeß

$$e^+e^- \rightarrow \ (\gamma,\ Z) \ \rightarrow h \ + \ X \tag{6.1}$$

wird dabei vollständig beschrieben durch drei Observable des Hadrons: den Energieanteil $x = \frac{E_h}{\sqrt{s}}$ des detektierten Hadrons an der Schwerpunktenergie s, den Winkel Θ zur Strahlachse sowie die totale Energie des e^+e^--Systems, $\sqrt{s}$ [34]. Der partonische, harte Wirkungsquerschnitt wird hier analog zur inklusiven ein-Teilchen-Produktion berechnen, und der experimentell meßbare Wirkungsquerschnitt läßt sich als Konvolution des harten Wirkungsquerschnitt mit den nicht-perturbativen FF's darstellen:

$$\frac{1}{\sigma_{tot}} \frac{d\sigma(e^+e^- \rightarrow h + X)}{dx\, d\cos\Theta} \ = \ \sum_a \int_x^1 \frac{dz}{z} D_a^h(z, \mu_f^2) \frac{1}{\sigma_{tot}} \frac{d\sigma_a}{dy}(\frac{x}{z}, \mu^2, \mu_f^2) \tag{6.2}$$

Die Summe läuft hierbei über alle betrachteten Partonen.
Aufgrund der universellen Struktur der Singularitäten, die durch das Faktorisierungstheorem gegeben ist (vgl. Kapitel 4.1 und [11, 36]) können auch hier wieder die singulären Anteile ausfaktorisieren und in die FF's absorbiert werden. Diese werden dadurch skalenabhängig. Diese Abhängigkeit der FF's von der Variation der zugrundeliegenden Skala wird durch die Altarelli-Parisi-Kerne gegeben:

$$\frac{d}{d\ln\mu_F^2} D_a^h(x, \mu_f^2) \ = \ \frac{\alpha_s(\mu^2)}{2\pi} \sum_a \int_x^1 \frac{dy}{y} P_{ab}(y, \alpha_s(\mu^2)) D_b^h(\frac{x}{y}, \mu_F^2) \tag{6.3}$$

Durch Fits an experimentelle Daten lassen sich auf diese Weise die FF's für die unterschiedlichen Partonen erhalten.

Diese Darstellung ist natürlich stark vereinfacht. Zum Beispiel sind transversale Anteile des Wirkungsquerschnitts von longitudinalen zu Unterscheiden, um z.B. die Gluonfragmentationsfunktion zu erhalten. Weiterhin existieren weit weniger experimentelle Daten aus e^+e^--Experimenten aus zum Beispiel DIS Experimente. In der zugrundeliegenden Arbeit wurden die Daten der ALEPH Kollaboration [49] verwendet, die bei einer Schwerpunktenergie von $\sqrt{s} = M_Z$ erzielt wurde. Ferner wurden Daten der TCP Kollaboration am SLAC [50] verwendet, welche bei Energien $\sqrt{s} = 29GeV$ gemessen wurden. Die Daten wurden gefittet für $\Lambda_{QCD} = 0.227\ GeV$ und sind verläßlich für $0.1 \leq \xi' \leq 0.8, \quad \mu^2_{F,min} = 3\ GeV^2$. Die Fits wurden für Kaon- und Pionproduktion durchgeführt sowie für die Produktion einer Summe von Pionen und Kaonen. In dieser Analyse wird stets das Set für die Fragmentation in die Summe der Pionen und Kaonen verwendet. Für eine genauere Beschreibung der Analyse wird auf Referenz [34] verwiesen.
Für die PDF's werden die Sets der CTEQ Kollaboration verwendet. In LO α_s wird die CTEQ4L-Parametrisierung benutzt [51], die für $\Lambda_{QCD} = 0.236\ GeV$ und $\alpha_s(Z - Masse) = 0.132$ ausgewertet wurde. Der Definitionsbereich dieser Parametrisierung ist gegeben durch die Einschränkungen für $Q^2 : \ 1.6 < Q < 10000\ GeV$ und $x : \ 10^{-5} < x < 1$. Die NLO Rechnungen werden durch das Set CTEQ4M beschrieben, das im wesentlichen die selben Grenzen wie CTEQ4L besitzt, allerdings für ein Λ_{QCD} von 0.298 GeV gefittet ist. Die Beschreibung der Datennahme ist zu Umfangreich, um an dieser Stelle wiedergegeben zu werden. Für eine detailliertere Beschreibung der verwendeten Sets wird auf die Veröffentlichungen der CTEQ-Kollaboration verwiesen [51].
In den nachfolgenden Analysen wird stets ein Born- und zwei NLO- Wirkungsquerschnitte angeben, wobei "Born LO" durch Rechnung erzielt wurde, in denen die LO PDF's und FF's verwendet wurden, sowie die 1-Loop Gleichung zur Berechnung von α_s (s.u.). "Born-NLO" bezeichnet folglich die Rechnungen, welche die LO-Beiträge zum harten Wirkungsquerschnitt beinhalten, in denen aber bereits die NLO PDF's und FF's sowie die 2-Loop α_s-Formel verwendet wurden. Die durch "NLO" bezeichneten Ergebnisse enthalten schließlich LO- und NLO-Beiträge zum harten Wirkungsquerschnitt sowie NLO FF's, PDF's sowie die 2-Loop-α_s Rechnung.
Alle Rechnungen wurden für 4 Quarkflavours durchgeführt. Die Berechnung der starken Kopplung α_s erfolgt in LO durch die Formel

$$\alpha_s(\mu^2) \quad = \quad \frac{g_s^2(\mu)}{4\pi} = \frac{4\pi}{\beta_0 \log(\frac{\mu^2}{\Lambda^2_{QCD}})} \tag{6.4}$$

In NLO wird für die Berechnung von α_s folgende Gleichung benutzt:

$$\alpha_s(\mu^2) \quad = \quad \frac{g_s^2(\mu)}{4\pi} = \frac{2\pi}{\beta_0 \log(\frac{\mu^2}{\Lambda^2_{QCD}})} \left[1 - \frac{\beta_1 \ \ln(\ln \frac{\mu^2}{\Lambda^2})}{\beta_0^2 \ \ln \frac{\mu^2}{\Lambda^2}}\right] \tag{6.5}$$

mit

$$\begin{aligned} \beta_0 &= 11 - \frac{2}{3} n_f \\ \beta_1 &= 102 - \frac{38}{3} n_f \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n_f &= 4 \\ \Lambda_{QCD} &= 0.298 GeV \end{aligned} \tag{6.6}$$

Für die Renormierungsskala μ in α_s, die Fragmentationsskala μ_F sowie die Faktorisierungsskala am Protonvertex μ_P wird stets

$$\mu_P^2 = \mu_F^2 = \mu = (Q^2 + P_T^2) \tag{6.7}$$

verwendet. Auf Abweichungen hiervon wird gesondert hingewiesen werden.

6.2 P_T-Spektren

Die auf den folgenden Seiten dargestellten Abbildungen 11-14 zeigen P_T-Spektren differentieller Wirkungsquerschnitte sowie die zugehörigen K-Faktoren. Die gezeigten Wirkungsquerschnitte sind differentiell in den Parametern x_{Bj}, y und Z und wurden normiert auf den totalen Wirkungsquerschnitt in LO α_s, differentiell in x und y. Der K-Faktor ist definiert als Quotient aus den Born-NLO zu NLO Ergebnissen:

$$\text{K-Faktor} = \frac{NLO}{BornNLO} \tag{6.8}$$

An Abbildung 11 lassen sich die Hauptergebnisse der Rechnungen gut zeigen. Gezeigt ist ein P_T Spektrum für den vierfach-differentiellen Wirkungsquerschnitt $\frac{d\sigma}{dx_{bj}dydZdP_T}$, sowie der K-Faktor. In dieser Rechnung wurden die kinematischen Parameter wir folgt gewählt: $x_{Bj} = 0.002,\ y = 0.1,\ z = 0.3,\ Q^2 = 360\ GeV^2$.
Offensichtlich ist der signifikanter Unterschied zwischen den Born und Born-NLO Ergebnissen zu erkennen, der bis zu $\pm$ 25% betragen kann. Dieser ist fast vollständig auf den Unterschied in der Berechnung von α_s zurückzuführen. Der 2-Loop-Beitrag in Gleichung 6.5 ist nahazu vollständig für diese Reduzierung des Wirkungsquerschnitts verantwortlich. Die höheren Beiträge in den FF's und PDF's spielen dagegen nur eine untergeordnete Rolle.
Die Beiträge der 2-Loop Matrixelemente inklusive der virtuellen Korrekturen sind generell geringer als dieser Unterschied und betragen in verläßlichen Bereichen der Rechnungen etwa $\pm$ 15% bis zu maximal $\pm$ 35% des entsprechenden Wertes in der NLO-Born-Rechnung.
Der Anteil dieser Beiträge istan den K-Faktoren zu sehen, die über weite Bereiche zwischen 0.8 und 1.4 liegen und nur bei sehr kleinen oder sehr großen Werten von P_T zu extremeren Werten übergehen, was auf die nicht mehr vorhandene Gültigkeit der zugrundeliegenden Annahmen deutet. Im Falle kleiner P_T, $(P_T < 1.5\ GeV)$, ist dies durch das Verlassen des Definitionsbereichs der FF's zu verstehen. Bei den Rechnungen hat sich gezeigt, daß für $P_T > 30\ GeV$ die Ergebnisse instabil werden und in diesem Bereich keine verläßlichen Aussagen mehr gemacht werden können. In den Bereichen $2\ GeV \leq P_T \leq 30\ GeV$ liegen die theoretischen Fehler bei etwa $\pm$5%, für größere P_T steigen diese jedoch schnell auf 10% und mehr an, sodaß hier keine verläßlichen Aussagen mehr möglich sind.

Die Abbildungen 12-14 zeigen jeweils drei P_T-Spektren für $x_{Bj} = 0.01,\ 0.04$ und 0.1, was bei festem y=0.1 Impulsüberträgen von $Q^2 = 90,\ 360$ und $900\ GeV^2$ entspricht Bei den drei Abbildungen wurde Z unterschiedlich gewählt: Z=0.1 für die Rechnungen in Abbildung 11, Z=0.3

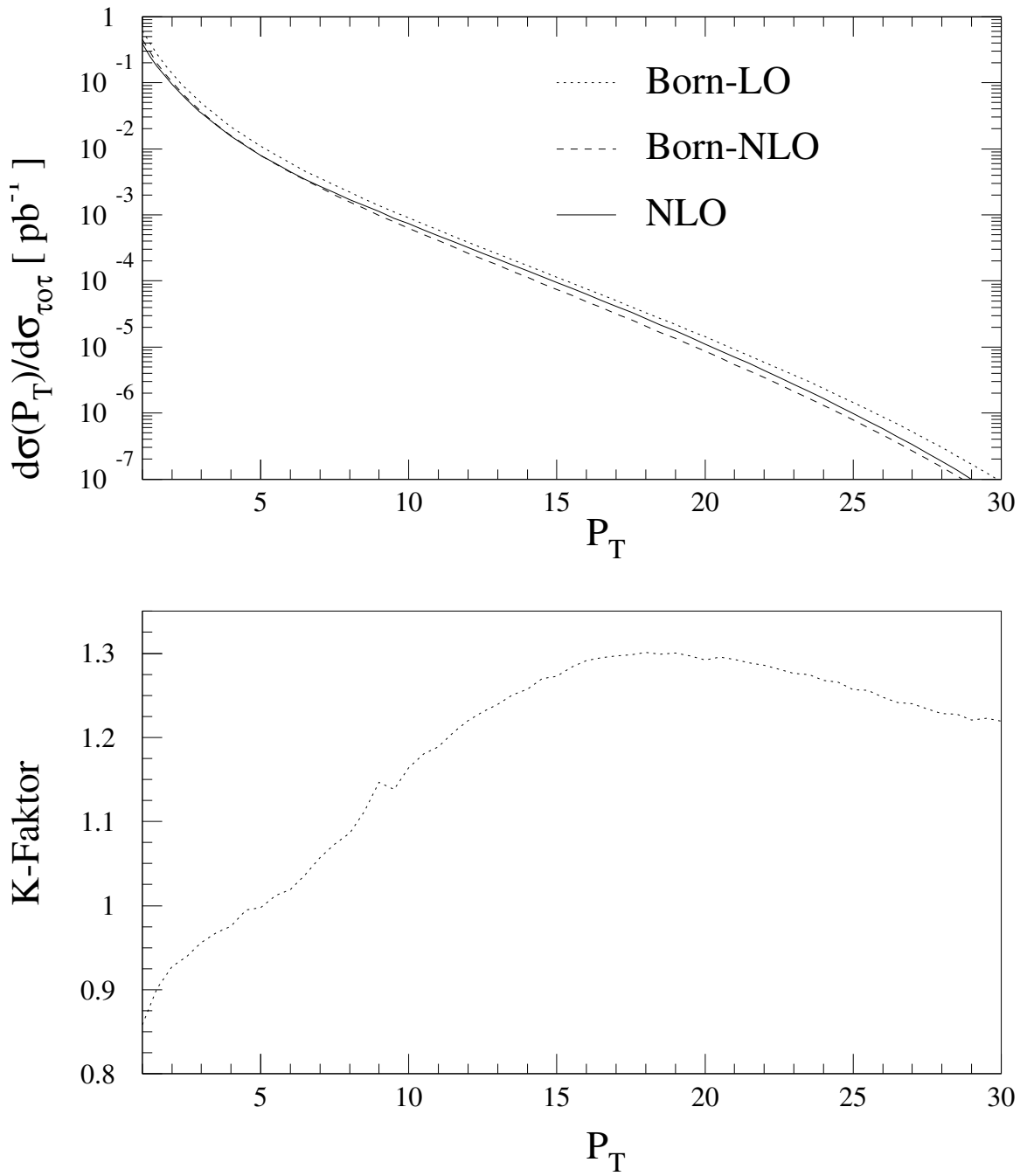

Abbildung 11: Gezeigt ist ein exemplarischer Plot für einen vierfach differentiellen Wirkungsquerschnitt , aufgetragen gegen P_T. Feste Parameter sind x_{Bj}=0.002, y=0.1, Z=0.3. Damit ergibt sich der Impulsübertrag Q^2 zu 360 GeV^2

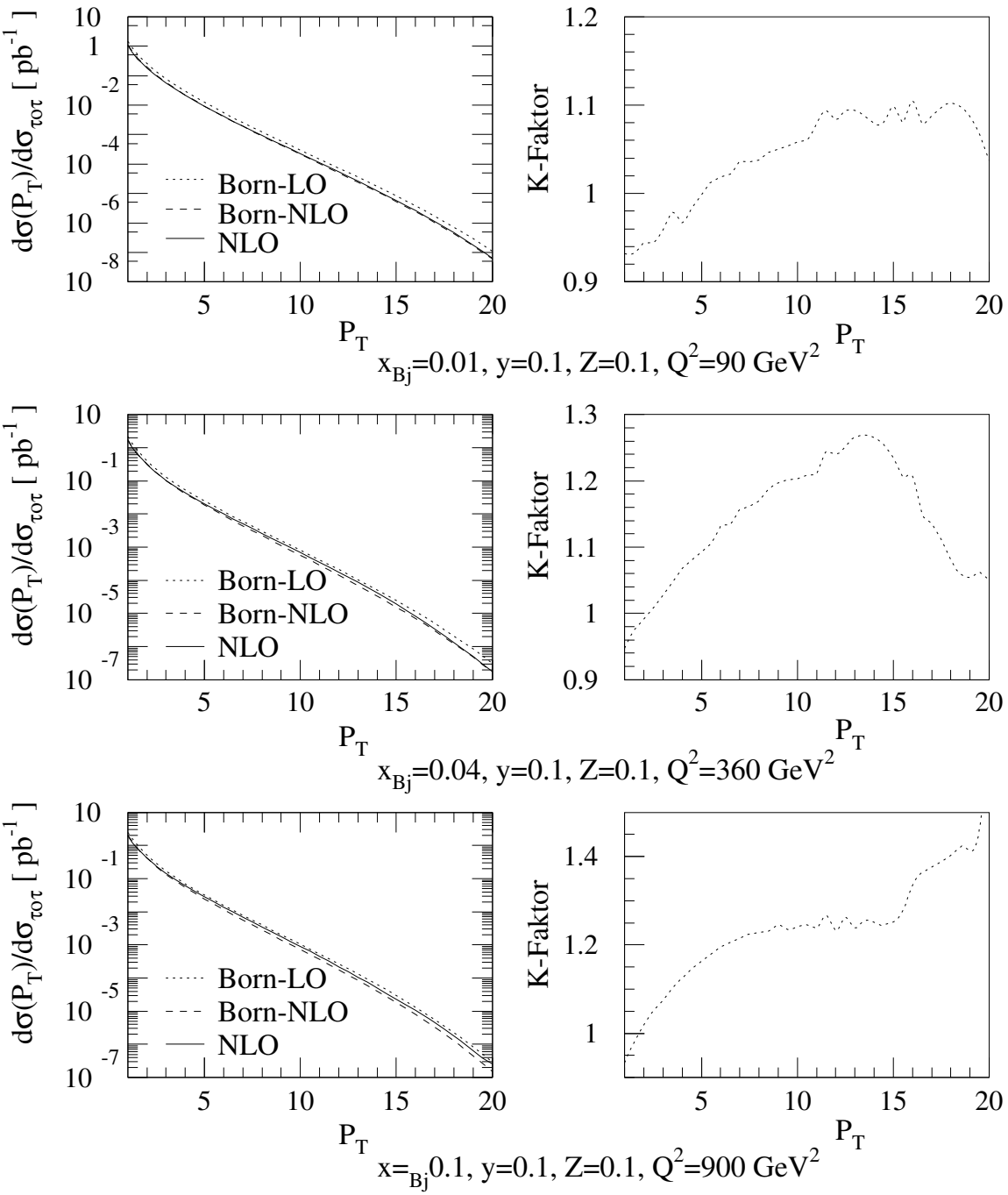

Abbildung 12: Vergleich von P_t-Spektren für Wirkungsquerschnitte mit verschiedenen Werten für Q^2. Feste Parameter sind y=0.1, Z=0.1. Berechnet wurden die Spektren für Werte von Q^2 = 90, 360 und 900 GeV^2

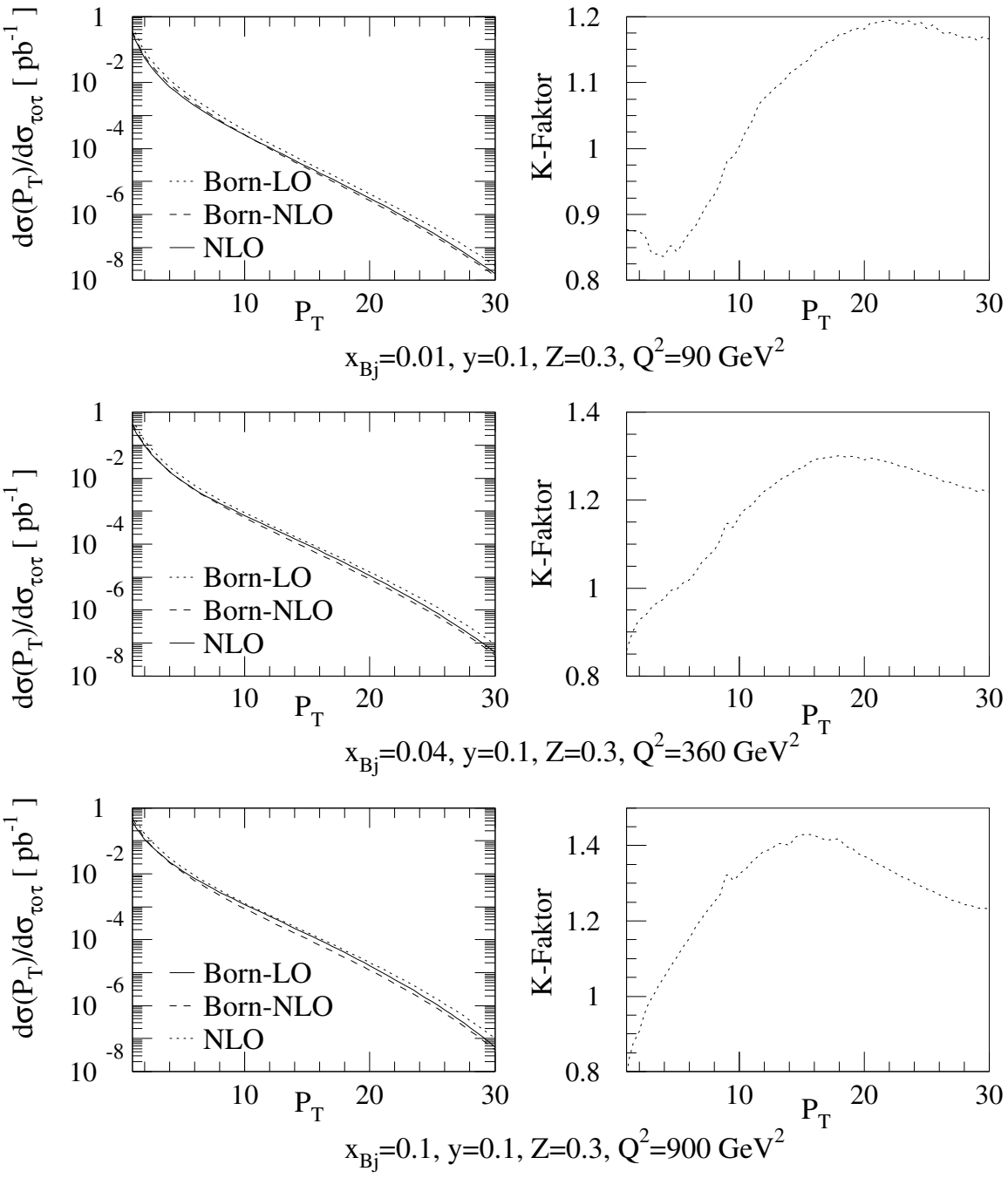

Abbildung 13: Vergleich von P_T-Spektren für Wirkungsquerschnitte mit verschiedenen Werten für Q^2. Feste Parameter sind y=0.1, Z=0.3. Berechnet wurden die Spektren für Werte von $Q^2 = 90$, 360 und 900 GeV^2

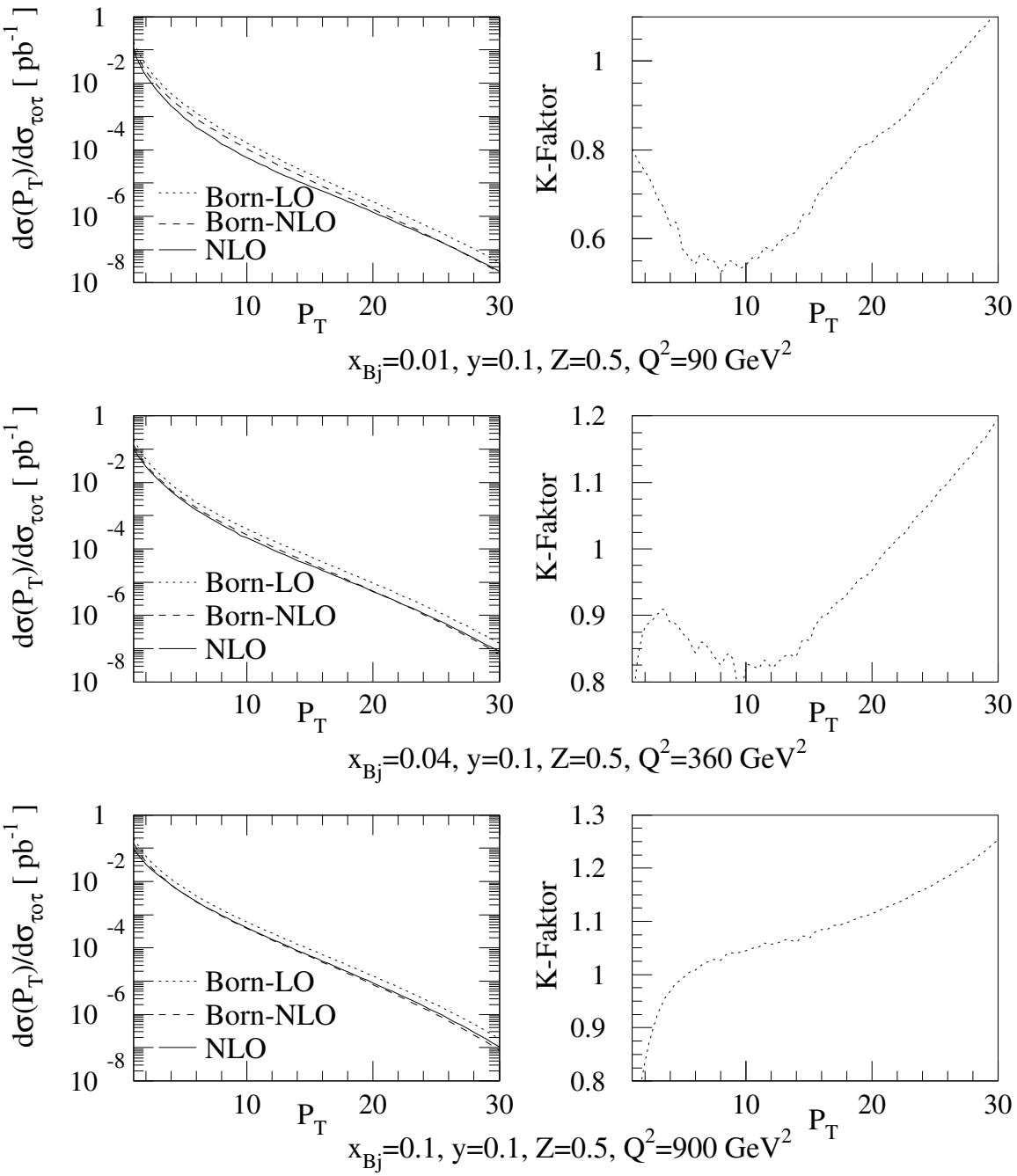

Abbildung 14: Vergleich von P_T-Spektren für Wirkungsquerschnitte mit verschiedenen Werten für Q^2. Feste Parameter sind y=0.1, Z=0.5. Berechnet wurden die Spektren für Werte von $Q^2 = 90$, 360 und 900 GeV^2

für Abbildung 12 und 0.5 in Abbildung 13.
In Abbildung 13 ist besonders bei der Betrachtung der K-Faktoren die numerische Ungenauigkeit sowie das Divergieren des K-Faktors in der unteren Teilabbildung auffällig. In diesem Fall ist dies auf die Größe von $Z = 0.1$ zurückzuführen, welche die Grenze des Gültigkeitsbereiches der FF's darstellt. Die theoretischen Unsicherheiten liegen hier auch im Bereich mittlerer P_T, $3\ GeV \leq P_T \leq 30\ GeV$ bei $\pm$ 10% der NLO-Korrekturen.
Die Rechnungen in Abbildung 12 und 13 sind numerisch wesentlich stabiler. Ferner ist hier der K-Faktor über weite Bereiche in störungstheoretisch akzeptablen Bereichen und tendiert erst für sehr große P_T zu größeren Werten. Für diese Werte von Z betrug der theoretische Fehler wiederum $\pm$ 5%.
Deutlich ist zu sehen, daß der K-Faktor mit zunehmendem P_T moderat ansteigt. Ab Werten für P_T von ca. 30-35 GeV (abhängig von z) überschreitet der K-Faktor den Wert von 1.4, was auf die nicht mehr vorhandene Gültigkeit der Störungsrechnung deutet. Wie bereits vorher gesagt, werden in diesen Bereichen die Rechnungen instabil und konnten auch durch eine Verfeinerung des Rasters bei VEGAS nicht verbessert werden.
Betrachtet man innerhalb der einzelnen Abbildungen (d.h. für konstante z) die Abhängigkeit der normierten Wirkungsquerschnitte von x bzw. Q^2, so sieht man, daß diese näherungsweise konstant bleiben. Dies bedeutet, das erwartungsgemäß der absolute Wirkungsquerschnitt zunimmt, da der Normierungsfaktor proportional zu $\frac{1}{Q^4}$ ist (vgl. 3.21).
Ebenso erkennt man bei einem Vergleich der Ergebnisse für konstante x und unterschiedliche z, daß mit größer werdendem Z der Wirkungsquerschnitt deutlich abnimmt. Auch dies entspricht den Erwartungen, da ein größeres Z eine Einschränkung des Integrationsbereiches bzw. des Phasenraums entspricht, welcher der Reaktion offensteht und offensichtlich die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses für stärkere Einschränkungen geringer werden muß.

6.3 Die Skalenabhängigkeit des Wirkungsquerschnitts

Eine weitere, wichtige Größe, die es bei NLO Rechnungen zu untersuchen gilt, ist die Skalenabhängigkeit des Wirkungsquerschnitts von der gewählten Impulsskala. Wie bereits erläutert wurde (siehe Kapitel 1 und 4), erhalten sowohl die starke Kopplung α_s, als auch die PDF's und FF's durch die notwendige Renormierung eine Skalenabhängigkeit. Diese in führender Ordnung in α_s starke Abhängigkeit sollte in NLO Rechnungen durch die höheren Korrekturen zumindest teilweise korrigiert werden. Abbildung 14 zeigt die Abhängigkeit des Wirkungsquerschnitts von der gewählten Eingangsskala für 6 Rechnungen mit unterschiedlichen kinematischen Variablen. Gerechnet wurde für festes P_T von 10 GeV und y=0.1. Es wurden jeweils zwei Rechnungen für Z Werte von 0.1, 0.3 und 0.5 durchgeführt, und zwar für virtuelle Photonimpuls von 30 und 60 GeV. Dargestellt wird der Quotient $\frac{\sigma(\zeta)}{\sigma(\zeta=1)}$, wobei die Eingangsskala ζ die Gleiche für α_s, die PDFs und FFs ist und die über folgende Gleichung definiert wird

$$\mu = \mu_F = \mu_P \quad = \quad \zeta(Q^2 + P_T^2)^{\frac{1}{2}} \tag{6.9}$$

Gezeigt werden in Abbildung 15 die ζ Spektren für $0.1 < \zeta < 2$ für drei Werte für Z, $Z = 0.1,\ 0.3,\ 0.5$. Für jeden der drei Z Werte wurden zwei Spektren für $Q = 60\ GeV$ und

$Q = 75\ GeV$ aufgenommen.
Bei den Rechnungen zeigt sich, daß der Effekt deutlicher für $Z \geq 0.3$ zu erkennen ist, allerdings sehr gering ausgeprägt ist für $Z = 0.1$. Im Fall von Z=0.3 und $Q = 75\ GeV$ wird hier eine recht kleine Verbesserung erzielt (der Wert des Wirkungsquerschnitts sinkt auf etwa 68% seines Wertes bei $\zeta = 1$ gegenüber 62% bei der Born Rechnung). Im Falle von Z=0.5 und $Q = 60\ GeV$ sinkt der Wirkungsquerschnitt nur noch auf 72% seines wertes bei $\zeta = 1$ ab, gegenüber 68% bei der Born Rechnung. Auch für Werte von ζ kleiner als 1 ist eine deutlich schwächere Abhängigkeit der NLO Rechnungen zu sehen. Generell ist die Kompensation etwas ausgeprägter für große Q^2.
Abbildung 16 zeigt die Auflösung der Beiträge von α_s, den PDF's und FF's zur Skalen Abhängigkeit des Wirkungsquerschnitts. Gezeigt werden die Beiträge für die kinematischen Größen $P_T = 10\ GeV$, y=0.1, Z=0.5 und $Q = 60\ GeV$. Deutlich ist zu sehen, daß in jedem der drei Teilgraphen, die von oben nach unten die Einzelbeiträge von α_s, den PDF's und FF's zeigen, die NLO Korrekturen die Skalenabhängigkeit verringern. Während in den ersten beiden Rechnungen die Abhängigkeit des 1-Loop- Bornrechnung und der 2-Loop-Bornrechnung annähernd gleich sind, verschlechtert bei dem Einfluß der FF's zunächst die 2-Loop Bornrechnung das Ergebnis in führtender Ordnung, was aber später in den NLO Korrekturen mehr als kompensiert wird.
Abschließend läßt sich sagen, daß der Effekt der Kompensation vorhanden ist, allerdings weniger ausgeprägt als erwartet.

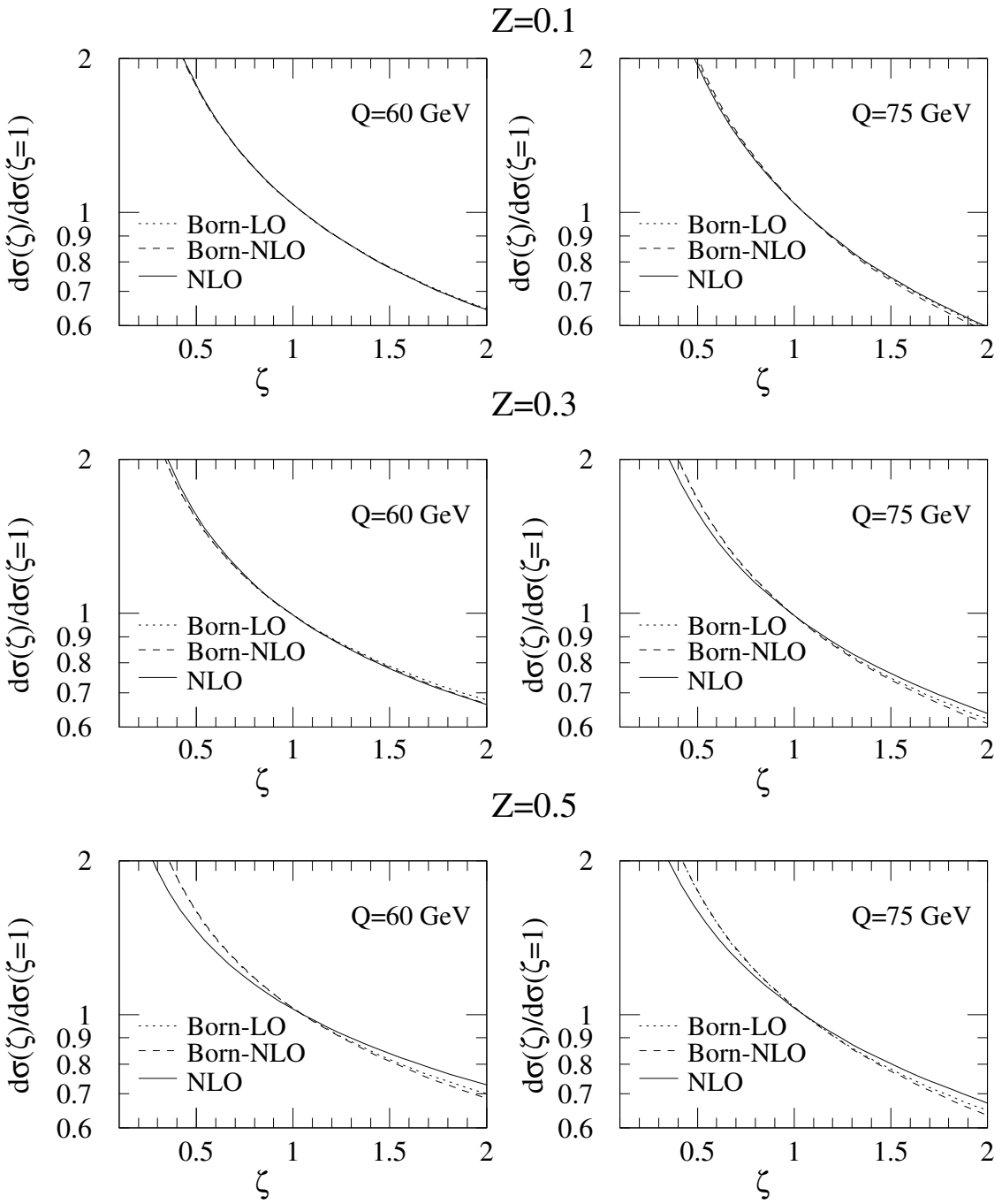

Abbildung 15: Die Skalenabhängigkeit des Wirkungsquerschnitts. Gerechnet wurde bei p_T = 10 GeV, y=0.1. Es wurden variiert Z=0.1, 0.3 und 0.5, wobei für jeden Z Wert zwei Rechnungen für Q=35 GeV und 60 GeV durchgeführt wurden.

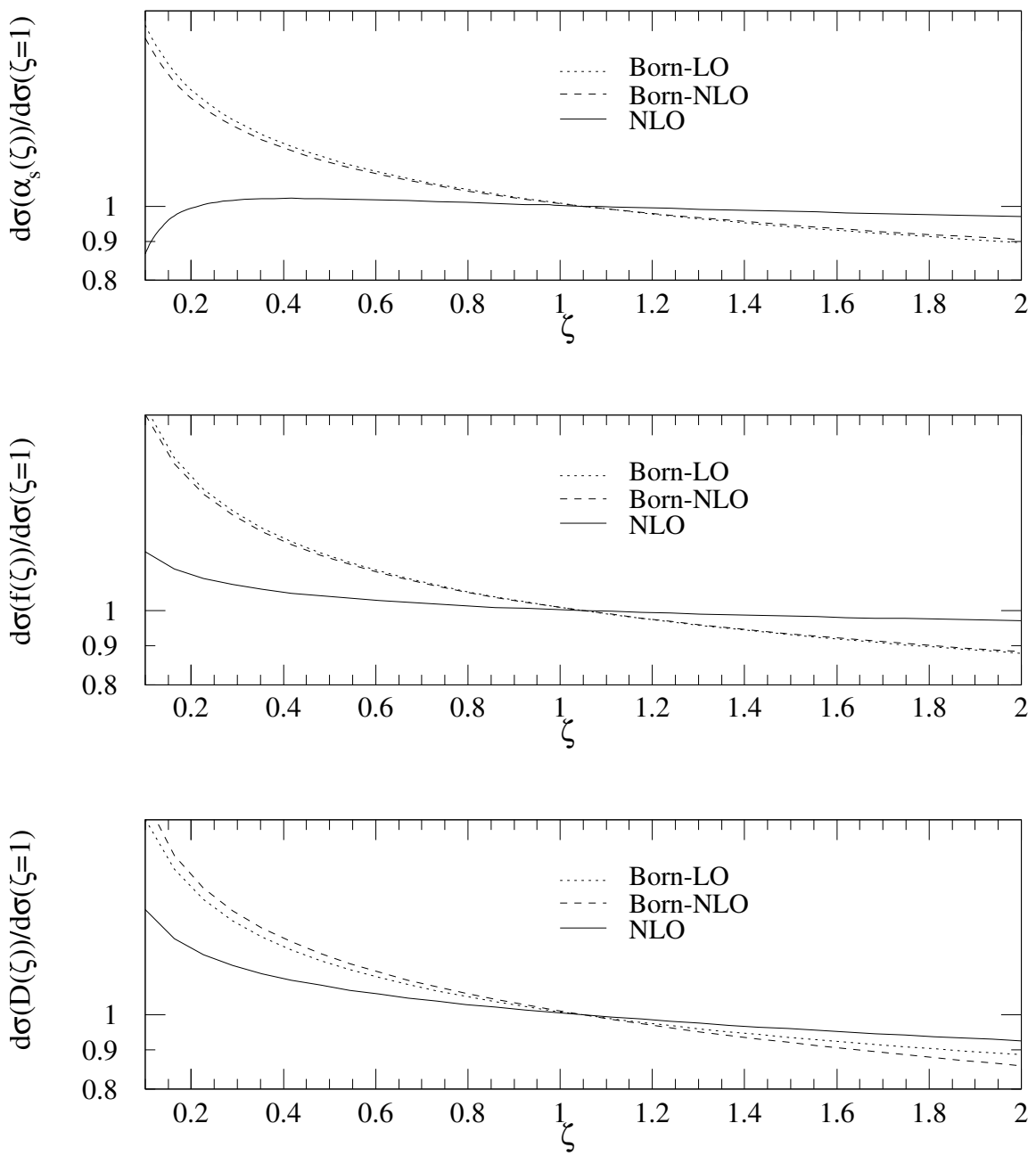

Abbildung 16: Die einzelnen Beiträge von α_s, den PDF's und FF's zu der Skalenabhängigkeit des Wirkungsquerschnitts. Gerechnet wurde die Zerlegung für $p_T = 10\ GeV$, y=0.1, Z=0.3 und Q=60 GeV, was dem Gesamtbeitrag entspricht, der im zweiten Graph der rechten Spalte in Abbildung 15 gezeigt ist. Die Graphen zeigen die Abhängigkeit des Wirkungsquerschnitts für die Variation der Skala ζ, normiert auf den Wirkungsquerschnitt bei $\zeta = 1$

6.4 Hadronproduktion bei ZEUS

Im zweiten Teil der numerischen Analyse werden Rechnungen zu zwei Experimenten vorgestellt, die am HERA Speicherring der Forschungsanlage DESY von den Gruppen ZEUS und H1 durchgeführt wurden. Zunächst wird das ZEUS Experiment diskutiert, welches Messungen aus dem Jahr 1994 darstellt [6].
Gemessen wurde der einfach differentielle Wirkungsquerschnitt, differentiell in P_T, für 1-Teilchen inklusive Hadronproduktion in e-p-Streuung bei einer Schwerpunktsenergie von $820 GeV^2$. Folgende kinematische Grenzen wurden für dieses Experimentes angesetzt:

- $0.05 \leq Z \leq 1, \quad 0.05 \leq y \leq 0.99, \quad 0.0085 \leq x \leq 0.085$
- $10\ GeV^2 \leq Q^2 \leq 160\ GeV^2$ und $5600\ GeV^2 \leq W^2 \leq\ 30600 GeV^2$
- Die Energie des gestreuten Positrons muß ≥ 12 GeV sein und der Streuwinkel gegen die Strahlachse darf höchsten 7^o betragen. Dies entspricht einer Beschränkung von $0.04 \leq y \leq 1$
- Der Streuwinkel der produzierten, geladenen Teilchen gegen die Strahlachse muß im Bereich von $[25^o, 155^o]$ liegen. Andernfalls können die zu weit in Vorwärtsrichtung gestreuten Teilchen vom Detektor nicht mehr erfaßt werden kann.
- Der Transversalimpuls muß größer als $0.2\ GeV$ sein.

Abbildung 17 zeigt die Verteilung der gemessenen Ereignisse in der $x_{Bj} - Q^2$-Ebene. Ferner sind die Grenzen, die sich durch Beschränkungen in der invarianten Masse oder in y ergeben, eingetragen.
Für eine eingehende Erläuterung der Kinematik wird auf die Referenzen der ZEUS Kollaboration [6] verwiesen.

Das Experiment besteht aus mehreren Teilergebnissen, wobei unter anderem auch das Vorhandensein sogenannter "Rapidity-Gaps" untersucht und in zwei verschiedenen Bereichen, dem Non-Rapidity-Gap Bereich und dem Large-Rapidity-Gap Bereich, gemessen wird. In dieser Arbeit wird nicht weiter auf dieses Phänomen eingegangen und als Vergleich mit den durchgeführten Rechnungen stets die Messung über den gesamten z- bzw Rapiditätsbereich verwendet (für eine Diskussion der Rapidität siehe nächstes Unterkapitel). Ferner sollte dieser Bereich keinen großen Einfluß auf diese Analyse haben, da die Rapidity-Gap-Events weniger als 10% zu den Gesamtevents beitragen und nur für kleine P_T, $P_T \leq 1 GeV$ eine Rolle spielen sollten.
Die theoretischen Ergebnisse sowie die experimentellen Daten sind in Abbildung 18 dargestellt. Berechnet wurde das P_T-Spektrum sowie der k-Faktor. Zu Beginn der Diskussion sind zwei Punkte im Vergleich zum vorherigen Unterkapitel hervorzuheben. Zum einen wird in dieser Analyse als Impulsskala Q^2 verwendet, da die gemessenen Transversalimpulse klein sind gegen den Impulsübertrag. Zum anderen beinhaltet der LO Born-Beitrag nun nicht mehr nur transversale, sondern zusätzlich auch die longitudinale Beiträge des ausgetauschten γ- Quants (vergleiche hierzu Kapitel 2 und 3). Diese Wahl ist dadurch gerechtfertigt, daß beide Beiträge

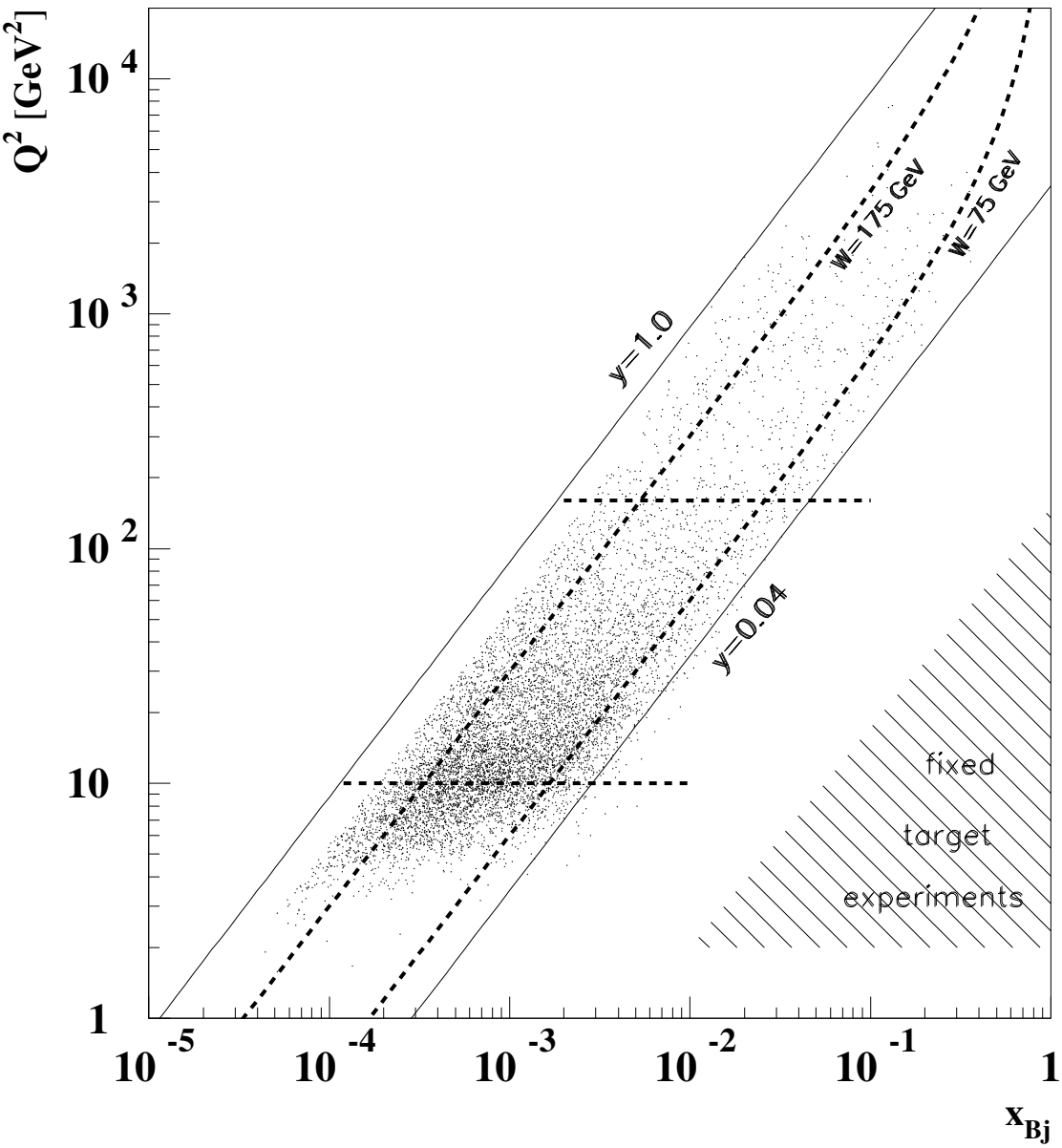

Abbildung 17: Der Phasenraum im ZEUS Experiment. Gezeigt wird die Event-Verteilung sowie Der Einfluß der Experimentellen Cuts. Die Graphik wurde übernommen aus Referenz [6]

in LO bekannt sind und somit ebenfalls in Betracht gezogen werden sollten. Es zeigt sich allerdings, daß die longitudinalen Beiträge klein im Vergleich zu den transversalen sind und etwa 10% der letzteren ausmachen. Deshalb sollte auch die Vernachlässigung der longitudinalen Beiträgen in NLO Order keinen großen Einfluß auf die Ergebnisse haben, da anzunehmen ist, daß auch in der nächsthöheren Ordnung der Anteil der longitudinalen Beiträge ähnlich stark unterdrückt ist.
Das Ergebnis für das P_T-Spektrum im oberen Teilbild von Abbildung 18 kann nun folgendermaßen interpretiert werden: Grob kann man das Ergebnis in zwei Abschnitte einteilen. Für Werte des Transversalimpulses, die kleiner als 2 GeV sind, werden die Vorhersagen recht schlecht, die Rechnungen liegen nicht innerhalb der experimentellen Fehlergrenzen. Dies ist aber nicht sehr erstaunlich, da für diesen Wertebereich des Transversalimpulses die FF's keine verläßlichen Daten liefern. Leider liegt sowohl im ZEUS- wie auch beim H1 Experiment ein Großteil der Werte in diesem der Theorie schwer zugänglichen Bereich.
Anders stellt sich die Situation im Bereich größerer Transversalimpulse dar. Hier zeigt sich deutlich, daß die Theorie das Experiment besser beschreibt. Darüberhinaus ist auch klar zu erkennen, daß die Rechnungen in NLO benötigt werden, um die experimentellen Erkenntnisse zu erklären, da der LO-Bornquerschnitt außerhalb der experimentellen Fehlergrenzen liegt. Der Beitrag der höheren Ordnung ist wesentlich durch den Einfluß der starken Kopplung α_s bestimmt, die in NLO das Ergebnis um etwa 20 - 30% verringert. Dies ist gut an der Kurve NLO-Born zu sehen. Diese ist zwar auch schon mit NLO PDF's und FF's gerechnet, bei denen der Einfluß der höheren Ordnung aber ebenfalls wesentlich kleiner als bei α_s ist. Die Korrekturen, die auf den Einfluß der NLO Matrixelemente zurückzuführen ist beträgt etwa 10 - 20 %, wobei anzumerken ist, daß sowohl der Beitrag durch α_s als auch derjenige bedingt durch die Matrixelemente höherer Ordnung negativ ist, d.h. die NLO Rechnung senkt den Wirkungsquerschnitt ab.
Im unteren Teilbild ist wiederum der K-Faktor berechnet. Er zeigt, daß im größten Teil des Spektrums der Beitrag der höheren Ordnungen ca. 10% des NLO Born Terms entspricht.
Die theoretischen Fehler liegen bei etwa 10% für $P_T \leq 1.2\ GeV$, verringern sich dann stetig auf etwa 3% für $P_T \geq 3\ GeV$.
Zusammenfassend läßt sich sagen, daß die Theorie im Rahmen der Fehler und des ungünstigen kinematischen Bereiches das Experiment gut beschreibt und die zugrundeliegenden theoretischen Annahmen bestätigt werden.

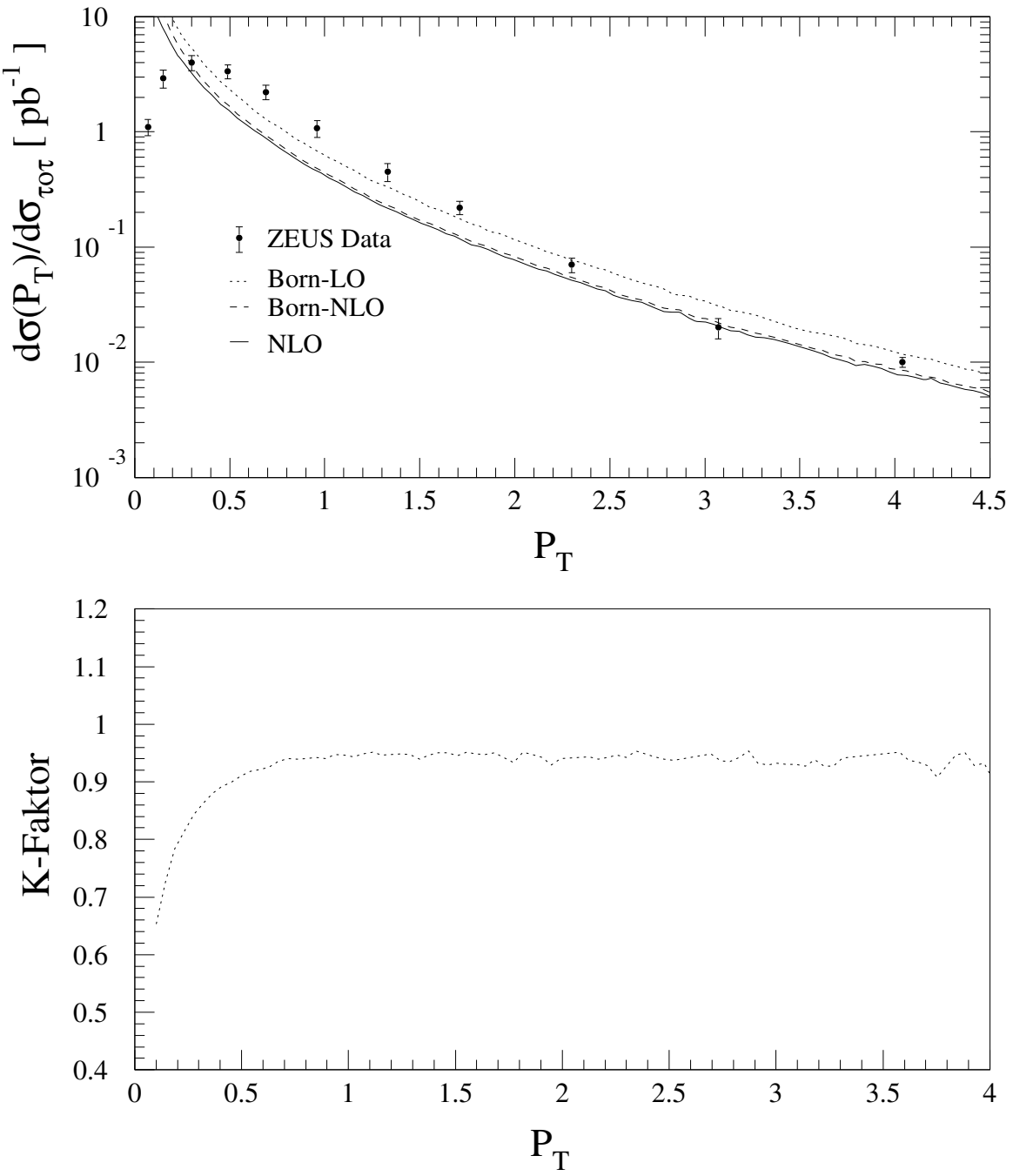

Abbildung 18: Vergleich der Ergebnisse mit dem ZEUS - Experiment. Gemessen wurde für Werte 10 $GeV^2 < Q^2 < 160\ GeV^2$, $0.1 < P_T < 4.5$, $0.05 < Z < 1$, $0.05 < y < 1$, $0.0085 < x_{bj} < 0.085$ und 5625 $GeV^2 < W^2 < 30625\ GeV^2$

6.5 Hadronproduktion bei H1

Das zweite HERA Experiment, für das in dieser Arbeit Vergleichsrechnungen durchführen wurden, ist das H1 Experiment [5]. Es zeigt wiederum die P_T-Spektren für die Produktion geladener Teilchen bei nicht-verschwindendem Transversalimpuls in Elektron-Proton Kollisionen am HERA-Beschleuniger. Gemessen wurde bei einer Schwerpunktsenergie von $\sqrt{s} = 300 GeV$ für eine integrierte Luminosität von 13 pb^{-1}. Als Cut für die Virtualität des ausgetauschten $\gamma-$Quants wurden 5 $GeV^2 < Q^2 < 50\ GeV^2$ angesetzt. Ferner unterliegt die Datennahme folgenden Einschränkungen:

- Die Energie des gestreuten Positrons muß ≥ 12 GeV sein und der Streuwinkel gegen die Strahlachse darf höchsten 7^o betragen.
- Der Streuwinkel der produzierten, geladenen Teilchen gegen die Strahlachse muß im Bereich von $[8^o, 155^o]$ liegen. Dies entspricht einer Beschränkung in y von $y \leq 0.05$

Diese und einige weitere experimentelle Einschränkungen legen im wesentlichen die kinematischen Grenzen fest, die für die einzelnen Meßreihen gelten. Zur genaueren Beschreibung des Experiments wird auf die Veröffentlichungen der H1-Gruppe, z.B. [5], verwiesen.
Es wurden mehrere Meßreihen (Bins) für unterschiedliche kinematische Regionen durchgeführt. Die kinematischen Grenzen für die einzelnen Bins sind in Tabelle 8 dargestellt [5].

Bin	Q^2/GeV^2	$< Q^2 >$	x_{Bj}	$< x_{Bj} >$	$< W^2 > /GeV^2$
Bin1	5 - 10	7.0	0.0001-0.001	.00016	45296
Bin2	6 - 10	8.8	0.0002-0.0005	0.00029	31686
Bin3	10 - 20	13.1	0.0002-0.0005	0.00037	36893
Bin4	10 - 20	14.0	0.0002-0.0008	0.00064	22401
Bin5	10 - 20	14.3	0.0008-0.0015	0.0011	13498
Bin6	10 - 20	15.3	0.0015-0.004	0.0021	7543
Bin7	20 - 50	28.6	0.0005-0.0014	0.00093	32390
Bin8	20 - 50	31.6	0.0014-0.0003	0.0021	16025
Bin9	20 - 50	34.7	0.003-0.01	0.0044	8225

Tabelle 8: Kinematik in den H1-Bins

Im H1 Experiment wurde nicht über z, sondern über einen η Bereich integriert, wobei η für die Pseudorapidität steht und über folgende Gleichung definiert ist:

$$\eta = -\ln \tan\left(\frac{\Theta^*}{2}\right) \tag{6.10}$$

Θ^* bezeichnet hierbei den Winkel zwischen auslaufendem Teilchen und der Strahlrichtung des virtuellen Photons. Der Zusammenhang zwischen η und Z ist leicht zu sehen:

$$Z = \frac{PP'}{Pq} = \frac{EE' + \vec{p}\vec{p'}}{Eq_0 - \vec{P}\vec{q}} \tag{6.11}$$

Begibt man sich in das c-m-System von Photon-Hadron, so findet man (vgl. Anhang 8.2)

$$\begin{aligned} Z &= \frac{(E|0|0|E)(\cosh\eta|0|0| - \sinh\eta)p_T}{E(q_0+E)} \\ &= \frac{P_T\, e^{\eta}}{q_0+E} \end{aligned} \tag{6.12}$$

Für die invariante Masse des Hadron-Photon-Systems finden wir

$$W^2 = (P+q)^2 = (E+q_0)^2$$

Mit

$$x_T = \frac{2\,P_T}{W}$$

findet man für Z

$$\begin{aligned} Z &= \frac{P_T\, e^{\eta}}{W} = \frac{1}{2}\, x_T\, e^{\eta} \\ d\eta &= \frac{1}{Z} dZ \end{aligned} \tag{6.13}$$

Wie man an Tabelle 8 sehen kann, besteht das H1-Experiment aus mehreren Runs in verschiedenen kinematischen Bereichen, den sogenannten Bins. Auch hier sind diese Bereiche, wie schon im Falle des ZEUS-Experimentes, für die Theorie schwer zugänglich. Wegen der kleinen Q^2 beziehungsweise kleinen x ist davon auszugehen, daß die theoretischen Werte das Experiment nur ungenau beschreiben. Der Hauptgrund dafür ist das Zusammenbrechen der DGLAP Gleichung, da diese eine Potenzreihensumme in $(\alpha_s\,(\ln Q^2))^n$ ist. Für kleine x sind hier keine sinnvollen Ergebnisse mehr zu erwarten, da nun das Produkt aus α_s und den Logarithmen nicht mehr klein ist und somit eine Reihenentwicklung keinen Sinn mehr macht. Theoretische Zugänge, wie zum Beispiel der BFKL Ansatz [16, 17] beschreiben die Physik in diesem Bereich besser. Die Behandlung dieses Ansatzes liegt jedoch außerhalb des Rahmens dieser Arbeit. Deswegen wird der Vergleich der Ergebnisse auf die am geeignetesten erscheinenden Bin 4 bis 9 beschränken werden.
Die Abbildungen 19 und 20 zeigen die Ergebnisse für die untersuchten Bins. Die Ergebnisse bestätigen die oben gemachten Erwartungen sehr gut. In den Bins 6,7 und 9 zeigt sich ein geringerer Unterschied zu den Experimenten als bei den verbleibenden 3 Bins. Tabelle 8 zeigt, daß in diesen Bins x relativ groß bzw. Q^2 groß ist. Bei den Bins 4, 5 und 7 ist dies nicht der Fall. Nicht-störungstheoretische Effekte verschlechtern hier die theoretischen Vorhersagen.
Ein wesentlicher Unterschied zum ZEUS Experiment ist der z-Bereich, in dem bei H1 gemessen wird. übersetzt man den η-Bereich von 1.5 bis 2.5 nach z, so läßt sich sehen, daß die H1-Messungen im Bereich kleiner Z stattfinden. abhängig von den Betrachteten Bins liegen die Grenzen für Z bei $0.02 \leq Z \leq 0.4$. Es wurde bereits in Kapitel 6.2 darauf hingewiesen, daß für kleine Werte von Z keine verläßlichen Ergebnisse zu erwarten sind.
Weiterhin ist zu beobachten, daß mit steigendem Transversalimpuls P_T die Theorie das Experiment besser beschreibt. Auch dies entspricht den Erwartungen, da wie schon im vorherigen

Unterkapitel erläutert, die FF's streng genommen erst ab $P_T \sim 1.5\ GeV$ verläßlich sind. An den Plots für die K-Faktoren sieht man, daß hier, ebenfalls wie beim ZEUS-Experiment, die NLO Korrekturen einen negativen Beitrag liefern. Im diesem Fall allerdings einen größeren als bei ZEUS. Die Beiträge liegen hier im Bereich von 5% - 25% der 1-Loop Born Beiträge.
Im Gegensatz zu ZEUS verschlechtern im Fall des H1-Vergleichs die höheren Ordnungen das LO Ergebnis. Auch dies ist ein Hinweis darauf, daß die kinematischen Bereiche der einzelnen Bins zu weit außerhalb der Grenzen liegen, für die eine sinnvolle Anwendung der Störungsrechnung denkbar ist. Zur Erklärung dieser Phänomene müßte also ein anderer Zugang der Theorie herangezogen werden.
Die theoretischen Fehler liegen hier ebenfalls bei etwa $\pm 10\%$

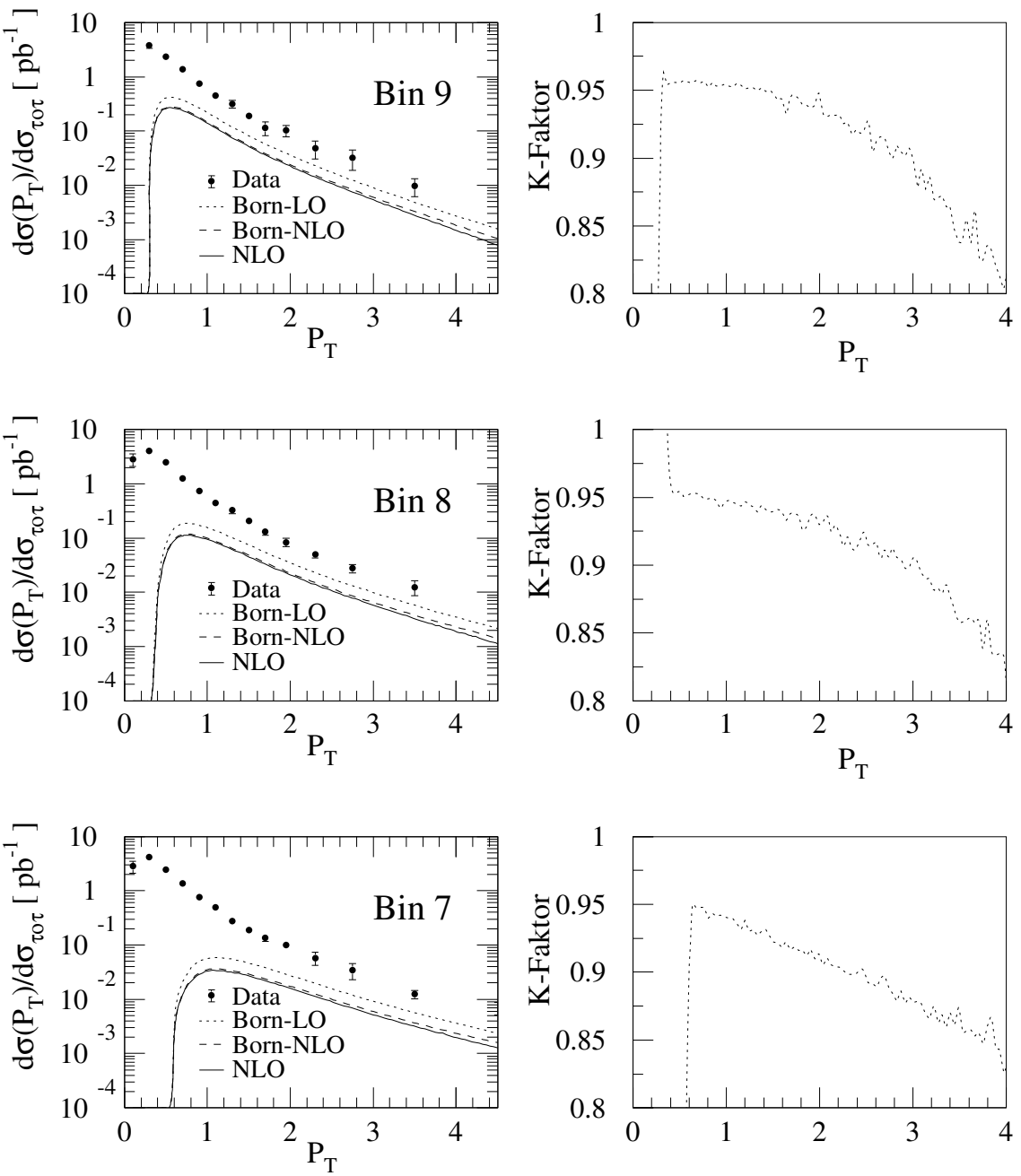

Abbildung 19: Vergleich der Ergebnisse mit dem H1 - Experiment, bin 7 - bin 9. Gezeigt ist der auf den in LO α vollständig integrierten Wirkungsquerschnitt normierte Streuquerschnitt, einfach differentiell in P_T. Integriert wurde für alle Bins über $\eta \in [1.5, 2.5]$, $y \in [0.05, 0.99]$ sowie über $x_{Bj} \in [.003, 0.01]$ in Bin9, $x_{Bj} \in [.0014, 0.003]$ in Bin8 und $x_{Bj} \in [.0005, 0.0014]$ bei Bin7

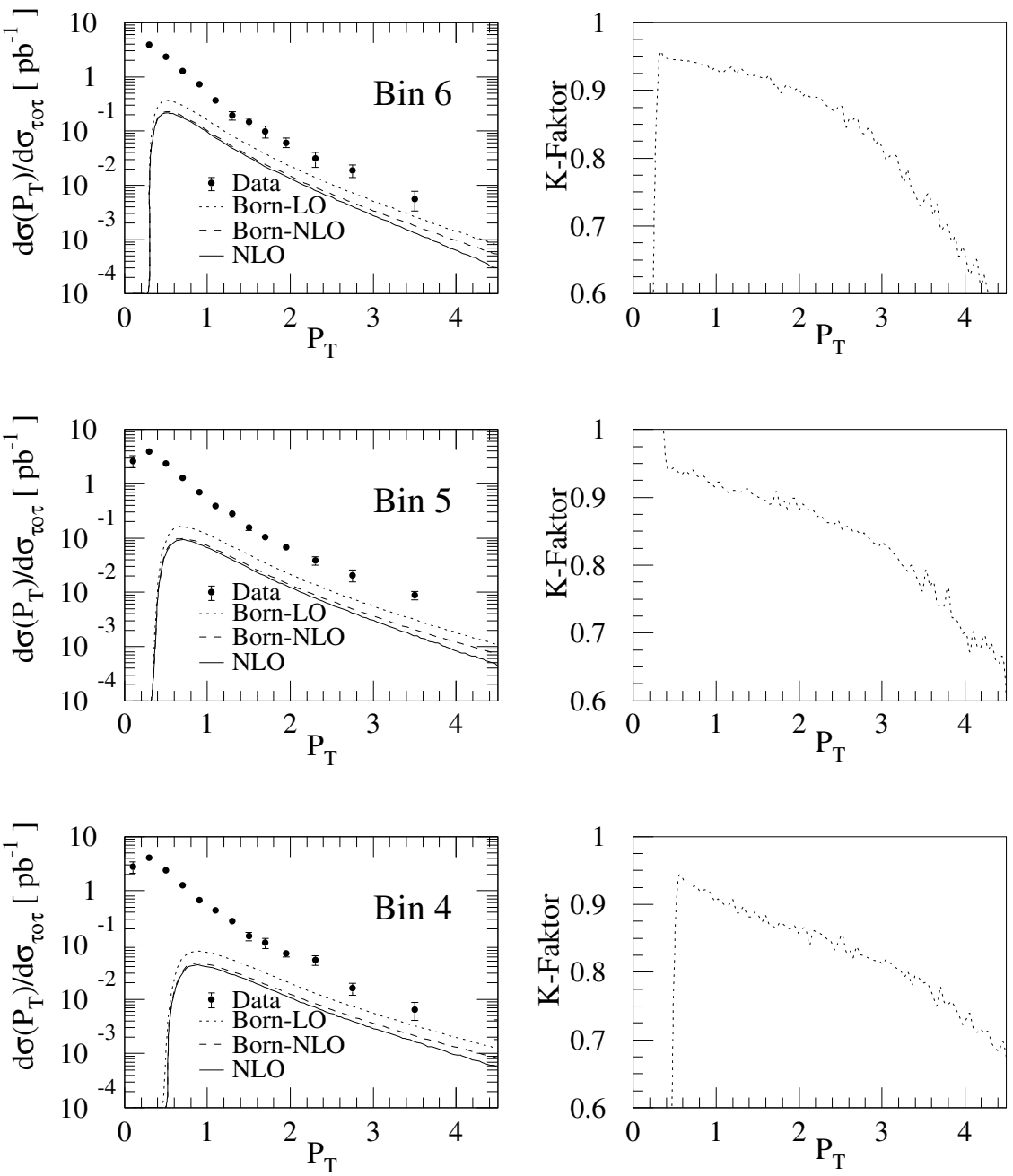

Abbildung 20: Vergleich der Ergebnisse mit dem H1 - Experiment, bin 4 - bin 6. Gezeigt ist der auf den in LO α vollständig integrierten Wirkungsquerschnitt normierte Streuquerschnitt, einfach differentiell in P_T. Integriert wurde für alle Bins über $\eta \in [1.5, 2.5]$, $y \in [0.05, 0.99]$ sowie über $x_{Bj} \in [.0015, 0.004]$ in Bin6, $x_{Bj} \in [.0008, 0.0015]$ in Bin5 und $x_{Bj} \in [.0005, 0.0008]$ bei Bin4

7 Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurden die NLO Korrekturen zu Reaktionen mit inklusiver Einteilchenproduktion bei Elektron-Proton Kollisionen berechnet, wie sie am HERA Speichering des DESY in Hamburg gemessen werden. Bei den betrachteten Prozessen handelt es sich um Elktron-Proton-Streuungen, bei denen ein virtuelles γ-Quant hoher Virtualität Q^2 ausgetauscht wird. Wechselwirkungen, die durch Austausch eine Z-Bosons vermittelt werden, trugen nicht zu den Rechnungen bei. Benutzt wurde die Methode der Störungsrechnung in Form einer Entwicklung nach der Kopplung der starken Wechselwirkung α_s.
Es wurde dargelegt, warum im Rahmen der QCD die Rechnungen zur Ordnung $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$ von großer Bedeutung sind. Der Beitrag der Gluonen, der erst ab führender Ordnung von α_s in der Störungsreihe auftritt, sowie die Reduktion der starken Skalenabhängigkeit des Wirkungsquerschnitts in LO durch die höheren Beiträge wurden als Hauptargumente diskutiert.
Ausführlich wurde der Formalismus dargestellt, nach dem die Beiträge zur Ordnung $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$ berechnet wurden. Mit Hilfe der Partialbruchzerlegung konnten die divergenten Matrixelemte separiert und unter Anwendung der dimensionalen Regularisierung im $\overline{\text{MS}}$-Schema in endliche und divergente Anteile zerlegt werden. Nach vollständiger Ausintegration der beiden unbeobachteten Teilchen konnte gezeigt werden, daß die divergenten Anteile sich entweder mit denjenigen Divergenzen aus den virtuellen Korrekturen aufheben oder proportional zu den Altarelli-Parisi-Kernen und einem Born-Wirkungsquerschnitt sind und somit in die unrenormierten PDF's oder FF's absorbiert werden können. Dadurch werden diese zu den renormierten PDF's und FF's, deren nun vorhandene Skalenabhängigkeit durch die Altarelli-Parisi-Gleichungen gegeben ist. Diese PDF's und FF's bilden den phänomenologischen Anteil der Rechnungen. Die in dieser Arbeit verwendeten Fits stammen für die Strukturfunktionen von der CTEQ Kollaboration und für die Fragmentationsfunktionen aus der BKK-Parametrisierung.
Gemeinsam mit den schon seit längerem bekannten Born-Beiträgen bilden die endlichen Anteile der NLO Rechnung den nun numerisch integrablen Anteil. Ausgehend hiervon wurden einige Testrechnungen zu Transversalimpuls-Spektren differentieller Wirkungsquerschnitte vorgestellt, an denen sich die oben genannten Eigenschaften der NLO Rechnungen gut zeigen ließen. Der Einfluß der 2-Loop-Rechnung für die starke Kopplung α_s kann, wie in Kapitel 6 dargestellt, bis zu 25% ausmachen. Ferner trugen auch die harten Streuprozesse zur Ordnung $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$ in numerisch verläßlichen Bereichen mit $\pm$ 15% des NLO-Born-Wertes bei. Ebenfalls konnte gezeigt werden, daß die starken Skalenabhängigkeit in LO (α_s), die durch die Renormierungsskalen der starken Kopplung, der PDF's und FF's verursacht wird, durch die NLO-Beiträge reduziert.
Im zweiten Teil der numerischen Auswertungen wurden die Rechnungen zu zwei Experimenten der H1 und ZEUS-Gruppe am HERA Speichering vorgestellt. In der Theorie zugänglichen Bereichen bestätigten die Rechnungen innerhalb der theoretischen und experimentellen Fehlergrenzen die Experimente gut, wichen in anderen Bereichen allerdings stark ab, was aufgrund der gegebenen kinematischen Bereiche zu erklären ist. Es zeigte sich, daß sowohl die Numerik als auch die FF's und PDF's für sehr kleine Transversalimpulse oder für kleine Z zu Instabilitäten und nicht mehr verläßlichen Rechnungen führten. Insbesondere im H1-Experiment ist der verwendete Z-Bereich für die numerische Analyse ungünstig.
Wie eingangs erwähnt, wurde der Austausch eines Z-Bosons nicht betrachtet, der bei den

betrachteten Impulsüberträgen nicht stattfindet. Bei Rechnungen allerdings, die den Bereich $Q \geq 90\ GeV$ untersuchen, muß der Z-Austausch mitberücksichtigt werden. Ferner wurde der longitudinale Anteil der Spinfreiheitsgrade des ausgetauschten Photons nicht mitberücksichtigt bzw. im Falle der Vergleiche mit den Experimenten nur in LO in α_s. Auch hier ist der Beitrag im kinematischen Bereich dieser Rechnungen nicht sehr groß, kann aber in anderen Bereichen durchaus von Bedeutung sein und könnte Gegenstand einer weiteren Untersuchung werden. Ferner wurde in dieser Arbeit die Rechnungen für vier Quark-Flavours durchgeführt, d.h. top und bottom Beiträge trugen nicht zu den Ergebnissen bei. Bei den gegebenen Energien ist dies sinnvoll, aber auch hier steht fest, daß beim Übergang zu höheren Energien die Beiträge der schweren Quarks mitberücksichtigt werden sollten.
Weiterhin bleibt zu anzumerken, daß ein Großteil der experimentellen Daten in Bereichen liegen, von denen bekannt ist, daß die perturbative QCD hier keine verläßlichen Vorhersagen machen kann, da große Logarithmen zum Zusammenbruch der Störungsreihe führen. Effekte, die zum Beispiel in Bereichen kleiner x auftreten, können nur durch andere theoretische Zugänge, wie zum Beispiel die BFKL-Gleichung beschrieben werden.
Zukünftige Beschleuniger werden hier sicherlich noch großen Raum für weitere Untersuchungen schaffen.

8 Anhang

8.1 Definitionen

Der in den Integralen in Abschnitt 8.4 vorkommende Dilogarithmus ist folgendermaßen definiert:

$$Li_2(y) = -\int_0^y \frac{\ln(1-x)}{x}\,dx \tag{8.1}$$

Die in der Hochenergiephysik häufig auftauchenden "+" - Funktionen definieren wir analog [36]

$$\int_A^1 f(x)\left[\frac{g(x)}{1-x}\right]_+ dx = \int_A^1 \frac{(f(x)-f(1))g(x)}{1-x}\,dx - f(1)\int_0^A \frac{g(x)}{1-x}\,dx \tag{8.2}$$

Plus Funktionen sind streng genommen Distributionen, die nur in Zusammenhang mit einer Testfunktion definiert sind. Sie werden dazu benutzt, divergente Integrale durch Subtraktion des Pols zu regularisieren. So zeigen sich zum Beispiel beim Übergang zu den Variablen v und w (vgl. Anhang 8.2) die Pole bei Integration über s_{23} für $s_{23} = 0$ als Pole in w=1. Dies manifestiert sich in den Formeln in einem Faktor $\frac{1}{1-w}$, welcher in $4-2\epsilon$-Dimensionen zu $\frac{1}{(1-w)^{1+\epsilon}}$ wird. Letzterer kann für kleine ϵ entwickelt werden und man erhält für die Integration

$$\int_0^1 \frac{f(w)}{(1-w)^{1+\epsilon}}\,dw = -\frac{1}{\epsilon}f(1) + \int_0^1 f(w)\left(\frac{1}{1-w}\right)_+ - \epsilon\int_0^1 f(w)\left(\frac{\ln(1-w)}{1-w}\right)_+ \tag{8.3}$$

Falls die untere Grenze der Integration von 0 verschieden ist, darf der Korrekturfaktor aus Gleichung 8.2 nicht vergessen werden.
Die bei den virtuellen Korrekturen vorkommende Funktion $\zeta(x)$ ist die Riemannsche Zeta-Funktion.

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} \tag{8.4}$$

Schließlich sind alle Logarithmen in Abschnitt 8.4 als Logarithmen über das Absolutquadrat ihrer Argumente zu sehen.

8.2 Die Kinematik im $2 \to 3$ Prozeß

Für die Betrachtung des 2→3 Prozesses wird folgende Konvention gewählt:

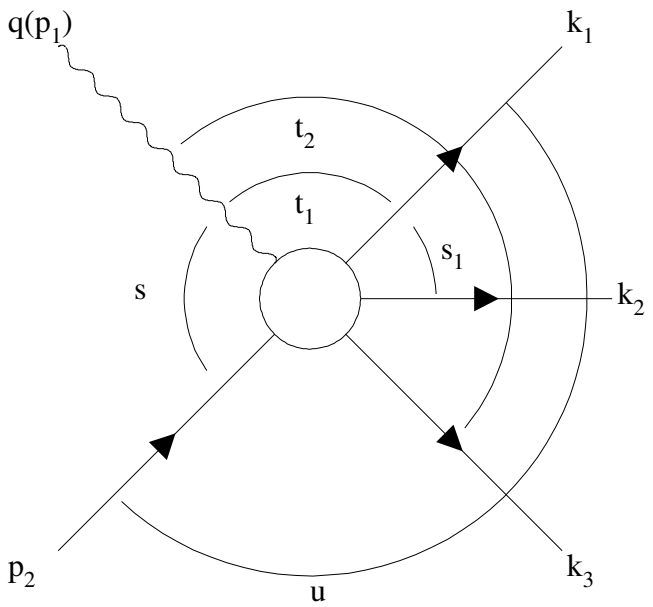

Abbildung 21: Die Kinematik im $2 \to 3$ Prozeß

Von den möglichen 10 Invarianten sind lediglich 5 linear unabhängig. Definiert man als Satz unabhängiger Invarianten folgende Größen:

$$\begin{aligned} p_1\,p_2 &= \frac{s+Q^2}{2} \\ p_1\,k_1 &= -\frac{t_1+Q^2}{2} \\ p_1\,k_3 &= -\frac{t_2+Q^2}{2} \\ p_2\,k_1 &= -\frac{u}{2} \\ k_1\,k_2 &= \frac{s_1}{2} \end{aligned} \tag{8.5}$$

so ergeben sich die weiteren Vektorprodukte aus den oben eingeführten Mandelstammvariablen $\sigma,\ s_1,\ t,\ t_1$ und u wie folgt:

$$\begin{aligned} k_2\,k_3 &= \frac{s+t_1+u+Q^2}{2} = \frac{s_{23}}{2} \\ p_1\,k_2 &= \frac{s+t_1+t_2+Q^2}{2} \\ k_1\,k_3 &= -\frac{s_1+t_1+u+Q^2}{2} \\ p_2\,k_2 &= \frac{s_1+u-t_2}{2} \\ p_2\,k_3 &= \frac{s+t_2-s_1+Q^2}{2} \end{aligned} \tag{8.6}$$

Für unsere Rechnungen haben wir die Möglichkeit, die Viervektoren entlang der Koordinatenachsen unterschiedlich zu orientieren. Wir finden 3 verschieden Sets:

Set 1:

$$\begin{aligned} q &= (\,q_0\,|\,|\vec{q}|\sin\psi\,|\,0\,|\,|\vec{q}|\cos\psi\,) \\ p_2 &= p_2^0\left(\,1\,|\,-\sin\psi''\,|\,0\,|\,\cos\psi''\right) \\ k_1 &= k_1^0\,(\,1\,|\,0\,|\,0\,|\,1\,) \\ k_2 &= \frac{\sqrt{s_{23}}}{2}\,(\,1\,|\,\sin\theta_1\cos\theta_2\,|\,\sin\theta_1\sin\theta_2\,|\,\cos\theta_1) \\ k_3 &= \frac{\sqrt{s_{23}}}{2}\,(\,1\,|\,-\sin\theta_1\cos\theta_2\,|\,-\sin\theta_1\sin\theta_2\,|\,-\cos\theta_1) \end{aligned} \tag{8.7}$$

Set 2:

$$\begin{aligned} q &= (\,q_0\,|\,0\,|\,0\,|\,1) \\ p_2 &= p_2^0\left(\,1\,|\,-\sin\psi''\,|\,0\,|\,\cos\psi''\right) \\ k_1 &= k_1^0\,(\,1\,|\,-\sin\psi\,|\,0\,|\,\cos\psi\,) \\ k_2 &= \frac{\sqrt{s_{23}}}{2}\,(\,1\,|\,\sin\theta_1\cos\theta_2\,|\,\sin\theta_1\sin\theta_2\,|\,\cos\theta_1) \\ k_3 &= \frac{\sqrt{s_{23}}}{2}\,(\,1\,|\,-\sin\theta_1\cos\theta_2\,|\,-\sin\theta_1\sin\theta_2\,|\,-\cos\theta_1) \end{aligned} \tag{8.8}$$

Set 3:

$$\begin{aligned} q &= (\,q_0\,|\,|\vec{q}|\sin\psi\,|\,0\,|\,|\vec{q}|\cos\psi\,) \\ p_2 &= p_2^0\,(\,1\,|\,0\,|\,0\,|\,1\,) \\ k_1 &= k_1^0\left(\,1\,|\,-\sin\psi''\,|\,0\,|\,\cos\psi''\,\right) \\ k_2 &= \frac{\sqrt{s_{23}}}{2}\,(\,1\,|\,\sin\theta_1\cos\theta_2\,|\,\sin\theta_1\sin\theta_2\,|\,\cos\theta_1) \end{aligned}$$

$$k_3 = \frac{\sqrt{s_{23}}}{2}\,(\,1\,|\,-\sin\theta_1\cos\theta_2\,|\,-\sin\theta_1\sin\theta_2\,|\,-\cos\theta_1) \tag{8.9}$$

Führen wir weiterhin die Größen

$$\begin{aligned} v &= 1+\frac{t}{s+Q^2} = \frac{s+t+Q^2}{s+Q^2} \\ w &= \frac{-u}{s+t+Q^2} = \frac{s+t+Q^2-s_{23}}{s+t+Q^2} \\ Q^2 &= \frac{xs}{1-x} \end{aligned} \tag{8.10}$$

so lassen sich alle relevanten Größen und damit der Wirkungsquerschnitt durch w, x, v, und s darstellen. Wir finden für die Energien und Invarianten

$$\begin{aligned} k_1^0 &= \frac{s+Q^2}{2\sqrt{s_{23}}}\,(1+wv-v-x) = \frac{s}{2\sqrt{s_{23}}\,(1-x)}\,(1+wv-v-x) \\ q^0 &= \frac{s+Q^2}{2\sqrt{s_{23}}}\,(v-x) = \frac{s}{2\sqrt{s_{23}}\,(1-x)}\,(v-x) \\ p_2^0 &= \frac{s+Q^2}{2\sqrt{s_{23}}}\,(1-wv) = \frac{s}{2\sqrt{s_{23}}\,(1-x)}\,(1-wv) \\ t_1 &= (v-1)(s+Q^2) \\ -u &= wv(s+Q^2) \\ s_{23} &= (s+Q^2)v(1-w) \\ |\vec{q}| &= \sqrt{q_0^2+Q^2} \end{aligned} \tag{8.11}$$

sowie für die Winkel in den verschiedenen Sets:

$$\begin{aligned} \text{Set 1} \;:\; \cos\psi &= \frac{q^0}{|\vec{q}|}+\frac{(v+x-1)s}{2(1-x)k_1^0\,|\vec{q}|} \\ \cos\psi'' &= 1-\frac{wvs}{2p_2^0k_1^0(1-x)} \\ \text{Set 2} \;:\; \cos\psi &= \frac{q^0}{|\vec{q}|}+\frac{(v+x-1)s}{2(1-x)k_1^0\,|\vec{q}|} \\ \cos\psi'' &= \frac{q^0}{|\vec{q}|}-\frac{s+Q^2}{2p_2^0\,|\vec{q}|} \\ \text{Set 3} \;:\; \cos\psi &= \frac{q^0}{|\vec{q}|}-\frac{s+Q^2}{2p_2^0\,|\vec{q}|} \\ \cos\psi'' &= 1-\frac{wvs}{2p_2^0k_1^0(1-x)} \end{aligned} \tag{8.12}$$

Für eine ausführliche Diskussion der Kinematik in hochenergetischen Prozessen verweisen wir auf Referenz [41].

8.3 Die analytische Form der virtuellen Korrekturen

An dieser Stelle geben wir die analytische Form der virtuellen Korrekturen aus Kapitel 4.1 an, die wir aus [27] übernommen haben. Für die Prozesse mit einlaufendem Quark werden folgende Größen eingeführt (i bezeichnet das einlaufende Quark, q bzw. g das auslaufendende Quark und Gluon):

$$\begin{aligned} z_q &= \frac{(p_i+p_q)^2}{\hat{s}+Q^2} \\ z_g &= \frac{(p_i+p_g)^2}{\hat{s}+Q^2} \\ y_{q,i} &= \frac{(p_{q,i}+p_{q,f})^2}{Q^2} = \frac{z_q}{\hat{x}} \\ y_{g,i} &= \frac{(p_i+p_g)^2}{Q^2} = \frac{z_g}{\hat{x}} \\ y_{q,g} &= \frac{(p_q+p_g)^2}{Q^2} = \frac{1-\hat{x}}{\hat{x}} \end{aligned} \tag{8.1}$$

Damit lauten die Ausdrücke für die $E_{1,q}$ und $E_{2,q}$

$$\begin{aligned} E_{1,q} &= \left(-\frac{2}{\epsilon^2}+\frac{1}{\epsilon}(2\ln y_{q,i}-3)\right)\sigma^B_{\gamma q} \\ &+\left(+2\zeta(2)-\ln^2 y_{q,i}-8\right)\sigma^B_{\gamma q} \\ &+4\ln(y_{q,i})\left(\frac{2y_{q,i}}{-y_{q,g}+y_{i,g}}+\frac{y^2_{q,i}}{(-y_{q,g}+y_{i,g})^2}\right) \\ &+\ln(y_{q,g})\left(\frac{4y_{q,i}-2y_{q,g}}{y_{q,i}+y_{i,g}}+\frac{y_{q,g}y_{g,i}}{(y_{q,i}+y_{i,g})^2}\right)+\ln(y_{g,i})\left(\frac{4y_{q,i}+2y_{g,i}}{y_{q,i}-y_{q,g}}+\frac{y_{q,g}y_{g,i}}{(y_{q,i}-y_{q,g})^2}\right) \\ &+2\frac{y^2_{q,i}+(y_{q,i}+y_{g,i})^2}{y_{q,g}y_{g,i}}R'(y_{q,i},-y_{q,g})+2\frac{y^2_{q,i}+(y_{q,i}+y_{q,g})^2}{y_{q,g}y_{g,i}}R'(y_{q,i},y_{g,i}) \\ &+y_{q,i}\left(\frac{4}{-y_{q,g}+y_{g,i}}+\frac{1}{y_{q,i}-y_{q,g}}+\frac{1}{y_{q,i}+y_{g,i}}\right)+\frac{y_{q,i}+y_{g,i}}{y_{q,g}}+\frac{y_{q,g}-y_{q,i}}{y_{g,i}} \\ E_{2,q} &= \left(\frac{2}{\epsilon^2}+\frac{2}{\epsilon}(\ln y_{q,i}-\ln(y_{q,g})-\ln(y_{g,i}))\right)\sigma^B_{\gamma q} \\ &+\left(2\zeta(2)-\ln^2 y_{q,i}+(\ln^2(y_{q,g})-\pi^2)+\ln^2 y_{g,i}+2R'(-y_{q,g},y_{g,i})\right)\sigma^B_{\gamma q} \\ &+4\ln(y_{q,i})\left(\frac{2y_{q,i}}{-y_{q,g}+y_{i,g}}+\frac{y^2_{q,i}}{(-y_{q,g}+y_{i,g})^2}\right)+\ln(y_{q,g})\frac{2y_{q,g}}{y_{q,i}+y_{g,i}}-\ln(y_{g,i})\frac{-2y_{g,i}}{y_{q,i}-y_{q,g}} \\ &+2\frac{y^2_{q,i}+(y_{q,i}+y_{g,i})^2}{y_{q,g}y_{g,i}}R'(y_{q,i},-y_{q,g})+2\frac{y^2_{q,i}+(y_{q,i}+y_{q,g})^2}{y_{q,g}y_{g,i}}R'(y_{q,i},y_{g,i}) \\ &-2\left(\frac{y_{q,i}-y_{q,g}}{y_{g,i}}-\frac{y_{q,i}+y_{g,i}}{y_{q,g}}-\frac{2y_{q,i}}{-y_{q,g}+y_{g,i}}\right) \end{aligned} \tag{8.2}$$

Für die Prozesse mit einlaufendem Gluon sei (i bezeichnet das einlaufende Gluon, q bzw. $\bar{q}$ das auslaufendende Quark und Antiquark)

$$\begin{aligned}
z_q &= \frac{(p_i+p_q)^2}{\hat{s}+Q^2} \\
z_{\bar{q}} &= \frac{(p_i+p_{\bar{q}})^2}{\hat{s}+Q^2} \\
y_{q,i} &= \frac{(p_i+p_q)^2}{Q^2} = \frac{z_q}{\hat{x}} \\
y_{\bar{q},i} &= \frac{(p_i+p_{\bar{q}})^2}{Q^2} = \frac{z_{\bar{q}}}{\hat{x}} \\
y_{q,\bar{q}} &= \frac{(p_q+p_{\bar{q}})^2}{Q^2} = \frac{1-\hat{x}}{\hat{x}}
\end{aligned} \tag{8.3}$$

Die entsprechenden Ausdrücke für $E_{2,g}$ und $E_{2,g}$

$$\begin{aligned}
E_{1,g} &= \left(-\frac{2}{\epsilon^2}+\frac{1}{\epsilon}(2\ln y_{q,\bar{q}}-3)\right)\sigma^B_{\gamma g} \\
&+\left(-2\zeta(2)-\ln^2(y_{q,\bar{q}}-\pi^2)-8\right)\sigma^B_{\gamma g} \\
&+4\ln(y_{q,\bar{q}})\left(\frac{-2y_{q,\bar{q}}}{y_{q,i}+y_{\bar{q},i}}+\frac{y^2_{q,\bar{q}}}{(y_{q,i}+y_{\bar{q},i})^2}\right) \\
&+\ln(y_{q,i})\left(\frac{-4y_{q,\bar{q}}+2y_{q,i}}{-y_{q,\bar{q}}+y_{\bar{q},i}}-\frac{y_{q,i}y_{\bar{q},i}}{(-y_{q,\bar{q}}+y_{\bar{q},i})^2}\right)+\ln(y_{\bar{q},i})\left(\frac{-4y_{q,\bar{q}}+2y_{\bar{q},i}}{-y_{q,\bar{q}}+y_{q,i}}-\frac{y_{q,i}y_{\bar{q},i}}{(-y_{q,\bar{q}}+y_{q,i})^2}\right) \\
&-2\frac{y^2_{q,\bar{q}}+(-y_{q,\bar{q}}+y_{\bar{q},i})^2}{y_{q,i}y_{\bar{q},i}}R'(-y_{q,\bar{q}},y_{q,i})-2\frac{y^2_{q,\bar{q}}+(-y_{q,\bar{q}}+y_{q,i})^2}{y_{q,i}y_{\bar{q},i}}R'(-y_{q,\bar{q}},y_{\bar{q},i}) \\
&-y_{q,\bar{q}}\left(\frac{4}{y_{q,i}+y_{\bar{q},i}}+\frac{1}{-y_{q,\bar{q}}+y_{q,i}}+\frac{1}{y_{\bar{q},i}-y_{q,\bar{q}}}\right)+\frac{y_{q,\bar{q}}-y_{\bar{q},i}}{y_{q,i}}+\frac{y_{q,\bar{q}}-y_{q,i}}{y_{\bar{q},i}} \\
E_{2,g} &= \left(\frac{2}{\epsilon^2}+\frac{2}{\epsilon}(\ln y_{q,\bar{q}}-\ln(y_{q,i})-\ln(y_{\bar{q},i}))\right)\sigma^B_{\gamma g} \\
&+\left(2\zeta(2)+\ln^2 y_{q,i}-(\ln^2(y_{q,\bar{q}})-\pi^2)+\ln^2 y_{\bar{q},i}+2R'(y_{q,i},y_{\bar{q},i})\right)\sigma^B_{\gamma g} \\
&+4\ln(y_{q,\bar{q}})\left(-\frac{2y_{q,\bar{q}}}{y_{q,i}+y_{\bar{q},i}}+\frac{y^2_{q,\bar{q}}}{(y_{q,i}+y_{\bar{q},i})^2}\right)+\ln(y_{q,i})\frac{-2y_{q,i}}{-y_{q,\bar{q}}+y_{\bar{q},i}}+\ln(y_{\bar{q},i})\frac{-2y_{\bar{q},i}}{-y_{q,\bar{q}}+y_{q,i}} \\
&-2\frac{y^2_{q,\bar{q}}+(-y_{q,\bar{q}}+y_{\bar{q},i})^2}{y_{q,i}y_{\bar{q},i}}R'(-y_{q,\bar{q}},y_{q,i})-2\frac{y^2_{q,\bar{q}}+(-y_{q,\bar{q}}+y_{q,i})^2}{y_{q,i}y_{\bar{q},i}}R'(-y_{q,\bar{q}},y_{\bar{q},i}) \\
&-2\left(\frac{y_{q,i}-y_{q,\bar{q}}}{y_{\bar{q},i}}+\frac{y_{\bar{q},i}-y_{q,\bar{q}}}{y_{q,i}}+\frac{2y_{q,\bar{q}}}{y_{q,i}+y_{\bar{q},i}}\right)
\end{aligned} \tag{8.4}$$

mit

$$R'(x,y) = \ln|x|\ln|y|-\ln|x|\ln|1-x|-\ln|y|\ln|1-y|-Li_2(x)-Li_2(y) \tag{8.5}$$

8.4 Die Winkelintegration

Um über die auslaufenden Teilchen 2 und 3 zu integrieren, müssen wir Integrale der Form

$$I^{(n,m)} = \int_0^\pi \int_0^\pi (\sin\theta_1)^{1-2\epsilon} (\sin\theta_2)^{-2\epsilon} (a - b\cos\theta_1)^{-n} (A + B\cos\theta_1 + C\sin\theta_1\cos\theta_2)^{-m} d\theta_1 d\theta_2 \tag{8.6}$$

lösen. Diese Integrale besitzen Pole für $n \geq 1$ und $a = -b$ oder $m \geq 1$ und $A^2 = B^2 + C^2$. Im Fall dieser Arbeit lassen sich die Lösungen der Integrale in vier Gruppen einteilen. Gruppe 1 enthält die Lösungen unter den Bedingungen $a = -b$ und $A^2 = B^2 + C^2$, in Gruppe 2 fordern wir $a = -b$ und $A^2 \neq B^2 + C^2$. Gruppe 3 umfaßt die Klasse mit $a \neq -b$, A^2, B^2 und C^2 beliebig, $m \leq 0$. Dabei benötigen wir die Lösungen bis zur Ordnung $\mathcal{O}(\epsilon)$, da sich diese mit Polen der folgenden Energieintegration aufheben können. Gruppe 4 beinhaltet Lösungen für Integrale ohne Pol, $a^2 \neq b^2$, $A^2 \neq B^2 + C^2$, die wir in unseren Rechnungen nur bis zur Ordnung $\mathcal{O}(\epsilon')$ benötigen. Ein Teil der Integrale ist in Referenz [45] zu finden, wobei ein Großteil der Integrale neu berechnet werden mußte, um die Terme der Ordnung $\mathcal{O}(\epsilon)$ zu erhalten. Es wurde dabei Übereinstimmung mit allen in Referenz. [45] angegebenen Lösungen erhalten. Zudem wurden die nicht-divergenten Anteile bis zur Ordnung $\mathcal{O}(\epsilon)$ numerisch mit den Mathematikprogrammen MATHEMATICA und MAPLE [43, 44] überprüft.

Gruppe 1: $a = -b,\ A^2 = B^2 + C^2$ ($A^2,\ B^2,\ C^2$ beliebig für $m \leq 0$)

$$I_1^{-3,0} = 4a^3\pi\left(1 + \frac{7}{3}\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2)\right) \tag{8.7}$$

$$I_1^{-2,0} = 4a^2\pi\left(\frac{2}{3} + \frac{13}{9}\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2)\right) \tag{8.8}$$

$$I_1^{-1,0} = 2a\pi\left(1 + 2\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2)\right) \tag{8.9}$$

$$I_1^{-1,-1} = 2a\pi\left(A - \tfrac{1}{3}B + (2A - \frac{8}{9}B)\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2)\right) \tag{8.10}$$

$$I_1^{0,-2} = 2\pi\left[A^2 + \tfrac{1}{3}(B^2 + C^2) + 2\left(A^2 + \frac{4}{9}(B^2 + C^2)\right)\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2)\right] \tag{8.11}$$

$$I_1^{0,-1} = 2\pi A(1 + 2\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2)) \tag{8.12}$$

$$I_1^{1,-1} = -\pi\frac{1}{a\epsilon}(A + B) - \frac{2\pi}{a}B - \frac{4\pi}{a}B\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2) \tag{8.13}$$

$$I_1^{1,0} = -\pi\frac{1}{a\epsilon} \tag{8.14}$$

$$I_1^{1,1} = -\frac{\pi}{aA}\frac{1}{\epsilon}\left[\frac{A+B}{2A}\right]^{-1-\epsilon}\left(1 + \epsilon^2 Li_2\left(\frac{A-B}{2A}\right) + \mathcal{O}(\epsilon^2)\right) \tag{8.15}$$

$$I_1^{1,2} = \frac{1}{\epsilon}\frac{\pi}{aA^2}\left[\frac{A+B}{2A}\right]^{-1-\epsilon}\left[-\frac{A}{A+B} + \epsilon\frac{B}{A+B} - \epsilon^2\left(\frac{A}{A+B}Li_2\left(\frac{A-B}{2A}\right) + \frac{B}{A-B}\ln\left(\frac{A+B}{2A}\right)\right) + \mathcal{O}(\epsilon^2)\right] \tag{8.16}$$

$$I_1^{2,-1} = \frac{\pi}{a^2}\left(\frac{B}{\epsilon} - (A+B)(1-\epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^2)\right) \tag{8.17}$$

$$I_1^{2,0} = \pi\frac{1}{a^2}(-1+\epsilon) \tag{8.18}$$

Gruppe 2: $a = -b,\ A^2 \neq B^2 + C^2$

$$I_2^{2,2} = \frac{\pi}{a^2(A+B)^2}\left[\left(\frac{3C^2}{(A+B)^2} + \frac{2B}{A+B}\right)\left(-\frac{1}{\epsilon} + \ln\left(\frac{(A+B)^2}{A^2-B^2-C^2}\right)\right) - \frac{8C^2}{(A+B)^2} + \frac{2}{A^2-1} - 1 + \mathcal{O}(\epsilon)\right] \tag{8.19}$$

$$I_2^{2,1} = \frac{\pi}{a^2(A+B)}\left[\frac{B^2+AB+C^2}{(A+B)^2}\left(-\frac{1}{\epsilon} + \ln\left(\frac{(A+B)^2}{A^2-B^2-C^2}\right)\right) - \frac{2C^2}{(A+B)^2} - 1 + \mathcal{O}(\epsilon)\right] \tag{8.20}$$

$$I_2^{1,-2} = \frac{\pi}{a}\left(-\frac{(A+B)^2}{\epsilon} + (C^2-2B^2-4AB) - (C^2+4B^2+8AB)\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon)\right) \tag{8.21}$$

$$I_2^{1,-1} = -\pi\frac{1}{a\epsilon}(A+B) - \frac{2\pi}{a}B - \frac{4\pi}{a}B\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2) \tag{8.22}$$

$$I_2^{1,1} = \pi\frac{1}{a(A+B)}\left(-\frac{1}{\epsilon} + \ln\left(\frac{(A+B)^2}{A^2-B^2-C^2}\right) - \epsilon\left(\ln^2\left(\frac{A-\sqrt{B^2+C^2}}{A+B}\right) - \frac{1}{2}\ln^2\left(\frac{A+\sqrt{B^2+C^2}}{A-\sqrt{B^2+C^2}}\right) + 2Li_2\left(-\frac{B+\sqrt{B^2+C^2}}{A-\sqrt{B^2+C^2}}\right) - 2Li_2\left(\frac{B-\sqrt{B^2+C^2}}{A+B}\right)\right) + \mathcal{O}(\epsilon^2)\right) \tag{8.23}$$

$$I_2^{1,2} = \pi\frac{1}{a(A+B)^2}\left(-\frac{1}{\epsilon} + \ln\left(\frac{(A+B)^2}{A^2-B^2-C^2}\right) + \frac{2(B^2+C^2+AB)}{A^2-B^2-C^2} - \epsilon\left(\ln^2\left(\frac{A-\sqrt{B^2+C^2}}{A+B}\right) - \frac{1}{2}\ln^2\left(\frac{A+\sqrt{B^2+C^2}}{A-\sqrt{B^2+C^2}}\right) + 2Li_2\left(-\frac{B+\sqrt{B^2+C^2}}{A-\sqrt{B^2+C^2}}\right) - 2Li_2\left(\frac{B-\sqrt{B^2+C^2}}{A+B}\right) - 2\frac{(A+B)\sqrt{B^2+C^2}}{A^2-B^2-C^2}\ln\left(\frac{A+\sqrt{B^2+C^2}}{A-\sqrt{B^2+C^2}}\right) - 2\ln\left(\frac{(A+B)^2}{A^2-B^2-C^2}\right)\right) + \mathcal{O}(\epsilon^2)\right) \tag{8.24}$$

Gruppe 3: $a \neq -b,\ A^2,\ B^2$ und C^2 beliebig, $m \leq 0$

$$I_3^{1,0} = \frac{\pi}{b}(\ln(\frac{a+b}{a-b}) - \epsilon\left(Li_2\left(\frac{2b}{a+b}\right) - Li_2\left(\frac{2b}{b-a}\right)\right) + \mathcal{O}(\epsilon^2)) \tag{8.25}$$

$$\begin{aligned} I_3^{1,-1} = \frac{\pi}{b}\Bigg(&2B + \frac{bA-aB}{b}\ln\left(\frac{a+b}{a-b}\right) + \\ &\left[4B + \frac{bA-aB}{b}\left(Li_2\left(\frac{2b}{b-a}\right) - Li_2\left(\frac{2b}{a+b}\right)\right)\right]\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2)\Bigg) \end{aligned} \tag{8.26}$$

$$\begin{aligned} I_3^{1,-2} = \frac{\pi}{b}\Big(&4(A+B)B - 2C^2 + \\ &\frac{(2B^2-C^2)}{2b}\left(\frac{(a+b)^2}{b}\ln\left(\frac{a+b}{a-b}\right) - 2(a+2b)\right) - \\ &\frac{a+b}{b}\left(2(A+B)B - C^2 - \frac{b(A+B)^2}{a+b}\right)\ln\left(\frac{a+b}{a-b}\right) + \\ &\Bigg[8(A+B)B - 6C^2 + \frac{C^2(a+b)}{b}\ln\left(\frac{a+b}{a-b}\right) - \\ &\frac{a+b}{b}\left(2(A+B)B - C^2 - \frac{b(A+B)^2}{a+b}\right)\left(Li_2\left(\frac{2b}{b-a}\right) - Li_2\left(\frac{2b}{a+b}\right)\right) + \\ &\frac{(2B^2-C^2)}{2b}\left(\frac{(a+b)^2}{b}\left(Li_2\left(\frac{2b}{b-a}\right) - Li_2\left(\frac{2b}{a+b}\right)\right) - 4\frac{a+2b}{(a+b)^2}\right) - \\ &\frac{C^2}{2b}\left(\frac{(a+b)^2}{b}\ln\left(\frac{a+b}{a-b}\right) - 2\frac{a+2b}{(a+b)^2}\right)\Bigg]\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2)\Big) \end{aligned} \tag{8.27}$$

$$I_3^{2,0} = \frac{2\pi}{b(a^2-b^2)}\left(b - a\ln\left(\frac{a-b}{a+b}\right)\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2)\right) \tag{8.28}$$

$$\begin{aligned} I_3^{2,-1} = \frac{\pi}{b}\Bigg(&\frac{B}{b}\ln\left(\frac{a+b}{a-b}\right) + 2\frac{bA-aB}{a^2-b^2} + \\ &\Bigg[\frac{B}{b}\left(Li_2\left(\frac{2b}{b-a}\right) - Li_2\left(\frac{2b}{a+b}\right)\right) - \\ &2a\frac{bA-aB}{b(a^2-b^2)}\ln\left(\frac{a-b}{a+b}\right)\Bigg]\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2)\Bigg) \end{aligned} \tag{8.29}$$

$$\begin{aligned} I_3^{2,-2} = \frac{\pi}{b}\Bigg(&\frac{2(A+B)B - C^2}{b}\ln\left(\frac{a+b}{a-b}\right) + \\ &\frac{(2B^2-C^2)(a+b)}{b}\left(\frac{2a}{a^2-b^2} - \frac{1}{b}\ln\left(\frac{a+b}{a-b}\right)\right) + \\ &\frac{2}{a-b}\left(\frac{b(A+B)^2}{a+b} - 2(A+B)B + C^2\right) + \end{aligned}$$

$$\left[\frac{2(A+B)B-C^2}{b}\left(Li_2\left(\frac{2b}{b-a}\right)-Li_2\left(\frac{2b}{a+b}\right)\right)-\right.$$
$$\frac{2a}{b(a-b)}\left(\frac{b(A+B)^2}{a+b}-2(A+B)B+C^2\right)\ln\left(\frac{a-b}{a+b}\right)+$$
$$\frac{(2B^2-C^2)}{b}\left(2-\frac{a(a+b)}{b(a-b)}\ln\left(\frac{a-b}{a+b}\right)-\frac{a+b}{b}\left(Li_2\left(\frac{2b}{b-a}\right)-Li_2\left(\frac{2b}{a+b}\right)\right)\right)-$$
$$\left.\frac{C^2(a+b)}{b}\left(\frac{2a}{a^2-b^2}-\frac{1}{b}\ln\left(\frac{a+b}{a-b}\right)\right)-\frac{C^2}{b}\ln\left(\frac{a+b}{a-b}\right)+\frac{2C^2}{a-b}\right]\epsilon+\mathcal{O}(\epsilon^2)\Bigg) \quad (8.30)$$

Gruppe 4: 4-dimensionale Integrale, $a^2\neq b^2,\ A^2\neq B^2+C^2$

$$I_4^{1,0} = \frac{\pi}{b}\ln\left(\frac{a+b}{a-b}\right) \quad (8.31)$$

$$I_4^{0,1} = \frac{\pi}{B^2+C^2}\ln\left(\frac{A+\sqrt{B^2+C^2}}{A-\sqrt{B^2+C^2}}\right) \quad (8.32)$$

$$I_4^{1,1} = \frac{\pi}{\sqrt{X}}\ln\left(\frac{aA-bB+\sqrt{X}}{aA-bB-\sqrt{X}}\right) \quad (8.33)$$

$$I_4^{1,2} = \pi\left[\frac{2a(B^2+C^2)-2bAB}{(A^2-B^2-C^2)X}+\frac{b(bA-aB)}{X^{\frac{3}{2}}}\ln\left(\frac{aA-bB+\sqrt{X}}{aA-bB-\sqrt{X}}\right)\right] \quad (8.34)$$

$$I_4^{2,1} = \pi\left[\frac{2b(bA-aB)}{(a^2-b^2)X}+\frac{a(B^2+C^2)-bAB}{X^{\frac{3}{2}}}\ln\left(\frac{aA-bB+\sqrt{X}}{aA-bB-\sqrt{X}}\right)\right] \quad (8.35)$$

$$I_4^{2,2} = \pi\left[\frac{2b^2}{(a^2-b^2)X}+\frac{2(B^2+C^2)}{(A^2-B^2-C^2)X}-\frac{6b^2C^2}{X^2}\right.$$
$$\left.+\left(\frac{bB}{X^{\frac{3}{2}}}+\frac{3b(bA-aB)(a(B^2+C^2)-bAB)}{X^{\frac{5}{2}}}\right)\ln\left(\frac{aA-bB+\sqrt{X}}{aA-bB-\sqrt{X}}\right)\right] \quad (8.36)$$

$$I_4^{0,2} = 2\pi\frac{1}{A^2-B^2-C^2} \quad (8.37)$$

$$I_4^{-2,1} = \pi\left[\frac{4abB}{B^2+C^2}+\frac{b^2A(C^2-2B^2)}{(B^2+C^2)^2}\right.$$
$$\left.+\left(\frac{(a(B^2+C^2)-bAB)^2}{(B^2+C^2)^{\frac{5}{2}}}-\frac{b^2C^2(A^2-B^2-C^2)}{2(B^2+C^2)^{\frac{5}{2}}}\right)\ln\left(\frac{A+\sqrt{B^2+C^2}}{A-\sqrt{B^2+C^2}}\right)\right] \quad (8.38)$$

$$I_4^{-1,2} = \pi\left[\frac{2(a(B^2+C^2)-bAB)}{(B^2+C^2)(A^2-B^2-C^2)}+\frac{bB}{2(B^2+C^2)^{\frac{3}{2}}}\ln\left(\frac{A+\sqrt{B^2+C^2}}{A-\sqrt{B^2+C^2}}\right)\right] \quad (8.39)$$

$$I_4^{-2,2} = \pi\left[\frac{2b^2(B^2-C^2)}{B^2+C^2}+\frac{2(a(B^2+C^2)-bAB)^2}{(A^2-B^2-C^2)(B^2+C^2)^2}\right.$$
$$\left.+\left(\frac{2bB(a(B^2+C^2)-bAB)+b^2AC^2}{(B^2+C^2)^{\frac{5}{2}}}\right)\ln\left(\frac{A+\sqrt{B^2+C^2}}{A-\sqrt{B^2+C^2}}\right)\right] \quad (8.40)$$

$$I_4^{2,-2} = \pi \left[\frac{2(B^2 - C^2)}{b^2} + \frac{2(bA - aB)^2}{b^2(a^2 - b^2)} + \frac{aC^2 + 2B(bA - aB)}{b^3} \ln\left(\frac{a+b}{a-b}\right) \right] \tag{8.41}$$

mit

$$X = (aA - bB)^2 - (A^2 - B^2 - C^2)(a^2 - b^2) \tag{8.42}$$

Durch geschickte Wahl der möglichen Sets der Vektoren bzw. durch Partialbruchzerlegung der auftretenden Nenner lassen sich alle Integrale auf die oben genannten Typen zurückführen.

8.5 Singularitäten der Anfangszustände

An dieser Stelle folgen nun die expliziten Ergebnisse für die divergenten Anteile der Anfangszustände. Das Argument U der Altarelli-Parisi-Funktionen entspricht dem Anteil des Impulses des Tochterpartons am Impuls des Mutterhadrons

$$U = -\frac{t}{u+s+q^2} \tag{8.43}$$

Nach der Winkelintegration und dem Übergang zur Variablen U wird der 3-Teilchen Phasenraum 5.1 zu

$$dPS^{(3)} = V(\epsilon)\,\frac{1}{128\pi^3}\frac{1}{2\pi}\,(t-\frac{t}{U})^{-\epsilon}\frac{t}{U^2}dU\,z^{-\epsilon}dz \tag{8.44}$$

mit

$$V(\epsilon) = \frac{(16\pi^2)^\epsilon}{\Gamma(1-2\epsilon)}\left(s\,y\,(\zeta-x)(1-z)-(t-\frac{t}{U})^{-\epsilon}\right) \tag{8.45}$$

Es wurde hier die explizite Form der Darstellung des Phasenraumes und der Matrixelemente gewählt, da so die Kompensation mit den Singularitäten aus den virtuellen Korrekturen offensichtlich ist. Mit den Bezeichnungen aus den Kapiteln 3-5 finden wir folgende Ergebnisse:

- einlaufendes Quark

$$\begin{aligned} M_{A,q} &= 128\,g_s^4\,\frac{1}{4}C_f\,T_q(z_q)\frac{1}{\epsilon} \\ &\quad\times\left(-\left(\frac{Q^2}{\mu_P^2}\right)^\epsilon P_{q\leftarrow q}(U)+C_F\left(\frac{1}{\epsilon}-\ln\frac{(s+Q^2)z_q}{Q^2}+\frac{3}{2}\right)\delta(1-U)\right) \\ &\quad+\mathcal{O}(\epsilon^0) \end{aligned} \tag{8.46}$$

$$\begin{aligned} M_{B+C,q} &= 128\,g_s^4\,\left(-\frac{1}{2}N_C C_f\right)T_q(z_q)\frac{1}{\epsilon} \\ &\quad\times\left(\ln\frac{1-z_q}{z_q}\delta(1-U)\right)+\mathcal{O}(\epsilon^0) \end{aligned} \tag{8.47}$$

$$M_{D,q} = 128\,g_s^4\,T_q(z_q)\frac{1}{\epsilon}\times\left(-\left(\frac{Q^2}{\mu_P^2}\right)^\epsilon P_{g\leftarrow g}(U)\right)+\mathcal{O}(\epsilon^0) \tag{8.48}$$

- einlaufendes Gluon

$$
\begin{aligned}
M_{A,g} &= 128\, g_s^4\, C_f\, \frac{1}{4}\, T_g(z_g)\, \frac{1}{\epsilon} \\
&\quad \times \left(- \left(\frac{Q^2}{\mu_P^2} \right)^{\epsilon} P_{q \leftarrow g}(U) \right) + \mathcal{O}(\epsilon^0) \qquad (8.49) \\
M_{B+C,g} &= 128\, g_s^4\, C_f\, T_g(z_q) \frac{1}{\epsilon} \\
&\quad \times \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{Q^2}{\mu_P^2} \right)^{\epsilon} P_{g \leftarrow g}(U) \right. \\
&\quad -\frac{1}{4} N_C \left(-\frac{2}{\epsilon} + \right. \\
&\quad \left. \left. \left(\ln \frac{(s+Q^2)^2 z_q (1-z_q)}{Q^4} - \frac{2}{N_C} \left(\frac{11}{6} N_C - \frac{1}{3} N_f \right) \right) \delta(1-U) \right) \right) \\
&\quad + \mathcal{O}(\epsilon^0) \qquad (8.50) \\
M_{D,q} &= \mathcal{O}(\epsilon^0) \qquad (8.51)
\end{aligned}
$$

$M_{I,q/g}$ bezeichnen wieder die quadrierten und mit $g^{\mu,\nu}$ kontrahierten Matrixelemente aus Kapitel 4 und 5. I bezeichnet die Graphenklasse, I=A,B,C und D, jeweils für einlaufendes Quark oder Gluon.
Durch Vergleich mit den Ergebnissen aus Kapitel 4.2 ist zu erkennen, daß alle Singularitäten $\propto \frac{1}{\epsilon^2}$ wegfallen. Weiterhin hebt sich auch ein Teil der $\frac{1}{\epsilon}$-Divergenzen mit solchen aus Kapitel 4.2 auf. Die verbleibenden Pole sind proportional zu einem der Altarelli-Parisi-Kerne.

8.6 Singularitäten der Endzustände

Die Ergebnisse für die divergenten Anteile der Endzustände geben wir nun hier an. Das Argument U der Altarelli-Parisi-Funktionen lautet hier

$$U = -\frac{u+t+q^2}{s} \tag{8.52}$$

In diesem Fall gilt für den 3-Teilchen Phasenraum 5.1 nach Übergang zur Variablen U und Winkelintegration

$$dPS^{(3)} = V(\epsilon)\,\frac{1}{128\pi^3}\frac{1}{2\pi}\,(s-sU)^{-\epsilon}\frac{(-s)}{U^2}dU\,z^{-\epsilon}dz \tag{8.53}$$

mit

$$V(\epsilon) = \frac{(16\pi^2)^\epsilon}{\Gamma(1-2\epsilon)}\left(s\,y\,(\zeta-x)(1-z)-(s-sU)^{-\epsilon}\right) \tag{8.54}$$

Mit den Bezeichnungen aus den Kapiteln 3-5 finden wir für die Integralkerne der einzelnen Farbklassen folgende Ergebnisse:

- einlaufendes Quark

$$\begin{aligned} M_{A,q} &= 128\,g_s^4\,C_f^2\,T_q(x,z_g)\frac{1}{4}\frac{1}{\epsilon} \\ &\quad\times\left(\frac{1}{\epsilon}+\left(\frac{3}{2}-\ln\frac{1-z_g}{x}\right)\right. \\ &\quad\left.+\left(\frac{Q^2}{\mu_F^2}\right)^\epsilon P_{q\leftarrow q}(U)+\frac{3}{2}\delta(1-U)\right)+\mathcal{O}(\epsilon^0) \end{aligned} \tag{8.55}$$

$$\begin{aligned} M_{B+C,q} &= -256\,g_s^4\,N_c C_f\frac{1}{\epsilon} \\ &\quad\times\left(T_q(x,z_g)\left(\ln\frac{1-x}{1-z_g}+\left(\frac{Q^2}{\mu_F^2}\right)^\epsilon(P_{q\leftarrow g}(U)+P_{g\leftarrow g}(U))\right.\right. \\ &\quad\left.-(\frac{11}{6}N_C-\frac{1}{3}N_f)\delta(1-U)\right) \\ &\quad\left.+T_q(x,z_q)\left(-\frac{2}{\epsilon}+\left(-2-\ln\frac{x^2}{(1-z_q)(1-x)}-\frac{5}{3}\right)\right)\right) \\ &\quad+\mathcal{O}(\epsilon^0) \end{aligned} \tag{8.56}$$

$$\begin{aligned} M_{D,q} &= 128\,g_s^4\,C_f\,T_q(x,z_q)\frac{1}{4}\frac{1}{\epsilon} \\ &\quad\times\left(-\frac{1}{3}+\left(\frac{Q^2}{\mu_F^2}\right)^\epsilon P_{q\leftarrow g}(U)\right)+\mathcal{O}(\epsilon^0) \end{aligned} \tag{8.57}$$

- einlaufendes Gluon

$$
\begin{aligned}
M_{A,g} &= 128\, g_s^4\, C_f\, T_g(x, z_{\bar{q}})\, \frac{1}{4}\, \frac{1}{\epsilon} \\
&\quad \times \left(\frac{1}{\epsilon} + \left(\frac{3}{2} - \ln \frac{1-x}{x} + \left(\frac{Q^2}{\mu_F^2} \right)^{\epsilon} \left(P_{g \leftarrow q}(U) + P_{q \leftarrow q}(U) \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{3}{2} \delta(1-U) \right) \right) + \mathcal{O}(\epsilon^0) \qquad (8.58)
\end{aligned}
$$

$$
M_{B+C,g} = -256\, g_s^4\, N_c \pi\, T_g(x, z_{\bar{q}}) \frac{1}{\epsilon} \left(\ln \frac{1-z_{\bar{q}}}{1-x} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^0) \qquad (8.59)
$$

Vergleicht man auch diese Ergebnissen mit denen aus Kapitel 4.2, so fallen dadurch alle verbleibenden Singularitäten $\propto \frac{1}{\epsilon^2}$ sowohl aus den virtuellen als auch aus den reellen Beiträgen weg. Der Rest der IR-Singularitäten aus den virtuellen Beiträgen hebt sich ebenfalls gegen $\frac{1}{\epsilon}$-Pole aus den Endzustandssingularitäten weg, sodaß die virtuellen Beiträge nun endlich und integrabel sind.
Analog zu den Anfangszustandssingularitäten sind verbleibenden Pole proportional zu einem der Altarelli-Parisi-Kerne.

Literatur

[1] ZEUS Collaboration, *DESY Report* DESY - 98 - 085
ZEUS Collaboration, *DESY-Report* DESY - 98 - 050
H1 Collaboration, *Phys. Lett.* **B428** (1998) 206
H1 Collaboration, *Z. Phys.* **C74** (1997) 191

[2] L.E. Gordon, *Phys. Rev.* **D50** (1994) 6753

[3] B.A. Kniehl, G. Kramer, M.Spira, *Z. Phys.* **C76** (1997) 689

[4] G. Ingelman, A. de Roeck, R. Klammer (eds.) 'Future Physics at HERA', DESY 1996
G. Sterman, hep-ph/9610462, October 1996, presented at the 28th International Conference on High Energy Physics, July 1996, Warsaw, Poland
J. Blümlein, hep-ph/9512272, December 1995, Invited talk at the XXV International Symposium on Multiparticle Dynamics, Stara Lesna, Slovakia, 11-17 September, 1995

[5] H1 Collaboration, *Nucl. Phys.* **B485** (1997) 3

[6] ZEUS Collaboration, *Z. Phys.* **C70** (1996) 1

[7] z. B. H. Fritsch, M. Gell-Mann, H. Leutwyler, *Phys. Lett.* **B74** (1973) 365

[8] R. P. Feynman,*Photon-Hadron-Interactions* Benjamin, New York 1972

[9] D.J. Gross, F. Wilczek, *Phys. Rev.* **B30** (1973) 1343

[10] K. Wilson, *Phys. Rev.* **D10** (1974) 2445

[11] J. C. Collins, D. E. Soper, G. Sterman, in *Perturbative Quantum Chromodynamics*, ed. AZ. H. Mueller, World Scientific, Singapore, 1989

[12] Yu. L. Dokshitser, *Sov. Phys.* JETP **46** (1977) 641

[13] V.N. Gribov, L.N. Lipatov, *Sov. J. Nucl. Phys.* **15** (1972) 438

[14] G. Altarelli, G. Parisi *Nucl. Phys.* **B126** (1977) 298

[15] R.D. Field *Applications of Perturbative QCD* Addison-Wesley Publishing Company, 1989

[16] Y.Y Balitsky, L/N. Lipatov, *Sov. J. Nucl. Phys.* **28** (1978) 282

[17] E.A. Kuraev, L.N. Lipatov, V.S. Vadin, *Sov. Phys.* JETP **45** (1972) 199

[18] G. Kramer, B. Pötter, *DESY-Report* DESY - 98 - 046
M. Klasen, PhD-Thesis, *DESY-Report* DESY - 96 - 204
T. Carli, Proceedings of the Workshop 'New Trends in HERA Physics', MPI-PhE/97-22

[19] J. Körner, E. Mirkes, G. Schuler *Int. J. Mod. Phys. A*, **Vol. 4**, No. 7 (1989) 1781

[20] R. Baier, K. Fey *Z. Phys.* **C2** (1979) 339-349

[21] G. Altarelli, R.K. Ellis, G. Marttinelli, S.-Y. PI *Nucl. Phys.* **B160** (1979) 301

[22] F. Halzen, A.D. Martin *Quarks and Leptons* John Wiley & Sons, 1989

[23] A. Mendez *Nucl. Phys.* **B145** (1978) 199

[24] P. Aurenche, R. Baier, A. Douiri, M. Fontanez, D. Schiff *Nucl. Phys.* **B286** (1986) 509

[25] D. Soper, *HEP-PH* **9702203** (1997)

[26] D. Graudenz, PhD-Thesis *Interner Bericht* DESY T-90-01

[27] D. Graudenz *Phys. Rev.* **D49** (1993) 3291

[28] G. Kramer, B.Pötter, *DESY-Report* DESY - 97 - 048

[29] K. Hagiwara, K. Hikasa, N. Kai, *Phys. Rev.* **D27** (1983) 84-97

[30] W.A. Bardeen, A.J. Buras, D.W. Duke, T. Mulla *Phys. Rev.* **D18** (1978) 1211

[31] G. 't Hooft *Nucl. Phys.* **B61** (1973) 455

[32] T. Kinoshita Journ. of Math. Phys. 3, (1962) 650, T.D. Lee, M. Nauenberg, *Phys. Rev.* **B133** (1964) 1549

[33] J. Binnewies, PhD-Thesis, *DESY-Report* DESY - 97 - 128

[34] J. Binnewies, B.A. Kniehl, G. Kramer, *Phys. Rev.* **D52** (1995) 4947

[35] P. Aurenche, R. Baier, A. Douiri, M. Fontanez, D. Schiff *Nucl. Phys.* **B286** (1986) 552

[36] G. Sterman, J. Smith "Handbook of Perturbative QCD", *Rev. Mod. Phys.* **67** (1995) 157

[37] R.K. Ellis, D.A. Ross, A.E. Terrano, *Nucl. Phys.* **B178** (1980) 421

[38] L.D. Fadeev, V.N. Popov, *Phys. Lett.* **B25** (1967) 29
B.S. De Witt, *Phys. Rev.* **D162** (1967) 1195, 1239
G. t'Hooft, M. Veltman, *Nucl. Phys.* **B50** (1972) 318

[39] B. Pötter, PhD-Thesis, *DESY-Report* DESY - 97 - 138

[40] T. Kleinwort, PhD-Thesis, *DESY-Report* DESY - 96 - 195

[41] E. Byckling, K. Kajantie, *Particle Kinematics* John Wiley & Sons, London

[42] REDUCE A. C. Hearn, Rand Corporation 1995, Version 3.2

[43] MATHEMATICA, S. Wolfram, Addison Wesley 1991

[44] Maple, Waterloo Maple Inc., 1981-1997

[45] W. Beenakker, H. Kuijf, W. L. van Neerven *Phys. Rev.* **D40** (1989) 54

[46] H Bateman *Higher Transcendental Functions I - III*, R.E. Krieger Publication, Florida 1985

[47] A. Devoto and D. W. Duke, *Table of Integrals and Formulae for Feynman Diagram Calculations*, *Il Nuovo Cimento*,**1984**, 1

[48] VEGAS A. C. Hearn, *Rand Corporation* 1995, Version 3.2

[49] ALEPH Collaboration, *Z. Phys.* **C66** (1995) 355

[50] TPC Collaboration, H. Aihara *et al.*, LBL Report No. LBL-23737, 1988 (unpublished)

[51] H.L. Lai, J. Huston, S. Kuhlmann, F. Olness, J. Owens, D. Soper, W.K. Tung and H. Weerts *Phys. Rev.* **D55** (1997) 1280

Abbildungsverzeichnis

1 Die Kinematik im Hadron-Photon-Schwerpunktsystem 6
2 Der Streuprozeß in DIS 7
3 Die partonischen Born-Prozesse 15
4 Beispiel für eine kollineare Singularität 21
5 Beispiele für virtuelle Korrekturen 23
6 Die Prozesse mit dem Endzustand $\gamma + q \to qgg$ 26
7 Die Prozesse mit dem Endzustand $qq\bar{q}$ bzw. $\bar{q}\bar{q}q$ 27
8 Die Cut-Diagramme der Graphenklassen A und B 29
9 Die Cut-Diagramme der Graphenklassen C und D 30
10 Beispiel für eine Endzustandssingularität 35
11 Das P_T-Spektrum für einen differentiellen Wirkungsquerschnitt 42
12 Numerische Ergebnisse für die P_t-Abhängigkeit des Wirkungsquerschnitts, Teil 1 43
13 Numerische Ergebnisse für die P_t-Abhängigkeit des Wirkungsquerschnitts, Teil 2 44
14 Numerische Ergebnisse für die P_t-Abhängigkeit des Wirkungsquerschnitts, Teil 3 45
15 Die Skalenabhängigkeit des Wirkungsquerschnitts 48
16 Die einzelnen Beiträge von α_s, der PDF's und FF's zu der Skalenabhängigkeit des Wirkungsquerschnitts 49
17 Der Phasenraum im ZEUS-Experiment 51
18 Vergleich der Ergebnisse mit dem ZEUS - Experiment 53
19 Vergleich der Ergebnisse mit dem H1 - Experiment, Bin 7-9 57
20 Vergleich der Ergebnisse mit dem H1 - Experiment, Bin 4-6 58
21 Die Kinematik im $2 \to 3$ Prozeß 62