Nichtlineare Effekte der Spindynamik in Protonenbeschleunigern

Diplomarbeit

Christoph Weißbäcker

Arbeitsgruppe Licht- und Teilchenoptik
Institut für Angewandte Physik
Technische Universität Darmstadt

Juli 1998

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung **1**

I Die Phasenraumbewegung **3**

2 Die Bewegungsgleichung im Phasenraum **4**
2.1 Wahl des Koordinatensystems 4
2.2 Das Referenzteilchen 7
2.3 Die Hamiltonsche Formulierung der Bewegungsgleichung 10

3 Iteratives Lösungsverfahren **15**

4 Linearisierte Bewegung **20**
4.1 Linearisierung der Bewegungsgleichungen 20
4.2 Integration der linearisierten Bewegungsgleichungen 23
4.2.1 Drift 23
4.2.2 Quadrupol 23
4.2.3 Keilförmiger Dipol 24
4.2.4 Kombination von Quadrupol und Dipol 25
4.2.5 Dejustierter Quadrupol 27
4.2.6 Sextupol 38

5 Quadratische Anteile der Bewegung **40**
5.1 Drift 40
5.2 Quadrupol 41
5.3 Dipol 42
5.4 Kombination von Quadrupol und Dipol 43
5.5 Sextupol 46

II Die Spinbewegung **47**

6 Die Bewegungsgleichung des Spins **48**
6.1 Die T-BMT Gleichung im krummlinigen Koordinatensystem . . . 49

6.2 Die exakte Spinbewegung 49
6.3 Iterative Lösung der Spintransfermatrix 50

7 Rotationsvektor und Rotationswinkel 53
7.1 Die Spintransferquaternion 53
7.2 Iterative Lösung der Spintransferquaternion(1) 55
7.3 Die Bewegungsgleichung der Spintransferquaternion 57
7.4 Iterative Lösung der Spintransferquaternion(2) 59

8 Die Spintransferquaternion bis in 2. Ordnung 64
8.1 Drift 67
8.2 Quadrupol 67
8.3 Dipol 68
8.4 Kombination von Quadrupol und Dipol 70
8.5 Sextupol 74
8.6 Weitere Elemente 74

9 Der elektrostatische Quadrupol 76
9.1 Die Phasenraumbewegung 76
9.2 Die Spinbewegung 77

10 Spintransport 79

11 Berechnung mit *Mathematica* 80

12 Zusammenfassung und Ausblick 82

Kapitel 1

Einführung

Die Spin umkehrende Synchrotronstrahlung eines Elektronenstrahls in einem idealen, ebenen Beschleuniger zwingt Elektronen bei hohen Energien, ihren Spin antiparallel zum magnetischen Dipolfeld auszurichten. Zur Erzeugung und Speicherung longitudinal polarisierter Elektronen benötigt man vertikale Krümmungen im Strahlverlauf. Zusätzlich müssen Störungen durch auftretende Strahlabweichungen kompensiert werden. Erstmals und bisher einmalig gelang dies bei hoher Energie (27,5 GeV) in der Hadron-Elektron-Ring-Anlage (HERA) des Forschungszentrums DESY. In dem Strahl-Target-Experiment HERMES, das den Ursprung des Spins von Protonen und Neutronen untersucht, trifft dieser polarisierte Elektronenstrahl auf ein Gas mit polarisierten Kernen. Dabei beträgt die Schwerpunktsenergie ungefähr 7 GeV. Durch Speichern von polarisierten Protonen in HERA könnten Schwerpunktsenergien von 300 GeV in einem Collider-Experiment mit polarisierten Elektronen und Protonen erreicht werden. Da Protonen Synchrotronstrahlung in nicht ausreichendem Maße abstrahlen, erzeugt man polarisierte Protonen in speziellen Quellen und beschleunigt anschließend sukzessive den polarisierten Protonenstrahl in einer Kette von Beschleunigern auf die Strahlenergie von 820 GeV, mit der Quelle auf 19 keV, Radio Frequency Quadrupol (RFQ) auf 750 keV, LINAC III auf 50 MeV, DESY III auf 7,5 GeV, PETRA auf 40 GeV und schließlich HERA auf 820 GeV. Während der Beschleunigung sowie der Speicherung in HERA sollte die Polarisation einen minimalen Verlust erleiden. Die einzelnen Teilchen des Strahlbündels fliegen entlang verschiedener Bahnen und sehen daher während der Beschleunigung und Speicherung unterschiedliche Magnetfelder. Zum Beispiel hängt die fokussierende oder defokussierende Wirkung des Quadrupols auf die Teilchen von ihrer Lage im Phasenraum bei Eintritt in den Quadrupol ab. Die Bewegung des Spins von Elektronen oder Protonen wird gemäß der *Thomas-Bargmann-Michel-Telegdi* (T-BMT) Gleichung durch die Teilchenbahn im Phasenraum und die auf den Spin wirkenden elektromagnetischen Felder bestimmt. Nach dieser Gleichung rotiert der Spin in einem ebenen Beschleuniger $a\gamma + 1$ -mal um die vertikale Achse. Die Größe $a = \frac{g-2}{2}$ ist die gyromagnetische Anomalie, g der gyromagnetische Faktor und

γ die aus der Relativitätstheorie bekannte Abkürzung. Während der Beschleunigung von der Quelle bis zum Speicherring HERA nimmt die Zahl des Drehungen mit wachsender Energie zu, so daß sich der Spin des Protons ($a_{\mathrm{Proton}} \simeq 1,79$) z. B. bei der HERA-Energie von 820 GeV während eines Umlaufs in einem ebenen Beschleuniger rund 1570-mal um die vertikale Achse dreht. Durch die dargestellte Abhängigkeit der Spinbewegung von der Teilchenbahn, von den wirkenden elektromagnetischen Feldern sowie bei hoher Energie von dem zugehörigen γ geht eine geordnete Spinverteilung verloren: Ein Teilchenstrahl, in dem anfänglich alle Spins in die gleiche Richtung zeigen, besitzt nach einem teilchenoptische Element eine ungeordnete Spinverteilung, in der die Spinrichtungen von Teilchen an unterschiedlichen Phasenraumpunkten unterschiedlich sind. Der mittlere Öffnungswinkel der Spinverteilung wird größer, und Polarisation geht verloren. Die Spinverteilung, in der anfangs alle Spins in die gleiche Richtung zeigen, ist daher meist nicht die beste Wahl [1]. Um die Grenze der Polarisation, deren Ursachen und damit mögliche Lösungen zu finden, benötigt man eine exakte Berechnung der Spinbewegung. Dazu untersucht man zuerst die Spinbewegung in den einzelnen teilchenoptischen Elementen, die in dem betrachteten Beschleuniger vorkommen, und berechnet daraus die Spinbewegung während eines gesamten Umlaufs. Für ein einzelnes Beschleunigerelement wird in einem ersten Schritt die Phasenraumabbildung von den Eintritts- auf die Austrittskoordinaten des Teilchens bestimmt. Mit der gefundenen Bahn im Phasenraum berechnet man die Spinbewegung. Bisher wurden analytisch die linearen Anteile der Spinbewegung durch ein Element bestimmt. Erst durch die Kombination vieler Elemente traten nichtlineare Effekte auf. Hier werden nun die analytisch bestimmten Formeln in 2. Ordnung berechnet, so daß auch nichtlineare Effekte, die innerhalb eines Elements entstehen, betrachtet werden können. Es stellt sich somit die Frage nach den **„Nichtlinearen Effekten der Spinbewegung in Protonenbeschleunigern“**.

Teil I

Die Phasenraumbewegung

Kapitel 2

Die Bewegungsgleichung im Phasenraum

Da die Stern-Gerlach-Kraft, die zur Abhängigkeit der Phasenraumbewegung vom Spin führt, im Vergleich zur sehr viel größeren Lorentz-Kraft vernachlässigt werden kann, hängt die Phasenraumbewegung nicht von der Spinbewegung, sehr wohl aber die Spinbewegung von der Phasenraumbewegung ab (s. Teil II). Folglich wird zuerst die Phasenraumbewegung gelöst. Die relativistische Lorentz-Kraft-Gleichung für ein Teilchen mit der Ladung q in einem elektromagnetischen Feld mit den Feldstärken $\vec{E}$ und $\vec{B}$ lautet

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right) = q\left(\vec{E} + v\,\frac{\vec{p}}{p} \times \vec{B}\right), \tag{2.1}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = v\,\frac{\vec{p}}{p}. \tag{2.2}$$

2.1 Wahl des Koordinatensystems

Zur Beschreibung der Teilchenbewegung wählt man ein orthogonales Dreibein, das an jedem Punkt einer vorerst beliebig wählbaren Kurve $\vec{R}$, der *Referenzkurve*, definiert ist. Diese Referenzkurve wird als Funktion ihrer Bogenlänge parametrisiert,

$$\vec{R} = \vec{R}(l) \text{ mit } \left|\frac{d\vec{R}}{dl}\right| = 1\,. \tag{2.3}$$

Wenn ein Teilchen entlang dieser Kurve fliegt, so gilt $dl = v\,dt$. Eine mögliche Wahl stellt das Frenetsche Dreibein dar. Dabei bilden der Tangentenvektor $\vec{e}_{\text{tan}}$, der Normalenvektor $\vec{e}_{\text{norm}}$ und der Binormalenvektor $\vec{e}_{\text{bin}}$ ein rechtshändiges Orthonormalsystem,

$$\vec{e}_{\text{tan}} = \frac{d\vec{R}}{dl},\ \rho = \left|\frac{d\vec{e}_{\text{tan}}}{dl}\right|^{-1}, \tag{2.4}$$

$$\vec{e}_{\rm norm} = -\rho\frac{d\vec{e}_{\rm tan}}{dl}\,, \tag{2.5}$$

$$\vec{e}_{\rm bin} = \vec{e}_{\rm tan}\times\vec{e}_{\rm norm}\,. \tag{2.6}$$

Dabei ist ρ der Krümmungsradius. Der Normalenvektor zeigt, wie in der Beschleunigerphysik üblich, von seinem Krümmungsmittelpunkt nach außen (s. Abbildung 2.1). Für die Ableitungen dieser Vektoren gilt

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{e}_{\rm norm}}{dl} &= \left(\frac{d\vec{e}_{\rm norm}}{dl}\cdot\vec{e}_{\rm tan}\right)\vec{e}_{\rm tan} + \left(\frac{d\vec{e}_{\rm norm}}{dl}\cdot\vec{e}_{\rm norm}\right)\vec{e}_{\rm norm} + \left(\frac{d\vec{e}_{\rm norm}}{dl}\cdot\vec{e}_{\rm bin}\right)\vec{e}_{\rm bin}\\
&= -\left(\frac{d\rho}{dl}\frac{d\vec{e}_{\rm tan}}{dl}\cdot\vec{e}_{\rm tan} + \rho\frac{d^2\vec{e}_{\rm tan}}{dl^2}\cdot\vec{e}_{\rm tan}\right)\vec{e}_{\rm tan} + T\vec{e}_{\rm bin}\\
&= \rho\left(-\frac{d}{dl}\left(\frac{d\vec{e}_{\rm tan}}{dl}\cdot\vec{e}_{\rm tan}\right) + \left(\frac{d\vec{e}_{\rm tan}}{dl}\right)^2\right)\vec{e}_{\rm tan} + T\vec{e}_{\rm bin}\\
&= \frac{1}{\rho}\,\vec{e}_{\rm tan} + T\vec{e}_{\rm bin}\,,
\end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{e}_{\rm bin}}{dl} &= \frac{d\vec{e}_{\rm tan}}{dl}\times\vec{e}_{\rm norm} + \vec{e}_{\rm tan}\times\frac{d\vec{e}_{\rm norm}}{dl}\\
&= T\,(\vec{e}_{\rm tan}\times\vec{e}_{\rm bin}\,)\\
&= -T\vec{e}_{\rm norm}
\end{aligned} \tag{2.8}$$

mit $T = \vec{e}_{\rm bin}\cdot\frac{d\vec{e}_{\rm norm}}{dl}$ als Torsion der Referenzkurve. Ein Punkt $\vec{r}$ in diesem sich bewegenden Koordinatensystem wird dann durch

$$\vec{r}(X,Y,l) = \vec{R}(l) + X\vec{e}_{\rm norm} + Y\vec{e}_{\rm bin} \tag{2.9}$$

beschrieben, während eine von einem Teilchen durchlaufene Bahn durch die Abhängigkeit $X = X(l)$ und $Y = Y(l)$ gegeben ist.

Das Ziel ist die Darstellung der Bewegung als Funktion der Bahnlänge l. Dazu benötigt man die Ableitung des Ortsvektors nach der Bogenlänge,

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{r}}{dl} &= \frac{d\vec{R}}{dl} + X'\,\vec{e}_{\rm norm} + X\frac{d\vec{e}_{\rm norm}}{dl} + Y'\vec{e}_{\rm bin} + Y\frac{d\vec{e}_{\rm bin}}{dl}\\
&= \left(1+\frac{X}{\rho}\right)\vec{e}_{\rm tan} + (X' - TY)\,\vec{e}_{\rm norm} + (Y' + TX)\,\vec{e}_{\rm bin}
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Während im Frenetsystem der Normalenvektor in Richtung des Krümmungsvektors liegt, wählt man im *krummlinigen Koordinatensystem* [2] die Achsen in der Ebene senkrecht zum Tangentenvektor torsionsabhängig und erhält dann durch den Wegfall von T eine formal einfachere Form für $\frac{d\vec{r}}{dl}$. Die Basisvektoren $\vec{e}_{\rm x}\,,\vec{e}_{\rm y}\,,\vec{e}_{\rm l}$ des krummlinigen, orthogonalen Koordinatensystems sind durch

$$\vec{e}_{\rm x} + {\rm i}\vec{e}_{\rm y} = e^{{\rm i}\vartheta}(\vec{e}_{\rm norm} + {\rm i}\vec{e}_{\rm bin}\,) \text{ mit } \vartheta = \int_0^l T(l')\,dl'\,, \tag{2.11}$$

$$\vec{e}_{\rm l} = \vec{e}_{\rm tan} \tag{2.12}$$

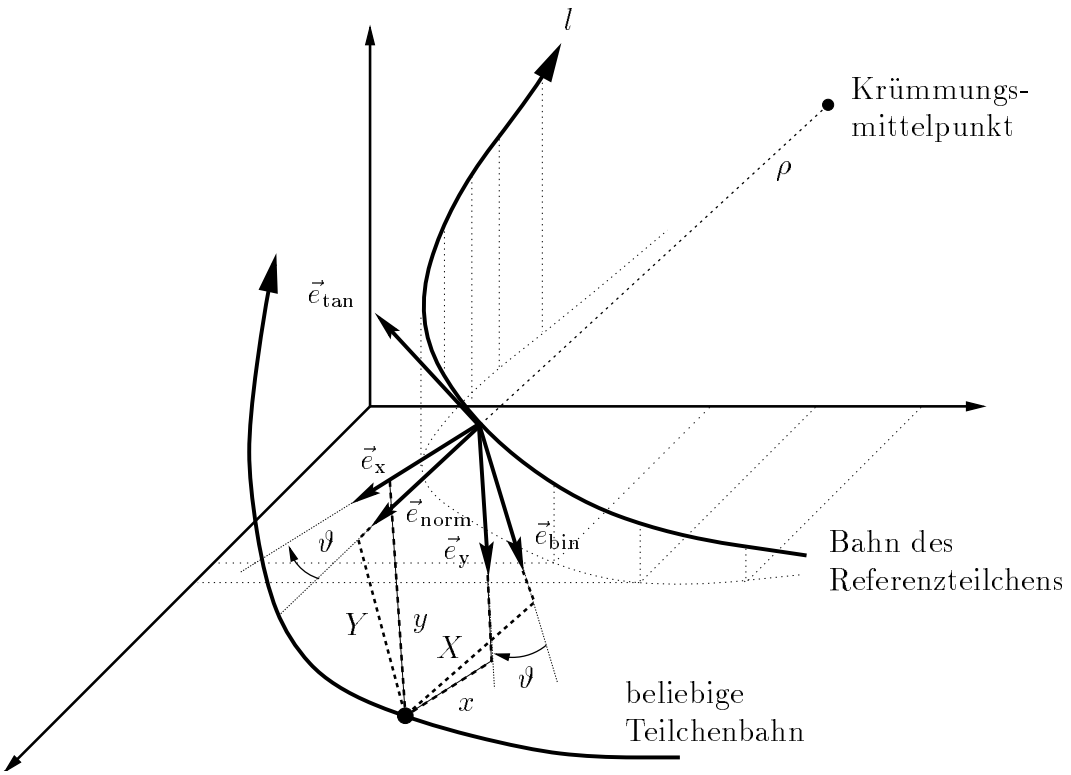

Abbildung 2.1: Das Frenet und das krummlinige Koordinatensystem

gegeben (s. Abb. 2.1). Damit lauten nun die Gleichungen (2.9) und (2.10) im krummlinigen Koordinatensystem

$$\vec{r}(x,y,l) = \vec{R}(l) + x\vec{e}_{\rm x} + y\vec{e}_{\rm y}\,, \tag{2.13}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dl} = x'\vec{e}_{\rm x} + y'\vec{e}_{\rm y} + h\vec{e}_{\rm l} \text{ mit den Abkürzungen} \tag{2.14}$$

$$\vec{x} = (x,y,l)^T,\ \vec{\kappa} = (\kappa_{\rm x},\kappa_{\rm y},0)^T = \left(\frac{\cos\vartheta}{\rho},\frac{\sin\vartheta}{\rho},0\right)^T \text{ und} \tag{2.15}$$

$$h = 1 + \vec{\kappa}\cdot\vec{x}\,. \tag{2.16}$$

Im Vektor $\vec{\kappa}$ stehen die Komponenten der Krümmung im krummlinigen Koordinatensystem.

Denn die Ableitungen der Basisvektoren im krummlinigen Koordinatensystem ergeben sich zu

$$\frac{d}{dl}(\vec{e}_{\rm x} + {\rm i}\vec{e}_{\rm y}) = \frac{e^{{\rm i}\vartheta}}{\rho}\vec{e}_{\rm tan}\,,\ \frac{d\vec{e}_{\rm x}}{dl} = \frac{\cos\vartheta}{\rho}\vec{e}_{\rm l} \quad = \quad \kappa_{\rm x}\vec{e}_{\rm l}\,, \tag{2.17}$$

$$\frac{d\vec{e}_{\mathrm{y}}}{dl} = \frac{\sin\vartheta}{\rho}\vec{e}_{\mathrm{l}} \quad = \quad \kappa_{\mathrm{y}}\vec{e}_{\mathrm{l}} \,, \tag{2.18}$$

$$\frac{d\vec{e}_{\mathrm{l}}}{dl} = -\frac{1}{\rho}\vec{e}_{\mathrm{norm}} = -\frac{1}{\rho}\Re\left\{e^{-\mathrm{i}\vartheta}(\vec{e}_{\mathrm{x}} + \mathrm{i}\vec{e}_{\mathrm{y}})\right\} \quad = \quad -(\kappa_{\mathrm{x}}\vec{e}_{\mathrm{x}} + \kappa_{\mathrm{y}}\vec{e}_{\mathrm{y}})\,. \tag{2.19}$$

Dabei liefert $\Re\{\cdots\}$ den Realteil des eingeschlossenen Terms. Somit gilt für die Ableitung des Ortsvektors

$$\frac{d\vec{r}}{dl} = \frac{d\vec{R}}{dl} + x'\vec{e}_{\mathrm{x}} + x\frac{d\vec{e}_{\mathrm{x}}}{dl} + y'\vec{e}_{\mathrm{y}} + y\frac{d\vec{e}_{\mathrm{y}}}{dl}\,. \tag{2.20}$$

Aus (2.20) folgt mit (2.17), (2.18) und (2.19) die Beziehung (2.14).

Für einen beliebigen Vektor $\vec{p}\,(l) = p_{\mathrm{x}}\,(l)\,\vec{e}_{\mathrm{x}} + p_{\mathrm{y}}\,(l)\,\vec{e}_{\mathrm{y}} + p_{\mathrm{l}}\,(l)\,\vec{e}_{\mathrm{l}}$ im krummlinigen Koordinatensystem berechnet sich seine Ableitung nach der Bogenlänge l analog wie beim Ortsvektor unter Verwendung von (2.17), (2.18) und (2.19) zu

$$\frac{d\vec{p}}{dl} = (p'_{\mathrm{x}} - p_{\mathrm{l}}\kappa_{\mathrm{x}})\,\vec{e}_{\mathrm{x}} + \left(p'_{\mathrm{y}} - p_{\mathrm{l}}\kappa_{\mathrm{y}}\right)\vec{e}_{\mathrm{y}} + (p_{\mathrm{x}}\kappa_{\mathrm{x}} + p_{\mathrm{y}}\kappa_{\mathrm{y}} + p'_{\mathrm{l}})\,\vec{e}_{\mathrm{l}}\,. \tag{2.21}$$

Außerdem sind die Bogenlänge l und die Zeit t im krummlinigen Koordinatensystem über ihre Ableitung

$$\frac{dl}{dt} = \frac{v}{h}\frac{p_{\mathrm{l}}}{p} \tag{2.22}$$

verknüpft. Denn mit (2.14) gilt

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dl}\frac{dl}{dt} = \dot{x}\vec{e}_{\mathrm{x}} + \dot{y}\vec{e}_{\mathrm{y}} + h\frac{dl}{dt}\vec{e}_{\mathrm{l}}\,, \tag{2.23}$$

womit speziell aus der $\vec{e}_{\mathrm{l}}$ -Komponente $\frac{dl}{dt} = \frac{v_{\mathrm{l}}}{h}$ folgt. Mit dem Verhältnis $\frac{v_{\mathrm{l}}}{v} = \frac{p_{\mathrm{l}}}{p}$ ergibt sich dann (2.22).
Mit diesem Ergebnis lauten die in l parametrisierten Bewegungsgleichungen aus (2.1) und (2.2)

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dl}\frac{dl}{dt} \quad = \quad q\left(\vec{E} + v\,\frac{\vec{p}}{p}\times\vec{B}\right)\,, \tag{2.24}$$

$$\frac{d\vec{p}}{dl} \quad = \quad q\left(\frac{h\,p}{v\,p_{\mathrm{l}}}\vec{E} + \frac{h}{p_{\mathrm{l}}}\vec{p}\times\vec{B}\right)\,, \tag{2.25}$$

$$\text{und analog} \qquad \frac{d\vec{r}}{dl} \quad = \quad h\,\frac{\vec{p}}{p_{\mathrm{l}}}\,. \tag{2.26}$$

2.2 Das Referenzteilchen

Durch die Definition eines *Referenzteilchens* bestimmt man die Bewegung eines beliebigen Teilchens durch seine relativen Abweichungen vom Referenzteilchen

und ermöglicht damit für ein enges Teilchenbündel die Einführung von kleinen Größen. Das Referenzteilchen (Index 0) ist durch seinen Impuls $p_0(l)$, seine kinetische Energie $K_0(l)$ und seine Zeit $t_0(l)$ bestimmt. Seine Bahn ist bis auf die Einschränkung durch Impuls und Zeit beliebig wählbar und muß nicht mit der Referenzbahn übereinstimmen. Die neuen Koordinaten aus kleinen Größen sind

$$x\,, a = \frac{p_\mathrm{x}}{p_0}\,, y\,, b = \frac{p_\mathrm{y}}{p_0}\,, \tau = \frac{K_0}{p_0}(t_0 - t)\,, \delta = \frac{K - K_0}{K_0} \tag{2.27}$$

mit K als kinetische Energie und t als Zeit des betrachteten Teilchens. Die Bewegungsgleichungen in diesen Koordinaten berechnen sich zu

$$x' = ha\frac{p_0}{p_\mathrm{l}}\,, \tag{2.28}$$

$$a' = \kappa_\mathrm{x}\frac{p_\mathrm{l}}{p_0} + q\frac{h}{p_\mathrm{l}}(bB_\mathrm{l} - \frac{p_\mathrm{l}}{p_0}B_\mathrm{y}) + q\frac{hm\gamma}{p_\mathrm{l}p_0}E_\mathrm{x} - q\frac{h_0}{p_0 v_{0_l}}a\varepsilon_0(l)\,, \tag{2.29}$$

$$y' = hb\frac{p_0}{p_\mathrm{l}}\,, \tag{2.30}$$

$$b' = \kappa_\mathrm{y}\frac{p_\mathrm{l}}{p_0} - q\frac{h}{p_\mathrm{l}}(aB_\mathrm{l} - \frac{p_\mathrm{l}}{p_0}B_\mathrm{x}) + q\frac{hm\gamma}{p_\mathrm{l}p_0}E_\mathrm{y} - q\frac{h_0}{p_0 v_{0_l}}b\varepsilon_0(l)\,, \tag{2.31}$$

$$\tau' = \frac{K_0}{p_0}\left(\frac{h_0}{v_{0_l}} - \frac{h}{v_\mathrm{l}}\right) + q\frac{h_0 mc^2}{p_0 p_{0_l}c^2}\tau\varepsilon_0(l)\,, \tag{2.32}$$

$$\delta' = q\frac{p_0}{K_0}\left(\frac{h}{p_\mathrm{l}}\varepsilon - \frac{h_0}{p_{0_l}}(\delta+1)\varepsilon_0(l)\right) \tag{2.33}$$

mit $\varepsilon = aE_\mathrm{x} + bE_\mathrm{y} + \frac{p_\mathrm{l}}{p_0}E_\mathrm{l}$ und $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$. Die Feldstärken $\vec{E}$ und $\vec{B}$ sind im krummlinigen Koordinatensystem durch

$$\vec{E}(x,y,l) = E_\mathrm{x}\vec{e}_\mathrm{x} + E_\mathrm{y}\vec{e}_\mathrm{y} + E_\mathrm{l}\vec{e}_\mathrm{l} \text{ und } \vec{B}(x,y,l) = B_\mathrm{x}\vec{e}_\mathrm{x} + B_\mathrm{y}\vec{e}_\mathrm{y} + B_\mathrm{l}\vec{e}_\mathrm{l} \tag{2.34}$$

gegeben.

Im Folgenden wird die Bewegungsgleichung hergeleitet. Durch Vergleich von (2.14) und (2.26) erhält man sofort die Gleichungen (2.28) und (2.30), und aus (2.21) und (2.25) folgt

$$p'_\mathrm{x} = \kappa_\mathrm{x}p_\mathrm{l} + q\frac{h}{p_\mathrm{l}}\left(p_\mathrm{y}B_\mathrm{l} - p_\mathrm{l}B_\mathrm{y}\right) + q\frac{hp}{vp_\mathrm{l}}E_\mathrm{x}\,, \tag{2.35}$$

$$p'_\mathrm{y} = \kappa_\mathrm{y}p_\mathrm{l} - q\frac{h}{p_\mathrm{l}}\left(p_\mathrm{x}B_\mathrm{l} - p_\mathrm{l}B_\mathrm{x}\right) + q\frac{hp}{vp_\mathrm{l}}E_\mathrm{y}\,. \tag{2.36}$$

Unter Verwendung von (2.25) berechnet sich die Ableitung des Impulses zu

$$\frac{dp}{dl} = \frac{1}{2p}\frac{dp^2}{dl} = \frac{\vec{p}}{p}\frac{d\vec{p}}{dl} = \frac{qh}{vp_\mathrm{l}}\vec{p}\cdot\vec{E} = \frac{qhp_0}{vp_\mathrm{l}}\varepsilon \tag{2.37}$$

bzw. analog für das Referenzteilchen

$$\frac{dp_0}{dl} = \frac{qh_0}{v_{0_l}}\varepsilon_0 \,. \tag{2.38}$$

Durch Einsetzen von (2.35) und (2.38) in

$$a' \;=\; \frac{p'_{\mathrm{x}}}{p_0} - \frac{a}{p_0}p'_0 \tag{2.39}$$

ergibt sich (2.29). Analog berechnet sich (2.31) aus (2.36) und (2.38). Mit der Beziehung zwischen der kinetischen Energie und dem Impuls wird die Ableitung der kinetischen Energie auf die Ableitung des Impulses zurückgeführt,

$$K = \sqrt{(pc)^2 + (mc)^2} - mc^2 \,, \frac{dK}{dl} = vp' \text{ und analog } \frac{dK_0}{dl} = v_0 p'_0 \,. \tag{2.40}$$

Durch Einsetzen von (2.22), (2.38) und (2.40) wird die Ableitung von τ umgeformt,

$$\begin{aligned} \tau' &= (t'_0 - t')\,\frac{K_0}{p_0} + (t_0 - t)\left(\frac{K'_0}{p_0} - K_0\frac{p'_0}{p_0^2}\right) \\ &= \left(\frac{h_0}{v_{0_l}} - \frac{h}{v_{\mathrm{l}}}\right)\frac{K_0}{p_0} + q\frac{h_0}{p_{0_l}}\left[\frac{p_0}{K_0} - \frac{1}{v_0}\right]\tau\varepsilon_0 \,. \end{aligned}$$

Die angegebene Gleichung (2.32) folgt durch die Verwendung der bekannten relativistischen Beziehungen $p_0 = m\gamma_0 v_0$ und $K_0 = m\gamma_0 c^2 - mc^2$. Die Ableitung der Definition von δ (2.27) liefert unter Zuhilfenahme von (2.37), (2.38) und (2.40)

$$\delta' = \frac{K'}{K_0} - \frac{KK'_0}{K_0^2} = q\left(\frac{hp_0}{K_0 p_{\mathrm{l}}}\varepsilon - \frac{K}{K_0}\frac{h_0 p_0}{K_0 p_{0_l}}\varepsilon_0\right). \tag{2.41}$$

Zu (2.33) kommt man schließlich über $\frac{K}{K_0} = 1 + \delta$. Fordert man nun, daß die ***Referenzkurve*** $(x_{\mathrm{R}}, y_{\mathrm{R}} = 0\,, x'_{\mathrm{R}}, y'_{\mathrm{R}} = 0)$ eine ***Teilchenbahn*** (Index R) mit dem Impuls $\vec{p}_{\mathrm{R}} = p_{\mathrm{R}}\vec{e}_{\mathrm{l}}$ und damit $a_{\mathrm{R}}, b_{\mathrm{R}} = 0$ darstellt, dann müssen die Komponenten der Krümmung wegen der Bewegungsgleichungen (2.29) und (2.31) die Bedingung

$$\kappa_{\mathrm{x}} \;=\; q\frac{B_{\mathrm{y0}}}{p_{\mathrm{R}}} - q\frac{E_{\mathrm{x0}}}{v_{\mathrm{R}}p_{\mathrm{R}}} \,, \tag{2.42}$$

$$\kappa_{\mathrm{y}} \;=\; -q\frac{B_{\mathrm{x0}}}{p_{\mathrm{R}}} - q\frac{E_{\mathrm{y0}}}{v_{\mathrm{R}}p_{\mathrm{R}}} \tag{2.43}$$

erfüllen. Hierbei gibt der Index 0 das magnetische und elektrische Feld auf der Referenzkurve, also auf der Kurve $(0, 0, l)$ an. Ist darüber hinaus die Bahn des Referenzteilchens mit der Referenzkurve identisch, gilt für κ_{x} und κ_{y}

$$\kappa_{\mathrm{x}} \;=\; -\frac{q}{p_0 v_0}\left(E_{\mathrm{x0}} - v_0 B_{\mathrm{y0}}\right) \,, \tag{2.44}$$

$$\kappa_{\mathrm{y}} \;=\; -\frac{q}{p_0 v_0}\left(E_{\mathrm{y0}} + v_0 B_{\mathrm{x0}}\right) \,. \tag{2.45}$$

Außerdem verschwinden für diese Wahl per Definition ebenfalls die beiden übrigen Koordinaten des Referenzteilchens ($\tau_{\mathrm{R}}\,, \delta_{\mathrm{R}} = 0$). Während in der üblichen Darstellung [3] konstante Referenzgrößen verwendet werden, wurde hier eine Normierung mit einem variablen Impuls $p_0(l)$ und variabler kinetischer Energie $K_0(l)$ durchgeführt. Wählt man nämlich im allgemeinen Fall für beliebige elektrische Felder ($\frac{dp}{dl} \neq 0$) konstante Referenzgrößen $\mathcal{K}_0$ und $\mathcal{P}_0$, verschwindet die letzte Komponente des Referenzteilchens $\delta_{\mathrm{R}} = \frac{K_0(l)-\mathcal{K}_0}{\mathcal{K}_0}$ im allgemeinen nicht. Bei der Lösung der Bewegungsgleichung wird jedoch gefordert werden, daß $\vec{z} = \vec{0}$ mit $\vec{z} = (x, a, y, b, \tau, \delta)^T$ immer eine Teilchenbahn beschreibt. Für beliebige Felder ist dies im allgemeinen nur mit variablen Referenzgrößen erreichbar.

2.3 Die Hamiltonsche Formulierung der Bewegungsgleichung

Das totale Differential der Erzeugenden $F = F(\vec{q}, \vec{Q}, t)$

$$dF = \vec{P}\, d\vec{Q} - \vec{p}\, d\vec{q} + (\bar{H} - H)dt\,, \tag{2.46}$$

liefert eine Beziehung zwischen den alten Koordinaten $\vec{q}, \vec{p}$ und den neuen $\vec{Q}, \vec{P}$ gemäß

$$\vec{P} = \partial_{\vec{Q}} F,\ \vec{p} = -\partial_{\vec{p}} F,\ \bar{H} = H + \partial_t F\,. \tag{2.47}$$

Durch Legendre-Transformation

$$d(F + \vec{p}\vec{q}) = \vec{P}\, d\vec{Q} + \vec{q}\, d\vec{p} + (\bar{H} - H)dt \tag{2.48}$$

erzielt man die Umrechnung von den alten auf die neuen Koordinaten für die Erzeugende $\phi\big(\vec{p}, \vec{Q}, t\big) = F + \vec{p}\vec{q}$,

$$\vec{q} = \partial_{\vec{p}}\phi,\ \vec{P} = \partial_{\vec{Q}}\phi,\ \bar{H} = H + \partial_t\phi\,. \tag{2.49}$$

Analog wird die kanonische Transformation für die Erzeugende $\tilde{F} = F - \vec{P}\vec{Q}$ hergeleitet,

$$d\tilde{F} = -\vec{Q}\, d\vec{P} - \vec{p}\, d\vec{q} + (\bar{H} - H)dt\,, \tag{2.50}$$

$$\vec{Q} = -\partial_{\vec{P}}\tilde{F},\ \ \vec{p} = -\partial_{\vec{q}}\tilde{F},\ \ \bar{H} = H + \partial_t\tilde{F}\,. \tag{2.51}$$

Ausgehend von der relativistischen Hamiltonfunktion eines Teilchens im elektromagnetischen Feld,

$$H(\tilde{\vec{x}}, \tilde{\vec{p}}, t) = qV(\tilde{\vec{x}}, t) + \left[(mc^2)^2 + (\tilde{\vec{p}} - q\vec{A}(\tilde{\vec{x}}, t))^2 c^2\right]^{\frac{1}{2}} \tag{2.52}$$

mit $\tilde{\vec{x}}$ als *Ortsvektor*, dem zugehörigen *kanonischen* Impuls $\tilde{\vec{p}}$ sowie mit $V(\tilde{\vec{x}},t)$ als elektrisches Potential und $\vec{A}(\tilde{\vec{x}},t)$ als magnetisches Vektorpotential (s. [4.4]) wird die kanonische Transformation auf die neuen Koordinaten $\vec{x}=(x,y,l)^T, \vec{p}=(p_{\rm x},p_{\rm y},p_{\rm l})^T$ mit der Erzeugenden

$$\phi(\tilde{\vec{p}},\vec{x}) = \tilde{\vec{p}}\cdot\left[\vec{R}(l)+x\vec{e}_{\rm x}+y\vec{e}_{\rm y}\right] \tag{2.53}$$

entsprechend (2.49) durchgeführt,

$$\begin{aligned}
\tilde{\vec{x}} &= \vec{R}(l)+x\vec{e}_{\rm x}+y\vec{e}_{\rm y}\,, && (2.54)\\
(p_{\rm x},p_{\rm y},p_{\rm l})^T &= (\tilde{\vec{p}}\cdot\vec{e}_{\rm x}\,,\tilde{\vec{p}}\cdot\vec{e}_{\rm y}\,,h\tilde{\vec{p}}\cdot\vec{e}_{\rm l}\,)^T=(\tilde{p}_{\rm x},\tilde{p}_{\rm y},h\tilde{p}_{\rm l})^T\,, && (2.55)\\
\bar{H}(\vec{x},\vec{p},t) &= H(\tilde{\vec{x}}(\vec{x}),\tilde{\vec{p}}(\vec{x},\vec{p}),t)\,. && (2.56)
\end{aligned}$$

Hierbei wurde $\partial_{\rm l}\big(\vec{R}(l)+x\vec{e}_{\rm x}(l)+y\vec{e}_{\rm y}(l)\big)=(1+\vec{\kappa}\cdot\vec{x})\,\vec{e}_{\rm l}$ verwendet. Speziell sind der kinetische Impuls und der neue kanonische Impuls $\vec{p}$ wegen (2.55) durch

$$p_{\rm kin_x}=\tilde{p}_{\rm x}-qA_{\rm x}=p_{\rm x}-qA_{\rm x},\; p_{\rm kin_y}=p_{\rm y}-qA_{\rm y},\; p_{\rm kin_l}=\frac{p_{\rm l}}{h}-qA_{\rm l} \tag{2.57}$$

miteinander verknüpft. Die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen in den neuen Variablen $(\vec{x},\vec{p})$

$$\dot{\vec{x}}=\partial_{\vec{p}}\bar{H},\;\dot{\vec{p}}=-\partial_{\vec{x}}\bar{H} \tag{2.58}$$

werden nun in Abhängigkeit der Bogenlänge l anstatt der Zeit t dargestellt. Aus

$$d\bar{H}\big|_{\vec{x},p_{\rm y},t=\text{const.}}=\partial_{p_{\rm x}}\bar{H}\,dp_{\rm x}+\partial_{p_{\rm l}}\bar{H}\,dp_{\rm l} \tag{2.59}$$

ergibt sich

$$x'=\frac{\dot{x}}{\dot{l}}=\frac{\partial_{p_{\rm x}}\bar{H}}{\partial_{p_{\rm l}}\bar{H}}=\left(\frac{\partial(-p_{\rm l})}{\partial p_{\rm x}}\right)_{\vec{x},p_{\rm y},\bar{H},t=\text{const.}}\,. \tag{2.60}$$

Analog berechnen sich

$$\begin{aligned}
p'_{\rm x} &= -\left(\frac{\partial(-p_{\rm l})}{\partial x}\right)_{y,l,p_{\rm x},p_{\rm y},\bar{H},t=\text{const.}}\,, && (2.61)\\
y'=\left(\frac{\partial(-p_{\rm l})}{\partial p_{\rm y}}\right)_{\vec{x},p_{\rm x},\bar{H},t=\text{const.}}\,,\; p'_{\rm y} &= -\left(\frac{\partial(-p_{\rm l})}{\partial y}\right)_{x,l,p_{\rm x},p_{\rm y},\bar{H},t=\text{const.}}\,. && (2.62)
\end{aligned}$$

Die Größen $\bar{H}$ und t verändern sich mit l gemäß der folgenden Gleichungen,

$$\begin{aligned}
(-t)' &= -\frac{1}{\dot{l}}=\left(\frac{\partial(-p_{\rm l})}{\partial\bar{H}}\right)_{\vec{x},p_{\rm x},p_{\rm y},t=\text{const.}} && (2.63)\\
\bar{H}' &= \frac{d\bar{H}}{dl}=\partial_{\vec{x}}\bar{H}\cdot\vec{x}'+\partial_{\vec{p}}\bar{H}\cdot\vec{p}\,'+\partial_t\bar{H}\,t'\\
&= -\dot{\vec{p}}\cdot\vec{x}'+\dot{\vec{x}}\cdot\vec{p}\,'+\frac{\partial_t\bar{H}}{\dot{l}}=-\vec{p}\,'\frac{dl}{dt}\cdot\vec{x}'+\vec{x}'\cdot\vec{p}\,'\frac{dl}{dt}+\frac{\partial_t\bar{H}}{\partial_{p_{\rm l}}\bar{H}}\\
&= -\left(\frac{\partial(-p_{\rm l})}{\partial(-t)}\right)_{\vec{x},p_{\rm x},p_{\rm y},\bar{H}=\text{const}}\,. && (2.64)
\end{aligned}$$

Durch Einführung der neuen Hamiltonfunktion $G = -p_{\mathrm{l}}(x, p_{\mathrm{x}}, y, p_{\mathrm{y}}, -t, \bar{H}, l)$ gelangt man wiederum zu Hamiltonschen Bewegungsgleichungen mit dem freien Parameter l und den kanonisch konjugierten Variablen des krummlinigen Koordinatensystems

$$(x\,, p_{\mathrm{x}})\,, (y\,, p_{\mathrm{y}})\,, (-t\,, \bar{H}) \tag{2.65}$$

(vgl. mit [5.1], in der die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen für das Frenet-Koordinatensystem ohne Torsion aufgestellt werden). Die Größe $\bar{H}$ ist nun nicht mehr die Hamiltonfunktion, sondern eine Impulsvariable. Von den Koordinaten $\vec{q} = (x, y, -t)^T$ mit dem zugehörigen kanonischen Impuls $\left(p_{\mathrm{x}}\,, p_{\mathrm{y}}\,, \bar{H}\right)$ wird nun die zweite Transformation auf die kanonisch konjugierten Variablen $\vec{X} = (X, Y, T)^T$ und $\vec{P} = (P_{\mathrm{x}}, P_{\mathrm{y}}, P_{\mathrm{T}})^T$ mit der Erzeugenden

$$\tilde{F}(x, y, -t, P_{\mathrm{x}}, P_{\mathrm{y}}, P_{\mathrm{T}}, l) = -\vec{q}\cdot\vec{P} + q\int_{t_{\mathrm{i}}}^{V}(x, y, t', l)\,dt' - t_0(l)P_{\mathrm{T}} \tag{2.66}$$

durchgeführt und dabei angenommen, daß das elektrische Potential V als Funktion von $x\,, y\,, l$ und t bekannt sei. Mit (2.51) gelten folgende Beziehungen zwischen alten und neuen Koordinaten

$$X = x\,, \qquad Y = y\,, \qquad T = t_0(l) - t\,, \tag{2.67}$$

$$p_{\mathrm{x}} = P_{\mathrm{x}} - q\,\partial_x\mathcal{I}\,, \qquad p_{\mathrm{y}} = P_{\mathrm{y}} - q\,\partial_y\mathcal{I}\,, \qquad \bar{H} = P_{\mathrm{T}} + q\,V(x, y, t, l) \tag{2.68}$$

mit $\mathcal{I} = \int_{t_{\mathrm{i}}}^{t} V(x, y, t', l)\,dt'$. Somit sind auch

$$(x\,, P_{\mathrm{x}})\,, (y\,, Y)\,, (T\,, P_{\mathrm{T}})\,. \tag{2.69}$$

kanonisch konjugierte Variablen zu einer (hier nicht explizit bestimmten) Hamiltonfunktion $\mathcal{H} = \mathcal{H}(x, P_{\mathrm{x}}, y, P_{\mathrm{y}}, T, P_{\mathrm{T}}, l)$. Die zugehörigen Bewegungsgleichungen werden nochmals auf neue Variablen $A = \frac{P_{\mathrm{x}}}{p_0}$ und $B = \frac{P_{\mathrm{y}}}{p_0}$ mit $p_0 = \text{const.}$ und der neuen Hamiltonfunktion $\hat{\mathcal{H}} = \frac{\mathcal{H}}{p_0}$ umgeschrieben,

$$x' = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial P_{\mathrm{x}}} = \frac{\partial\hat{\mathcal{H}}}{\partial A}\,, \qquad A' = -\frac{\partial\hat{\mathcal{H}}}{\partial x}\,, \tag{2.70}$$

$$y' = \frac{\partial\hat{\mathcal{H}}}{\partial B}\,, \qquad B' = -\frac{\partial\hat{\mathcal{H}}}{\partial y}\,. \tag{2.71}$$

Mit (2.56) wird δ als Funktion von P_{T} ausgedrückt,

$$\delta = \frac{\bar{H} - qV(x, y, t, l) - mc^2 - K_0}{K_0},\ \delta(P_{\mathrm{T}}) = \frac{P_{\mathrm{T}} - mc^2 - K_0}{K_0}\,. \tag{2.72}$$

Unter der Annahme, daß K_0=const. ist, werden die Ableitungen von δ und $\tau = \frac{K_0}{p_0}(t_0 - t)$ nach l mit Zuhilfenahme der Hamiltonschen Bewegungsgleichungen gebildet,

$$\tau' = \frac{K_0}{p_0} T' \qquad = \frac{K_0}{p_0}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_{\mathrm{T}}} \qquad = \frac{\partial \hat{\mathcal{H}}}{\partial \delta}\,, \tag{2.73}$$

$$\delta' = \frac{P'_{\mathrm{T}}}{K_0} \qquad = -\frac{\partial \hat{\mathcal{H}}}{\partial\left(\frac{TK_0}{p_0}\right)} \qquad = -\frac{\partial \hat{\mathcal{H}}}{\partial \tau}\,. \tag{2.74}$$

Die Gleichungen (2.70), (2.71), (2.73), (2.74) und (2.57) zeigen, daß bei konstantem K_0 die Bewegung in den Variablen x, A, y, B, τ, δ,

$$x \quad \longleftrightarrow \quad A = a + \frac{q}{p_0}\left(A_{\mathrm{x}} + \partial_x \mathcal{I}\right)\,, \tag{2.75}$$

$$y \quad \longleftrightarrow \quad B = b + \frac{q}{p_0}\left(A_{\mathrm{y}} + \partial_y \mathcal{I}\right)\,, \tag{2.76}$$

$$\tau \quad \longleftrightarrow \quad \delta \tag{2.77}$$

Hamiltonisch ist. Nun wird eine Umeichung des Vektorpotentials $\vec{A}$ mit der Eichfunktion $\Lambda = \mathcal{I}$ durchgeführt,

$$\tilde{\vec{A}} = \vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda\,. \tag{2.78}$$

Damit lauten die Hamiltonschen Variablen

$$x \quad \longleftrightarrow \quad A = a + \frac{q}{p_0}\tilde{A}_{\mathrm{x}}\,, \tag{2.79}$$

$$y \quad \longleftrightarrow \quad B = b + \frac{q}{p_0}\tilde{A}_{\mathrm{y}}\,, \tag{2.80}$$

$$\tau \quad \longleftrightarrow \quad \delta\,. \tag{2.81}$$

Falls das Referenzteilchen bei Ein- und Austritt aus einem teilchenoptischen Element den gleichen Impuls besitzt, sind die Variablen $(x, a, y, b, \tau, \delta)$ vor Ein- und nach Austritt durch eine kanonische Transformation verbunden. Solch eine Wahl ist in vielen teilchenoptischen Elementen (z.B. Cavitäten in Protonenspeicherringen) möglich. Die Abbildung $\mathcal{M}$ von Anfangs- auf Endkoordinaten erfüllt dann nach [4.1] die symplektische Bedingung

$$\mathcal{M}_{\mathrm{J}}^T \underline{\mathrm{J}}\, \mathcal{M}_{\mathrm{J}} = \underline{\mathrm{J}} \text{ mit } \underline{\mathrm{J}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.82}$$

und $\mathcal{M}_{\mathrm{J}}$ als Jacobi-Matrix der Abbildung $\mathcal{M}$. Die symplektische Symmetrie innerhalb eines Elementes ist im allgemeinen jedoch verletzt. Für den Spezialfall, daß der Impuls des Referenzteilchens konstant ist und die Magnetfeldkomponente in Richtung der optischen Achse verschwindet, ist die symplektische Symmetrie der Abbildung zu jedem Punkt erhalten.
In der Ebene l =const gilt dann wegen $\vec{B}\cdot\vec{e}_{\mathrm{l}} = 0$ für das magnetische Vektorpotential $\mathrm{rot}\vec{\tilde{A}}\Big|_{l=\mathrm{const.}} = 0$. Es existiert folglich eine Funktion $\Lambda(x,y,l)$ derart, daß

$$\tilde{A}_{\mathrm{x}} = \partial_x\Lambda \text{ und } \tilde{A}_{\mathrm{y}} = \partial_y\Lambda \tag{2.83}$$

gilt. In diesem speziellen Fall vereinfachen sich die Hamiltonschen Variablen zu

$$x \quad\longleftrightarrow\quad A = a + \frac{q}{p_0}\partial_x\Lambda(x,y,l)\,, \tag{2.84}$$

$$y \quad\longleftrightarrow\quad B = b + \frac{q}{p_0}\partial_y\Lambda(x,y,l)\,, \tag{2.85}$$

$$\tau \quad\longleftrightarrow\quad \delta\,. \tag{2.86}$$

Die Erzeugende $F\big(\vec{q}=(x,y,\tau)^T, \hat{\vec{P}}=\big(\hat{P}_{\mathrm{x}},\hat{P}_{\mathrm{y}},\hat{P}_\tau\big)^T, l\big)$,

$$F\big(\vec{q},\hat{\vec{P}},l\big) = -\vec{q}\,\hat{\vec{P}} - \frac{q}{p_0}\Lambda(x,y,l)\,, \tag{2.87}$$

liefert nun die Transformation auf die Variablen (x, a, y, b, τ, δ). Denn mit der Transformationsvorschrift (2.51) folgt

$$\hat{\vec{Q}} \;=\; \vec{q} = (x,y,\tau)^T\,, \tag{2.88}$$

$$\hat{P}_{\mathrm{x}} \;=\; A - \frac{q}{p_0}\partial_x\Lambda(x,y) = a\,, \tag{2.89}$$

$$\hat{P}_{\mathrm{y}} \;=\; B - \frac{q}{p_0}\partial_y\Lambda(x,y) = b\,, \tag{2.90}$$

$$\hat{P}_\tau \;=\; \delta\,. \tag{2.91}$$

Somit sind die Variablen (x, a, y, b, τ, δ) bei nichtvorhandener longitudinaler Magnetfeldkomponente und konstantem Impuls des Referenzteilchen Hamiltonisch. Folglich ist die Abbildung auf jeden Punkt der Referenzkurve symplektisch.

Kapitel 3

Iterative Lösung der Bewegungsgleichung

Die Bewegungsgleichung ist ein Differentialgleichungssystem der Form

$$\frac{d}{dl}\vec{z}\,(l) = \vec{f}\,(\vec{z}\,(l)\,,l)\;\,,\vec{z}\,(0) = \vec{z}_{\mathrm{i}} \tag{3.1}$$

(vgl. (2.28) - (2.33)) mit

$$\vec{z}_{\mathrm{i}} \;\; = \;\; (x_{\mathrm{i}}, a_{\mathrm{i}}, y_{\mathrm{i}}, b_{\mathrm{i}}, \tau_{\mathrm{i}}, \delta_{\mathrm{i}})^T\,. \tag{3.2}$$

Zunächst ist die Referenzkurve wieder beliebig wählbar, wobei auf die geeignete Wahl weiter unten genauer eingegangen wird. Da in teilchenoptischen Systemen, wie in Beschleunigern, ein enges Teilchenbündel untersucht wird, sind die Abstände von der Referenzkurve und die relativen Abweichungen des Impulses, der kinetischen Energie und der Zeit von den Referenzgrößen gering. Die allgemeine Lösung $\vec{z} = \vec{z}\,(\vec{z}_{\mathrm{i}}, l)$ von (3.1), die eine Funktion der Variablen $\vec{z}_{\mathrm{i}}$ und l ist, wird deshalb in eine Taylorreihe um den Ursprung im Phasenraum bezüglich der Anfangskoordinaten entwickelt,

$$\vec{z} = \sum_{k=0}^{\infty} \vec{z}^{\,(k)}\,(\vec{z}_{\mathrm{i}}, l) \tag{3.3}$$

mit $\vec{z}^{\,(k)}\,(\vec{z}_{\mathrm{i}}, l)$ als k-te Ordnung der Entwicklung. Ebenso entwickelt man $\vec{f}\,(\vec{z}, l)$ in eine Taylorreihe um $\vec{z}\,(0, l) = \vec{z}^{\,(0)}\,(\vec{z}_{\mathrm{i}}, l)$ bezüglich $\sum_{k=1}^{\infty} \vec{z}^{\,(k)}\,(\vec{z}_{\mathrm{i}}, l)$,

$$\begin{aligned} \vec{f}\,(\vec{z}, l) \;\; &= \;\; \vec{f}\left(\vec{z}^{\,(0)}\,(\vec{z}_{\mathrm{i}}, l) + \sum_{k=1}^{\infty} \vec{z}^{\,(k)}\,(\vec{z}_{\mathrm{i}}, l)\,, l\right) \\ &= \;\; \vec{f}\left(\vec{z}^{\,(0)}\,(\vec{z}_{\mathrm{i}}, l)\,, l\right) + \sum_{j=1}^{\infty} \vec{f}^{\,(j)} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \vec{z}^{\,(k)}\,(\vec{z}_{\mathrm{i}}, l)\,, l\right) \end{aligned} \tag{3.4}$$

mit $\vec{f}^{(j)}(\vec{z},l)$ als j-te Ordnung der Entwicklung von $\vec{f}$. Beide Entwicklungen werden unter der Annahme durchgeführt, daß die Reihen konvergieren. Nun wird (3.3) und (3.4) in (3.1) eingesetzt und anschließend nach Potenzen in den Anfangskoordinaten sortiert,

$$\frac{d}{dl}\vec{z}^{(0)}(\vec{z}_{\mathrm{i}},l)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{d}{dl}\vec{z}^{(k)}(\vec{z}_{\mathrm{i}},l)=\vec{f}\left(\vec{z}^{(0)}(\vec{z}_{\mathrm{i}},l),l\right)+\sum_{j=1}^{\infty}\vec{f}^{(j)}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\vec{z}^{(k)}(\vec{z}_{\mathrm{i}},l),l\right). \tag{3.5}$$

Die 0. Ordnung und die n-te Ordnung lauten

$$\frac{d}{dl}\vec{z}^{(0)}(\vec{z}_{\mathrm{i}},l) = \vec{f}\left(\vec{z}^{(0)}(\vec{z}_{\mathrm{i}},l),l\right), \tag{3.6}$$

$$\frac{d}{dl}\vec{z}^{(n)}(\vec{z}_{\mathrm{i}},l) = \sum_{j=1}^{\infty}\left[\vec{f}^{(j)}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\vec{z}^{(k)}(\vec{z}_{\mathrm{i}},l),l\right)\right]_{\mathrm{n}},\ n\,\epsilon\mathbb{N}. \tag{3.7}$$

Dabei stehen die eckigen Klammern $[\ldots]_{\mathrm{n}}$ für das homogene Polynom n-ter Ordnung in den Anfangskoordinaten $\vec{z}_{\mathrm{i}}$, das der eingeschlossene Term enthält. Falls $\mathrm{O}(\varepsilon^n)$ die n-te Ordnung in den Anfangskoordinaten angibt, dann ist in

$$\vec{f}^{(j)}\Big(\sum_{k=1}^{p}\underbrace{\vec{z}^{(k)}(\vec{z}_{\mathrm{i}},l)}_{\mathrm{O}(\varepsilon^k)},l\Big) \tag{3.8}$$

die höchste vorkommende Ordnung $\mathrm{O}(\varepsilon^{\max})$

$$\mathrm{O}(\varepsilon^{\max})=\mathrm{O}\left(\varepsilon^{jp}\right). \tag{3.9}$$

Da die n-te Ordnung gesucht ist, gilt somit sicher die Forderung

$$jk\le n \text{ für } j,k,n\,\epsilon\mathbb{N}. \tag{3.10}$$

Folglich vereinfacht sich (3.7) zu

$$\frac{d}{dl}\vec{z}^{(n)}(\vec{z}_{\mathrm{i}},l)=\sum_{j=1}^{n}\left[\vec{f}^{(j)}\left(\sum_{k=1}^{n}\vec{z}^{(k)}(\vec{z}_{\mathrm{i}},l),l\right)\right]_{\mathrm{n}},\ n\,\epsilon\mathbb{N}. \tag{3.11}$$

Aus der Anfangsbedingung erhält man die Randbedingungen der Taylorkomponenten $\vec{z}^{(k)}(\vec{z}_{\mathrm{i}},l)$

$$\vec{z}^{(k)}(\vec{z}_{\mathrm{i}},l)=\begin{cases}\vec{0} & \text{für } k\neq 1\\ \vec{z}_{\mathrm{i}} & \text{für } k=1\end{cases}. \tag{3.12}$$

Die Lösung der 0. Ordnung, die vollständig ausgeschrieben

$$\frac{d}{dl}\vec{z}^{\,(0)}\left(\vec{z}_{\mathrm{i}},l\right)=\vec{f}\left(\vec{z}^{\,(0)}\left(\vec{z}_{\mathrm{i}},l\right),l\right)\ \text{ mit }\vec{z}^{\,(0)}\left(\vec{z}_{\mathrm{i}},l\right)=\vec{0} \tag{3.13}$$

lautet, sei

$$\vec{z}^{\,(0)}\left(\vec{z}_{\mathrm{i}},l\right)=\vec{0}\,. \tag{3.14}$$

Äquivalent dazu ist wegen (3.13) die Forderung

$$\vec{f}(0,l)=\vec{f}^{\,(0)}\left(\vec{z}_{\mathrm{i}},l\right)=\vec{0}\,. \tag{3.15}$$

Da $\vec{z}^{\,(0)}\left(\vec{z}_{\mathrm{i}},l\right)$ die exakten Bewegungsgleichungen (s. (3.13)) erfüllt, muß (3.14) durch geeignete Wahl von Referenzkurve und Referenzteilchen für alle möglichen, teilchenoptischen Elemente eine Teilchenbahn darstellen. Erfüllt ist dies bei der Identität von Referenzkurve und Bahn des Referenzteilchens (s. Betrachtungen am Ende von 2.2). Die Taylorentwicklung von $\vec{f}(\vec{z},l)$ wird demnach ebenso wie bei $\vec{z}(\vec{z}_{\mathrm{i}},l)$ um den Ursprung bezüglich $\vec{z}_{\mathrm{i}}$ zu bilden sein. Wegen der Linearität von $\vec{z}^{\,(1)}\left(\vec{z}_{\mathrm{i}},l\right)$ in $\vec{z}_{\mathrm{i}}$ und $\vec{f}^{\,(1)}\left(\vec{z},l\right)$ in $\vec{z}$ erfüllt die 1. Ordnung gemäß (3.11) die Gleichung

$$\frac{d}{dl}\vec{z}^{\,(1)}\left(\vec{z}_{\mathrm{i}},l\right)=\vec{f}^{\,(1)}\left(\vec{z}^{\,(1)}\left(\vec{z}_{\mathrm{i}},l\right),l\right)\,,\vec{z}^{\,(1)}\left(\vec{z}_{\mathrm{i}},l=0\right)=\vec{z}_{\mathrm{i}}\,, \tag{3.16}$$

deren Lösung durch eine Matrix $\underline{\mathrm{M}}$ dargestellt wird,

$$\vec{z}^{\,(1)}\left(\vec{z}_{\mathrm{i}},l\right)=\underline{\mathrm{M}}\vec{z}_{\mathrm{i}}\,. \tag{3.17}$$

Durch Einsetzen von (3.17) in (3.16) ergibt sich die Beziehung

$$\vec{f}^{\,(1)}\left(\vec{z},l\right)=\left[\frac{d}{dl}\underline{\mathrm{M}}\right]\underline{\mathrm{M}}^{-1}\vec{z}\,, \tag{3.18}$$

mit deren Hilfe die Berechnung der höheren Ordnungen auf ein Integral zurückgeführt wird,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dl}\vec{z}^{\,(n)}\left(\vec{z}_{\mathrm{i}},l\right) &= \left[\vec{f}^{\,(1)}\left(\sum_{k=1}^{n}\vec{z}^{\,(k)}\left(\vec{z}_{\mathrm{i}},l\right),l\right)\right]_{\mathrm{n}}+\\ &\quad\sum_{j=2}^{n}\left[\vec{f}^{\,(j)}\left(\sum_{k=1}^{n}\vec{z}^{\,(k)}\left(\vec{z}_{\mathrm{i}},l\right),l\right)\right]_{\mathrm{n}}\ \text{für } n\geq 2\,.\end{aligned} \tag{3.19}$$

Die „Alternative“ wäre die Lösung eines nichtlinearen Differentialgleichungssystems. Der letzte Term im Argument von $\vec{f}^{\,(j)}\left(\sum_{k=1}^{n}\vec{z}^{\,(k)}\left(\vec{z}_{\mathrm{i}},l\right),l\right)$, die n-te Ordnung $\vec{z}^{\,(n)}\left(\vec{z}_{\mathrm{i}},l\right)$, erzeugt wegen $j\geq 2$ ausschließlich Terme höherer Ordnung als

n und tritt deswegen nicht auf. Die Linearität von $\vec{f}^{(1)}(\vec{z},l)$ erlaubt die weitere Umformung

$$\left[\vec{f}^{(1)}\left(\sum_{k=1}^{n}\vec{z}^{(k)}\left(\vec{z}_{\rm i},l\right),l\right)\right]_{\rm n}=\vec{f}^{(1)}\left(\vec{z}^{(n)}\left(\vec{z}_{\rm i},l\right),l\right)\ . \tag{3.20}$$

Mit (3.18) und (3.20) wird die n-te Ordnung bis auf ihre Ableitung aus (3.19) eliminiert,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dl}\vec{z}^{(n)}\left(\vec{z}_{\rm i},l\right)-\left[\frac{d}{dl}\underline{\rm M}(l)\right]\underline{\rm M}^{-1}(l)\vec{z}^{(n)}\left(\vec{z}_{\rm i},l\right) &= \sum_{j=2}^{n}\left[\vec{f}^{(j)}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\vec{z}^{(k)}\left(\vec{z}_{\rm i},l\right),l\right)\right]_{\rm n}\ ,\\ \underline{\rm M}(l)\frac{d}{dl}\left(\underline{\rm M}^{-1}(l)\vec{z}^{(n)}\left(\vec{z}_{\rm i},l\right)\right) &= \sum_{j=2}^{n}\left[\vec{f}^{(j)}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\vec{z}^{(k)}\left(\vec{z}_{\rm i},l\right),l\right)\right]_{\rm n}\ .\end{aligned}$$

Unter Benutzung der Randbedingungen erhält man die höheren Ordnungen durch Integration über die bereits gefundenen niedrigeren Ordnungen,

$$\vec{z}^{(n)}\left(\vec{z}_{\rm i},l\right)=\underline{\rm M}(l)\sum_{j=2}^{n}\int_{0}^{l}\underline{\rm M}^{-1}(l')\left[\vec{f}^{(j)}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\vec{z}^{(k)}\left(\vec{z}_{\rm i},l'\right),l'\right)\right]_{\rm n}dl'\ . \tag{3.21}$$

In 2.3 wurde für magnetische Felder ohne longitudinale Komponente die symplektische Symmetrie bewiesen. Die Jacobi-Matrix der Abbildung $\mathcal{M}=\vec{z}(\vec{z}_{\rm i},l)$ von Anfangs- auf Endkoordinaten schreibt sich unter Berücksichtigung der Entwicklung (3.3)

$$\mathcal{M}_{\rm j} = \vec{\partial}_{\vec{z}_{\rm i}}\vec{z}^{\,T}(\vec{z}_{\rm i},l)=\sum_{k=1}^{\infty}\vec{\partial}_{\vec{z}_{\rm i}}\left[\vec{z}^{(k)}\left(\vec{z}_{\rm i},l\right)\right]^{T}\ \text{mit} \tag{3.22}$$

$$\vec{\partial}_{\vec{z}_{\rm i}} = \left(\partial_{x_{\rm i}},\partial_{a_{\rm i}},\partial_{y_{\rm i}},\partial_{b_{\rm i}},\partial_{\tau_{\rm i}},\partial_{\delta_{\rm i}}\right)^{T}\ . \tag{3.23}$$

Nach Einsetzen von (3.22) in die symplektische Bedingung (2.82) wird nach Potenzen in den Anfangsbedingungen sortiert,

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{\rm J}^{T}\,\underline{\rm J}\,\mathcal{M}_{\rm J} &= \sum_{n_1,n_2=1}^{\infty}\left[\vec{\partial}_{\vec{z}_{\rm i}}\left[\vec{z}^{(n_1)}\left(\vec{z}_{\rm i},l\right)\right]^{T}\right]^{T}\underline{\rm J}\left[\vec{\partial}_{\vec{z}_{\rm i}}\left[\vec{z}^{(n_2)}\left(\vec{z}_{\rm i},l\right)\right]^{T}\right]\\ &= \left[\vec{\partial}_{\vec{z}_{\rm i}}\left[\vec{z}^{(1)}\left(\vec{z}_{\rm i},l\right)\right]^{T}\right]^{T}\underline{\rm J}\left[\vec{\partial}_{\vec{z}_{\rm i}}\left[\vec{z}^{(1)}\left(\vec{z}_{\rm i},l\right)\right]^{T}\right]+\\ &\quad\sum_{\substack{n_1,n_2=1\\(n_1,n_2)\neq(1,1)}}^{\infty}\left[\vec{\partial}_{\vec{z}_{\rm i}}\left[\vec{z}^{(n_1)}\left(\vec{z}_{\rm i},l\right)\right]^{T}\right]^{T}\underline{\rm J}\left[\vec{\partial}_{\vec{z}_{\rm i}}\left[\vec{z}^{(n_2)}\left(\vec{z}_{\rm i},l\right)\right]^{T}\right]\\ &= \underline{\rm J}\ .\end{aligned} \tag{3.24}$$

Aufgrund der Linearität der ersten Ordnung $\vec{z}^{\,(1)}(\vec{z}_{\mathrm{i}}, l)$ ist ihre Jacobi-Matrix gerade $\underline{\mathrm{M}}$ (s. (3.17)). Die 0. Ordnung von (3.24) und damit die Matrix $\underline{\mathrm{M}}$ erfüllt die symplektische Bedingung, und für ihre inverse $\underline{\mathrm{M}}(l)^{-1}$ gilt wegen $\underline{\mathrm{J}}^{-1} = -\underline{\mathrm{J}}$ (s. [4.2])

$$\underline{\mathrm{M}}(l)^T \, \underline{\mathrm{J}} \, \underline{\mathrm{M}}(l) = \underline{\mathrm{J}} \; , \; \underline{\mathrm{M}}(l)^{-1} = -\underline{\mathrm{J}} \, \underline{\mathrm{M}}^T(l) \, \underline{\mathrm{J}} \; . \tag{3.25}$$

Durch Einsetzen von (3.25) in (3.21) werden inverse Matrizen zur Berechnung der höheren Ordnungen für Magnetfelder ohne longitudinale Komponente vermieden,

$$\vec{z}^{\,(n)}(\vec{z}_{\mathrm{i}}, l) = -\underline{\mathrm{M}}(l) \sum_{j=2}^{n} \int_0^l \underline{\mathrm{J}} \, \underline{\mathrm{M}}^T(l') \, \underline{\mathrm{J}} \left[\vec{f}^{\,(j)} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \vec{z}^{\,(k)}(\vec{z}_{\mathrm{i}}, l') \, , l' \right) \right]_{\mathrm{n}} dl' \; . \tag{3.26}$$

Speziell die 2. Ordnung lautet

$$\vec{z}^{\,(2)}(\vec{z}_{\mathrm{i}}, l) = -\underline{\mathrm{M}}(l) \int_0^l \underline{\mathrm{J}} \, \underline{\mathrm{M}}^T(l') \, \underline{\mathrm{J}} \, \vec{f}^{\,(2)} \left(\vec{z}^{\,(1)}(\vec{z}_{\mathrm{i}}, l') \, , l' \right) dl' \; . \tag{3.27}$$

Kapitel 4

Linearisierte Bewegung

4.1 Linearisierung der Bewegungsgleichungen

Entsprechend des in Abschnitt 3 hergeleiteten Verfahrens werden zuerst die Bewegungsgleichungen (2.28)-(2.33) bezüglich $\vec{z} = (x, a, y, b, \tau, \delta)^T$ linearisiert,

$$
\begin{aligned}
x' &= a\,, \\
a' &= \frac{q}{p_0 v_0}\left[- v_0\Big(\kappa_{\mathrm{x}} B_{\mathrm{y0}} + \partial_{\mathrm{x}} B_{\mathrm{y0}}\Big) + \Big(\kappa_{\mathrm{x}} E_{\mathrm{x0}} + \partial_{\mathrm{x}} E_{\mathrm{x0}}\Big)\right] x - q\frac{h_0 \varepsilon_0}{v_0 p_{0_l}}\, a + \\
&\quad \frac{q}{p_0 v_0}\left[- v_0\Big(\kappa_{\mathrm{y}} B_{\mathrm{y0}} + \partial_{\mathrm{y}} B_{\mathrm{y0}}\Big) + \Big(\kappa_{\mathrm{y}} E_{\mathrm{x0}} + \partial_{\mathrm{y}} E_{\mathrm{x0}}\Big)\right] y + \frac{q}{p_0} B_{\mathrm{l0}}\, b + \\
&\quad K_0 \left(\frac{\kappa_{\mathrm{x}}}{p_0 v_0} - q\frac{(mc^2)^2}{(p_0 c)^4} E_{\mathrm{x0}}\right)\delta + C_a\,, \\
y' &= b\,, \\
b' &= \frac{q}{p_0 v_0}\left[v_0\Big(\kappa_{\mathrm{x}} B_{\mathrm{x0}} + \partial_{\mathrm{x}} B_{\mathrm{x0}}\Big) + \Big(\kappa_{\mathrm{x}} E_{\mathrm{y0}} + \partial_{\mathrm{x}} E_{\mathrm{y0}}\Big)\right] x - \frac{q}{p_0} B_{\mathrm{l0}}\, a + \\
&\quad \frac{q}{p_0 v_0}\left[v_0\Big(\kappa_{\mathrm{y}} B_{\mathrm{x0}} + \partial_{\mathrm{y}} B_{\mathrm{x0}}\Big) + \Big(\kappa_{\mathrm{y}} E_{\mathrm{y0}} + \partial_{\mathrm{y}} E_{\mathrm{y0}}\Big)\right] y - q\frac{h_0 \varepsilon_0}{v_0 p_{0_l}}\, b + \\
&\quad K_0 \left(\frac{\kappa_{\mathrm{y}}}{p_0 v_0} - q\frac{(mc^2)^2}{(p_0 c)^4} E_{\mathrm{y0}}\right)\delta + C_b\,, \\
\tau' &= -\frac{K_0}{p_0 v_0}\kappa_{\mathrm{x}}\, x - \frac{K_0}{p_0 v_0}\kappa_{\mathrm{y}}\, y + q\frac{h_0 mc^2}{p_{0_l} p_0 c^2}\varepsilon_0 \tau + \frac{(K_0 mc^2)^2}{(p_0 c)^4}\delta + C_\tau\,, \\
\delta' &= \frac{q}{K_0}\Big(\kappa_{\mathrm{x}} E_{\mathrm{l0}} + \partial_{\mathrm{x}} E_{\mathrm{l0}}\Big)\, x + \frac{q}{K_0} E_{\mathrm{x0}}\, a + \frac{q}{K_0}\Big(\kappa_{\mathrm{y}} E_{\mathrm{l0}} + \partial_{\mathrm{y}} E_{\mathrm{l0}}\Big)\, y + \frac{q}{K_0} E_{\mathrm{y0}}\, b - \\
&\quad \frac{q}{K_0}\frac{h_0 p_0}{p_{0_l}}\varepsilon_0\, \delta + C_\delta\,.
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

Der Index 0 gibt das elektrische und magnetische Feld und deren Ableitungen auf der Referenzkurve an, z. B. $E_{\mathrm{y0}} = E_{\mathrm{y}}(0,0,l)$, $\partial_{\mathrm{x}} B_{\mathrm{y0}} = \partial_{\mathrm{x}} B_{\mathrm{y}}(0,0,l)$. Die Größen

C_{i} stehen für die Terme 0. Ordnung,

$$\begin{aligned} C_a &= \kappa_{\mathrm{x}} + \frac{q}{p_0 v_0}\Big(- v_0 B_{\mathrm{y0}} + E_{\mathrm{x0}}\Big)\,, \\ C_b &= \kappa_{\mathrm{y}} + \frac{q}{p_0 v_0}\Big(v_0 B_{\mathrm{x0}} + E_{\mathrm{y0}}\Big)\,, \\ C_\tau &= \frac{K_0}{v_0}\Big(\frac{h_0}{p_{0_l}} - \frac{1}{p_0}\Big)\,, \\ C_\delta &= \frac{q}{K_0}\Big(E_{\mathrm{l0}} - \frac{h_0 p_0}{p_{0_l}}\varepsilon_0\Big)\,. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Zur Linearisierung der Bewegungsgleichungen benötigt man die Entwicklung von p_{0_l} um p_0 bezüglich δ, von v_{0_l} um v_0 bezüglich δ sowie die Entwicklung der elektromagnetischen Felder um die Referenzkurve bezüglich x und y. Der Betrag von $\vec{p}$ liefert

$$p_{0_l} = p_0\sqrt{\left(\frac{p}{p_0}\right)^2 - a^2 - b^2}\,. \tag{4.3}$$

Aus der Energie-Impuls Beziehung $E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2$ erhält man über die Definition von δ (2.27) die Verknüpfung zwischen dem Impuls p und δ,

$$\begin{aligned} p(\delta) &= \frac{1}{c}\sqrt{K^2 + 2Kmc^2} = \frac{1}{c}\sqrt{(p_0 c)^2 + 2K_0\,(K_0 + mc^2)\,\delta + K_0^2\delta^2} \\ &= p_0\sqrt{1 + \frac{2K_0}{p_0 v_0}\delta + \left(\frac{K_0}{p_0 c}\right)^2\delta^2} \\ &\simeq p_0\left(1 + \frac{K_0}{p_0 v_0}\delta\right) \end{aligned} \tag{4.4}$$

und daraus mit (4.3)

$$p_{\mathrm{l}}(\delta) \simeq p_0\left(1 + \frac{K_0}{p_0 v_0}\delta\right)\,. \tag{4.5}$$

Außerdem gilt exakt

$$m\gamma = m\gamma_0 + \frac{K_0}{c^2}\delta\,. \tag{4.6}$$

Mit den gewonnenen Ergebnissen (4.5) und (4.6) läßt sich nun auch $v_{\mathrm{l}} = \frac{p_{\mathrm{l}}}{m\gamma}$ linearisieren,

$$\begin{aligned} v_{\mathrm{l}}(\delta) &\simeq \frac{p_0}{m\gamma_0}\frac{\left(1 + \frac{K_0}{p_0 v_0}\delta\right)}{\left(1 + \frac{K_0}{K_0 + mc^2}\delta\right)} \\ &\simeq v_0\left(1 + \frac{K_0(mc^2)^2}{(K_0 + mc^2)(p_0 c)^2}\delta\right)\,. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Die Taylorentwicklung des stationären elektromagnetischen Feldes um die Referenzkurve ergibt

$$\vec{B} \simeq \vec{B}(0,0,l) + \partial_{\mathrm{x}}\vec{B}\,(0,0,l)\; x + \partial_{\mathrm{y}}\vec{B}\,(0,0,l)\; y\,, \tag{4.8}$$

$$\vec{E} \simeq \vec{E}(0,0,l) + \partial_{\mathrm{x}}\vec{E}\,(0,0,l)\; x + \partial_{\mathrm{y}}\vec{E}\,(0,0,l)\; y\,. \tag{4.9}$$

Durch Einsetzen von (2.16) und (4.5) bis (4.9) in die Bewegungsgleichungen (2.28)-(2.33) und unter Verwendung der Entwicklung $\frac{1}{1+x} \simeq 1 - x\,, x \ll 1$ folgen die linearisierten Bewegungsgleichungen (4.1) durch einfaches Sortieren nach der 1. Ordnung.
Bisher wurden an die linearisierten Bewegungsgleichungen keine Bedingungen hinsichtlich ihrer Referenzkurve gestellt. Wählt man als Referenzkurve die Bahn des Referenzteilchens, verschwindet die 0. Ordnung der Taylorentwicklung, wie in Abschnitt 3 formal gezeigt wurde. Tatsächlich sind die C_i (4.2) nun Null: Aufgrund der Gleichungen (2.44) und (2.45) verschwinden C_a und C_b und wegen

$$h_0 = 1\,, p_{0_l} = p_0\,, v_{0_l} = v_0 \text{ und } \varepsilon_0 = E_{\mathrm{l0}} \tag{4.10}$$

sind C_τ und C_δ identisch Null. Mit (2.44), (2.45) und (4.10) lauten die linearisierten Bewegungsgleichungen (4.1)

$$x' = a\,,$$

$$a' = \Big[-\Big(\frac{q}{p_0 v_0}\Big)^2 \Big(v_0 B_{\mathrm{y0}} + E_{\mathrm{x0}}\Big)^2 + \frac{q}{p_0 v_0}\Big(- v_0 \partial_{\mathrm{x}} B_{\mathrm{y0}} + \partial_{\mathrm{x}} E_{\mathrm{x0}}\Big)\Big]\, x - \frac{q}{p_0 v_0} E_{\mathrm{l0}}\, a + \Big[\Big(\frac{q}{p_0 v_0}\Big)^2 \Big(v_0 B_{\mathrm{x0}} + E_{\mathrm{y0}}\Big)\Big(v_0 B_{\mathrm{y0}} - E_{\mathrm{x0}}\Big) + \frac{q}{p_0 v_0}\Big(- v_0 \partial_{\mathrm{y}} B_{\mathrm{y0}} + \partial_{\mathrm{y}} E_{\mathrm{x0}}\Big)\Big]\, y + \frac{q}{p_0} B_{\mathrm{l0}}\, b - q\frac{K_0}{(p_0 v_0)^2}\Big[- v_0 B_{\mathrm{y0}} + E_{\mathrm{x0}}\Big(2 - (\frac{v_0}{c})^2\Big)\Big]\, \delta\,,$$

$$y' = b\,,$$

$$b' = \Big[\Big(\frac{q}{p_0 v_0}\Big)^2 \Big(v_0 B_{\mathrm{x0}} + E_{\mathrm{y0}}\Big)\Big(v_0 B_{\mathrm{y0}} - E_{\mathrm{x0}}\Big) + \frac{q}{p_0 v_0}\Big(v_0 \partial_{\mathrm{x}} B_{\mathrm{x0}} + \partial_{\mathrm{x}} E_{\mathrm{y0}}\Big)\Big]\, x - \frac{q}{p_0} B_{\mathrm{l0}}\, a + \Big[-\Big(\frac{q}{p_0 v_0}\Big)^2 \Big(v_0 B_{\mathrm{x0}} + E_{\mathrm{y0}}\Big)^2 + \frac{q}{p_0 v_0}\Big(v_0 \partial_{\mathrm{y}} B_{\mathrm{x0}} + \partial_{\mathrm{y}} E_{\mathrm{y0}}\Big)\Big]\, y - \frac{q}{p_0 v_0} E_{\mathrm{l0}}\, b - q\frac{K_0}{(p_0 v_0)^2}\Big[v_0 B_{\mathrm{x0}} + E_{\mathrm{y0}}\Big(2 - (\frac{v_0}{c})^2\Big)\Big]\, \delta\,,$$

$$\tau' = q\frac{K_0}{(p_0 v_0)^2}\Big(- v_0 B_{\mathrm{y0}} + E_{\mathrm{x0}}\Big)\, x + q\frac{K_0}{(p_0 v_0)^2}\Big(v_0 B_{\mathrm{x0}} + E_{\mathrm{y0}}\Big)\, y + q\frac{mc^2}{(p_0 c)^2} E_{\mathrm{l0}}\, \tau + \frac{(K_0 mc^2)^2}{(p_0 c)^4}\, \delta\,,$$

$$\delta' = \Big[-\frac{q^2}{v_0 p_0 K_0} E_{\mathrm{l0}}\Big(- v_0 B_{\mathrm{y0}} + E_{\mathrm{x0}}\Big) + \frac{q}{K_0}\partial_{\mathrm{x}} E_{\mathrm{l0}}\Big]\, x + \frac{q}{K_0} E_{\mathrm{x0}}\, a +$$

$$+\left[-\frac{q^2}{v_0 p_0 K_0} E_{\mathrm{l0}}\Big(v_0 B_{\mathrm{x0}} + E_{\mathrm{y0}}\Big) + \frac{q}{K_0}\partial_{\mathrm{y}} E_{\mathrm{l0}}\right] y + \frac{q}{K_0} E_{\mathrm{y0}}\, b - \frac{q}{K_0} E_{\mathrm{l0}}\,\delta\,. \quad (4.11)$$

4.2 Integration der linearisierten Bewegungsgleichungen

Im Folgenden werden nun für die Drift, den Quadrupol, den keilförmigen Dipol, die Kombination von Quadrupol und Dipol sowie den dejustierten Quadrupol und den Sextupol die Bewegungsgleichungen 1. Ordnung in der „Sharp cut-off fringe field“ (SCOFF) - Näherung integriert. In dieser sogenannten „Kastenfeldnäherung“ enden die elektromagnetischen Felder abrupt. Da sich aus der Lösung für die Kombination von Dipol und Quadrupol diejenigen für Drift, Quadrupol und Dipol sofort ablesen lassen, werden die Ergebnisse für diese drei ohne Herleitung angegeben.

4.2.1 Drift

Die 1. Ordnung der Bewegung im feldfreien Raum gehorcht der Gleichung

$$\vec{z} = \underline{\mathrm{M}}_{\mathrm{Drift}}\,\vec{z}_{\mathrm{i}} \qquad \text{mit} \quad (4.12)$$

$$\underline{\mathrm{M}}_{\mathrm{Drift}} = \begin{pmatrix} 1 & l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{l}{(\gamma_0+1)^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.13)$$

4.2.2 Quadrupol

Im exakt justierten (ebenen) Quadrupol wirkt auf das Referenzteilchen keine Kraft. Das Magnetfeld des Quadrupols lautet

$$\vec{B}_{\mathrm{Quadr}}(x,y,l) = \omega_1^2 \frac{p_0}{q}\,(y\vec{e}_{\mathrm{x}} + x\vec{e}_{\mathrm{y}}) \quad (4.14)$$

mit $\omega_1 = \sqrt{k_q}$ als Quadrupolstärke. Die Quadrupolstärke k_q wird im Rahmen dieser Diplomarbeit immer als positive Größe angenommen. Die 1. Ordnung der Bewegung berechnet sich dann zu

$$\vec{z} = \underline{\mathrm{M}}_{\mathrm{Quadr}}\,\vec{z}_{\mathrm{i}} \quad (4.15)$$

mit der Matrix $\underline{\mathrm{M}}_{\mathrm{Quadr}}$

$$\underline{\mathrm{M}}_{\mathrm{Quadr}} =$$

$$\begin{pmatrix} \cos\omega_1 l & \frac{1}{\omega_1}\sin\omega_1 l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\omega_1\sin\omega_1 l & \cos\omega_1 l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cosh\omega_1 l & \frac{1}{\omega_1}\sinh\omega_1 l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_1\sinh\omega_1 l & \cosh\omega_1 l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{l}{(\gamma_0+1)^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \qquad (4.16)$$

4.2.3 Keilförmiger Dipol

Der (ebene) Dipol ist exakt justiert, wenn das Referenzteilchen eine Kreisbahn in der Schmiegeebene, die durch den Tangential- und den Normalenvektor gebildet wird, durchläuft. Das Dipolfeld lautet dann

$$\vec{B}_{\mathrm{Dip}}(x,y,l) = B\vec{e}_{\mathrm{y}} = \frac{p_0\phi}{q l_{\mathrm{ges}}}\vec{e}_{\mathrm{y}} \qquad (4.17)$$

mit l_{ges} als Weglänge des Referenzteilchens im Dipol und ϕ als Keilwinkel.

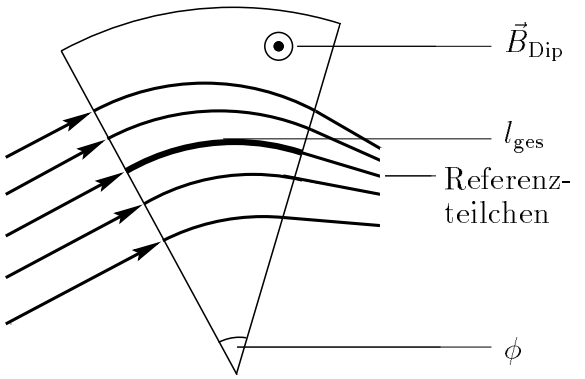

Abbildung 4.1: Der keilförmige Dipol

Denn betrachtet man in *karthesischen* Koordinaten $\vec{e}_{\mathrm{x}}, \vec{e}_{\mathrm{y}}, \vec{e}_{\mathrm{z}}$ das Dipolfeld $\vec{B} = B\vec{e}_{\mathrm{z}}$, dann ergibt die Bewegungsgleichung (2.1)

$$\dot{p_{\mathrm{x}}} = \frac{qB}{m\gamma}p_{\mathrm{y}}\,, \qquad (4.18)$$

$$\dot{p_{\mathrm{y}}} = -\frac{qB}{m\gamma}p_{\mathrm{x}}\,, \qquad (4.19)$$

$$\dot{p_{\mathrm{z}}} = 0\,,\ p_{\mathrm{z}} = p_{\mathrm{z_i}} = \mathrm{const.}\,. \qquad (4.20)$$

Durch Ableiten von (4.18) und Einsetzen von (4.19) folgt

$$\ddot{p_{\mathrm{x}}} + \left(\frac{qB}{m\gamma}\right)^2 p_{\mathrm{x}} = 0\,. \qquad (4.21)$$

Die Integration unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen $p_{\mathrm{x}}(0) = p_{\mathrm{x_i}}$ und $\dot{p_{\mathrm{x}}}(0) = \frac{qB}{m\gamma}p_{\mathrm{y_i}}$ führt zusammen mit (4.18) auf die Drehung des Anfangsimpulses $\vec{p}_{\mathrm{i}}$ um die $\vec{e}_{\mathrm{z}}$-Achse,

$$p_{\mathrm{x}} = p_{\mathrm{x_i}}\cos\left(\frac{qBt}{m\gamma}\right) + p_{\mathrm{y_i}}\sin\left(\frac{qBt}{m\gamma}\right)\,, \qquad (4.22)$$

$$p_{\mathrm{y}} \;=\; -p_{\mathrm{x_i}} \sin\left(\frac{qBt}{m\gamma}\right) + p_{\mathrm{y_i}} \cos\left(\frac{qBt}{m\gamma}\right) . \tag{4.23}$$

Der Drehwinkel des Teilchens beträgt also $\phi = \frac{qBl}{p}$, womit (4.17) gezeigt ist. Die Matrix $\underline{\mathrm{M}}_{\mathrm{Dip}}$ der linearen Bewegung lautet

$$\begin{pmatrix}
\cos\omega_2 l & \frac{1}{\omega_2}\sin\omega_2 l & 0 & 0 & 0 & \frac{2K_0}{p_0 v_0}\frac{1}{\omega_2}\sin^2\frac{\omega_2 l}{2} \\
-\omega_2 \sin\omega_2 l & \cos\omega_2 l & 0 & 0 & 0 & \frac{K_0}{p_0 v_0}\sin\omega_2 l \\
0 & 0 & 1 & l & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
-\frac{K_0}{p_0 v_0}\sin\omega_2 l & -\frac{2K_0}{p_0 v_0}\frac{1}{\omega_2}\sin^2\frac{\omega_2 l}{2} & 0 & 0 & 1 & \left(\frac{K_0}{p_0 c}\right)^2\left[-l + \left(\frac{c}{v_0}\right)^2\frac{1}{\omega_2}\sin\omega_2 l\right] \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix} \tag{4.24}$$

mit $\omega_2 = \frac{\phi}{l_{\mathrm{ges}}}$.

4.2.4 Kombination von Quadrupol und Dipol

Das überlagerte Magnetfeld eines Dipols und Quadrupols lautet mit (4.14) und (4.17)

$$\vec{B}_{\mathrm{Komb}} = \frac{p_0}{q}\left(\omega_1^2 y\vec{e}_{\mathrm{x}} + (\omega_2 + \omega_1^2 x)\vec{e}_{\mathrm{y}}\right) . \tag{4.25}$$

Die linearisierten Bewegungsgleichungen für dieses Magnetfeld folgen durch Einsetzen in (4.11),

$$x' = a\,, \qquad a' = -(\omega_1^2 + \omega_2^2)x + \frac{K_0}{p_0 v_0}\omega_2\delta\,, \tag{4.26}$$

$$y' = b\,, \qquad b' = \omega_1^2 y\,, \tag{4.27}$$

$$\tau' = -\frac{K_0}{p_0 v_0}\omega_2 x + \left(\frac{K_0 mc^2}{(p_0 c)^2}\right)\delta\,, \qquad \delta' = 0\,,\ \delta = \delta_{\mathrm{i}}\,. \tag{4.28}$$

Durch Ableiten von x', $x'' = a'$ und Einsetzen von a' erhält man die Differentialgleichung

$$x'' + (\omega_1^2 + \omega_2^2)x = \frac{K_0\omega_2}{p_0 v_0}\delta_{\mathrm{i}}\,. \tag{4.29}$$

In die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung

$$x = A\cos\Omega l + B\sin\Omega l + \frac{K_0}{p_0 v_0}\frac{\omega_2}{\Omega^2}\delta_{\mathrm{i}} \text{ mit } \Omega^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 \tag{4.30}$$

werden die Anfangsbedingungen

$$x(0) \;=\; x_{\mathrm{i}} = A + \frac{K_0}{p_0 v_0}\frac{\omega_2}{\Omega^2}\delta_{\mathrm{i}}\,, \tag{4.31}$$

$$x'(0) \;=\; a_{\mathrm{i}} = B\Omega \tag{4.32}$$

eingesetzt,

$$x = x_{\mathrm{i}} \cos \Omega l + \frac{a_{\mathrm{i}}}{\Omega} \sin \Omega l + \frac{2K_0}{p_0 v_0} \frac{\omega_2}{\Omega^2} \delta_{\mathrm{i}} \sin^2 \frac{\Omega l}{2} \,. \tag{4.33}$$

Aus $a = x'$ berechnet sich

$$a = -x_{\mathrm{i}} \Omega \sin \Omega l + a_{\mathrm{i}} \cos \Omega l + \frac{K_0}{p_0 v_0} \frac{\omega_2}{\Omega} \delta_{\mathrm{i}} \sin \Omega l \,. \tag{4.34}$$

Analog entkoppelt und löst man die Gleichungen (4.27),

$$y = y_{\mathrm{i}} \cosh \omega_1 l + \frac{b_{\mathrm{i}}}{\omega_1} \sinh \omega_1 l \,, \tag{4.35}$$

$$b = y_{\mathrm{i}} \omega_1 \sinh \omega_1 l + b_{\mathrm{i}} \cosh \omega_1 l \,. \tag{4.36}$$

Die Integration von τ', (4.28), unter Verwendung von (4.33) ergibt

$$\begin{aligned} \tau = & -\frac{K_0}{p_0 v_0} \frac{\omega_2}{\Omega} x_{\mathrm{i}} \sin \Omega l - \frac{2K_0}{p_0 v_0} \frac{\omega_2}{\Omega^2} a_{\mathrm{i}} \sin^2 \frac{\Omega l}{2} + \tau_{\mathrm{i}} + \Big[\Big(\frac{K_0}{p_0 v_0} \frac{\omega_2}{\Omega} \Big)^2 \Big(\frac{\sin \Omega l}{\Omega} - l \Big) + \\ & \Big(\frac{K_0 mc^2}{(p_0 c)^2} \Big)^2 l \Big] \delta_{\mathrm{i}} \,. \end{aligned} \tag{4.37}$$

Damit schreibt sich die lineare Transfermatrix $\underline{\mathrm{M}}_{\mathrm{Komb}}$ für den kombinierten Dipol-Quadrupol

$$\begin{pmatrix} \cos \Omega l & \frac{1}{\Omega} \sin \Omega l & 0 & 0 & 0 & \frac{2K_0}{p_0 v_0} \frac{\omega_2}{\Omega^2} \sin^2 \frac{\Omega l}{2} \\ -\Omega \sin \Omega l & \cos \Omega l & 0 & 0 & 0 & \frac{K_0}{p_0 v_0} \frac{\omega_2}{\Omega} \sin \Omega l \\ 0 & 0 & \cosh \omega_1 l & \frac{1}{\omega_1} \sinh \omega_1 l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_1 \sinh \omega_1 l & \cosh \omega_1 l & 0 & 0 \\ -\frac{K_0}{p_0 v_0} \frac{\omega_2}{\Omega} \sin \Omega l & -\frac{2K_0}{p_0 v_0} \frac{\omega_2}{\Omega^2} \sin^2 \frac{\Omega l}{2} & 0 & 0 & 1 & M_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{mit } M_{56} = \left(\frac{K_0}{p_0 v_0} \frac{\omega_2}{\Omega} \right)^2 \Big(-l + \frac{\sin \Omega l}{\Omega} \Big) + \Big(\frac{K_0 mc^2}{(p_0 c)^2} \Big)^2 l \,. \tag{4.38}$$

Falls $\omega_2 = 0$ und damit $\Omega = \omega_1$ ist, erhält man für den Quadrupol mit

$$M_{56} = \Big(\frac{\gamma_0 - 1}{\gamma_0^2} \Big(\frac{c}{v_0} \Big)^2 \Big)^2 l = \Big(\frac{\gamma_0 - 1}{\gamma_0^2 - 1} \Big)^2 = \frac{1}{(\gamma_0 + 1)^2} \,, \tag{4.39}$$

seine lineare Bewegung (4.16) aus (4.38).
Verschwindet andererseits ω_1, liefert (4.38) mit $\Omega = \omega_2$, dem Grenzwert

$$\lim_{\omega_1 \to 0} \frac{\sinh \omega_1 l}{\omega_1} = \lim_{\omega_1 \to 0} \frac{\omega_1 l + \frac{(\omega_1 l)^3}{3!} + \cdots}{\omega_1} = l \tag{4.40}$$

sowie

$$\begin{aligned} M_{56} &= -(\frac{K_0}{p_0 v_0})^2(1-\frac{1}{\gamma_0^2})l + \left(\frac{K_0}{p_0 v_0}\right)^2 \frac{\sin\omega_2 l}{\omega_2} \\ &= -(\frac{K_0}{p_0 c})^2 l + \left(\frac{K_0}{p_0 v_0}\right)^2 \frac{\sin\omega_2 l}{\omega_2} \end{aligned} \tag{4.41}$$

die Dipolmatrix $\underline{\mathrm{M}}_{\mathrm{Dip}}$ (s. (4.24)).
Die Matrix im feldfreien Raum ($\omega_1, \omega_2 = 0$) folgt dann z.B. aus der Quadrupolmatrix $\underline{\mathrm{M}}_{\mathrm{Quadr}}$ mit Hilfe der Grenzwerte

$$\lim_{\omega_1\to 0} \frac{\sin\omega_1 l}{\omega_1} = \lim_{\omega_1\to 0} \frac{\omega_1 l - \frac{(\omega_1 l)^3}{3!} + \cdots}{\omega_1} = l\,, \tag{4.42}$$

$$\lim_{\omega_1\to 0} \frac{\sinh\omega_1 l}{\omega_1} = \lim_{\omega_1\to 0} \frac{\omega_1 l + \frac{(\omega_1 l)^3}{3!} + \cdots}{\omega_1} = l\,. \tag{4.43}$$

4.2.5 Dejustierter Quadrupol

Ist der Quadrupol nicht exakt justiert und der Mittelpunkt des Quadrupols gegenüber der Referenzkurve verschoben, sieht das Referenzteilchen ein Dipolfeld, das relativ zum Quadrupolfeld gedreht sein kann. Um die Empfindlichkeit gegenüber Magnetfeldabweichungen zu untersuchen, benötigt man die Transfermatrix für die Kombination von Dipol und gedrehtem Quadrupol, deren Magnetfeld entsprechend (4.14) und (4.17) durch

$$\begin{aligned} \vec{B}_{\mathrm{Deju}}(x,y,l) &= \omega_1^2 \frac{p_0}{q} \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & -\sin 2\alpha & 0 \\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} + \omega_2 \frac{p_0}{q} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{p_0}{q}\Big[\big(\omega_1^2(-x\sin 2\alpha + y\cos 2\alpha)\big)\vec{e}_{\mathrm{x}} + \big(\omega_1^2(x\cos 2\alpha + y\sin 2\alpha) \\ &\quad +\omega_2\big)\vec{e}_{\mathrm{y}}\Big] \end{aligned} \tag{4.44}$$

beschrieben wird. Damit wird auch die dejustierte Kombination von Dipol und Quadrupol erfaßt. In diesem Fall sieht das Referenzteilchen ein Dipolfeld, das sich aus dem eigentlichen Dipol der Kombination sowie dem Dipolfeld des dejustierten Quadrupols zusammensetzt, und einen relativ dazu gedrehten Quadrupol. Mit Hilfe der Ergebnisse ist dann eine Analyse dejustierter Magnetfelder möglich. Wegen der Punktsymmetrie des Quadrupols führt bereits die Drehung um $\alpha = \frac{\pi}{2}$ zur Umkehrung der Feldlinien und die Drehung um $\alpha = \pi$ zum ursprüngliche Feld zurück, so daß zum einen der Faktor 2 zusätzlich im Argument der trigonometrische Funktionen benötigt wird. Damit ist auch der Winkel α auf das Intervall

$[0,\pi]$ bzw. äquivalent auf $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ beschränkt. Durch Einsetzen von (4.44) in die linearisierten Bewegungsgleichungen (4.11) ergibt sich ein Differentialgleichungssystem 1. Ordnung mit *konstanten* Koeffizienten,

$$\begin{aligned}
x' &= a\,, && (4.45)\\
a' &= -(\omega_2^2+\omega_1^2\cos 2\alpha)x+\omega_1^2 y\sin 2\alpha+\frac{K_0}{p_0 v_0}\omega_2\delta\,, && (4.46)\\
y' &= b\,, && (4.47)\\
b' &= -\omega_1^2 x\sin 2\alpha+\omega_1^2 y\cos 2\alpha\,, && (4.48)\\
\tau' &= -\omega_2\frac{K_0}{p_0 v_0}x+\Big(\frac{K_0 mc^2}{(p_0 c)^2}\Big)^2\delta\,, && (4.49)\\
\delta' &= 0\,. && (4.50)
\end{aligned}$$

Da die Variable τ bis auf ihre Ableitung nicht vorkommt, wird das sechsdimensionale System auf ein fünfdimensionales reduziert,

$$\begin{aligned}
\vec{x}' &= \underline{\mathrm{A}}\,\vec{x}\,,\vec{x}(l=0)=\vec{x}_\mathrm{i} \text{ mit} && (4.51)\\
\vec{x} &= (x,a,y,b,\delta)^T,\vec{x}_\mathrm{i}=(x_\mathrm{i},a_\mathrm{i},y_\mathrm{i},b_\mathrm{i},\delta_\mathrm{i})^T \text{ und} && (4.52)\\
\underline{\mathrm{A}} &= \begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
-(\omega_2^2+\omega_1^2\cos 2\alpha) & 0 & -\omega_1^2\sin 2\alpha & 0 & \frac{K_0}{p_0 v_0}\omega_2\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
-\omega_1^2\sin 2\alpha & 0 & \omega_1^2\cos 2\alpha & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}. && (4.53)
\end{aligned}$$

Der Lösungsansatz ähnelt dem Ansatz bei eindimensionalen Differentialgleichungen höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten,

$$\vec{x}=\vec{v}e^{\lambda l}\,, \tag{4.54}$$

wobei λ und $\vec{v}$ konstante Größen sind. Wie man durch Einsetzen in (4.51) erkennt,

$$\underline{\mathrm{A}}\,\vec{v}=\lambda\vec{v}\,, \tag{4.55}$$

sind λ und $\vec{v}$ die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $\underline{\mathrm{A}}$. Falls der Eigenwert und der Eigenvektor komplex sind,

$$\lambda_{1/2}=\alpha\pm\mathrm{i}\beta\,,\vec{v}_{1/2}=\vec{u}\pm\mathrm{i}\vec{w}\,, \tag{4.56}$$

berechnen sich die beiden Lösungen $\vec{x}_{1/2}$ zu

$$\vec{x}_{1/2}=e^{\alpha l}(\vec{u}\cos\beta l-\vec{w}\sin\beta l)\pm\mathrm{i}e^{\alpha l}(\vec{u}\sin\beta l+\vec{w}\cos\beta l)\,. \tag{4.57}$$

Aufgrund der Linearität der Matrizen und der ersten Ableitung gilt das Superpositionsprinzip: Die Addition bzw. die Subtraktion der komplexen Lösungen, verbunden mit der Multiplikation von $\frac{1}{2}$ bzw. $\frac{1}{2\mathrm{i}}$, ergibt zwei relle Lösungen,

$$\begin{aligned}
\vec{x}_1 &= e^{\alpha l}(\vec{u}\cos\beta l-\vec{w}\sin\beta l)\,, && (4.58)\\
\vec{x}_2 &= e^{\alpha l}(\vec{u}\sin\beta l+\vec{w}\cos\beta l)\,. && (4.59)
\end{aligned}$$

Analog werden aus den reellen Eigenwerten und Eigenvektoren der Form

$$\lambda_{1/2} = \pm\alpha\,, \vec{v}_{1/2} = \vec{u} \pm \vec{w} \tag{4.60}$$

die Lösungen

$$\vec{x}_{1/2} = e^{\pm\alpha l}(\vec{u} \pm \vec{w}) \tag{4.61}$$

durch Addition und Subtraktion zu

$$\vec{x}_1 = \vec{u}\cosh\alpha l + \vec{w}\sinh\alpha l\,, \tag{4.62}$$

$$\vec{x}_2 = \vec{u}\sinh\alpha l + \vec{w}\cosh\alpha l \tag{4.63}$$

umgeformt. Es werden fünf unabhängige Einzellösungen des Differentialgleichungssystems für die fünf Anfangsbedingungen und damit fünf linear unabhängige Eigenvektoren benötigt. Falls die Matrix $\underline{\mathrm{A}}$ keine fünf unabhängigen Eigenvektoren besitzt, berechnen sich die benötigten partikulären Lösungen aus den *verallgemeinerten* Eigenvektoren. Falls z.B. zu einem dreifachen Eigenwert λ nur ein Eigenvektor $\vec{v}_1$ gehört, lauten die partikulären Lösungen neben $\vec{x}_1 = e^{\lambda l}\vec{v}_1$

$$\vec{x}_2 = (\vec{v}_2 + t\vec{v}_1)\,e^{\lambda l} \text{ und} \tag{4.64}$$

$$\vec{x}_3 = \Big(\vec{v}_3 + t\vec{v}_2 + \frac{t^2}{2}\vec{v}_1\Big)e^{\lambda l} \tag{4.65}$$

mit den Gleichungen für die verallgemeinerten Eigenvektoren $\vec{v}_2$ und $\vec{v}_3$

$$\big(\underline{\mathrm{A}} - \lambda\underline{\mathrm{I}}_{5\times5}\big)\,\vec{v}_2 = \vec{v}_1\,, \tag{4.66}$$

$$\big(\underline{\mathrm{A}} - \lambda\underline{\mathrm{I}}_{5\times5}\big)\,\vec{v}_3 = \vec{v}_2\,. \tag{4.67}$$

Die Ableitung von (4.64) und (4.65) führt, wie man leicht sieht, auf die Gleichung der verallgemeinerten Eigenvektoren (4.66) und (4.67).
Gleichung (4.55) besitzt nur dann eine nichttriviale Lösung, wenn

$$\det(\underline{\mathrm{A}} - \lambda I) = 0\,,\ -\lambda\big(\lambda^4 + \omega_2^2\lambda^2 - (\omega_1^4 + (\omega_1\omega_2)^2\cos 2\alpha)\big) = 0 \tag{4.68}$$

ist. Durch Substitution $\lambda^2 = u$ erhält man für die Klammer eine quadratische Gleichung

$$u^2 + \omega_2^2 u - (\omega_1^4 + (\omega_1\omega_2)^2\cos 2\alpha) = 0\,, \tag{4.69}$$

deren Lösungen

$$u_{1/2} = \frac{-\omega_2^2 \pm \sqrt{\omega_2^4 + 4(\omega_1^4 + \omega_1^2\omega_2^2\cos 2\alpha)}}{2} = \frac{-\omega_2^2 \pm \sqrt{(\omega_2^2 + 2\omega_1^2\cos 2\alpha)^2 + 4\omega_1^4\sin^2 2\alpha}}{2} \tag{4.70}$$

sind. Wie an der Umformung deutlich wird, ist der Term unter der Wurzel immer nicht negativ und somit die Wurzel reell. Mit (4.68) und (4.70) sind fünf Eigenwerte gefunden

$$\lambda_{1/2} = \pm \mathrm{i}\,\mu_1 = \pm \mathrm{i}\sqrt{\frac{\omega_2^2 + \sqrt{(\omega_2^2 + 2\omega_1^2\cos 2\alpha)^2 + 4\omega_1^4 \sin^2 2\alpha}}{2}}\,, \tag{4.71}$$

$$\lambda_{3/4} = \pm\,\mu_3 = \pm\sqrt{\frac{-\omega_2^2 + \sqrt{(\omega_2^2 + 2\omega_1^2\cos 2\alpha)^2 + 4\omega_1^4 \sin^2 2\alpha}}{2}}\,, \tag{4.72}$$

$$\lambda_5 = 0\,. \tag{4.73}$$

Betrachtet wird zunächst der Fall, daß die fünf Eigenwerte verschieden und somit die zugehörigen fünf Eigenvektoren linear unabhängig sind.
Untersucht wird das Verhalten von $\lambda_{3/4}$ anhand des Terms in der inneren Wurzel

$$\omega_2^4 + 4\omega_1^2(\omega_1^2 + \omega_2^2\cos 2\alpha)$$

1. Falls α im Intervall $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ liegt (vgl. mit Intervall auf S. 28), gilt $\cos 2\alpha \geq 0$. Folglich erhält man

   $$-\omega_2^2 + \sqrt{\omega_2^4 + 4\omega_1^2(\omega_1^2 + \omega_2^2\cos 2\alpha)} \geq 0\,,$$

   also ist $\lambda_{3/4}$ reell.

2. Falls dagegen α im Intervall $[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}]$ oder $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ liegt und somit $\cos 2\alpha$ kleiner als Null ist, muß man drei weitere Fälle unterscheiden:

   (a) Denn falls $\omega_1^2 - \omega_2^2\,|\cos 2\alpha| > 0$ und damit $|\cos 2\alpha| < \left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2$ ist, bleibt $\lambda_{3/4}$ weiterhin reell.

   (b) Wenn jedoch $|\cos 2\alpha| > \left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2$ ist, sind die Eigenwerte $\lambda_{3/4}$ rein imaginär

   $$\lambda_{3/4}^{\mathrm{ima}} = \pm \mathrm{i}\,\mu_3^{\mathrm{ima}} = \pm \mathrm{i}\sqrt{\frac{\omega_2^2 - \sqrt{(\omega_2^2 + 2\omega_1^2\cos 2\alpha)^2 + 4\omega_1^4 \sin^2 2\alpha}}{2}}\,. \tag{4.74}$$

   (c) Für den Fall $|\cos 2\alpha| = \left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2$ stimmen die Eigenwerte $\lambda_{3/4}$ und λ_5 überein. Auf diesen Fall wird weiter unten ausführlich eingegangen.

Die Fallunterscheidungen, die aus mathematischen Überlegungen eingeführt wurden, sind auch aus anschaulichen Gründen notwendig: Falls das Dipolfeld verschwände, würde ein Drehwinkel größer als $\frac{\pi}{4}$ die räumlichen Bereiche mit fokussierender und defokussierender Wirkung vertauschen. Das zusätzliche Dipolfeld

bewirkt aufgrund seines keilförmigen Aufbaus eine Fokussierung der Teilchen in $\vec{e}_{\mathrm{x}}$-Richtung hin zur Referenzkurve (s. Abb. 4.1). Für Drehwinkel größer als $\frac{\pi}{4}$, für die der Quadrupol in $\vec{e}_{\mathrm{x}}$ - Richtung defokussiert und der Dipol in der gleichen Richtung fokussiert, hängt das Verhalten vom Drehwinkel und den Stärken der Magnetfelder ab (s. Fallunterscheidung 2.(a), 2.(b) und 2.(c)).
Im nächsten Schritt werden die Eigenvektoren durch Lösung des Gleichungssystems

$$\left(\underline{\mathrm{A}} - \lambda_{\mathrm{i}}\,\underline{\mathrm{I}}_{5\times 5}\right)\vec{v}_{\mathrm{i}} = 0,\ \mathrm{i} = 1,\ldots,5 \tag{4.75}$$

bestimmt,

$$\begin{aligned}\vec{v}_{1/2} &= c_{1/2}\left[\vec{u}_1 \pm \mathrm{i}\vec{w}_1\right] \qquad (4.76)\\ &= c_{1/2}\left[\begin{pmatrix}\frac{(\omega_2^2+2\omega_1^2\cos 2\alpha)+\sqrt{(\omega_2^2+2\omega_1^2\cos 2\alpha)^2+4\omega_1^4\sin^2 2\alpha}}{2}\\ 0\\ \omega_1^2\sin 2\alpha\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \pm \mathrm{i}\right.\\ &\left.\begin{pmatrix}0\\ \sqrt{\frac{\omega_2^2+\sqrt{(\omega_2^2+2\omega_1^2\cos 2\alpha)^2+4\omega_1^4\sin^2 2\alpha}{2}}\,\frac{(\omega_2^2+2\omega_1^2\cos 2\alpha)+\sqrt{(\omega_2^2+2\omega_1^2\cos 2\alpha)^2+4\omega_1^4\sin^2 2\alpha}}{2}}\\ 0\\ \omega_1^2\sin 2\alpha\sqrt{\frac{\omega_2^2+\sqrt{(\omega_2^2+2\omega_1^2\cos 2\alpha)^2+4\omega_1^4\sin^2 2\alpha}}{2}}\\ 0\end{pmatrix}\right]. \qquad (4.77)\end{aligned}$$

Falls $\lambda_{3/4}$ reell ist, lautet der zugehörige Eigenvektor

$$\begin{aligned}\vec{v}_{3/4} &= c_{3/4}\left[\vec{u}_3 \pm \vec{w}_3\right] \qquad (4.78)\\ &= c_{3/4}\left[\begin{pmatrix}\frac{(\omega_2^2+2\omega_1^2\cos 2\alpha)-\sqrt{(\omega_2^2+2\omega_1^2\cos 2\alpha)^2+4\omega_1^4\sin^2 2\alpha}}{2}\\ 0\\ \omega_1^2\sin 2\alpha\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \pm\right.\\ &\left.\begin{pmatrix}0\\ \sqrt{\frac{-\omega_2^2+\sqrt{(\omega_2^2+2\omega_1^2\cos 2\alpha)^2+4\omega_1^4\sin^2 2\alpha}{2}}\,\frac{(\omega_2^2+2\omega_1^2\cos 2\alpha)-\sqrt{(\omega_2^2+2\omega_1^2\cos 2\alpha)^2+4\omega_1^4\sin^2 2\alpha}}{2}}\\ 0\\ \omega_1^2\sin 2\alpha\sqrt{\frac{-\omega_2^2+\sqrt{(\omega_2^2+2\omega_1^2\cos 2\alpha)^2+4\omega_1^4\sin^2 2\alpha}}{2}}\\ 0\end{pmatrix}\right]. \qquad (4.79)\end{aligned}$$

Ist $\lambda_{3/4}$ dagegen rein imaginär, gilt für den Eigenvektor $\vec{v}_{3/4}^{\,\mathrm{ima}}$

$$\begin{aligned}
\vec{v}_{3/4}^{\,\mathrm{ima}} &= c_{3/4}^{\mathrm{ima}}\left[\vec{u}_3 \pm \vec{w}_3^{\mathrm{ima}}\right] \\
&= c_{3/4}^{\mathrm{ima}}\left[\begin{pmatrix} \frac{(\omega_2^2+2\omega_1^2\cos 2\alpha)-\sqrt{(\omega_2^2+2\omega_1^2\cos 2\alpha)^2+4\omega_1^4\sin^2 2\alpha}}{2} \\ 0 \\ \omega_1^2\sin 2\alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \pm \mathrm{i}\right. \\
&\left.\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{\frac{\omega_2^2-\sqrt{(\omega_2^2+2\omega_1^2\cos 2\alpha)^2+4\omega_1^4\sin^2 2\alpha}}{2}}\,\frac{(\omega_2^2+2\omega_1^2\cos 2\alpha)-\sqrt{(\omega_2^2+2\omega_1^2\cos 2\alpha)^2+4\omega_1^4\sin^2 2\alpha}}{2} \\ 0 \\ \omega_1^2\sin 2\alpha\sqrt{\frac{\omega_2^2-\sqrt{(\omega_2^2+2\omega_1^2\cos 2\alpha)^2+4\omega_1^4\sin^2 2\alpha}}{2}} \\ 0 \end{pmatrix}\right],
\end{aligned} \tag{4.80}$$

$$\vec{v}_5 = c_5\begin{pmatrix} \omega_2\frac{K_0}{p_0 v_0}\cos 2\alpha \\ 0 \\ \omega_2\frac{K_0}{p_0 v_0}\sin 2\alpha \\ 0 \\ \omega_1^2+\omega_2^2\cos 2\alpha \end{pmatrix}. \tag{4.81}$$

Für reelle Eigenwerte $\lambda_{3/4}$ setzt sich die allgemeine Lösung entsprechend (4.58), (4.59), (4.62) und (4.63) aus einer Linearkombination von fünf Einzellösungen zusammen,

$$\begin{aligned}
\vec{x} &= A\left(\vec{u}_1\cos\mu_1 l - \vec{w}_1\sin\mu_1 l\right) + B\left(\vec{u}_1\sin\mu_1 l + \vec{w}_1\cos\mu_1 l\right) + C\left(\vec{u}_3\cosh\mu_3 l\right. \\
&\left. + \vec{w}_3\sinh\mu_3 l\right) + D\left(\vec{u}_3\sinh\mu_3 l + \vec{w}_3\cosh\mu_3 l\right) + E\vec{v}_5\,.
\end{aligned} \tag{4.82}$$

Die Koeffizienten A, B, C, D, E berechnen sich aus der Anfangsbedingung (4.51). Bezeichnet man zur vereinfachenden Darstellung den i-ten Zeileneintrag der Vektoren $\vec{u}_\mathrm{j}$ und $\vec{w}_\mathrm{j}$ als u_{ij} und w_{ij}, lautet das Gleichungssystem der Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned}
x_\mathrm{i} &= Au_{11} + Cu_{13} + Ev_{15}\,, \\
a_\mathrm{i} &= Bw_{21} + Dw_{23}\,, \\
y_\mathrm{i} &= Au_{31} + Cu_{33} + Ev_{35}\,, \\
b_\mathrm{i} &= Bw_{41} + Dw_{43}\,, \\
\delta_\mathrm{i} &= Ev_{55}\,.
\end{aligned} \tag{4.83}$$

Die Lösung

$$A = \frac{u_{33}}{u_{11}u_{33}-u_{31}u_{13}}x_\mathrm{i} - \frac{u_{13}}{u_{11}u_{33}-u_{31}u_{13}}y_\mathrm{i} - \frac{1}{v_{55}}\frac{v_{15}u_{33}-v_{35}u_{13}}{u_{11}u_{33}-u_{31}u_{13}}\delta_\mathrm{i}\,,$$

$$
\begin{aligned}
B &= \frac{w_{43}}{w_{21}w_{43}-w_{41}w_{23}}a_\mathrm{i} - \frac{w_{23}}{w_{21}w_{43}-w_{41}w_{23}}b_\mathrm{i}\,,\\
C &= -\frac{u_{31}}{u_{11}u_{33}-u_{31}u_{13}}x_\mathrm{i} + \frac{u_{11}}{u_{11}u_{33}-u_{31}u_{13}}y_\mathrm{i} + \frac{1}{v_{55}}\frac{v_{15}u_{31}-v_{35}u_{11}}{u_{11}u_{33}-u_{31}u_{13}}\delta_\mathrm{i}\,,\\
D &= -\frac{w_{41}}{w_{21}w_{43}-w_{41}w_{23}}a_\mathrm{i} + \frac{w_{21}}{w_{21}w_{43}-w_{41}w_{23}}b_\mathrm{i}\,,\\
E &= \frac{1}{v_{55}}\delta_\mathrm{i}
\end{aligned}
\tag{4.84}
$$

wird in (4.82) eingesetzt, und $\vec{x}$ nach den fünf Anfangskoordinaten $x_\mathrm{i}, a_\mathrm{i}, y_\mathrm{i}, b_\mathrm{i}, \delta_\mathrm{i}$ sortiert. Anschließend werden die Vektoren $\vec{u}_\mathrm{i}, \vec{v}_\mathrm{i}, \vec{w}_\mathrm{i}$ eingesetzt, und der erhaltene Ausdruck vereinfacht. Integriert man mit Hilfe der nun gewonnenen Ergebnisse für x und δ (4.49) unter Berücksichtigung der Anfangsbedingung $\tau(l=0)=\tau_\mathrm{i}$, erhält man zusammen mit obigem Ergebnis $\vec{x}$ die linearisierte Bewegung des dejustierten Quadrupols für den Fall

$$
\alpha\epsilon[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}] \text{ oder } |\alpha|\,\epsilon[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}] \wedge |\cos 2\alpha| < \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} = k_q\left(\frac{l_\mathrm{ges}}{\phi}\right)^2 \tag{4.85}
$$

$$
\vec{z} = \underline{\mathrm{M}}_\mathrm{deju}\vec{z}_\mathrm{i} \text{ mit} \tag{4.86}
$$

$$
\underline{\mathrm{M}}_\mathrm{deju} = \begin{pmatrix}
M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} & 0 & M_{16}\\
M_{21} & M_{11} & M_{23} & M_{13} & 0 & M_{26}\\
M_{13} & M_{14} & M_{33} & M_{34} & 0 & M_{36}\\
M_{23} & M_{13} & M_{43} & M_{33} & 0 & \frac{K_0}{p_0 v_0}\omega_2 M_{14}\\
-\frac{K_0}{p_0 v_0}\omega_2 M_{12} & M_{52} & -\frac{K_0}{p_0 v_0}\omega_2 M_{14} & M_{54} & 1 & M_{56}\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}. \tag{4.87}
$$

Zur einfacheren Darstellung der Matrixelemente werden häufig vorkommende Ausdrücke sowie trigonometrische Funktionen wie folgt ersetzt

$$
\begin{aligned}
\xi &= \sqrt{(\omega_2^2+2\omega_1^2\cos 2\alpha)^2 + 4\omega_1^4\sin^2 2\alpha}\,,\\
\mu_1 &= \sqrt{\frac{\omega_2^2+\xi}{2}}\,, & \mu_3 &= \sqrt{\frac{-\omega_2^2+\xi}{2}}\,, & \mu_3^\mathrm{ima} &= \sqrt{\frac{\omega_2^2-\xi}{2}}\,,\\
\mathsf{m} &= \mu_1 l\,, & \mathsf{p} &= \mu_3 l\,, & \mathsf{q} &= \mu_3^\mathrm{ima} l\,,\\
\mathsf{r} &= \frac{\left(\mu_1+\mu_3^\mathrm{ima}\right)l}{2}\,, & \mathsf{t} &= \frac{\left(\mu_1-\mu_3^\mathrm{ima}\right)l}{2}\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sin\mathsf{m} &= \mathsf{sm}\,, & \sin\frac{\mathsf{m}}{2} &= \mathsf{smh}\,, & \cos\mathsf{m} &= \mathsf{cm}\,,\\
\sinh\mathsf{p} &= \mathsf{shp}\,, & \sinh\frac{\mathsf{p}}{2} &= \mathsf{shph}\,, & \cosh\mathsf{p} &= \mathsf{chp}\,,\\
\sin\mathsf{q} &= \mathsf{sq}\,, & \sin\frac{\mathsf{q}}{2} &= \mathsf{sqh}\,, & \cos\mathsf{q} &= \mathsf{cq}\,,\\
\sin\mathsf{r} &= \mathsf{sr}\,, & \cos\mathsf{r} &= \mathsf{cr}\,,\\
\sin\mathsf{t} &= \mathsf{st}\,, & \cos\mathsf{t} &= \mathsf{ct}\,,
\end{aligned}
$$

$$\mathsf{F} = \frac{\omega_2^2 + 2\omega_1^2 \cos 2\alpha}{\xi}\,, \qquad \mathsf{G} = \frac{\omega_1^2 \sin 2\alpha}{\xi}\,, \qquad \mathsf{H} = \frac{\omega_2}{\omega_1^2 + \omega_2^2 \cos 2\alpha}\,,$$
$$\mathsf{I} = \frac{2\omega_1^2 + \omega_2^2 \cos 2\alpha}{\xi}\,, \qquad \mathsf{J} = \frac{K_0}{p_0 v_0}\,. \tag{4.88}$$

Damit lauten die Matrixelemente

$$\begin{aligned}
M_{11} &= \frac{1}{2}\left[(1+\mathsf{F})\,\mathsf{cm} + (1-\mathsf{F})\,\mathsf{chp}\right], \\
M_{12} &= \frac{1}{2}\left[(1+\mathsf{F})\,\frac{\mathsf{sm}}{\mu_1} + (1-\mathsf{F})\,\frac{\mathsf{shp}}{\mu_3}\right], \\
M_{13} &= \mathsf{G}\left[\mathsf{cm} - \mathsf{chp}\right], \\
M_{14} &= \mathsf{G}\left[\frac{\mathsf{sm}}{\mu_1} - \frac{\mathsf{shp}}{\mu_3}\right], \\
M_{16} &= \frac{\mathsf{JH}}{2}\left[\cos 2\alpha\,(2 - \mathsf{cm} - \mathsf{chp}) - \mathsf{I}\,(\mathsf{cm} - \mathsf{chp})\right], \\
M_{21} &= \frac{1}{2}\left[-(1+\mathsf{F})\,\mu_1\,\mathsf{sm} + (1-\mathsf{F})\,\mu_3\,\mathsf{shp}\right], \\
M_{23} &= -\mathsf{G}\left[\mu_1\,\mathsf{sm} + \mu_3\,\mathsf{shp}\right], \\
M_{26} &= \frac{\mathsf{JH}}{2}\left[(\mathsf{I} + \cos 2\alpha)\,\mu_1\,\mathsf{sm} + (\mathsf{I} - \cos 2\alpha)\,\mu_3\,\mathsf{shp}\right], \\
M_{33} &= \frac{1}{2}\left[(1-\mathsf{F})\,\mathsf{cm} + (1+\mathsf{F})\,\mathsf{chp}\right], \\
M_{34} &= \frac{1}{2}\left[(1-\mathsf{F})\,\frac{\mathsf{sm}}{\mu_1} + (1+\mathsf{F})\,\frac{\mathsf{shp}}{\mu_3}\right], \\
M_{36} &= \mathsf{JH}\sin 2\alpha\left[\mathsf{smh}^{\,2} + \frac{\omega_2^2}{2\xi}\,(\mathsf{cm} - \mathsf{chp}) - \mathsf{shph}^{\,2}\right], \\
M_{43} &= \frac{1}{2}\left[-(1-\mathsf{F})\,\mu_1\,\mathsf{sm} + (1+\mathsf{F})\,\mu_3\,\mathsf{shp}\right], \\
M_{52} &= -\omega_2\mathsf{J}\left[(1+\mathsf{F})\,\frac{\mathsf{smh}^{\,2}}{\mu_1^2} + (1-\mathsf{F})\,\frac{\mathsf{shph}^{\,2}}{\mu_3^2}\right], \\
M_{54} &= -2\omega_2\mathsf{JG}\left[\frac{\mathsf{smh}^{\,2}}{\mu_1^2} - \frac{\mathsf{shph}^{\,2}}{\mu_3^2}\right], \\
M_{56} &= \frac{1}{2}\mathsf{J}^2\mathsf{H}\left[\frac{\omega_2}{\mu_1}\,(\mathsf{I} + \cos 2\alpha)\;\mathsf{sm} - \frac{\omega_2}{\mu_3}\,(\mathsf{I} - \cos 2\alpha)\;\mathsf{shp}\right] + \\
&\qquad \left[-\mathsf{J}^2\mathsf{H}\omega_2 \cos 2\alpha + \left(\frac{K_0 mc^2}{(p_0 c)^2}\right)^2\right] l\,.
\end{aligned} \tag{4.89}$$

Im zweiten Fall, für komplexe Eigenwerte $\lambda_{3/4}^{\mathrm{ima}}$ und Eigenvektoren $\vec{v}_{3/4}^{\,\mathrm{ima}}$, lautet der Ansatz für die allgemeine Lösung entsprechend (4.58), (4.59), (4.62) und (4.63)

$$\begin{aligned}
\vec{x} &= A\,(\vec{u}_1 \cos\mu_1 l - \vec{w}_1 \sin\mu_1 l) + B\,(\vec{u}_1 \sin\mu_1 l + \vec{w}_1 \cos\mu_1 l) + C\,(\vec{u}_3 \cos\mu_3^{\mathrm{ima}} l \\
&\quad - \vec{w}_3^{\,\mathrm{ima}} \sin\mu_3^{\mathrm{ima}} l) + D\left(\vec{u}_3 \sin\mu_3^{\mathrm{ima}} l + \vec{w}_3^{\,\mathrm{ima}} \cos\mu_3 l\right) + E\vec{v}_5\,.
\end{aligned} \tag{4.90}$$

Aus der Anfangsbedingung (4.51) ergibt sich formal das gleiche Gleichungssystem (4.83), jedoch müssen die Komponenten des Vektors $\vec{w}_3$, w_{23} und w_{43}, durch die Komponenten des Vektors $\vec{w}_3^{\,\mathrm{ima}}$, w_{23}^{ima} und w_{43}^{ima}, ersetzt werden. Bis auf diese Korrektur wird das Ergebnis für die Koeffizienten A, B, C, D, E (4.84) übernommen. Das weitere Vorgehen erfolgt analog wie im ersten Fall (s. Bemerkungen auf S. 33). Die linearisierte Bewegung, die sich auf diesem Weg für

$$|\alpha|\,\epsilon[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}] \wedge |\cos 2\alpha| > \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} = k_q \left(\frac{l_{\mathrm{ges}}}{\phi}\right)^2 \tag{4.91}$$

ergibt, wird ebenfalls durch (4.86) und (4.87) beschrieben, wobei zur Darstellung der Matrizenelemente wiederum die Abkürzungen (4.88) verwendet werden,

$$\begin{aligned}
M_{11} &= \mathsf{cr}\,\mathsf{ct} - \mathbf{F}\,\mathsf{sr}\,\mathsf{st}\ , \\
M_{12} &= \frac{1}{2}\left[(1+\mathbf{F})\,\frac{\mathsf{sm}}{\mu_1} + (1-\mathbf{F})\,\frac{\mathsf{sq}}{\mu_3^{\mathrm{ima}}}\right]\ , \\
M_{13} &= -2\mathbf{G}\,\mathsf{sr}\,\mathsf{st}\ , \\
M_{14} &= \mathbf{G}\left[\frac{\mathsf{sm}}{\mu_1} - \frac{\mathsf{sq}}{\mu_3^{\mathrm{ima}}}\right]\ , \\
M_{16} &= \mathbf{JH}\left[\cos 2\alpha\,(1-\,\mathsf{cr}\,\mathsf{ct}\,) + \mathbf{I}\,\mathsf{sr}\,\mathsf{st}\,\right]\ , \\
M_{21} &= -\frac{1}{2}\left[(1+\mathbf{F})\,\mu_1\,\mathsf{sm} + (1-\mathbf{F})\,\mu_3^{\mathrm{ima}}\,\mathsf{sq}\,\right]\ , \\
M_{23} &= \mathbf{G}\left[-\mu_1\,\mathsf{sm} + \mu_3^{\mathrm{ima}}\,\mathsf{sq}\,\right]\ , \\
M_{26} &= \frac{\mathbf{JH}}{2}\left[(\mathbf{I}+\cos 2\alpha)\,\mu_1\,\mathsf{sm} - (\mathbf{I}-\cos 2\alpha)\,\mu_3^{\mathrm{ima}}\,\mathsf{sq}\,\right]\ , \\
M_{33} &= \mathsf{cr}\,\mathsf{ct} + \mathbf{F}\,\mathsf{sr}\,\mathsf{st}\ , \\
M_{34} &= \frac{1}{2}\left[(1-\mathbf{F})\,\frac{\mathsf{sm}}{\mu_1} + (1+\mathbf{F})\,\frac{\mathsf{sq}}{\mu_3^{\mathrm{ima}}}\right]\ , \\
M_{36} &= -\mathbf{JH}\sin 2\alpha\left[-1 + \mathsf{cr}\,\mathsf{ct} + \frac{\omega_2^2}{\xi}\,\mathsf{sr}\,\mathsf{st}\right]\ , \\
M_{43} &= -\frac{1}{2}\left[(1-\mathbf{F})\,\mu_1\,\mathsf{sm} + (1+\mathbf{F})\,\mu_3^{\mathrm{ima}}\,\mathsf{sq}\,\right]\ , \\
M_{52} &= -\mathbf{J}\omega_2\left[(1+\mathbf{F})\frac{\mathsf{smh}^{\,2}}{\mu_1^2} + (1-\mathbf{F})\frac{\mathsf{sqh}^{\,2}}{(\mu_3^{\mathrm{ima}})^2}\right]\ , \\
M_{54} &= -2\omega_2\mathbf{JG}\left[\frac{\mathsf{smh}^{\,2}}{\mu_1^2} - \frac{\mathsf{sqh}^{\,2}}{(\mu_3^{\mathrm{ima}})^2}\right]\ , \\
M_{56} &= \frac{1}{2}\mathbf{J}^2\mathbf{H}\left[\frac{\omega_2}{\mu_1}\,(\mathbf{I}+\cos 2\alpha)\;\mathsf{sm} - \frac{\omega_2}{\mu_3^{\mathrm{ima}}}\,(\mathbf{I}-\cos 2\alpha)\;\mathsf{sq}\right] + \\
&\quad \left[-\omega_2\cos 2\alpha\mathbf{J}^2\mathbf{H} + \left(\frac{K_0 mc^2}{(p_0 c)^2}\right)^2\right] l\,.
\end{aligned} \tag{4.92}$$

Untersucht man die auftretenden Nenner hinsichtlich ihrer Nullstellen, stößt man auf die gleichen Bedingungen an den Drehwinkel α und die Polstärken ω_1 und ω_2, die sich auch aus der folgenden Betrachtung übereinstimmender Eigenwerte (4.71) bis (4.73) ablesen lassen,

$$\lambda_{1/2} = \lambda_{3/4}\,,\ \left(\omega_2^2 + 2\omega_1^2\cos 2\alpha\right)^2 + 4\omega_1^4\sin^2 2\alpha = 0 \tag{4.93}$$

Die Summe aus den beiden nichtnegativen Summanden verschwindet für

$$\omega_2^2 + 2\omega_1^2\cos 2\alpha = 0 \qquad \wedge \qquad \sin 2\alpha = 0\,, \tag{4.94}$$

$$\omega_2^2 = 2\omega_1^2 \qquad \wedge \qquad \alpha = \pm\frac{\pi}{2}\,. \tag{4.95}$$

Das Differentialgleichungssystem aus den Bewegungsgleichungen (4.45)-(4.50), das man für die Bedingung (4.95) erhält, ist weitgehend entkoppelt,

$$\begin{aligned}
x' &= a\,,\\
a' &= -\frac{1}{2}\omega_2^2 x + \frac{K_0}{p_0 v_0}\omega_2\delta\,,\\
y' &= b\,,\\
b' &= -\frac{1}{2}\omega_2^2 y\,,\\
\tau' &= -\omega_2\frac{K_0}{p_0 v_0}x + \left(\frac{K_0 mc^2}{(p_0 c)^2}\right)^2\delta\,,\\
\delta' &= 0\,.
\end{aligned} \tag{4.96}$$

Bei der Lösung, analog wie im Fall der Kombination von Dipol und Quadrupol (s. 4.2.4), erhält man mit $\tilde{\omega}^2 = \frac{\omega_2^2}{2}$ für die Matrix $\underline{\mathrm{M}}_{\mathrm{deju}}$ der linearen Bewegung

$$\begin{pmatrix}
\cos\tilde{\omega}l & \frac{1}{\tilde{\omega}}\sin\tilde{\omega}l & 0 & 0 & 0 & \frac{2\sqrt{2}K_0}{p_0 v_0}\frac{1}{\tilde{\omega}}\sin^2\frac{\tilde{\omega}l}{2}\\
-\tilde{\omega}\sin\tilde{\omega}l & \cos\tilde{\omega}l & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}K_0}{p_0 v_0}\sin\tilde{\omega}l\\
0 & 0 & \cos\tilde{\omega}l & \frac{1}{\tilde{\omega}}\sin\tilde{\omega}l & 0 & 0\\
0 & 0 & -\tilde{\omega}\sin\tilde{\omega}l & \cos\tilde{\omega}l & 0 & 0\\
-\frac{\sqrt{2}K_0}{p_0 v_0}\sin\tilde{\omega}l & -\frac{2\sqrt{2}K_0}{p_0 v_0}\frac{1}{\tilde{\omega}}\sin^2\frac{\tilde{\omega}l}{2} & 0 & 0 & 1 & M_{56}\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}$$

$$\text{mit } M_{56} = \left(\frac{K_0}{p_0 v_0}\right)^2\left[2\frac{\sin\tilde{\omega}l}{\tilde{\omega}} - \left(1 + \left(\frac{v_0}{c}\right)^2\right)l\right]\,. \tag{4.97}$$

Der Teilchenstrahl wird demnach in x- und y- Richtung mit gleicher Stärke fokussiert.
Der zweite Fall, der näher untersucht wird, resultiert aus der Übereinstimmung der Eigenwerte $\lambda_{3/4}$ und λ_5,

$$\lambda_{3/4} = 0 = \lambda_5,\ \cos 2\alpha = -\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2\,. \tag{4.98}$$

Daraus folgen die Forderungen

$$\omega_1 \leq \omega_2 \text{ und } |\alpha| \, \epsilon \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] . \tag{4.99}$$

Um $\sin 2\alpha$ eindeutig durch (4.98) zu ersetzen, wird eine weitere Fallunterscheidung vorgenommen,

$$\alpha \epsilon \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right], \ \sin 2\alpha = \sqrt{1 - \cos^2 2\alpha}\,, \tag{4.100}$$

$$\alpha \epsilon \left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right], \ \sin 2\alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 2\alpha}\,. \tag{4.101}$$

Für beide Fälle erhält man drei Eigenwerte und nur drei linear unabhängige Eigenvektoren, so daß das beschriebene Verfahren über die verallgemeinerten Eigenvektoren angewandt wird. Nach Bestimmung der fünf partikulären Lösungen wird das Differentialgleichungssystem analog wie im allgemeinen Fall (s. S. 32ff.) gelöst.

Für den Fall $\cos 2\alpha = -\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2, \alpha \epsilon \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ berechnet sich der lineare Anteil der Phasenraumbewegung zu

$$\underline{\mathrm{M}}_{\mathrm{deju}} = \begin{pmatrix} M^s_{11} & M^s_{12} & M^s_{13} & M^s_{14} & 0 & M^s_{16} \\ M^s_{21} & M^s_{11} & M^s_{23} & M^s_{13} & 0 & \frac{K_0}{p_0 v_0}\omega_2 M^s_{12} \\ M^s_{13} & M^s_{14} & M^s_{33} & M^s_{34} & 0 & M^s_{36} \\ M^s_{23} & M^s_{13} & M^s_{43} & M^s_{33} & 0 & \frac{K_0}{p_0 v_0}\omega_2 M^s_{14} \\ -\frac{K_0}{p_0 v_0}\omega_2 M^s_{12} & -M^s_{16} & -\frac{K_0}{p_0 v_0}\omega_2 M^s_{14} & -M^s_{36} & 1 & M^s_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \tag{4.102}$$

Für den Fall $\cos 2\alpha = -\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2, \alpha \epsilon \left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right]$ erhält man

$$\underline{\mathrm{M}}_{\mathrm{deju}} = \begin{pmatrix} M^s_{11} & M^s_{12} & -M^s_{13} & -M^s_{14} & 0 & M^s_{16} \\ M^s_{21} & M^s_{11} & -M^s_{23} & -M^s_{13} & 0 & \frac{K_0}{p_0 v_0}\omega_2 M^s_{12} \\ -M^s_{13} & -M^s_{14} & M^s_{33} & M^s_{34} & 0 & -M^s_{36} \\ -M^s_{23} & -M^s_{13} & M^s_{43} & M^s_{33} & 0 & -\frac{K_0}{p_0 v_0}\omega_2 M^s_{14} \\ -\frac{K_0}{p_0 v_0}\omega_2 M^s_{12} & -M^s_{16} & \frac{K_0}{p_0 v_0}\omega_2 M^s_{14} & M^s_{36} & 1 & M^s_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \tag{4.103}$$

Mit der Abkürzung $\omega^2_{\mathrm{red}} = \sqrt{\omega_2^4 - \omega_1^4}$ lauten die Matrixelemente

$$\begin{aligned} M^s_{11} &= \frac{\omega_1^4 + \omega^4_{\mathrm{red}} \cos \omega_2 l}{\omega_2^4}\,, \\ M^s_{12} &= \frac{\omega_1^4 \omega_2 l + \omega^4_{\mathrm{red}} \sin \omega_2 l}{\omega_2^5}\,, \\ M^s_{13} &= -\frac{2\omega_1^2 \omega^2_{\mathrm{red}} \sin^2 \frac{\omega_2 l}{2}}{\omega_2^4}\,, \\ M^s_{14} &= -\frac{\omega_1^2 \omega^2_{\mathrm{red}} \left(\omega_2 l - \sin \omega_2 l\right)}{\omega_2^5}\,, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
M^s_{16} &= \frac{K_0}{2p_0v_0}\frac{\omega_1^4\omega_2^2l^2+4\omega_{\rm red}^4\sin^2\frac{\omega_2 l}{2}}{\omega_2^5}\,,\\
M^s_{21} &= -\frac{\omega_{\rm red}^4\sin\omega_2 l}{\omega_2^3}\,,\\
M^s_{23} &= -\frac{\omega_1^2\omega_{\rm red}^2\sin\omega_2 l}{\omega_2^3}\,,\\
M^s_{33} &= \frac{\omega_{\rm red}^4+\omega_1^4\cos\omega_2 l}{\omega_2^4}\,,\\
M^s_{34} &= \frac{\omega_{\rm red}^4 l}{\omega_2^4}+\frac{\omega_1^4\sin\omega_2 l}{\omega_2^5}\,,\\
M^s_{36} &= -\frac{K_0}{2p_0v_0}\frac{\omega_1^2\omega_{\rm red}^2}{\omega_2^5}\left(\omega_2^2l^2-4\sin^2\frac{\omega_2 l}{2}\right)\,,\\
M^s_{43} &= -\frac{\omega_1^4\sin\omega_2 l}{\omega_2^3}\,,\\
M^s_{56} &= (\frac{K_0mc^2}{(p_0c)^2})^2 l-\frac{1}{6}\left(\frac{K_0}{p_0v_0}\right)^2\frac{\omega_1^4\omega_2^3l^3+6\omega_2\omega_{\rm red}^4 l-6\omega_{\rm red}^4\sin\omega_2 l}{\omega_2^5}\,.
\end{aligned}
\tag{4.104}
$$

Da die verallgemeinerten Eigenvektoren den Term $\sqrt{\omega_2^4-\omega_1^4}$ im Nenner enthalten, wird der Fall $\omega_1=\omega_2\wedge\alpha=\pm\frac{\pi}{2}$ getrennt behandelt. Die Integration der Bewegungsgleichungen (4.45)-(4.50) ergibt in diesem Fall die lineare Bewegung

$$
\underline{\rm M}_{\rm deju}=\begin{pmatrix}
1 & l & 0 & 0 & 0 & \frac{K_0}{2p_0v_0}\omega_1l^2\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{K_0}{p_0v_0}\omega_1 l\\
0 & 0 & \cos\omega_1 l & \frac{\sin\omega_1 l}{\omega_1} & 0 & 0\\
0 & 0 & -\omega_1\sin\omega_1 l & \cos\omega_1 l & 0 & 0\\
-\frac{K_0}{p_0v_0}\omega_1 l & -\frac{K_0}{2p_0v_0}\omega_1l^2 & 0 & 0 & 1 & M_{56}\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\tag{4.105}
$$

$$
\text{mit } M_{56}=(\frac{K_0mc^2}{(p_0c)^2})^2 l-\frac{1}{6}\left(\frac{K_0}{p_0v_0}\right)^2\omega_1^2l^3\,. \tag{4.106}
$$

Die Teilchenbahnen werden also in der y-Ebene fokussiert, während sich in der x-Ebene die Fokussierung des Dipols und die Defokussierung des Quadrupols aufgrund der gleichen Polstärken gerade kompensieren.

4.2.6 Sextupol

Im exakt justierten (ebenen) Sextupol wirkt auf das Referenzteilchen keine Kraft. Das Magnetfeld lautet

$$
\vec{B}_{\rm Sext}(x,y,l)=k_{\rm Sext}\left(2xy\vec{e}_{\rm x}+\left(x^2-y^2\right)\vec{e}_{\rm y}\right)\,. \tag{4.107}
$$

Da das Magnetfeld des Sextupols ausschließlich Terme 2. Ordnung in den Raumkoordinaten x und y enthält und κ_{x} und κ_{y} verschwinden, stimmt der lineare Anteil der Bewegung mit dem der Drift überein,

$$\underline{\mathrm{M}}_{\mathrm{Sext}} = \underline{\mathrm{M}}_{\mathrm{Drift}} \,. \tag{4.108}$$

Kapitel 5

Quadratische Anteile der Bewegung

Da Drift, Quadrupol, Dipol, somit auch die Kombination von Quadrupol und Dipol und der Sextupol keine Magnetfeldkomponente in $\vec{e}_l$-Richtung längs der Referenzkurve besitzen, wird die 2. Ordnung der Bewegung mit (3.27) bestimmt. Die Entwicklung der Bewegungsgleichungen (2.28)-(2.33) bis in 2. Ordnung Phasenraumkoordinaten, das Einsetzen der linearen Bewegung aus Kapitel 4 sowie die Matrizenmultiplikationen und die Integration werden mit Hilfe von *Mathematica* durchgeführt. Zur einfacheren Umrechnung werden die Größen Impuls $p_0 = m\gamma_0 v_0$ und kinetische Energie $K_0 = m\gamma_0 c^2 - mc^2$ durch γ_0 ersetzt. So lauten die häufig vorkommenden Quotienten $\frac{K_0}{p_0 v_0} = \frac{\gamma_0}{\gamma_0+1}$ und $\frac{K_0 mc^2}{(p_0 c)^2} = \frac{1}{\gamma_0+1}$. Die Ergebnisse werden in einer allgemein üblichen Form dargestellt, in der das Monom $x^{k_\mathrm{x}}\, a^{k_\mathrm{a}}\, y^{k_\mathrm{y}}\, b^{k_\mathrm{b}}\, \tau^{k_\tau}\, \delta^{k_\delta}$ durch $k_\mathrm{x} k_\mathrm{a} k_\mathrm{y} k_\mathrm{b} k_\tau k_\delta$ angegeben wird. Da sich größere Ausdrücke kaum wiederholen und der Rechengewinn durch Ersetzen der kleineren, öfter auftretenden Terme gering ist, wird bei der Darstellung der 2. Ordnung - auch aus Gründen der einheitlichen Darstellung mit der ersten- auf das Ersetzen von Termen verzichtet.

5.1 Drift

Für den feldfreien Raum lautet die 2. Ordnung der Bewegung

x	$k_\mathrm{x} k_\mathrm{a} k_\mathrm{y} k_\mathrm{b} k_\tau k_\delta$
$-\frac{\gamma_0}{\gamma_0+1} l$	010001

,

y	$k_\mathrm{x} k_\mathrm{a} k_\mathrm{y} k_\mathrm{b} k_\tau k_\delta$
$-\frac{\gamma_0}{\gamma_0+1} l$	000101

,

τ	$k_{\mathrm{x}}k_{\mathrm{a}}k_{\mathrm{y}}k_{\mathrm{b}}k_\tau k_\delta$
$-\frac{\gamma_0}{2(\gamma_0+1)}l$	020000
$-\frac{\gamma_0}{2(\gamma_0+1)}l$	000200
$-\frac{3}{2}\frac{\gamma_0}{(\gamma_0+1)^3}l$	000002

. (5.1)

5.2 Quadrupol

Für die 2. Ordnung des Quadrupols erhält man

x	$k_{\mathrm{x}}k_{\mathrm{a}}k_{\mathrm{y}}k_{\mathrm{b}}k_\tau k_\delta$
$\frac{\gamma_0}{2(\gamma_0+1)}l\omega_1 \sin\omega_1 l$	100001
$-\frac{\gamma_0}{2\omega_1(\gamma_0+1)}(\omega_1 l\cos\omega_1 l+\sin\omega_1 l)$	010001

,

a	$k_{\mathrm{x}}k_{\mathrm{a}}k_{\mathrm{y}}k_{\mathrm{b}}k_\tau k_\delta$
$\frac{\gamma_0}{2(\gamma_0+1)}\omega_1(\omega_1 l\cos\omega_1 l-\sin\omega_1 l)$	100001
$\frac{\gamma_0}{2(\gamma_0+1)}l\omega_1 \sin\omega_1 l$	010001

,

y	$k_{\mathrm{x}}k_{\mathrm{a}}k_{\mathrm{y}}k_{\mathrm{b}}k_\tau k_\delta$
$-\frac{\gamma_0}{2(\gamma_0+1)}l\omega_1 \sinh\omega_1 l$	001001
$-\frac{\gamma_0}{2(\gamma_0+1)\omega_1}(\omega_1 l\cosh\omega_1 l+\sinh\omega_1 l)$	000101

,

b	$k_{\mathrm{x}}k_{\mathrm{a}}k_{\mathrm{y}}k_{\mathrm{b}}k_\tau k_\delta$
$\frac{\gamma_0}{2(\gamma_0+1)}\omega_1(-\omega_1 l\cosh\omega_1 l+\sinh\omega_1 l)$	001001
$-\frac{\gamma_0}{2(\gamma_0+1)}l\omega_1 \sinh\omega_1 l$	000101

,

τ	$k_{\mathrm{x}}k_{\mathrm{a}}k_{\mathrm{y}}k_{\mathrm{b}}k_\tau$
$\frac{\gamma_0}{8(\gamma_0+1)}\omega_1(-2\omega_1 l+\sin 2\omega_1 l)$	200000
$\frac{\gamma_0}{2(\gamma_0+1)}\sin^2\omega_1 l$	110000
$-\frac{\gamma_0}{8(\gamma_0+1)\omega_1}(2\omega_1 l+\sin 2\omega_1 l)$	020000

,

τ	$k_{\mathrm{x}}k_{\mathrm{a}}k_{\mathrm{y}}k_{\mathrm{b}}k_\tau$
$\frac{\gamma_0}{8(\gamma_0+1)}\omega_1(2\omega_1 l - \sinh 2\omega_1 l)$	002000
$-\frac{\gamma_0}{2(\gamma_0+1)}\sinh^2\omega_1 l$	001100
$-\frac{\gamma_0}{8(\gamma_0+1)\omega_1}(2\omega_1 l + \sinh 2\omega_1 l)$	000200
$-\frac{3}{2}\frac{\gamma_0}{(\gamma_0+1)^3}l$	000002

.

(5.2)

5.3 Dipol

Für den Dipol lautet die 2. Ordnung der Bewegung

x	$k_{\mathrm{x}}k_{\mathrm{a}}k_{\mathrm{y}}k_{\mathrm{b}}k_\tau k_\delta$
$-\frac{1}{2}\omega_2\sin^2\omega_2 l$	200000
$\frac{1}{2}\sin 2\omega_2 l$	110000
$\frac{1}{\omega_2}\cos\omega_2 l\sin^2\frac{\omega_2 l}{2}$	020000
$-\frac{1}{\omega_2}\sin^2\frac{\omega_2 l}{2}$	000200
$\frac{\gamma_0}{\gamma_0+1}\sin^2\omega_2 l$	100001
$-\frac{1}{2\omega_2}\frac{\gamma_0}{\gamma_0+1}\sin 2\omega_2 l$	010001
$-\frac{1+2\gamma_0^2\cos^2\frac{\omega_2 l}{2}}{\omega_2(1+\gamma_0)^2}\sin^2\frac{\omega_2 l}{2}$	000002

,

a	$k_{\mathrm{x}}k_{\mathrm{a}}k_{\mathrm{y}}k_{\mathrm{b}}k_\tau k_\delta$
$-\frac{1}{2}\sin\omega_2 l$	020000
$-\frac{1}{2}\sin\omega_2 l$	000200
$-\frac{1}{2(\gamma_0+1)^2}\sin\omega_2 l$	000002

,

y	$k_{\mathrm{x}}k_{\mathrm{a}}k_{\mathrm{y}}k_{\mathrm{b}}k_\tau k_\delta$
$\sin\omega_2 l$	100100
$\frac{2}{\omega_2}\sin^2\frac{\omega_2 l}{2}$	010100

,

y	$k_{\mathrm{x}}k_{\mathrm{a}}k_{\mathrm{y}}k_{\mathrm{b}}k_\tau k_\delta$
$-\frac{1}{\omega_2}\frac{\gamma_0}{\gamma_0+1}\sin\omega_2 l$	000101

,

τ	$k_{\mathrm{x}}k_{\mathrm{a}}k_{\mathrm{y}}k_{\mathrm{b}}k_\tau k_\delta$
$-\frac{1}{2\omega_2}\frac{\gamma_0}{\gamma_0+1}\sin\omega_2 l$	020000
$-\frac{1}{2\omega_2}\frac{\gamma_0}{\gamma_0+1}\sin\omega_2 l$	000200
$\frac{1}{(1+\gamma_0)^2}\sin\omega_2 l$	100001
$\frac{2}{\omega_2(1+\gamma_0)^2}\sin^2\frac{\omega_2 l}{2}$	010001
$-\frac{3}{2\omega_2}\frac{\gamma_0}{(1+\gamma_0)^3}\sin\omega_2 l$	000002

.

(5.3)

5.4 Kombination von Quadrupol und Dipol

Die Berechnung der zweiten Ordnung für die Kombination von Quadrupol und Dipol liefert

x	$k_{\mathrm{x}}k_{\mathrm{a}}k_{\mathrm{y}}k_{\mathrm{b}}k_\tau k_\delta$
$-\frac{\omega_2(7\omega_1^2+3\omega_2^2+(5\omega_1^2+3\omega_2^2)\cos\Omega l)}{3\Omega^2}\sin^2\frac{\Omega l}{2}$	200000
$\frac{\omega_2}{3\Omega^3}(-2\omega_1^2+(5\omega_1^2+3\omega_2^2)\cos\Omega l)\sin\Omega l$	110000
$\frac{\omega_2}{3\Omega^4}(-2\omega_1^2+(5\omega_1^2+3\omega_2^2)\cos\Omega l)\sin^2\frac{\Omega l}{2}$	020000
$\frac{\omega_1^2\omega_2(5\omega_1^2+\omega_2^2-4\omega_1^2\cos\Omega l-\Omega^2\cosh 2\omega_1 l)}{4\Omega^2(5\omega_1^2+\omega_2^2)}$	002000
$\frac{\omega_1\omega_2}{2(5\omega_1^2+\omega_2^2)}(\frac{2\omega_1\sin\Omega l}{\Omega}-\sinh 2\omega_1 l)$	001100
$\frac{\omega_2(-5\omega_1^2-\omega_2^2+2(3\omega_1^2+\omega_2^2)\cos\Omega l-\Omega^2\cosh 2\omega_1 l)}{4\Omega^2(5\omega_1^2+\omega_2^2)}$	000200
$-\frac{\gamma_0}{6(\gamma_0+1)}[\frac{4\omega_1^2\omega_2^2\Omega\cos\Omega l+\omega_2^2\Omega(5\omega_1^2+3\omega_2^2)\cos 2\Omega l}{\Omega^5}$ $\frac{-3(3\omega_1^2\omega_2^2\Omega+\omega_2^4\Omega+\omega_1^6 l\sin\Omega l-\omega_1^2\omega_2^4 l\sin\Omega l)}{\Omega^5}]$	100001
$-\frac{\gamma_0}{6(\gamma_0+1)}\frac{3\omega_1^2\Omega(\omega_1^2-\omega_2^2)l\cos\Omega l+\omega_1^2(3\omega_1^2+5\omega_2^2)\sin\Omega l+\omega_2^2(5\omega_1^2+3\omega_2^2)\sin 2\Omega l}{\Omega^5}$	010001
$-\frac{\omega_2\sin\frac{\Omega l}{2}}{6(1+\gamma_0)^2}[\frac{6\gamma_0^2\omega_1^2(\omega_1^4-\omega_2^4)l\cos\frac{\Omega l}{2}}{\Omega^7}$ $+\frac{2(3\omega_1^4+6\omega_1^2\omega_2^2+13\gamma_0^2\omega_1^2\omega_2^2+3\omega_2^4+3\gamma_0^2\omega_2^4+\gamma_0^2\omega_2^2(5\omega_1^2+3\omega_2^2)\cos\Omega l)\sin\frac{\Omega l}{2}}{\Omega^6}]$	000002

,

a	$k_{\mathrm{x}}k_{\mathrm{a}}k_{\mathrm{y}}k_{\mathrm{b}}k_\tau k_\delta$
$-\frac{\omega_1^2\omega_2(\sin\Omega l+\sin 2\Omega l)}{3\Omega}$	200000
$\frac{2\omega_1^2\omega_2}{3\Omega^2}(-\cos\Omega l+\cos 2\Omega l)$	110000
$-\frac{\omega_2}{6\Omega^3}(7\omega_1^2+3\omega_2^2-4\omega_1^2\cos\Omega l)\sin\Omega l$	020000
$\frac{\omega_1^3\omega_2}{2(5\omega_1^2+\omega_2^2)}(\frac{2\omega_1\sin\Omega l}{\Omega}-\sinh 2\omega_1 l)$	002000
$\frac{\omega_1^2\omega_2(\cos\Omega l-\cosh 2\omega_1 l)}{5\omega_1^2+\omega_2^2}$	001100
$-\omega_2\frac{(3\omega_1^2+\omega_2^2)\sin\Omega l+\omega_1\Omega\sinh 2\omega_1 l}{2\Omega(5\omega_1^2+\omega_2^2)}$	000200
$\frac{\gamma_0\omega_1^2}{6(\gamma_0+1)}\frac{3\Omega(\omega_1^2-\omega_2^2)l\cos\Omega l+(-3\omega_1^2-5\omega_2^2+8\omega_2^2\cos\Omega l)\sin\Omega l}{\Omega^3}$	100001
$\frac{\gamma_0\omega_1^2\sin\frac{\Omega l}{2}}{3(\gamma_0+1)}\frac{3(\omega_1^4-\omega_2^4)l\cos\frac{\Omega l}{2}+4\omega_2^2\Omega\sin\frac{3\Omega l}{2}}{\Omega^5}$	010001
$\frac{\omega_2}{6(\gamma_0+1)^2}[\frac{(-3\omega_1^4+3\gamma_0^2\omega_1^4-6\omega_1^2\omega_2^2+\gamma_0^2\omega_1^2\omega_2^2-3\omega_2^4)\sin\Omega l}{\Omega^5}$ $-\frac{\omega_1^2\gamma_0^2(3\Omega(\omega_1^2-\omega_2^2)l+4\omega_2^2\sin\Omega l)\cos\Omega l}{\Omega^5}]$	000002

,

y	$k_{\mathrm{x}}k_{\mathrm{a}}k_{\mathrm{y}}k_{\mathrm{b}}k_\tau k_\delta$
$\frac{\omega_1\omega_2\sin\Omega l\sinh\omega_1 l}{\Omega}$	101000
$\frac{2\omega_1\omega_2}{\Omega^2}\sinh\omega_1 l\sin^2\frac{\Omega l}{2}$	011000
$\frac{\omega_2}{\Omega}\cosh\omega_1 l\sin\Omega l$	100100
$\frac{2\omega_2}{\Omega^2}\cosh\omega_1 l\sin^2\frac{\Omega l}{2}$	010100
$-\frac{\gamma_0\omega_1}{2(\gamma_0+1)}(\frac{\omega_1^2-\omega_2^2}{\Omega^2}l+\frac{2\omega_2^2\sin\Omega l}{\Omega^3})\sinh\omega_1 l$	001001
$-\frac{\gamma_0}{2(\gamma_0+1)}\frac{\omega_1(\Omega(\omega_1^2-\omega_2^2)l+2\omega_2^2\sin\Omega l)\cosh\omega_1 l+\Omega^3\sinh\omega_1 l}{\omega_1\Omega^3}$	000101

,

b	$k_{\mathrm{x}}k_{\mathrm{a}}k_{\mathrm{y}}k_{\mathrm{b}}k_\tau k_\delta$
$\frac{\omega_1^2\omega_2\cosh\omega_1 l\sin\Omega l}{\Omega}$	101000
$\frac{2\omega_1^2\omega_2}{\Omega^2}\cosh\omega_1 l\sin^2\frac{\Omega l}{2}$	011000
$\frac{\omega_1\omega_2}{\Omega}\sinh\omega_1 l\sin\Omega l$	100100
$\frac{2\omega_1\omega_2}{\Omega^2}\sinh\omega_1 l\sin^2\frac{\Omega l}{2}$	010100

,

b	$k_{\mathrm{x}}k_{\mathrm{a}}k_{\mathrm{y}}k_{\mathrm{b}}k_\tau k_\delta$
$\frac{\gamma_0\omega_1}{2(\gamma_0+1)}\left(-\left(\frac{\omega_1(\omega_1^2-\omega_2^2)}{\Omega^2}l+\frac{2\omega_1\omega_2^2\sin\Omega l}{\Omega^3}\right)\cosh\omega_1 l+\sinh\omega_1 l\right)$	001001
$-\frac{\gamma_0\omega_1}{2(\gamma_0+1)}\left(\frac{\omega_1^2-\omega_2^2}{\Omega^2}l+\frac{2\omega_2^2\sin\Omega l}{\Omega^3}\right)\sinh\omega_1 l$	000101

,

τ	$k_{\mathrm{x}}k_{\mathrm{a}}k_{\mathrm{y}}k_{\mathrm{b}}k_\tau k_\delta$
$-\frac{\gamma_0\omega_1^2(6(\omega_1^2-\omega_2^2)\Omega l+8\omega_2^2\sin\Omega l-(3\omega_1^2+\omega_2^2)\sin 2\Omega l)}{24\Omega^3(\gamma_0+1)}$	200000
$\frac{\omega_1^2\gamma_0(3\omega_1^2+5\omega_2^2+(3\omega_1^2+\omega_2^2)\cos\Omega l)}{3(1+\gamma_0)\Omega^4}\sin^2\frac{\Omega l}{2}$	110000
$-\frac{\gamma_0(4\omega_2^2(7\omega_1^2+3\omega_2^2)\sin\Omega l+\omega_1^2(6(\omega_1^2-\omega_2^2)\Omega l+(3\omega_1^2+\omega_2^2)\sin 2\Omega l))}{24\Omega^5(\gamma_0+1)}$	020000
$\frac{\gamma_0\omega_1^3}{8(\gamma_0+1)(5\omega_1^2+\omega_2^2)}\left(2\omega_1\left(\frac{(5\omega_1^2+\omega_2^2)l}{\Omega^2}+\frac{4\omega_2^2\sin\Omega l}{\Omega^3}\right)-5\sinh 2\omega_1 l\right)$	002000
$\frac{\gamma_0\omega_1^2(5\omega_1^2+\omega_2^2+4\omega_2^2\cos\Omega l-5\Omega^2\cosh 2\omega_1 l)}{4(\gamma_0+1)\Omega^2(5\omega_1^2+\omega_2^2)}$	001100
$-\frac{\gamma_0}{8(\gamma_0+1)}\frac{2(\omega_1^2\Omega(5\omega_1^2+\omega_2^2)l+2\omega_2^2(3\omega_1^2+\omega_2^2)\sin\Omega l)+5\omega_1\Omega^3\sinh 2\omega_1 l}{\Omega^3(5\omega_1^2+\omega_2^2)}$	000200
$\frac{\omega_2\cos\frac{\Omega l}{2}}{6(\gamma_0+1)^2}\left[\frac{6\gamma_0^2\omega_1^2\Omega(\omega_1^2-\omega_2^2)l\cos\frac{\Omega l}{2}}{\Omega^5}\right.$ $\left.-\frac{2(-6\omega_1^4+3\gamma_0^2\omega_1^4-12\omega_1^2\omega_2^2-7\gamma_0^2\omega_1^2\omega_2^2-6\omega_2^4+\gamma_0^2\omega_1^2(3\omega_1^2+\omega_2^2)\cos\Omega l)\sin\frac{\Omega l}{2}}{\Omega^5}\right]$	100001
$\frac{\omega_2\sin\frac{\Omega l}{2}}{6(\gamma_0+1)^2}\left[\frac{6\gamma_0^2\omega_1^2(\omega_1^4-\omega_2^4)l\cos\frac{\Omega l}{2}}{\Omega^7}\right.$ $\left.-\frac{2(-6\omega_1^4+3\gamma_0^2\omega_1^4-12\omega_1^2\omega_2^2-7\gamma_0^2\omega_1^2\omega_2^2-6\omega_2^4+\gamma_0^2\omega_1^2(3\omega_1^2+\omega_2^2)\cos\Omega l)\sin\frac{\Omega l}{2}}{\Omega^6}\right]$	010001
$-\frac{\gamma_0}{24(\gamma_0+1)^3}\left[\frac{12\gamma_0^2\omega_1^2\omega_2^2\Omega(\omega_1^2-\omega_2^2)l\cos\Omega l-4\omega_2^2(-9\omega_1^4+3\gamma_0^2\omega_1^4}{\Omega^7}\right.$ $\frac{-18\omega_1^2\omega_2^2-11\gamma_0^2\omega_1^2\omega_2^2-9\omega_2^4)\sin\Omega l+\omega_1^2(36\omega_1^4\Omega l+72\omega_1^2\omega_2^2\Omega l+6\gamma_0^2\omega_1^2\omega_2^2\Omega l+36\omega_2^4\Omega l}{\Omega^7}$ $\left.+\frac{-30\gamma_0^2\omega_2^4\Omega l-3\gamma_0^2\omega_1^2\omega_2^2\sin 2\Omega l-\gamma_0^2\omega_2^2\sin 2\Omega l)}{\Omega^7}\right]$	000002

.

(5.4)

5.5 Sextupol

Die 2. Ordnung des Sextupols berechnet sich unter Verwendung der Abkürzung $\tilde{k}_{\mathrm{Sext}} = \frac{q k_{\mathrm{Sext}}}{mc\sqrt{\gamma_0^2-1}}$ zu

x	$k_{\mathrm{x}}k_{\mathrm{a}}k_{\mathrm{y}}k_{\mathrm{b}}k_\tau k_\delta$
$-\frac{\tilde{k}_{\mathrm{Sext}}l^2}{2}$	200000
$-\frac{\tilde{k}_{\mathrm{Sext}}l^3}{3}$	110000
$-\frac{\tilde{k}_{\mathrm{Sext}}l^4}{12}$	020000
$\frac{\tilde{k}_{\mathrm{Sext}}l^2}{2}$	002000
$\frac{\tilde{k}_{\mathrm{Sext}}l^3}{3}$	001100
$\frac{\tilde{k}_{\mathrm{Sext}}l^4}{12}$	000200
$-\frac{\gamma_0}{\gamma_0+1}l$	010001

,

a	$k_{\mathrm{x}}k_{\mathrm{a}}k_{\mathrm{y}}k_{\mathrm{b}}k_\tau k_\delta$
$-\tilde{k}_{\mathrm{Sext}}l$	200000
$-\tilde{k}_{\mathrm{Sext}}l^2$	110000
$-\frac{\tilde{k}_{\mathrm{Sext}}l^3}{3}$	020000
$\tilde{k}_{\mathrm{Sext}}l$	002000
$\tilde{k}_{\mathrm{Sext}}l^2$	001100
$\frac{\tilde{k}_{\mathrm{Sext}}l^3}{3}$	000200

,

y	$k_{\mathrm{x}}k_{\mathrm{a}}k_{\mathrm{y}}k_{\mathrm{b}}k_\tau k_\delta$
$\tilde{k}_{\mathrm{Sext}}l^2$	101000
$\frac{\tilde{k}_{\mathrm{Sext}}l^3}{3}$	011000
$\frac{\tilde{k}_{\mathrm{Sext}}l^3}{3}$	100100
$\frac{\tilde{k}_{\mathrm{Sext}}l^4}{6}$	010100
$-\frac{\gamma_0}{\gamma_0+1}l$	000101

,

b	$k_{\mathrm{x}}k_{\mathrm{a}}k_{\mathrm{y}}k_{\mathrm{b}}k_\tau k_\delta$
$2\tilde{k}_{\mathrm{Sext}}l$	101000
$\tilde{k}_{\mathrm{Sext}}l^2$	011000
$\tilde{k}_{\mathrm{Sext}}l^2$	100100
$\frac{2\tilde{k}_{\mathrm{Sext}}l^3}{3}$	010100

,

τ	$k_{\mathrm{x}}k_{\mathrm{a}}k_{\mathrm{y}}k_{\mathrm{b}}k_\tau k_\delta$
$-\frac{\gamma_0}{2(\gamma_0+1)}l$	020000
$-\frac{\gamma_0}{2(\gamma_0+1)}l$	000200
$-\frac{3\gamma_0 l}{2(1+\gamma_0)^3}$	000002

.

Teil II

Die Spinbewegung

Kapitel 6

Die Bewegungsgleichung des Spins

Im Ruhesystem eines Teilchens mit dem Spin $\vec{s}$, der Ladung q und der gyromagnetischen Anomalie $a = \frac{g-2}{2}$ wird die Präzession des Spins im elektromagnetischen Feld durch die Thomas-Bargmann-Michel-Telegdi (T-BMT) Gleichung beschrieben,

$$\frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{\Omega}_{\mathrm{BMT}} \times \vec{s} \text{ mit} \tag{6.1}$$

$$\vec{\Omega}_{\mathrm{BMT}} = -\frac{q}{m\gamma}\left[(1+a\gamma)\vec{B}_{\perp} + (1+a)\vec{B}_{\parallel} - \frac{1}{mc^2}\left(a + \frac{1}{\gamma+1}\right)\vec{p}\times\vec{E}\right], \tag{6.2}$$

wobei das Magnetfeld im Laborsystem in eine Komponente senkrecht, $\vec{B}_{\perp}$, und eine parallel, $\vec{B}_{\parallel}$, bezüglich der Bewegungsrichtung $\frac{\vec{p}}{p}$ zerlegt wird [6.1]. Um einen ersten Einblick in die Spinpräzession bei der HERA Strahlenergie von 820 GeV zu gewinnen, wird die Präzession des Referenzteilchens im Dipolfeld betrachtet,

$$\frac{d\vec{s}}{dt} = -\frac{q(1+a\gamma)}{m\gamma}\vec{B}_{\mathrm{Dip}} \times \vec{s}. \tag{6.3}$$

Die Bewegungsgleichung des Spins unterscheidet sich von der des Impulses (2.1)

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -\frac{q}{m\gamma}\vec{B}_{\mathrm{Dip}} \times \vec{p} \tag{6.4}$$

nur um den Faktor $(1+a\gamma)$, so daß der Spin, wie aus der Betrachtung des Impulses in Abschnitt 4.2.3 ersichtlich ist, bei einem Ablenkwinkel ϕ des Teilchens um den Winkel $\phi_{\mathrm{Spin}} = (1+a\gamma)\phi$ rotiert. Bei einem vollen Umlauf in HERA mit der Strahlenergie von 820 GeV rotiert der Spin des Protons ($a_{\mathrm{Proton}} \simeq 1,79$) 1567 mal um die vertikale Achse.

6.1 Die T-BMT Gleichung im krummlinigen Koordinatensystem

Analog wie der Ort und der Impuls wird der Spin im krummlinigen Koordinatensystem [7] dargestellt,

$$\vec{s} = S_{\mathrm{x}}\vec{e}_{\mathrm{x}} + S_{\mathrm{y}}\vec{e}_{\mathrm{y}} + S_{\mathrm{l}}\vec{e}_{\mathrm{l}} \,. \tag{6.5}$$

Entsprechend dem früheren Vorgehen im Abschnitt 2.1 ersetzt man die freie Variable t durch die Bogenlänge l

$$\frac{d\vec{s}}{dl} = \frac{dt}{dl}\vec{\Omega}_{\mathrm{BMT}} \times \vec{s}\,. \tag{6.6}$$

Mit der Ableitung von $\vec{s}$, die aus der Ableitung (2.21) eines beliebigen Vektors im krummlinigen System folgt, und mit (2.22) ergibt sich die Bewegungsgleichung des Komponentenvektors $\vec{S} = (S_{\mathrm{x}}, S_{\mathrm{y}}, S_{\mathrm{l}})^T$ [7] zu

$$\frac{d\vec{S}}{dl} = \frac{hp}{vp_{\mathrm{l}}}\vec{\Omega}_{\mathrm{BMT}} \times \vec{S} + \begin{pmatrix} \kappa_{\mathrm{x}} S_{\mathrm{l}} \\ \kappa_{\mathrm{y}} S_{\mathrm{l}} \\ -(\kappa_{\mathrm{x}} S_{\mathrm{x}} + \kappa_{\mathrm{y}} S_{\mathrm{y}}) \end{pmatrix} , \tag{6.7}$$

$$\frac{d\vec{S}}{dl} = \vec{\Omega} \times \vec{S} \quad \text{mit} \tag{6.8}$$

$$\vec{\Omega}(\vec{r}, \vec{p}, l) = \frac{hp}{vp_{\mathrm{l}}}\vec{\Omega}_{\mathrm{BMT}} - \vec{\kappa} \times \vec{e}_{\mathrm{l}} \text{ und } \vec{\kappa} = (\kappa_{\mathrm{x}}, \kappa_{\mathrm{y}}, 0)^T \,. \tag{6.9}$$

Setzt man in $\vec{\Omega}(\vec{r}, \vec{p}, l)$ die Abbildung $\mathcal{M}$ der Phasenraumkoordinaten, die in Teil I berechnet wurde, ein, ist $\vec{\Omega}(\vec{z}_{\mathrm{i}}, l)$ allein eine Funktion der Anfangskoordinaten und der Bogenlänge.

6.2 Die exakte Spinbewegung

Die rechte Seite von (6.8) wird weiter zu einem Differentialgleichungssystem in Matrixdarstellung umgeschrieben,

$$\frac{d\vec{S}}{dl} = \underline{\Omega}\,\vec{S},\ \vec{S}(0) = \vec{S}_{\mathrm{i}} \text{ mit} \tag{6.10}$$

$$\underline{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_{\mathrm{l}} & \Omega_{\mathrm{y}} \\ \Omega_{\mathrm{l}} & 0 & -\Omega_{\mathrm{x}} \\ -\Omega_{\mathrm{y}} & \Omega_{\mathrm{x}} & 0 \end{pmatrix} , \ \underline{\Omega}^T = -\underline{\Omega}\,. \tag{6.11}$$

Dieses dreidimensionale Differentialgleichungssystem 1. Ordnung löst eine orthogonale Matrix $\underline{\mathrm{A}}$, die Drehmatrix des Spins,

$$\vec{S}(l) = \underline{\mathrm{A}}(\vec{z}_{\mathrm{i}}, l)\vec{S}_{\mathrm{i}}\,. \tag{6.12}$$

Denn es gilt

$$\frac{d\left|\vec{S}\right|}{dl} = \frac{1}{\left|\vec{S}\right|}\vec{S}\cdot\frac{d\vec{S}}{dl} = \frac{1}{\left|\vec{S}\right|}\vec{S}\cdot\left(\vec{\Omega}\times\vec{S}\right) = 0\,. \tag{6.13}$$

Die Abbildung muß demnach längenerhaltend, die Matrix $\underline{\mathrm{A}}$ orthogonal sein. Die Differentialgleichung für die Matrix $\underline{\mathrm{A}}$ folgt durch Einsetzen von (6.12) in (6.10),

$$\frac{d}{dl}\underline{\mathrm{A}}(\vec{z}_{\mathrm{i}},l) = \underline{\Omega}(\vec{z}_{\mathrm{i}},l)\,\underline{\mathrm{A}}(\vec{z}_{\mathrm{i}},l)\,,\underline{\mathrm{A}}(\vec{z}_{\mathrm{i}},l=0) = \underline{\mathrm{I}}_{3\times3} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\,. \tag{6.14}$$

Rotationen können neben ihrer Darstellung durch orthogonale Matrizen auch durch ihre Drehachse und ihren Drehwinkel beschrieben werden. Die Berechnung der benötigten Gesamtdrehmatrix des Beschleunigers als Multiplikation der Einzelmatrizen erweist sich als dreimal langsamer als die Berechnung über die Drehwinkel und Drehachsen der einzelnen Elemente [7]. Diese beiden Größen werden nun für den Quadrupol, den Dipol, die Kombination von Quadrupol und Dipol und den Sextupol zum einen aus den jeweiligen Spinmatrizen exakt bis in 2. Ordnung Anfangskoordinaten berechnet. Der zweite Weg führt direkt über die Bewegungsgleichungen von Drehachse und Drehwinkel, was sich als wesentlich schnellerer Weg herausstellen wird.

6.3 Iterative Lösung der Spintransfermatrix

Analog wie beim Differentialgleichungssystem 1. Ordnung aus Kapitel 3 werden zur iterativen Lösung von (6.14) die vorkommenden Funktionen, hier die Matrizen $\underline{\mathrm{A}}(\vec{z}_{\mathrm{i}},l)$ und $\underline{\Omega}(\vec{z}_{\mathrm{i}},l)$, in eine Taylorreihe um den Ursprung bezüglich der Anfangskoordinaten $\vec{z}_{\mathrm{i}}$ entwickelt,

$$\underline{\Omega}(\vec{z}_{\mathrm{i}},l) = \sum_{j=0}^{\infty}\underline{\Omega}^{(j)}(\vec{z}_{\mathrm{i}},l)\,, \tag{6.15}$$

$$\underline{\mathrm{A}}(\vec{z}_{\mathrm{i}},l) = \sum_{k=0}^{\infty}\underline{\mathrm{A}}^{(k)}(\vec{z}_{\mathrm{i}},l)\,, \tag{6.16}$$

wobei $[\underline{\Omega}^{(n)}(\vec{z}_{\mathrm{i}},l)]_{ij}$ und $[\underline{\mathrm{A}}^{(n)}(\vec{z}_{\mathrm{i}},l)]_{ij}$ homogene Polynome n-ter Ordnung in den Anfangskoordinaten sind. Es wird wiederum angenommen, daß die Taylorreihen konvergieren. Die Randbedingung für die Taylorkomponenten $\underline{\mathrm{A}}^{(k)}(\vec{z}_{\mathrm{i}},l)$ liefert die Anfangsbedingung (6.14),

$$\underline{\mathrm{A}}^{(k)}(\vec{z}_{\mathrm{i}},l=0) = \begin{cases}\underline{\mathrm{I}}_{3\times3} & \text{für} \quad k=0\\ \underline{0}_{3\times3} & \text{für} \quad k\neq0\end{cases}\,. \tag{6.17}$$

Nach Einsetzen von (6.15) und (6.16) in (6.14) sortiert man nach Potenzen in den Anfangskoordinaten $\vec{z}_{\rm i}$ und führt in einem Iterationsverfahren die höheren auf die niedrigeren, bekannten Ordnungen zurück,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dl} \underline{\mathrm{A}}^{(k)}(\vec{z}_{\rm i}, l) = \sum_{k,j=0}^{\infty} \underline{\Omega}^{(j)}(\vec{z}_{\rm i}, l) \underline{\mathrm{A}}^{(k)}(\vec{z}_{\rm i}, l) \,. \tag{6.18}$$

Die 0. und die n-te Ordnung lauten

$$\frac{d}{dl} \underline{\mathrm{A}}^{(0)}(\vec{z}_{\rm i}, l) = \underline{\Omega}^{(0)}(\vec{z}_{\rm i}, l) \underline{\mathrm{A}}^{(0)}(\vec{z}_{\rm i}, l) \,, \tag{6.19}$$

$$\frac{d}{dl} \underline{\mathrm{A}}^{(n)}(\vec{z}_{\rm i}, l) = \sum_{k,j=0}^{\infty} [\underline{\Omega}^{(j)}(\vec{z}_{\rm i}, l) \underline{\mathrm{A}}^{(k)}(\vec{z}_{\rm i}, l)]_n \,. \tag{6.20}$$

Die Ordnung von $\underline{\Omega}^{(j)}(\vec{z}_{\rm i}, l)\underline{\mathrm{A}}^{(k)}$ in den Anfangskoordinaten beträgt $\mathrm{O}(\varepsilon^{j+k})$, so daß die Summe über j und k nur bis n läuft,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dl} \underline{\mathrm{A}}^{(n)}(\vec{z}_{\rm i}, l) &= \sum_{k=0}^{n} \underline{\Omega}^{(n-k)}(\vec{z}_{\rm i}, l) \underline{\mathrm{A}}^{(k)}(\vec{z}_{\rm i}, l) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \underline{\Omega}^{(n-k)}(\vec{z}_{\rm i}, l) \underline{\mathrm{A}}^{(k)}(\vec{z}_{\rm i}, l) + \underline{\Omega}^{(0)}(\vec{z}_{\rm i}, l) \underline{\mathrm{A}}^{(n)}(\vec{z}_{\rm i}, l) \,. \end{aligned} \tag{6.21}$$

Mit

$$\underline{\Omega}^{(0)}(\vec{z}_{\rm i}, l) = \left[\frac{d}{dl} \underline{\mathrm{A}}^{(0)}(\vec{z}_{\rm i}, l) \right] \left[\underline{\mathrm{A}}^{(0)}(\vec{z}_{\rm i}, l) \right]^{-1} \tag{6.22}$$

aus (6.19) wird die n-te Ordnung bis auf ihre Ableitung eliminiert,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dl} \underline{\mathrm{A}}^{(n)}(\vec{z}_{\rm i}, l) - \left[\frac{d}{dl} \underline{\mathrm{A}}^{(0)}(\vec{z}_{\rm i}, l) \right] \left[\underline{\mathrm{A}}^{(0)}(\vec{z}_{\rm i}, l) \right]^{-1} \underline{\mathrm{A}}^{(n)}(\vec{z}_{\rm i}, l) &= \sum_{k=0}^{n-1} \underline{\Omega}^{(n-k)}(\vec{z}_{\rm i}, l) \underline{\mathrm{A}}^{(k)}(\vec{z}_{\rm i}, l) \,, \\ \underline{\mathrm{A}}^{(0)}(\vec{z}_{\rm i}, l) \frac{d}{dl} \left[\left[\underline{\mathrm{A}}^{(0)}(\vec{z}_{\rm i}, l) \right]^{-1} \underline{\mathrm{A}}^{(n)}(\vec{z}_{\rm i}, l) \right] &= \sum_{k=0}^{n-1} \underline{\Omega}^{(n-k)}(\vec{z}_{\rm i}, l) \underline{\mathrm{A}}^{(k)}(\vec{z}_{\rm i}, l) \,. \end{aligned}$$

Die Integration unter Berücksichtigung der Anfangsbedingung (6.17) und der Orthogonalität der Drehmatrix auf der Referenzkurve, $\underline{\mathrm{A}}^{(0)}(\vec{z}_{\rm i}, l)$, ergibt für die n-te Ordnung

$$\begin{aligned} \underline{\mathrm{A}}^{(n)}(\vec{z}_{\rm i}, l) &= \underline{\mathrm{A}}^{(0)}(\vec{z}_{\rm i}, l) \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^l \left[\underline{\mathrm{A}}^{(0)}(\vec{z}_{\rm i}, l') \right]^T \underline{\Omega}^{(n-k)}(\vec{z}_{\rm i}, l') \underline{\mathrm{A}}^{(k)}(\vec{z}_{\rm i}, l') \, dl' \\ &\quad \text{für } n = 1, \ldots, \infty \,. \end{aligned} \tag{6.23}$$

Zusammengefaßt berechnet sich die 0., 1. und 2. Ordnung der Spintransfermatrix zu

$$\frac{d}{dl}\underline{\mathrm{A}}^{(0)}(\vec{z}_{\mathrm{i}},l) = \underline{\Omega}^{(0)}(\vec{z}_{\mathrm{i}},l)\underline{\mathrm{A}}^{(0)}(\vec{z}_{\mathrm{i}},l)\,,\underline{\mathrm{A}}^{(0)}(\vec{z}_{\mathrm{i}},l=0) = \underline{\mathrm{I}}_{3\times 3}\,, \tag{6.24}$$

$$\underline{\mathrm{A}}^{(1)}(\vec{z}_{\mathrm{i}},l) = \underline{\mathrm{A}}^{(0)}(\vec{z}_{\mathrm{i}},l)\int_0^l \left[\underline{\mathrm{A}}^{(0)}(\vec{z}_{\mathrm{i}},l')\right]^T \underline{\Omega}^{(1)}(\vec{z}_{\mathrm{i}},l')\underline{\mathrm{A}}^{(0)}(\vec{z}_{\mathrm{i}},l')\,dl'\,, \tag{6.25}$$

$$\begin{aligned}\underline{\mathrm{A}}^{(2)}(\vec{z}_{\mathrm{i}},l) = {} & \underline{\mathrm{A}}^{(0)}(\vec{z}_{\mathrm{i}},l)\int_0^l \left[\underline{\mathrm{A}}^{(0)}(\vec{z}_{\mathrm{i}},l')\right]^T \Big(\underline{\Omega}^{(2)}(\vec{z}_{\mathrm{i}},l')\underline{\mathrm{A}}^{(0)}(\vec{z}_{\mathrm{i}},l') + \\ & \underline{\Omega}^{(1)}(\vec{z}_{\mathrm{i}},l')\underline{\mathrm{A}}^{(1)}(\vec{z}_{\mathrm{i}},l')\Big)\,dl'\,.\end{aligned} \tag{6.26}$$

Kapitel 7

Rotationsvektor und Rotationswinkel

7.1 Die Spintransferquaternion

Drehungen im $\mathbb{R}^3$ können durch Matrizen der SO(3)-Gruppe ebenso wie durch Matrizen der SU(2)-Gruppe beschrieben werden (s.[4]). Mit Hilfe der Pauli-Matrizen $\underline{\sigma_i}$ und der Einheitsmatrix $\underline{\mathrm{I}}_{2\times 2}$,

$$\underline{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \underline{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \underline{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \underline{\mathrm{I}}_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{7.1}$$

die einen Satz von vier unabhängigen Matrizen bilden, werden der alte und der neue gedrehte Vektor, $\vec{x}$ und $\vec{x}'$, als auch die Drehung $\underline{\mathrm{Q}}$ mit Drehachse $\vec{n}$ und Drehwinkel ϕ durch SU(2)-Matrizen

$$\underline{\mathrm{P}} = \underline{\vec{\sigma}} \cdot \vec{x}\,, \tag{7.2}$$

$$\underline{\mathrm{P}}' = \underline{\vec{\sigma}} \cdot \vec{x}'\,, \tag{7.3}$$

$$\underline{\mathrm{Q}} = \kappa\, \underline{\mathrm{I}}_{2\times 2} - \mathrm{i}\underline{\vec{\sigma}} \cdot \vec{\gamma}\,, \kappa = \cos\frac{\phi}{2}, \vec{\gamma} = \vec{n}\sin\frac{\phi}{2}\,, \tag{7.4}$$

beschrieben. Ausdrücke der Form $\underline{\mathrm{Q}}$ bezeichnet man nach Hamilton als Quaternion, κ als Skalar und $\underline{\vec{\sigma}} \cdot \vec{\gamma}$ als Vektor der Quaternion. In der Quaternionenalgebra erhält der Quaternionenvektor $\underline{\vec{\sigma}} \cdot \vec{\gamma}$ üblicherweise ein positives Vorzeichen. Da hier jedoch keine Rotationen des Koordinatensystems, sondern Drehungen als Abbildung betrachtet werden, wird das ursprünglich positive Vorzeichen negativ. In der weiteren Diplomarbeit wird der Vierervektor $\vec{\gamma}_\kappa = \binom{\vec{\gamma}}{\kappa}$, der die zugehörige SU(2)-Matrix $\underline{\mathrm{Q}}$ über (7.4) vollständig beschreibt, vereinfachend als Spintransferquaternion bezeichnet. Nach [4.3] gilt für die Verknüpfung zwischen alten und neuen Koordinaten

$$\underline{\mathrm{P}}' = \underline{\mathrm{Q}}\,\underline{\mathrm{P}}\,\underline{\mathrm{Q}}^\dagger\,. \tag{7.5}$$

Die unitäre Eigenschaft der SU(2)-Matrizen, $\underline{\mathrm{Q}}^{\dagger}\underline{\mathrm{Q}} = \underline{\mathrm{I}}_{2\times 2}$, fordert als Norm des Vektors $\vec{\gamma}_\kappa$ die Einheitslänge, was sofort mit (7.4) folgt.
Zur Drehung, die durch $\vec{\gamma}_\kappa$ repräsentiert wird, gehört die SO(3)-Matrix $\underline{\mathrm{A}}$ [7] mit

$$A_{ij} = \left(1 - 2\vec{\gamma}^2\right)\delta_{ij} + 2\gamma_i\gamma_j - 2\kappa\varepsilon_{ijk}\gamma_k\,. \tag{7.6}$$

Umgekehrt besitzt eine SO(3)-Matrix $\underline{\mathrm{A}}$ die Quaternion [7]

$$\vec{\gamma} = -\frac{1}{2\sqrt{\mathrm{Sp}\,[\underline{\mathrm{A}}]+1}}\begin{pmatrix} A_{23}-A_{32} \\ A_{31}-A_{13} \\ A_{12}-A_{21}\end{pmatrix}\,, \tag{7.7}$$

$$\kappa = \frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{Sp}\,[\underline{\mathrm{A}}]+1}\,. \tag{7.8}$$

Bei der Herleitung helfen die Kommutator- und Antikommutatorrelationen der Pauli-Matrizen

$$\{\underline{\sigma}_i, \underline{\sigma}_j\} = 2\delta_{ij}\underline{\mathrm{I}}_{2\times 2}\,, [\underline{\sigma}_i, \underline{\sigma}_j] = 2\mathrm{i}\varepsilon_{ijk}\underline{\sigma}_k\,, \tag{7.9}$$

woraus sich die nützliche Beziehung

$$\begin{aligned}\left(\vec{\underline{\sigma}}\cdot\vec{a}\right)\left(\vec{\underline{\sigma}}\cdot\vec{b}\right) &= \sum_{i,j=1}^{3} a_i b_j \underline{\sigma}_i\underline{\sigma}_j \\ &= \sum_{i,j=1}^{3} a_i b_j \left(\frac{1}{2}\{\underline{\sigma}_i,\underline{\sigma}_j\} + \frac{1}{2}[\underline{\sigma}_i,\underline{\sigma}_j]\right) \\ &= \vec{a}\cdot\vec{b}\,\underline{\mathrm{I}}_{2\times 2} + \mathrm{i}(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{\underline{\sigma}}\end{aligned} \tag{7.10}$$

ergibt. Mit (7.2)-(7.4) und der Relation (7.10) schreibt sich (7.5)

$$\begin{aligned}\vec{\underline{\sigma}}\cdot\vec{x}' &= \kappa^2\vec{\underline{\sigma}}\cdot\vec{x} - \mathrm{i}\kappa(\vec{\underline{\sigma}}\cdot\vec{\gamma})(\vec{\underline{\sigma}}\cdot\vec{x}) + \mathrm{i}\kappa(\vec{\underline{\sigma}}\cdot\vec{x})(\vec{\underline{\sigma}}\cdot\vec{\gamma}) + (\vec{\underline{\sigma}}\cdot\vec{\gamma})(\vec{\underline{\sigma}}\cdot\vec{x})(\vec{\underline{\sigma}}\cdot\vec{\gamma}) \\ &= \kappa^2\vec{\underline{\sigma}}\cdot\vec{x} + 2\kappa(\vec{\gamma}\times\vec{x})\cdot\vec{\underline{\sigma}} + (\vec{\gamma}\cdot\vec{x})(\vec{\underline{\sigma}}\cdot\vec{\gamma}) - [(\vec{\gamma}\times\vec{x})\times\vec{\gamma}]\cdot\vec{\underline{\sigma}} \\ &= (\kappa^2 - \vec{\gamma}^2)\vec{\underline{\sigma}}\cdot\vec{x} + 2\kappa(\vec{\gamma}\times\vec{x})\cdot\vec{\underline{\sigma}} + 2(\vec{\gamma}\cdot\vec{x})(\vec{\underline{\sigma}}\cdot\vec{\gamma})\,.\end{aligned} \tag{7.11}$$

Durch Ausklammern von $\vec{\underline{\sigma}}$ und der Einheitslänge von $\vec{\gamma}_\kappa$, $\kappa^2 = 1 - \vec{\gamma}^2$, folgt der gedrehte Vektor $\vec{x}'$ aus dem alten Vektor $\vec{x}$,

$$\vec{x}' = (1 - 2\kappa^2)\vec{x} + 2\kappa(\vec{\gamma}\times\vec{x}) + 2(\vec{\gamma}\cdot\vec{x})\vec{\gamma}\,. \tag{7.12}$$

Komponentenweise schreibt sich dies als

$$x_i' = (1 - 2\vec{\gamma}^2)x_i + 2\kappa\sum_{l,k=1}^{3}\varepsilon_{lki}\gamma_l x_k + 2\sum_{k=1}^{3} x_k\gamma_k\gamma_i\,. \tag{7.13}$$

Der Vergleich mit der SO(3)-Darstellung,

$$\vec{x}' = \underline{\mathrm{A}}\,\vec{x} \text{ bzw. } x_i' = \sum_{j=1}^{3} A_{ij} x_j \,, \tag{7.14}$$

ergibt (7.6). Umgekehrt liefert die Spur der Matrix $\underline{\mathrm{A}}$

$$\mathrm{Sp}\,[\underline{\mathrm{A}}] = \sum_{i=1}^{3}[(1-2\vec{\gamma}^2)+2\gamma_i^2] = 3-4\vec{\gamma}^2 = 4\kappa^2-1\,, \tag{7.15}$$

die Gleichung (7.8). Aus der Differenz zweier Matrixelemente resultiert

$$A_{ij} - A_{ji} = -4\kappa\gamma_l\varepsilon_{ijl}\,. \tag{7.16}$$

Diese Differenz ist proportional zum Skalar der Quaternion, κ. Außerdem stimmt $\vec{\gamma}$ per Definition (7.4), von der bei der Herleitung ausgegangen wurde, für $\phi = \pi$ mit der Drehachse $\vec{n}$ überein. Folglich existiert der Grenzwert

$$\lim_{\phi\to\pi} \frac{A_{ij}-A_{ji}}{4\kappa} = \vec{n}\,, \tag{7.17}$$

und der Quotient $\frac{A_{ij}-A_{ji}}{4\kappa}$ ist für $\mathrm{Sp}\,[\underline{\mathrm{A}}] = -1$ bzw. $\kappa = 0$ stetig fortsetzbar. Unter diesem Aspekt wird (7.16) für beliebige Rotationen umgeschrieben zu

$$\gamma_l\varepsilon_{ijl} = -\frac{1}{2\sqrt{\mathrm{Sp}\,[\underline{\mathrm{A}}]+1}}(A_{ij}-A_{ji})\,, \tag{7.18}$$

wodurch (7.7) gezeigt ist. Diese formale Behandlung der Nullstelle $\mathrm{Sp}\,[\underline{\mathrm{A}}] = -1$ reduziert sich bei der Berechnung darauf, die gemeinsamen Nullstellen von Nenner und Zähler, die nach obigen Überlegungen existieren, auszuklammern und zu kürzen.

7.2 Iterative Lösung der Spintransferquaternion(1)

Aus der Spintransfermatrix $\underline{\mathrm{A}}$, die mit (6.24)-(6.26) exakt bis in 2. Ordnung Anfangskoordinaten bestimmt wird, läßt sich die Spintransferquaternion $\vec{\gamma}_\kappa$ mit (7.7) und (7.8) berechnen. Dazu werden in einem ersten Schritt $\vec{\gamma}$ und κ um die 0. Ordnung der Transfermatrix $\underline{\mathrm{A}}^{(0)}(\vec{z}_\mathrm{i}, l)$ entwickelt. Um Rechenzeit zu sparen, werden anschließend in den höheren Ordnungen die Terme soweit wie möglich auf die bereits berechneten, niedrigeren Ordnungen zurückgeführt. Hilfreich erweist

sich diese Umformung vor allem bei der Berechnung des kombinierten Dipol-Quadrupols, deren Transfermatrix große Matrixelemente besitzt,

$$\begin{aligned}
\kappa &= \frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{Sp}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\underline{\mathrm{A}}^{(k)}(\vec{z}_\mathrm{i},l)\right]+1} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{Sp}\left[\underline{\mathrm{A}}^{(0)}(\vec{z}_\mathrm{i},l)\right]+1}\sqrt{1+\frac{\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{Sp}\left[\underline{\mathrm{A}}^{(k)}(\vec{z}_\mathrm{i},l)\right]}{1+\mathrm{Sp}\left[\underline{\mathrm{A}}^{(0)}(\vec{z}_\mathrm{i},l)\right]}} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{Sp}\left[\underline{\mathrm{A}}^{(0)}(\vec{z}_\mathrm{i},l)\right]+1}\Big[1+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathrm{Sp}\left[\underline{\mathrm{A}}^{(k)}(\vec{z}_\mathrm{i},l)\right]}{1+\mathrm{Sp}\left[\underline{\mathrm{A}}^{(0)}(\vec{z}_\mathrm{i},l)\right]}- \\
&\quad \frac{1}{8}\sum_{j,k=1}^{\infty}\frac{\mathrm{Sp}\left[\underline{\mathrm{A}}^{(k)}(\vec{z}_\mathrm{i},l)\right]\mathrm{Sp}\left[\underline{\mathrm{A}}^{(j)}(\vec{z}_\mathrm{i},l)\right]}{(\mathrm{Sp}\left[\underline{\mathrm{A}}^{(0)}(\vec{z}_\mathrm{i},l)\right]+1)^2}+\ldots\Big] \\
&\stackrel{!}{=} \sum_{k=0}^{\infty}\kappa^{(k)}(\vec{z}_\mathrm{i},l)\,.
\end{aligned}$$

Das Sammeln der Potenzen führt zur Entwicklung des Quaternionenskalars,

$$\kappa^{(0)}(\vec{z},l) = \frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{Sp}\left[\underline{\mathrm{A}}^{(0)}(\vec{z}_\mathrm{i},l)\right]+1}\,, \tag{7.19}$$

$$\kappa^{(1)}(\vec{z},l) = \frac{1}{4}\frac{\mathrm{Sp}\left[\underline{\mathrm{A}}^{(1)}(\vec{z}_\mathrm{i},l)\right]}{\sqrt{\mathrm{Sp}\left[\underline{\mathrm{A}}^{(0)}(\vec{z}_\mathrm{i},l)\right]+1}} = \frac{1}{8\kappa^{(0)}(\vec{z}_\mathrm{i},l)}\mathrm{Sp}\left[\underline{\mathrm{A}}^{(1)}(\vec{z}_\mathrm{i},l)\right]\,, \tag{7.20}$$

$$\begin{aligned}
\kappa^{(2)}(\vec{z},l) &= \frac{1}{4}\frac{\mathrm{Sp}\left[\underline{\mathrm{A}}^{(2)}(\vec{z}_\mathrm{i},l)\right]}{\sqrt{\mathrm{Sp}\left[\underline{\mathrm{A}}^{(0)}(\vec{z}_\mathrm{i},l)\right]+1}}-\frac{1}{16}\frac{\left(\mathrm{Sp}\left[\underline{\mathrm{A}}^{(1)}(\vec{z}_\mathrm{i},l)\right]\right)^2}{\sqrt{\mathrm{Sp}\left[\underline{\mathrm{A}}^{(0)}(\vec{z}_\mathrm{i},l)\right]+1}^3} \\
&= \frac{1}{8\kappa^{(0)}(\vec{z}_\mathrm{i},l)}\mathrm{Sp}\left[\underline{\mathrm{A}}^{(2)}(\vec{z}_\mathrm{i},l)\right]-\frac{[\kappa^{(1)}(\vec{z}_\mathrm{i},l)]^2}{2\kappa^{(0)}(\vec{z}_\mathrm{i},l)}\,.
\end{aligned} \tag{7.21}$$

Analog geht man bei der Berechnung von $\vec{\gamma}=\sum_{k=0}^{\infty}\vec{\gamma}^{(k)}(\vec{z}_\mathrm{i},l)$ vor und erhält

$$\vec{\gamma}^{(0)}(\vec{z}_\mathrm{i},l) = -\frac{1}{4\kappa^{(0)}(\vec{z}_\mathrm{i},l)}\begin{pmatrix}A^{(0)}_{23}-A^{(0)}_{32}\\ A^{(0)}_{31}-A^{(0)}_{13}\\ A^{(0)}_{12}-A^{(0)}_{21}\end{pmatrix}\,, \tag{7.22}$$

$$\vec{\gamma}^{(1)}(\vec{z}_\mathrm{i},l) = -\frac{1}{4\kappa^{(0)}(\vec{z}_\mathrm{i},l)}\begin{pmatrix}A^{(1)}_{23}-A^{(1)}_{32}\\ A^{(1)}_{31}-A^{(1)}_{13}\\ A^{(1)}_{12}-A^{(1)}_{21}\end{pmatrix}-\frac{\kappa^{(1)}(\vec{z}_\mathrm{i},l)}{\kappa^{(0)}(\vec{z}_\mathrm{i},l)}\vec{\gamma}^{(0)}(\vec{z}_\mathrm{i},l)\,, \tag{7.23}$$

$$\vec{\gamma}^{(2)}(\vec{z}_{\rm i},l) = -\frac{1}{4\kappa^{(0)}(\vec{z}_{\rm i},l)}\begin{pmatrix} A^{(2)}_{23}-A^{(2)}_{32} \\ A^{(2)}_{31}-A^{(2)}_{13} \\ A^{(2)}_{12}-A^{(2)}_{21}\end{pmatrix} - \frac{\kappa^{(1)}(\vec{z}_{\rm i},l)}{\kappa^{(0)}(\vec{z}_{\rm i},l)}\vec{\gamma}^{(1)}(\vec{z}_{\rm i},l) - \frac{\kappa^{(2)}(\vec{z}_{\rm i},l)}{\kappa^{(0)}(\vec{z}_{\rm i},l)}\vec{\gamma}^{(0)}(\vec{z}_{\rm i},l)\,. \tag{7.24}$$

7.3 Die Bewegungsgleichung der Spintransferquaternion

Eine Alternative zur iterativen Bestimmung von $\vec{\gamma}$ und κ, die den (Um-)Weg über die Spintransfermatrix $\underline{\rm A}(\vec{z}_{\rm i},l)$ vermeidet, stellt die Berechnung über ihre Bewegungsgleichungen [7] dar,

$$\vec{\gamma}' = \frac{1}{2}\left(\vec{\Omega}\times\vec{\gamma}+\kappa\vec{\Omega}\right), \tag{7.25}$$

$$\kappa' = -\frac{1}{2}\vec{\gamma}\cdot\vec{\Omega} \tag{7.26}$$

mit $\vec{\Omega}$ aus (6.9).

Zur Herleitung benötigt man die mathematische Verknüpfung zwischen $\underline{\Omega}$ und $\vec{\Omega}$ aus (6.11)

$$\vec{\Omega}\times\vec{S} = \underline{\Omega}\,\vec{S}\,,\ \sum_{k,l=1}^{3}\varepsilon_{kli}\Omega_k S_l = \sum_{l=1}^{3}\Omega_{il}S_l\,,\ \Omega_{il} = \sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{kli}\Omega_k \tag{7.27}$$

und die Ableitung eines Matrizenelementes A_{ij} aus (6.14)

$$\frac{d}{dl}A_{ij} = \sum_{k=1}^{3}\Omega_{ik}A_{kj}\,. \tag{7.28}$$

Mit diesen Vorüberlegungen folgt

$$\frac{d\kappa}{dl} = \frac{1}{4\sqrt{{\rm Sp}\,[\underline{\rm A}]+1}}\sum_{i=1}^{3}\frac{d}{dl}A_{ii} = \frac{1}{4\sqrt{{\rm Sp}\,[\underline{\rm A}]+1}}\sum_{i,k=1}^{3}\Omega_{ik}A_{ki}\,, \tag{7.29}$$

Durch Verwendung von (7.6) werden die Matrixelemente A_{ij} durch die Quaternion $\vec{\gamma}_\kappa$ ersetzt,

$$\begin{aligned}\frac{d\kappa}{dl} &= \frac{1}{4\sqrt{{\rm Sp}\,[\underline{\rm A}]+1}}\sum_{i,k,m}\varepsilon_{mki}\Omega_m\left[(1-2\vec{\gamma}^2)\delta_{ki}+2\gamma_k\gamma_i-2\kappa\varepsilon_{kio}\gamma_o\right] \\ &= -\frac{\kappa}{2\sqrt{{\rm Sp}\,[\underline{\rm A}]+1}}\sum_{i,k,m,o}\varepsilon_{kio}\varepsilon_{kim}\gamma_o\Omega_m = -\frac{1}{4}\sum_{m,o}2\delta_{om}\gamma_o\Omega_m \\ &= -\frac{1}{2}\vec{\gamma}\cdot\vec{\Omega}\,.\end{aligned} \tag{7.30}$$

Ebenso wird die komponentenweise Ableitung des Quaternionenvektors behandelt,

$$\begin{aligned}\frac{d\gamma_l}{dl} &= \frac{d}{dl}\Big[-\frac{1}{2\sqrt{\mathrm{Sp}\,[\underline{\mathrm{A}}]+1}}\sum_{i,j=1}^{3}A_{ij}\varepsilon_{ijl}\Big] \\ &= -\frac{\gamma_l}{2(\mathrm{Sp}\,[\underline{\mathrm{A}}]+1)}\sum_k\frac{d}{dl}A_{kk}-\frac{1}{2\sqrt{\mathrm{Sp}\,[\underline{\mathrm{A}}]+1}}\sum_{i,j}\varepsilon_{ijl}\frac{d}{dl}A_{ij}\,. \quad (7.31)\end{aligned}$$

Im folgenden werden die Ableitungen der beiden Summanden einzeln umgeformt. Der 1. Summand vereinfacht sich wie $\frac{d\kappa}{dl}$ zu

$$\sum_k\frac{d}{dl}A_{kk}=-4\kappa\vec{\gamma}\cdot\vec{\Omega}\,. \quad (7.32)$$

Für den zweiten Term ergibt sich

$$\begin{aligned}\sum_{i,j}\varepsilon_{ijl}\frac{d}{dl}A_{ij} &= \sum_{i,j,k}\varepsilon_{ijl}\Omega_{ik}A_{kj} \\ &= \sum_{i,j,k,m}\varepsilon_{ijl}\varepsilon_{mki}\Omega_m\Big[(1-2\vec{\gamma}^2)\delta_{kj}-2\kappa\gamma_o\varepsilon_{kjo}+2\gamma_k\gamma_j\Big] \\ &= \sum_{j,k,m}\Omega_m(\delta_{jm}\delta_{lk}-\delta_{jk}\delta_{ml})\Big[(1-2\vec{\gamma}^2)\delta_{kj}-2\kappa\gamma_o\varepsilon_{kjo}+2\gamma_k\gamma_j\Big] \\ &= \sum_{j,k}\Omega_j\delta_{lk}\Big[\delta_{kj}(1-2\vec{\gamma}^2)-2\kappa\gamma_o\varepsilon_{kjo}+2\gamma_k\gamma_j\Big]- \\ &\quad \Omega_l\sum_{j,k}\Big[(1-2\vec{\gamma}^2)\delta_{kj}+2\gamma_k\gamma_j\delta_{kj}\Big] \\ &= \Omega_l(1-2\vec{\gamma}^2)-2\kappa\sum_{j,o}\varepsilon_{ljo}\Omega_j\gamma_o+2\gamma_l\sum_j\Omega_j\gamma_j-\Omega_l(3-4\vec{\gamma}^2) \\ &= -2\Omega_l(1-\vec{\gamma}^2)-2\kappa\sum_{j,o}\varepsilon_{jol}\Omega_j\gamma_o+2\vec{\Omega}\cdot\vec{\gamma}\gamma_l\,. \quad (7.33)\end{aligned}$$

Das Einsetzen von (7.32) und (7.33) in (7.31) liefert

$$\begin{aligned}\frac{d\gamma_l}{dl} &= \frac{2\kappa\gamma_l}{\mathrm{Sp}\,[\underline{\mathrm{A}}]+1}\vec{\gamma}\cdot\vec{\Omega}-\frac{1}{\sqrt{\mathrm{Sp}\,[\underline{\mathrm{A}}]+1}}\Big[\Omega_l(\vec{\gamma}^2-1)-\kappa\sum_{j,o}\varepsilon_{jol}\Omega_j\gamma_o+\vec{\Omega}\cdot\vec{\gamma}\gamma_l\Big] \\ &= \frac{1}{2}\kappa\Omega_l+\frac{1}{2}(\vec{\Omega}\times\vec{\gamma})_l\,, \quad (7.34)\end{aligned}$$

womit (7.25) gezeigt ist.

Die Quaternion $\vec{\gamma}_\kappa=\binom{\vec{\gamma}}{\kappa}$ erlaubt die Darstellung der Bewegungsgleichung (7.25)

und (7.26) in einer kompakten Form,

$$\vec{\gamma}'_\kappa = \underline{\Lambda}(\vec{z}_\mathrm{i}, l)\vec{\gamma}_\kappa \quad \text{mit} \tag{7.35}$$

$$\underline{\Lambda}(\vec{z}_\mathrm{i}, l) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \underline{\Omega}(\vec{z}_\mathrm{i}, l) & \vec{\Omega}(\vec{z}_\mathrm{i}, l) \\ -\vec{\Omega}^T(\vec{z}_\mathrm{i}, l) & 0 \end{pmatrix} \tag{7.36}$$

und $\underline{\Omega}(\vec{z}_\mathrm{i}, l)$ aus (6.11). Wegen der Antisymmetrie der Matrix $\underline{\Omega}(\vec{z}_\mathrm{i}, l)$ ist auch $\underline{\Lambda}(\vec{z}_\mathrm{i}, l)$ antisymmetrisch, $\underline{\Lambda}^T(\vec{z}_\mathrm{i}, l) = -\underline{\Lambda}(\vec{z}_\mathrm{i}, l)$. Deshalb bleibt die Länge des Vektors $\vec{\gamma}_\kappa$ konstant,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dl}|\vec{\gamma}_\kappa| &= \frac{1}{|\vec{\gamma}_\kappa|}\sum_{j=1}^{4}\gamma_{\kappa,j}\gamma'_{\kappa,j} = \frac{1}{|\vec{\gamma}_\kappa|}\sum_{j,k=1}^{4}\Lambda_{jk}\gamma_{\kappa,j}\gamma_{\kappa,k} \\
&= \frac{1}{2|\vec{\gamma}_\kappa|}\Big(\sum_{j,k=1}^{4}\Lambda_{jk}\gamma_{\kappa,j}\gamma_{\kappa,k} + \sum_{j,k=1}^{4}\Lambda_{jk}\gamma_{\kappa,j}\gamma_{\kappa,k}\Big) \\
&= \frac{1}{2|\vec{\gamma}_\kappa|}\left(\sum_{j,k=1}^{4}\Lambda_{jk}\gamma_{\kappa,j}\gamma_{\kappa,k} - \sum_{j,k=1}^{4}\underbrace{\Lambda_{kj}\gamma_{\kappa,j}\gamma_{\kappa,k}}_{\Lambda_{jk}\gamma_{\kappa,k}\gamma_{\kappa,j}}\right) \\
\frac{d}{dl}|\vec{\gamma}_\kappa| &= 0\,.
\end{aligned} \tag{7.37}$$

Der Beweis konstanter Länge wurde in Abschnitt 7.1 auf anderem Wege skizziert. Die Lösung des Differentialgleichungssystems ist demnach wie im Fall der Spinmatrizen eine orthogonale Matrix $\underline{\mathrm{G}}$ mit

$$\vec{\gamma}_\kappa = \underline{\mathrm{G}}(\vec{z}_\mathrm{i}, l)\begin{pmatrix}\vec{0}\\1\end{pmatrix}\,, \tag{7.38}$$

wobei die Anfangsbedingung $\vec{\gamma}_\kappa(l=0) = \left(\begin{smallmatrix}\vec{0}\\1\end{smallmatrix}\right)$ für $\phi = 0$ aus (7.4) folgt. Demnach erfüllt $\underline{\mathrm{G}}(\vec{z}_\mathrm{i}, l)$ die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dl}\underline{\mathrm{G}}(\vec{z}_\mathrm{i}, l) = \underline{\Lambda}(\vec{z}_\mathrm{i}, l)\underline{\mathrm{G}}(\vec{z}_\mathrm{i}, l)\,, \underline{\mathrm{G}}(\vec{z}_\mathrm{i}, l=0) = \underline{\mathrm{I}}_{4\times 4}\,. \tag{7.39}$$

7.4 Iterative Lösung der Spintransferquaternion(2)

Es wird der gleiche Formalismus wie bei den bisherigen Iterationen in Abschnitt 3 und 6.3 verwendet: Unter der Annahme, daß die Taylorreihen konvergieren, werden die Matrizen $\underline{\mathrm{G}}(\vec{z}_\mathrm{i}, l)$ und $\underline{\Lambda}(\vec{z}_\mathrm{i}, l)$ um den Ursprung bezüglich $\vec{z}_\mathrm{i}$ entwickelt und in die Bewegungsgleichung (7.39) eingesetzt,

$$\underline{\mathrm{G}}(\vec{z}_\mathrm{i}, l) = \sum_{k=0}^{\infty}\underline{\mathrm{G}}^{(k)}(\vec{z}_\mathrm{i}, l)\,, \underline{\Lambda}(\vec{z}_\mathrm{i}, l) = \sum_{j=0}^{\infty}\underline{\Lambda}^{(j)}(\vec{z}_\mathrm{i}, l)\,, \tag{7.40}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dl}\underline{\mathrm{G}}^{(k)}(\vec{z}_{\mathrm{i}},l) \;=\; \sum_{k,j=0}^{\infty} \underline{\Lambda}^{(j)}(\vec{z}_{\mathrm{i}},l)\underline{\mathrm{G}}^{(k)}(\vec{z}_{\mathrm{i}},l)\,. \tag{7.41}$$

Die 0. Ordnung und die n-te Ordnung in den Anfangskoordinaten werden aussortiert und die n-te Ordnung -wie in den übrigen Iterationsverfahren- mit Hilfe der 0. Ordnung auf die bekannten niedrigeren Ordnungen zurückgeführt,

$$\frac{d}{dl}\underline{\mathrm{G}}^{(0)}(\vec{z}_{\mathrm{i}},l) \;=\; \underline{\Lambda}^{(0)}(\vec{z}_{\mathrm{i}},l)\underline{\mathrm{G}}^{(0)}(\vec{z}_{\mathrm{i}},l)\,, \tag{7.42}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dl}\underline{\mathrm{G}}^{(n)}(\vec{z}_{\mathrm{i}},l) &= \sum_{k=0}^{n} \underline{\Lambda}^{(n-k)}(\vec{z}_{\mathrm{i}},l)\underline{\mathrm{G}}^{(k)}(\vec{z}_{\mathrm{i}},l) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \underline{\Lambda}^{(n-k)}(\vec{z}_{\mathrm{i}},l)\underline{\mathrm{G}}^{(k)}(\vec{z}_{\mathrm{i}},l) + \underline{\Lambda}^{(0)}(\vec{z}_{\mathrm{i}},l)\underline{\mathrm{G}}^{(n)}(\vec{z}_{\mathrm{i}},l) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \underline{\Lambda}^{(n-k)}(\vec{z}_{\mathrm{i}},l)\underline{\mathrm{G}}^{(k)}(\vec{z}_{\mathrm{i}},l) + \\
&\quad \Big[\frac{d}{dl}\underline{\mathrm{G}}^{(0)}(\vec{z}_{\mathrm{i}},l)\Big]\big[\underline{\mathrm{G}}^{(0)}(\vec{z}_{\mathrm{i}},l)\big]^{-1}\underline{\mathrm{G}}^{(n)}(\vec{z}_{\mathrm{i}},l)\,, \\
\underline{\mathrm{G}}^{(0)}(\vec{z}_{\mathrm{i}},l)\Big[\frac{d}{dl}\big[\underline{\mathrm{G}}^{(0)}(\vec{z}_{\mathrm{i}},l)\big]^{-1}\underline{\mathrm{G}}^{(n)}(\vec{z}_{\mathrm{i}},l)\Big] &= \sum_{k=0}^{n-1} \underline{\Lambda}^{(n-k)}(\vec{z}_{\mathrm{i}},l)\underline{\mathrm{G}}^{(k)}(\vec{z}_{\mathrm{i}},l)\,.
\end{aligned}$$

Die Integration unter Berücksichtigung der Anfangsbedingung

$$\underline{\mathrm{G}}^{(n)}(\vec{z}_{\mathrm{i}},l) = \begin{cases} \underline{\mathrm{I}}_{4\times 4} & \text{für} \quad n=0 \\ \underline{0}_{4\times 4} & \text{für} \quad n\neq 0 \end{cases}, \tag{7.43}$$

führt auf die n-te Ordnung als Integral über die bereits berechneten, niedrigeren Ordnungen,

$$\underline{\mathrm{G}}^{(n)}(\vec{z}_{\mathrm{i}},l) = \underline{\mathrm{G}}^{(0)}(\vec{z}_{\mathrm{i}},l)\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^l \big[\underline{\mathrm{G}}^{(0)}(\vec{z}_{\mathrm{i}},l')\big]^{-1}\underline{\Lambda}^{(n-k)}(\vec{z}_{\mathrm{i}},l')\underline{\mathrm{G}}^{(k)}(\vec{z}_{\mathrm{i}},l')\,dl'\,. \tag{7.44}$$

Da die 0. Ordnung die spezielle Lösung der Spintransferquaternion auf der Referenzkurve darstellt, gilt die Orthogonalität von $\underline{\mathrm{G}}^{(0)}(\vec{z}_{\mathrm{i}},l)$, und (7.44) vereinfacht sich zu

$$\underline{\mathrm{G}}^{(n)}(\vec{z}_{\mathrm{i}},l) = \underline{\mathrm{G}}^{(0)}(\vec{z}_{\mathrm{i}},l)\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^l \big[\underline{\mathrm{G}}^{(0)}(\vec{z}_{\mathrm{i}},l')\big]^{T}\underline{\Lambda}^{(n-k)}(\vec{z}_{\mathrm{i}},l')\underline{\mathrm{G}}^{(k)}(\vec{z}_{\mathrm{i}},l')\,dl'\,. \tag{7.45}$$

Durch (7.38) sind die n-ten Ordnungen $\vec{\gamma}_{\kappa}^{(n)}(\vec{z}_{\mathrm{i}},l)$ und $\underline{\mathrm{G}}^{(n)}(\vec{z}_{\mathrm{i}},l)$ miteinander verknüpft,

$$\vec{\gamma}_{\kappa}^{(n)}(\vec{z}_{\mathrm{i}},l) \;=\; \underline{\mathrm{G}}^{(n)}(\vec{z}_{\mathrm{i}},l)\begin{pmatrix}\vec{0}\\ 1\end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= \underline{\mathrm{G}}^{(0)}(\vec{z}_\mathrm{i},l)\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^l \left[\underline{\mathrm{G}}^{(0)}(\vec{z}_\mathrm{i},l')\right]^T \underline{\Lambda}^{(n-k)}(\vec{z}_\mathrm{i},l')\underline{\mathrm{G}}^{(k)}(\vec{z}_\mathrm{i},l')\begin{pmatrix}\vec{0}\\1\end{pmatrix} dl' \\
&= \underline{\mathrm{G}}^{(0)}(\vec{z}_\mathrm{i},l)\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^l \left[\underline{\mathrm{G}}^{(0)}(\vec{z}_\mathrm{i},l')\right]^T \underline{\Lambda}^{(n-k)}(\vec{z}_\mathrm{i},l')\vec{\gamma}_\kappa^{(k)}(\vec{z}_\mathrm{i},l')\, dl' ,\\
&\quad n=1,\ldots,\infty . \qquad (7.46)
\end{aligned}
$$

Zusammengefaßt lautet das Verfahren zur direkten Berechnung der 0., 1. und 2. Ordnung der Spintransferquaternion $\vec{\gamma}_\kappa(\vec{z}_\mathrm{i},l)$

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dl}\underline{\mathrm{G}}^{(0)}(\vec{z}_\mathrm{i},l) &= \underline{\Lambda}^{(0)}(\vec{z}_\mathrm{i},l)\underline{\mathrm{G}}^{(0)}(\vec{z}_\mathrm{i},l)\,,\underline{\mathrm{G}}^{(0)}(\vec{z}_\mathrm{i},l=0)=\underline{\mathrm{I}}_{4\times4}\,, && (7.47)\\
\vec{\gamma}_\kappa^{(0)} &= \underline{\mathrm{G}}^{(0)}(\vec{z}_\mathrm{i},l)\begin{pmatrix}\vec{0}\\1\end{pmatrix}, && (7.48)\\
\vec{\gamma}_\kappa^{(1)}(\vec{z}_\mathrm{i},l) &= \underline{\mathrm{G}}^{(0)}(\vec{z}_\mathrm{i},l)\int_0^l \left[\underline{\mathrm{G}}^{(0)}(\vec{z}_\mathrm{i},l')\right]^T \underline{\Lambda}^{(1)}(\vec{z}_\mathrm{i},l')\vec{\gamma}_\kappa^{(0)}(\vec{z}_\mathrm{i},l')\,dl' , && (7.49)\\
\vec{\gamma}_\kappa^{(2)}(\vec{z}_\mathrm{i},l) &= \underline{\mathrm{G}}^{(0)}(\vec{z}_\mathrm{i},l)\int_0^l \left[\underline{\mathrm{G}}^{(0)}(\vec{z}_\mathrm{i},l')\right]^T \Big[\underline{\Lambda}^{(2)}(\vec{z}_\mathrm{i},l')\vec{\gamma}_\kappa^{(0)}(\vec{z}_\mathrm{i},l') + \\
&\quad \underline{\Lambda}^{(1)}(\vec{z}_\mathrm{i},l')\vec{\gamma}_\kappa^{(1)}(\vec{z}_\mathrm{i},l')\Big]\,dl' . && (7.50)
\end{aligned}
$$

Durch die iterative Lösung der Matrix $\underline{\mathrm{G}}(\vec{z}_\mathrm{i},l)$ geht allerdings ihre Orthogonalität und damit die Längenerhaltung der Quaternion verloren.
Neben diesem Verfahren existiert ein zweites von Hoffstätter [7], dessen Ergebnis sich nur in der Berechnung der 0. Ordnung vom obigen Resultat unterscheidet. Um dies zu verdeutlichen, wird die Herleitung kurz skizziert. Das teilchenoptische Element wird gedanklich in zwei einzelne Elemente zerlegt: Das erste Element enthält den Anteil 0. Ordnung $\vec{\gamma}_\kappa^{(0)}(\vec{z}_\mathrm{i},l) = \begin{pmatrix}\vec{\gamma}^{(0)}(\vec{z}_\mathrm{i},l)\\ \kappa^{(0)}(\vec{z}_\mathrm{i},l)\end{pmatrix}$, das zweite die höheren Ordnungen $\vec{\gamma}_\kappa^{(H)}(\vec{z}_\mathrm{i},l) = \begin{pmatrix}\vec{\gamma}^{(H)}(\vec{z}_\mathrm{i},l)\\ \kappa^{(H)}(\vec{z}_\mathrm{i},l)\end{pmatrix}$. Die gesamte Quaternion $\vec{\gamma}_\kappa(\vec{z}_\mathrm{i},l) = \begin{pmatrix}\vec{\gamma}(\vec{z}_\mathrm{i},l)\\ \kappa(\vec{z}_\mathrm{i},l)\end{pmatrix}$ für diese beiden hintereinanderliegenden Elemente berechnet sich zu

$$
\begin{aligned}
\vec{\gamma}(\vec{z}_\mathrm{i},l) &= \vec{\gamma}^{(0)}(\vec{z}_\mathrm{i},l)\kappa^{(H)}(\vec{z}_\mathrm{i},l) + \vec{\gamma}^{(H)}(\vec{z}_\mathrm{i},l)\kappa^{(0)}(\vec{z}_\mathrm{i},l) - \vec{\gamma}^{(0)}(\vec{z}_\mathrm{i},l)\times\vec{\gamma}^{(H)}(\vec{z}_\mathrm{i},l)\,,\\
\kappa(\vec{z}_\mathrm{i},l) &= \kappa^{(0)}(\vec{z}_\mathrm{i},l)\kappa^{(H)}(\vec{z}_\mathrm{i},l) - \vec{\gamma}^{(0)}(\vec{z}_\mathrm{i},l)\cdot\vec{\gamma}^{(H)}(\vec{z}_\mathrm{i},l) \qquad (7.51)
\end{aligned}
$$

(Herleitung s. S.79) bzw. in einer kompakteren Form

$$
\begin{aligned}
\vec{\gamma}_\kappa(\vec{z}_\mathrm{i},l) &= \underline{L}^{(0)}(\vec{z}_\mathrm{i},l)\vec{\gamma}_\kappa^{(H)}(\vec{z}_\mathrm{i},l) \text{ mit} && (7.52)\\
\underline{L}^{(0)}(\vec{z}_\mathrm{i},l) &= \begin{pmatrix}\kappa^{(0)}(\vec{z}_\mathrm{i},l)\underline{\mathrm{I}}_{3\times3} - \underline{\Gamma}^{(0)}(\vec{z}_\mathrm{i},l) & \vec{\gamma}^{(0)}(\vec{z}_\mathrm{i},l)\\ -\left[\vec{\gamma}^{(0)}(\vec{z}_\mathrm{i},l)\right]^T & \kappa^{(0)}(\vec{z}_\mathrm{i},l)\end{pmatrix} \text{ und} && (7.53)\\
\underline{\Gamma}^{(0)}(\vec{z}_\mathrm{i},l) &= \begin{pmatrix}0 & -\gamma_\mathrm{l}^{(0)} & \gamma_\mathrm{y}^{(0)}\\ \gamma_\mathrm{l}^{(0)} & 0 & -\gamma_\mathrm{x}^{(0)}\\ -\gamma_\mathrm{y}^{(0)} & \gamma_\mathrm{x}^{(0)} & 0\end{pmatrix}. && (7.54)
\end{aligned}
$$

Die 0. Ordnung, die durch die Matrix $\underline{L}^{(0)}(\vec{z}_\mathrm{i}, l)$ ausgedrückt wird,

$$\vec{\gamma}_\kappa^{(0)} = \underline{L}^{(0)}(\vec{z}_\mathrm{i}, l) \begin{pmatrix} \vec{0} \\ 1 \end{pmatrix} , \tag{7.55}$$

muß ebenfalls enthalten sein, so daß der Ansatz (7.51) modifiziert wird,

$$\vec{\gamma}_\kappa(\vec{z}_\mathrm{i}, l) = \underline{L}^{(0)}(\vec{z}_\mathrm{i}, l) \left[\begin{pmatrix} \vec{0} \\ 1 \end{pmatrix} + \vec{\gamma}_\kappa^{(H)}(\vec{z}_\mathrm{i}, l) \right] \tag{7.56}$$

$$= \underline{L}^{(0)}(\vec{z}_\mathrm{i}, l) \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{\vec{\gamma}}_\kappa^{(k)}(\vec{z}_\mathrm{i}, l) \tag{7.57}$$

mit $\tilde{\vec{\gamma}}_\kappa^{(0)}(\vec{z}_\mathrm{i}, l) = \left(\begin{smallmatrix} \vec{0} \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ und $\tilde{\vec{\gamma}}_\kappa^{(k)}(\vec{z}_\mathrm{i}, l)$ als k-te Ordnung in den Anfangskoordinaten. Der Ansatz (7.56) kann somit als Variationsverfahren um die 0. Ordnung verstanden werden. Die k-te Ordnung $\vec{\gamma}_\kappa^{(k)}(\vec{z}_\mathrm{i}, l)$ der Spintransferquaternion berechnet sich mit (7.57) zu

$$\vec{\gamma}_\kappa^{(k)}(\vec{z}_\mathrm{i}, l) = \underline{L}^{(0)}(\vec{z}_\mathrm{i}, l) \tilde{\vec{\gamma}}_\kappa^{(k)} . \tag{7.58}$$

Die Entwicklung von $\underline{\Lambda}(\vec{z}_\mathrm{i}, l)$ (7.40) und der Ansatz (7.57) werden in die Bewegungsgleichung (7.35) eingesetzt,

$$\frac{d}{dl} \left[\underline{L}^{(0)}(\vec{z}_\mathrm{i}, l) \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{\vec{\gamma}}_\kappa^{(k)}(\vec{z}_\mathrm{i}, l) \right] = \sum_{j,k=0}^{\infty} \underline{\Lambda}^{(j)}(\vec{z}_\mathrm{i}, l) \underline{L}^{(0)}(\vec{z}_\mathrm{i}, l) \tilde{\vec{\gamma}}_\kappa^{(k)}(\vec{z}_\mathrm{i}, l) . \tag{7.59}$$

Man sortiert nach der 0. Ordnung in den Anfangskoordinaten

$$\frac{d}{dl} \vec{\gamma}_\kappa^{(0)}(\vec{z}_\mathrm{i}, l) = \underline{\Lambda}^{(0)}(\vec{z}_\mathrm{i}, l) \vec{\gamma}_\kappa^{(0)}(\vec{z}_\mathrm{i}, l) \text{ oder mit (7.55)} \tag{7.60}$$

$$\frac{d}{dl} \underline{L}^{(0)}(\vec{z}_\mathrm{i}, l) = \underline{\Lambda}^{(0)}(\vec{z}_\mathrm{i}, l) \underline{L}^{(0)}(\vec{z}_\mathrm{i}, l) . \tag{7.61}$$

Da für die Matrizen $\underline{\mathrm{G}}^{(0)}(\vec{z}_\mathrm{i}, l)$ und $\underline{L}^{(0)}(\vec{z}_\mathrm{i}, l)$ neben der Differentialgleichung (7.47) und (7.61) auch die Randbedingung $\underline{\mathrm{L}}^{(0)}(\vec{z}_\mathrm{i}, l = 0) = \underline{\mathrm{I}}_{4\times 4}$ aus (7.53) übereinstimmen, sind beide identisch.
Der Anteil n-ter Ordnung aus (7.59) wird, um die n-te Ordnungen auf die niedrigeren zurückzuführen, mit Hilfe der 0. Ordnung weiter umgeformt,

$$\frac{d}{dl} \left[\underline{L}^{(0)}(\vec{z}_\mathrm{i}, l) \tilde{\vec{\gamma}}_\kappa^{(n)}(\vec{z}_\mathrm{i}, l) \right] =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \underline{\Lambda}^{(n-k)}(\vec{z}_\mathrm{i}, l) \underline{L}^{(0)}(\vec{z}_\mathrm{i}, l) \tilde{\vec{\gamma}}_\kappa^{(k)}(\vec{z}_\mathrm{i}, l) + \underline{\Lambda}^{(0)}(\vec{z}_\mathrm{i}, l) \underline{L}^{(0)}(\vec{z}_\mathrm{i}, l) \tilde{\vec{\gamma}}_\kappa^{(n)}(\vec{z}_\mathrm{i}, l)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \underline{\Lambda}^{(n-k)}(\vec{z}_\mathrm{i}, l) \underline{L}^{(0)}(\vec{z}_\mathrm{i}, l) \tilde{\vec{\gamma}}_\kappa^{(k)}(\vec{z}_\mathrm{i}, l) + \left[\frac{d}{dl} \underline{L}^{(0)}(\vec{z}_\mathrm{i}, l) \right] \tilde{\vec{\gamma}}_\kappa^{(n)}(\vec{z}_\mathrm{i}, l) ,$$

$$\underline{L}^{(0)}(\vec{z}_{\rm i},l)\frac{d}{dl}\tilde{\vec{\gamma}}_{\kappa}^{(n)}(\vec{z}_{\rm i},l) \;=\; \sum_{k=0}^{n-1}\underline{\Lambda}^{(n-k)}(\vec{z}_{\rm i},l)\underline{L}^{(0)}(\vec{z}_{\rm i},l)\tilde{\vec{\gamma}}_{\kappa}^{(k)}(\vec{z}_{\rm i},l)\,,$$

$$\tilde{\vec{\gamma}}_{\kappa}^{(n)}(\vec{z}_{\rm i},l) \;=\; \sum_{k=0}^{n-1}\int_0^l \left[\underline{\rm L}^{(0)}(\vec{z}_{\rm i},l')\right]^{-1}\underline{\Lambda}^{(n-k)}(\vec{z}_{\rm i},l')\underline{\rm L}^{(0)}(\vec{z}_{\rm i},l')\tilde{\vec{\gamma}}_{\kappa}^{(k)}(\vec{z}_{\rm i},l')\,dl'\,.$$

Unter Ausnutzung der Orthogonalität von $\underline{L}^{(0)}(\vec{z}_{\rm i},l)$, die wie die Orthogonalität der Matrix $\underline{\rm G}^{(0)}(\vec{z}_{\rm i},l)$ auf S. 60 begründet wird, vereinfacht sich $\tilde{\vec{\gamma}}_{\kappa}^{(n)}(\vec{z}_{\rm i},l)$ zu

$$\tilde{\vec{\gamma}}_{\kappa}^{(n)}(\vec{z}_{\rm i},l) = \sum_{k=0}^{n-1}\int_0^l \left[\underline{\rm L}^{(0)}(\vec{z}_{\rm i},l')\right]^{T}\underline{\Lambda}^{(n-k)}(\vec{z}_{\rm i},l')\underline{\rm L}^{(0)}(\vec{z}_{\rm i},l')\tilde{\vec{\gamma}}_{\kappa}^{(k)}(\vec{z}_{\rm i},l')\,dl'\,.$$

In die n-te Ordnung der Quaternion (7.58) setzt man $\tilde{\vec{\gamma}}_{\kappa}^{(n)}(\vec{z}_{\rm i},l)$ ein,

$$\vec{\gamma}_{\kappa}^{(n)}(\vec{z}_{\rm i},l) \;=\; \underline{L}^{(0)}(\vec{z}_{\rm i},l)\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^l \left[\underline{\rm L}^{(0)}(\vec{z}_{\rm i},l')\right]^{T}\underline{\Lambda}^{(n-k)}(\vec{z}_{\rm i},l')\vec{\gamma}_{\kappa}^{(k)}(\vec{z}_{\rm i},l')\,dl', \quad (7.62)$$

und erhält die gleiche Formel (7.46) zur Berechnung der Ordnungen $n \geq 1$ wie beim ersten Verfahren.
So unterscheiden sich die beiden Iterationen allein in der Berechnung der 0. Ordnung: Die zusätzliche Überlegung, das Element zu zerlegen, reduziert das Differentialgleichungssystem zur Lösung der 0. Ordnung von einem 9-dimensionalen auf ein 3-dimensionales System.

Kapitel 8

Die Spintransferquaternion bis in 2. Ordnung

Die Berechnung der Quaternion für den Quadrupol, den Dipol, die Kombination von Quadrupol und Dipol und den Sextupol erfolgt mit *Mathematica* einmal über die Spinmatrizen und zum anderen direkt über ihre Bewegungsgleichung. Beim ersten Verfahren wird die Spinmatrix gemäß (6.24) bis (6.26) bis in 2. Ordnung Anfangskoordinaten bestimmt und anschließend in (7.19) bis (7.24) zur Berechnung von $\vec{\gamma}_\kappa(\vec{z}_\mathrm{i}, l)$ eingesetzt, während der zweite Weg über die Gleichungen (7.47) bis (7.50) zum Ziel führt. Der zusätzliche Rechenaufwand im Vergleich zum vereinfachten Weg (7.60) bleibt für die oben genannten Elemente klein.
Wie erwartet stimmen die Resultate aus beiden Iterationsverfahren überein, und sie werden in der gleichen Form wie die Phasenraumbewegung in Kapitel 5 angegeben. Hierbei werden die trigonometrischen und die hyperbolischen Funktionen sowie häufig vorkommende Ausdrücke wie folgt ersetzt,

$$\omega_1 l = \mathsf{u}\,, \qquad \omega_2 l = \mathsf{v}\,, \qquad a\gamma_0\,\mathsf{v} = \mathsf{x}\,, \qquad \Omega l = \mathsf{y}\,,$$

$$\sin\mathsf{u} = \mathsf{su}\,,\quad \sinh\mathsf{u} = \mathsf{shu}\,,\quad \sin\frac{\mathsf{u}}{2} = \mathsf{suh}\,,\quad \sinh\frac{\mathsf{u}}{2} = \mathsf{shuh}\,,\quad \sinh 2\,\mathsf{u} = \mathsf{sh2u}\,,$$

$$\cos\mathsf{u} = \mathsf{cu}\,,\quad \cosh\mathsf{u} = \mathsf{chu}\,,\quad \cos\frac{\mathsf{u}}{2} = \mathsf{cuh}\,,\quad \cosh\frac{\mathsf{u}}{2} = \mathsf{chuh}\,,\quad \cosh 2\,\mathsf{u} = \mathsf{ch2u}\,,$$

$$\sin\mathsf{v} = \mathsf{sv}\,,\quad \sinh\mathsf{v} = \mathsf{shv}\,,\quad \sin\frac{\mathsf{v}}{2} = \mathsf{svh}\,,\quad \sinh\frac{\mathsf{v}}{2} = \mathsf{shvh}\,,$$

$$\cos\mathsf{v} = \mathsf{cv}\,,\quad \cosh\mathsf{v} = \mathsf{chv}\,,\quad \cos\frac{\mathsf{v}}{2} = \mathsf{cvh}\,,\quad \cosh\frac{\mathsf{v}}{2} = \mathsf{chvh}\,,$$

$$\sin\mathsf{x} = \mathsf{sx}\,,\quad \sinh\mathsf{x} = \mathsf{shx}\,,\quad \sin\frac{\mathsf{x}}{2} = \mathsf{sxh}\,,\quad \sinh\frac{x}{2} = \mathsf{shxh}\,,$$

$$\cos\mathsf{x} = \mathsf{cx}\,,\quad \cosh\mathsf{x} = \mathsf{chx}\,,\quad \cos\frac{\mathsf{x}}{2} = \mathsf{cxh}\,,\quad \cosh\frac{\mathsf{x}}{2} = \mathsf{chxh}\,,$$

$$\sin\mathsf{y} = \mathsf{sy}\,,\quad \sinh\mathsf{y} = \mathsf{shy}\,,\quad \sin\frac{\mathsf{y}}{2} = \mathsf{syh}\,,\quad \sinh\frac{y}{2} = \mathsf{shyh}\,,\quad \sin 2\,\mathsf{y} = \mathsf{s2y}\,,$$

$$\cos\mathsf{y} = \mathsf{cy}\,,\quad \cosh\mathsf{y} = \mathsf{chy}\,,\quad \cos\frac{\mathsf{y}}{2} = \mathsf{cyh}\,,\quad \cosh\frac{\mathsf{y}}{2} = \mathsf{chyh}\,,\quad \cos 2\,\mathsf{y} = \mathsf{c2y}\,,$$

$$\eta = \omega_1^2 + a^2\gamma_0^2\omega_2^2\,, \qquad \theta = 3\omega_1^2 + \omega_2^2\,, \qquad \xi = 5\omega_1^2 + \omega_2^2\,, \qquad \rho = 1 + \gamma_0\,,$$
$$\mu = 1 + 2a + a^2\gamma_0^2\,, \qquad \Upsilon = 1 + \gamma_0 - \gamma_0^2\,, \qquad \chi = 1 + a\gamma_0\,, \qquad \varsigma = a + \gamma_0\,,$$
$$\nu = \gamma_0 + 2a - a\gamma_0^2 \qquad \psi = 1 + a\gamma_0^2\,, \qquad \zeta = -1 + \gamma_0\,, \qquad \varphi = \omega_1^2 - \omega_2^2\,,$$
$$\iota = 1 + 3a\gamma_0 + 2\gamma_0^2\,,$$

$$\sigma = 4\omega_1^4 + 4\omega_1^2\omega_2^2 + (-1 + a^2\gamma_0^2)^2\omega_2^4\,, \qquad \alpha = \chi\gamma_0\,\mathsf{sv} - a\rho\zeta\,\mathsf{v}\,,$$
$$\beta = \frac{1}{2\rho}\left(-\alpha\chi\,\mathsf{sxh} + 2\varsigma\,\mathsf{cxh}\right), \qquad \lambda = \chi\omega_1^2 + a^2\gamma_0\omega_2^2\zeta\,,$$
$$\Gamma = \frac{1}{2\rho}\left(\alpha\chi\,\mathsf{cxh} + 2\varsigma\,\mathsf{sxh}\right), \qquad \varepsilon = \mu\omega_1^2 + a^2\rho\omega_2^2\zeta\,,$$
$$\Phi = \mu\omega_1^2 + (1+a)\,\omega_2^2\,, \qquad \kappa_{\mathrm{Sext}} = \frac{qk_{\mathrm{Sext}}\chi}{mc\sqrt{\rho\zeta}}\,,$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{A} &= \left(2 - \gamma_0 + 2a\gamma_0^2 + a^2\gamma_0^3\right)\omega_1^2 - a^2\gamma_0\rho\omega_2^2\zeta\,,\\
\mathrm{B} &= -2\mu\omega_1^4 + \left(-3 - 4a + 2a^3\gamma_0^2 + a^4\gamma_0^4\right)\omega_1^2\omega_2^2 + (1+a)\left(-1 + a^2\gamma_0^2\right)\omega_2^4\,,\\
\mathrm{C} &= \left(1 + a\left(4 - 3\gamma_0^2\right)\right)\omega_1^4 + \left(3 + 3a^3\gamma_0^4 - a\left(-4 + \gamma_0^2\right) + a^2\left(-4 + 7\gamma_0^2\right)\right)\omega_1^2\omega_2^2\\
&\quad + a^2\left(-4 + 5\gamma_0^2 + a\gamma_0^4\right)\omega_2^4\,,\\
\mathrm{D} &= a^2\gamma_0^3\varphi\omega_2^2 + a^2\Omega^2\omega_2^2 - a^3\gamma_0^4\omega_2^2\Omega^2 + \gamma_0\left(\omega_1^4 - \omega_1^2\omega_2^2\right) + a\gamma_0^2\big(\omega_1^4 +\\
&\quad \left(-1 - 2a + a^2\right)\omega_1^2\omega_2^2 + a^2\omega_2^4\big)\,,\\
\mathrm{E} &= \left(\chi - \gamma_0 - \gamma_0^2 - 2a\gamma_0^3\right)\omega_1^4 + \left(1 + \left(1 + a - a^2\right)\gamma_0 + \left(-1 + a^2\right)\gamma_0^2 + a^2\gamma_0^3\right.\\
&\quad \left.-a^2\gamma_0^4\right)\omega_1^2\omega_2^2 - a^2\gamma_0\rho\omega_2^4\zeta^2\,,\\
\mathrm{F} &= 4\left(2 - a - a^2\gamma_0^2\right)\omega_1^6 + 2\big(4 + a^2\left(-2 + \gamma_0\right)\gamma_0 - a^3\left(-2 + \gamma_0\right)\gamma_0^2 + a^4\gamma_0^4\\
&\quad -a\left(4 + \gamma_0\right)\big)\omega_1^4\omega_2^2 + \big(2 + a^2\left(-2 + \gamma_0\right)\gamma_0 - 2a^3\left(-2 + \gamma_0\right)\gamma_0^2 +\\
&\quad a^5\left(3 - 2\gamma_0\right)\gamma_0^4 + a^6\gamma_0^6 - a\left(5 + 2\gamma_0\right) + 2a^4\gamma_0^3\left(-2 + 3\gamma_0\right)\big)\omega_1^2\omega_2^4 +\\
&\quad a\big(-1 + a\gamma_0^2 - 2a^3\gamma_0^3 + a^4\gamma_0^4 + a^5\gamma_0^6 - 2a^2\gamma_0^2\zeta\big)\omega_2^6\,,\\
\mathrm{G} &= 2\left(-1 - 4a + 3a^4\gamma_0^4 + 2a^3\gamma_0^2\left(2 + \gamma_0\right) - 2a^2\gamma_0\zeta\right)\omega_1^6 + \big(-3 - 8a\\
&\quad +a^2\gamma_0\left(8 - 3\gamma_0\right) + 5a^4\gamma_0^4 + 2a^5\gamma_0^4 + a^6\gamma_0^6 + 2a^3\gamma_0^2\left(3 + 4\gamma_0\right)\big)\omega_1^4\omega_2^2 +\\
&\quad \big(-1 - 2a + a^2\gamma_0\left(5 - 2\gamma_0\right) + a^4\gamma_0^3\left(-2 + 5\gamma_0\right) + a^3\gamma_0^2\left(1 + 5\gamma_0\right) +\\
&\quad a^6\left(\gamma_0^5 - 2\gamma_0^6\right) - 2a^5\gamma_0^4\zeta + a^7\gamma_0^6\zeta\big)\omega_1^2\omega_2^4 + a^2\chi^2\gamma_0\zeta\left(-1 + a\gamma_0\right)^3\omega_2^6\,,\\
\mathrm{H} &= a^8\gamma_0^6\left(1 - 2\gamma_0^2 + \gamma_0^3\right)\omega_2^8 + \gamma_0\omega_1^4\left(2\omega_1^2 + \omega_2^2\right)^2 + a^5\gamma_0^4\big(\left(1 - 4\gamma_0^2\right)\omega_1^2\\
&\quad +2\left(1 - 2\gamma_0^2\right)\omega_2^2\big)\omega_1^2\omega_2^4 - a^6\gamma_0^4\big(\left(1 + 3\gamma_0^2 - 2\gamma_0^3\right)\omega_1^2 + 2(1 - 2\gamma_0^2 +\\
&\quad \gamma_0^3)\omega_2^2\big)\omega_2^6 + a\left(4\omega_1^4 - 2\left(-2 + \gamma_0^2\right)\omega_1^2\omega_2^2 + \omega_2^4\right)\omega_1^4 + a^2\big(4\left(-1 + 2\gamma_0^3\right)\omega_1^4 +\\
&\quad 2\left(-2 - \gamma_0^2 + 3\gamma_0^3\right)\omega_1^2\omega_2^2 + \left(-1 - \gamma_0^2 + 2\gamma_0^3\right)\omega_2^4\big)\omega_1^2\omega_2^2 + a^7\gamma_0^6\rho\zeta\omega_1^2\omega_2^6 +\\
&\quad a^4\gamma_0^2\big(\left(4 - 16\gamma_0^2 + 5\gamma_0^3\right)\omega_1^4 + \left(1 - 2\gamma_0^2 + \gamma_0^3\right)\omega_2^4 - 6\rho\zeta\omega_1^2\omega_2^2\big)\omega_2^4 +\\
&\quad a^3\gamma_0^2\big(2\left(-2 + 5\gamma_0^2\right)\omega_1^4 + 2\left(-3 + \gamma_0^2\right)\omega_1^2\omega_2^2 + \rho\zeta\omega_2^4\big)\omega_1^2\omega_2^2\,,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{I} &= a\omega_1^4\Omega^2+\gamma_0\omega_1^4\Omega^2+a^4\gamma_0^2\left(1-2\gamma_0^2+\gamma_0^3\right)\omega_2^4\Omega^2+a^3\gamma_0^2\big(\left(-1+3\gamma_0^2\right)\omega_1^2+\\
&\quad \rho\zeta\omega_2^2\big)\omega_1^2\omega_2^2+a^2\big(\left(-1-\gamma_0^2+2\gamma_0^3\right)\omega_2^2+\left(2\gamma_0^3+\rho\zeta\right)\omega_1^2\big)\omega_1^2\omega_2^2\,,\\
\mathrm{J} &= \left(-4+a\left(-10+\gamma_0\right)-10a^2\gamma_0^2-5a^3\gamma_0^3\right)\omega_1^4+a\big(-2+\gamma_0-5a^2\gamma_0-\\
&\quad 6a\gamma_0^2\big)\omega_1^2\omega_2^2+a^3\gamma_0\zeta\rho\omega_2^4\,,\\
\mathrm{K} &= 1+a^2\gamma_0^3+a\gamma_0\rho\,,\\
\mathrm{L} &= \gamma_0\omega_1^4\Omega^2-a\left(-2+\gamma_0^2\right)\omega_1^4\Omega^2+a^4\gamma_0^2\left(2-3\gamma_0^2+\gamma_0^3\right)\omega_2^4\Omega^2+\\
&\quad a^3\gamma_0^2\big(\left(-2+5\gamma_0^2\right)\omega_1^2+\left(-2+\gamma_0^2\right)\omega_2^2\big)\omega_1^2\omega_2^2+a^2\big(\left(-2+3\gamma_0^2+2\gamma_0^3\right)\omega_1^2+\\
&\quad \left(-2-\gamma_0^2+2\gamma_0^3\right)\omega_2^2\big)\omega_1^2\omega_2^2\,,\\
\mathrm{M} &= \left(2+4a+a^2\left(8-6\gamma_0^2\right)\right)\omega_1^6+\left(1+4a+7a^4\gamma_0^4-2a^2\left(-4+\gamma_0^2\right)+\right.\\
&\quad \left.2a^3\left(-4+9\gamma_0^2\right)\right)\omega_1^4\omega_2^2+a\big(1+a\left(2+\gamma_0^2\right)+a^3\gamma_0^2\left(-4+3\gamma_0^2\right)+\\
&\quad a^2\left(-8+9\gamma_0^2\right)-2a^5\gamma_0^4\rho\zeta\big)\omega_1^2\omega_2^4+a^3\big(-2+\left(2+4a^2\right)\gamma_0^2+\\
&\quad \left(a-3a^2-2a^4\right)\gamma_0^4+\left(-1+a\right)a^3\gamma_0^6\big)\omega_2^6\,,\\
\mathrm{N} &= \omega_1^2\omega_2^2+a^3\gamma_0^4\omega_1^2\omega_2^2+a\omega_1^2\big(\left(2-\gamma_0^2\right)\omega_2^2-2\rho\zeta\omega_1^2\big)+a^2\omega_2^2\big(\left(-2+3\gamma_0^2\right)\omega_1^2\\
&\quad +2\rho\zeta\omega_2^2\big)\,,\\
\mathrm{O} &= \chi^2\omega_1^4+a^2\big(-2-3\gamma_0+\left(2-7a\right)\gamma_0^2+a\gamma_0^3-3a^2\gamma_0^4\big)\omega_1^2\omega_2^2-a^4\gamma_0^2\zeta\big(2-\\
&\quad \gamma_0+a\gamma_0^2\big)\omega_2^4\,,\\
\mathrm{P} &= \big(2+a+2a\gamma_0+a^3\gamma_0^3+a^2\gamma_0\rho\big)\omega_1^2+a\big(1+a^2\gamma_0^3+a\gamma_0\left(-1+3\gamma_0\right)\big)\omega_2^2\,,\\
\mathrm{Q} &= 2\big(-1+3a^4\gamma_0^4+2a^3\gamma_0^2\left(2+\gamma_0\right)+2a^2\gamma_0\rho\big)\omega_1^4+\big(-1-a^4\gamma_0^4+2a^5\gamma_0^4+\\
&\quad a^6\gamma_0^6+a^2\gamma_0\left(4+\gamma_0\right)+2a^3\gamma_0^2\left(-1+2\gamma_0\right)\big)\omega_1^2\omega_2^2+\\
&\quad a^2\chi^2\gamma_0\zeta\left(-1+a\gamma_0\right)^3\omega_2^4\,,\\
\mathrm{R} &= \chi^2\omega_1^4+\left(1-a^2\gamma_0+2a\zeta+a^3\gamma_0^2\zeta\right)\omega_1^2\omega_2^2+a^2\chi\gamma_0\zeta\omega_2^4\,,\\
\mathrm{S} &= 4\mathrm{K}\omega_1^4+2\left(2+\gamma_0+2a\gamma_0^2-2a^2\left(1+a\right)\gamma_0^3-a^4\gamma_0^5\right)\omega_1^2\omega_2^2+\left(1+\right.\\
&\quad a^2\left(-2+\gamma_0\right)\gamma_0^2-2a^3\left(-2+\gamma_0\right)\gamma_0^3+a^4\gamma_0^4+a^5\left(-3+\gamma_0\right)\gamma_0^5-a^6\gamma_0^7\\
&\quad \left.+a\gamma_0\zeta\right)\omega_2^4\,,\\
\mathrm{T} &= 3\left(1+3a\gamma_0\right)\Omega^4-\gamma_0^2\big(3\left(-1+a\gamma_0\right)\omega_1^4+\left(-11+a\gamma_0\right)\omega_1^2\omega_2^2-6\omega_2^4\big)\,,\\
\mathrm{U} &= \chi^2\omega_1^2+a^2\omega_2^2\zeta^2\,,\\
\mathrm{V} &= -2\chi^2\omega_1^4+a^2\big(1+5\gamma_0+\left(-4+7a\right)\gamma_0^2-3a\gamma_0^3+2a^2\gamma_0^4\big)\omega_1^2\omega_2^2+\\
&\quad a^4\gamma_0^2\zeta\left(3-2\gamma_0+a\gamma_0^2\right)\omega_2^4\,,\\
\mathrm{W} &= 7\omega_1^2-4\omega_1^2\,\mathsf{cy}\,+3\omega_2^2\,,\\
\mathrm{X} &= \frac{\omega_2}{2\rho}\left(\frac{\gamma_0\chi\,\mathsf{sy}}{\Omega}-\frac{a\rho\zeta\,\mathsf{v}}{\omega_2}\right)\,,\\
\mathrm{Y} &= \frac{1}{\eta}\left(\lambda\,\mathsf{cxh}\;\mathsf{shuh}\,+a\psi\omega_1\omega_2\,\mathsf{sxh}\;\mathsf{chuh}\,\right)\,,\\
\mathrm{Z} &= \frac{1}{\eta}\left(\lambda\,\mathsf{sxh}\;\mathsf{chuh}\,-a\psi\omega_1\omega_2\,\mathsf{cxh}\;\mathsf{shuh}\,\right)\,.
\end{aligned}
\tag{8.1}
$$

8.1 Drift

Da im feldfreien Raum ($\vec{E} = \vec{0}\,, \vec{B} = \vec{0}\,, \vec{\kappa} = \vec{0}$) der Vektor $\vec{\Omega}(\vec{z}_{\rm i}, l)$ und damit auch die Matrizen $\underline{\Omega}(\vec{z}_{\rm i}, l)$ und $\underline{\Lambda}(\vec{z}_{\rm i}, l)$ verschwinden, gilt mit (7.35) exakt

$$\frac{d}{dl}\vec{\gamma}_\kappa(\vec{z}_{\rm i}, l) = 0\,, \vec{\gamma}_\kappa(\vec{z}_{\rm i}, l) = \begin{pmatrix}\vec{0}\\ 1\end{pmatrix}\,, \tag{8.2}$$

was anschaulich ($\phi = 0$) ohnehin erwartet wurde. Der Weg über die Spinmatrizen führt natürlich mit (6.14), (7.7) und (7.8) auf das gleiche Ergebnis,

$$\underline{\rm A}\,(\vec{z}_{\rm i}, l) = \underline{\rm I}_{3\times 3}\,, \vec{\gamma}_\kappa(\vec{z}_{\rm i}, l) = \begin{pmatrix}\vec{0}\\ 1\end{pmatrix}\,. \tag{8.3}$$

8.2 Quadrupol

Die oben angegebenen Verfahren liefern für den Quadrupol

κ	$k_{\rm x}k_{\rm a}k_{\rm y}k_{\rm b}k_\tau k_\delta$
1	000000
$-\frac{1}{8}\chi^2\omega_1^2\,\mathsf{su}^{\,2}$	200000
$-\frac{1}{2}\chi^2\omega_1\,\mathsf{su\ suh}^{\,2}$	110000
$-\frac{1}{2}\chi^2\,\mathsf{suh}^{\,4}$	020000
$-\frac{1}{8}\chi^2\omega_1^2\,\mathsf{shu}^{\,2}$	002000
$-\frac{1}{2}\chi^2\omega_1\,\mathsf{shu\ shuh}^{\,2}$	001100
$-\frac{1}{2}\chi^2\,\mathsf{shuh}^{\,4}$	000200

,

$\gamma_{\rm x}$	$k_{\rm x}k_{\rm a}k_{\rm y}k_{\rm b}k_\tau k_\delta$
$-\frac{1}{2}\chi\omega_1\,\mathsf{shu}$	001000
$-\chi\,\mathsf{shuh}^{\,2}$	000100
$\frac{\omega_1}{4\rho}\,(\nu\,\mathsf{shu} + \chi\gamma_0\,\mathsf{u\ chu}\,)$	001001
$\frac{1}{4\rho}\,(\chi\gamma_0\,\mathsf{u\ shu} + 4\varsigma\,\mathsf{shuh}^{\,2})$	000101

,

γ_{y}	$k_{\mathrm{x}}k_{\mathrm{a}}k_{\mathrm{y}}k_{\mathrm{b}}k_{\tau}k_{\delta}$
$-\frac{1}{2}\chi\omega_1\,\mathsf{su}$	100000
$-\chi\,\mathsf{suh}^{\,2}$	010000
$\frac{\omega_1}{4\rho}\,(\nu\,\mathsf{su}\,+\,\chi\gamma_0\,\mathsf{u}\,\mathsf{cu}\,)$	100001
$\frac{1}{4\rho}\,(\chi\gamma_0\,\mathsf{u}\,\mathsf{su}\,+4\varsigma\,\mathsf{suh}^{\,2})$	010001

,

γ_{l}	$k_{\mathrm{x}}k_{\mathrm{a}}k_{\mathrm{y}}k_{\mathrm{b}}k_{\tau}k_{\delta}$
$-\frac{\mu\omega_1^2}{4}\,(-1+\,\mathsf{cu}\,\mathsf{chu}\,)$	101000
$-\frac{\omega_1}{4}\,(-\chi^2\,\mathsf{shu}\,+\mu\,\mathsf{su}\,\mathsf{chu}\,)$	011000
$\frac{\omega_1}{4}\,(-\mu\,\mathsf{cu}\,\mathsf{shu}\,+\chi^2\,\mathsf{su}\,)$	100100
$\frac{1}{4}\,(\chi^2\,(\,\mathsf{chu}\,-\,\mathsf{cu}\,)-\mu\,\mathsf{su}\,\mathsf{shu}\,)$	010100

.

(8.4)

8.3 Dipol

Für den Dipol ergibt sich aus den beiden Wegen

κ	$k_{\mathrm{x}}k_{\mathrm{a}}k_{\mathrm{y}}k_{\mathrm{b}}k_{\tau}k_{\delta}$
cxh	000000
$-\frac{1}{2}\chi\omega_2\,\mathsf{sv}\,\mathsf{sxh}$	100000
$-\chi\,\mathsf{svh}^{\,2}\,\mathsf{sxh}$	010000
$\frac{\alpha}{2\rho}\,\mathsf{sxh}$	000001
$-\frac{1}{8}\chi^2\omega_2^2\,\mathsf{sv}^{\,2}\,\mathsf{cxh}$	200000
$-\frac{1}{2}\chi^2\omega_2\,\mathsf{sv}\,\mathsf{cxh}\,\mathsf{svh}^{\,2}$	110000
$-\frac{1}{4}\chi\,(2\chi\,\mathsf{cxh}\,\mathsf{svh}^{\,4}+\,\mathsf{sv}\,\mathsf{sxh}\,)$	020000
$-\frac{\alpha}{4\gamma_0}\,\mathsf{sxh}$	000200
$\frac{\Gamma\omega_2\,\mathsf{sv}}{2}$	100001

,

κ	$k_{\mathrm{x}}k_{\mathrm{a}}k_{\mathrm{y}}k_{\mathrm{b}}k_{\tau}k_{\delta}$
$\Gamma\,\mathsf{svh}^{\,2}$	010001
$-\frac{1}{8\rho^2}\left(\alpha^2\,\mathsf{cxh}\;+2\iota\,\mathsf{sv}\;\mathsf{sxh}\right)$	000002

,

γ_{x}	$k_{\mathrm{x}}k_{\mathrm{a}}k_{\mathrm{y}}k_{\mathrm{b}}k_{\tau}k_{\delta}$
$-\frac{\omega_2\zeta}{2\gamma_0}\,\mathsf{sv}\;\mathsf{sxh}$	100100
$\frac{\zeta}{\gamma_0}\,\mathsf{cvh}^{\,2}\,\mathsf{sxh}$	010100
$\frac{\zeta}{2\rho}\,\mathsf{sv}\;\mathsf{sxh}$	000101

,

γ_{y}	$k_{\mathrm{x}}k_{\mathrm{a}}k_{\mathrm{y}}k_{\mathrm{b}}k_{\tau}k_{\delta}$
$-\,\mathsf{sxh}$	000000
$-\frac{1}{2}\chi\omega_2\,\mathsf{sv}\;\mathsf{cxh}$	100000
$-\chi\,\mathsf{cxh}\;\mathsf{svh}^{\,2}$	010000
$\frac{\alpha}{2\rho}\,\mathsf{cxh}$	000001
$\frac{1}{8}\chi^2\omega_2^2\,\mathsf{sv}^{\,2}\,\mathsf{sxh}$	200000
$\chi^2\omega_2\,\mathsf{cvh}\;\mathsf{svh}^{\,3}\,\mathsf{sxh}$	110000
$\frac{\chi}{4}\left(-\,\mathsf{cxh}\;\mathsf{sv}\;+2\chi\,\mathsf{svh}^{\,4}\,\mathsf{sxh}\right)$	020000
$\frac{1}{4\gamma_0^2}\left(-\alpha\gamma_0\,\mathsf{cxh}\;+2\zeta^2\,\mathsf{sxh}\right)$	000200
$\frac{1}{2}\omega_2\beta\,\mathsf{sv}$	100001
$\beta\,\mathsf{svh}^{\,2}$	010001
$\frac{1}{8\rho^2}\left(-2\iota\,\mathsf{cxh}\;\mathsf{sv}\;+\alpha^2\,\mathsf{sxh}\right)$	000002

,

γ_{l}	$k_{\mathrm{x}}k_{\mathrm{a}}k_{\mathrm{y}}k_{\mathrm{b}}k_{\tau}k_{\delta}$
$\frac{\zeta}{\gamma_0}\,\mathsf{sxh}$	000100
$\frac{1}{2}a\omega_2\zeta\,\mathsf{sv}\;\mathsf{cxh}$	100100
$a\zeta\,\mathsf{cxh}\;\mathsf{svh}^{\,2}$	010100
$\frac{\zeta}{2\gamma_0^2\rho}\left(2\Upsilon\,\mathsf{sxh}\;-a\gamma_0\left(\gamma_0^2\,\mathsf{sv}\;-\rho\zeta\,\mathsf{v}\,\right)\mathsf{cxh}\,\right)$	000101

. (8.5)

8.4 Kombination von Quadrupol und Dipol

Aus den oben angegebenen Verfahren erhält man für die Kombination von Quadrupol und Dipol

κ	$k_{\mathrm{x}}k_{\mathrm{a}}k_{\mathrm{y}}k_{\mathrm{b}}k_\tau k_\delta$
cxh	000000
$-\frac{1}{2}\chi\Omega\,\mathsf{sy\ sxh}$	100000
$-\chi\,\mathsf{sxh\ syh}^{\,2}$	010000
$\mathrm{X}\,\mathsf{sxh}$	000001
$-\frac{\chi\varphi\omega_1^2\gamma_0^2\,\mathsf{v\ cy\ sxh}}{4\rho^2\Omega^4} - \frac{\omega_2\mathrm{T}\,\mathsf{sxh\ sy}}{12\rho^2\Omega^5} - \frac{\chi^2\gamma_0^2\omega_2^2\,\mathsf{cxh\ sy}^{\,2}}{8\rho^2\Omega^2} - \frac{\chi\gamma_0^2\omega_1^2\omega_2^3\,\mathsf{s2y\ sxh}}{6\rho^2\Omega^5} + \frac{a\chi\zeta\gamma_0\omega_2\gamma_0\,\mathsf{v\ cxh\ sy}}{4\rho\Omega} - \frac{1}{8}a^2\zeta^2\,\mathsf{v}^{\,2}\,\mathsf{cxh}$	000002
$\frac{\mathrm{V}\,\mathsf{cxh}}{16\eta^2} - \frac{\chi\lambda\,\mathsf{chu}^{\,2}\,\mathsf{cxh}}{8\eta} + \frac{\lambda^2\,\mathsf{chu\ cxh}}{4\eta^2} + \frac{a\lambda\psi\omega_1\omega_2\,\mathsf{shu\ sxh}}{4\eta^2} + \frac{\varepsilon\,\mathsf{x\ sxh}}{8\eta} - \frac{\chi\omega_2\theta\,\mathsf{sxh\ sy}}{4\xi\Omega} + \frac{\omega_2\mathrm{J}\,\mathsf{sh2u\ sxh}}{16\eta\xi\omega_1} + \frac{a^2\psi\zeta\omega_2^2\,\mathsf{ch2u\ cxh}}{16\eta}$	000200
$-\frac{\omega_1\mathrm{U}\,\mathsf{cxh\ shu\ shuh}^{\,2}}{2\eta} + \frac{a\omega_2\mathrm{A}\,\mathsf{sxh}}{8\eta} + \frac{\omega_2\mathrm{J}\,\mathsf{ch2u\ sxh}}{8\eta\xi} + \frac{\chi\omega_1^2\omega_2\,\mathsf{cy\ sxh}}{2\xi}$	001100
$\frac{\omega_1^2\mathrm{O}\,\mathsf{cxh}}{16\eta^2} - \frac{\lambda\omega_1^2\chi\,\mathsf{ch2u\ cxh}}{16\eta} - \frac{a\lambda\psi\omega_1^3\omega_2\,\mathsf{shu\ sxh}}{4\eta^2} + \frac{a^2\psi^2\omega_1^4\omega_2^2\,\mathsf{chu\ cxh}}{4\eta^2} - \frac{\omega_1^2\varepsilon\,\mathsf{x\ sxh}}{8\eta} + \frac{\omega_1\omega_2\mathrm{J}\,\mathsf{sh2u\ sxh}}{16\eta\xi} + \frac{\omega_1^4\omega_2\chi\,\mathsf{sy\ sxh}}{2\Omega\xi} + \frac{a^2\omega_1^2\omega_2^2\zeta\psi\,\mathsf{chu}^{\,2}\,\mathsf{cxh}}{8\eta}$	002000
$\frac{\varsigma\,\mathsf{sxh}}{2\rho} + \frac{\chi\gamma_0\varphi\omega_1\,\mathsf{u\ sxh\ sy}}{4\rho\Omega^3} + \frac{\chi^2\gamma_0\omega_2\,\mathsf{cxh\ sy\ syh}^{\,2}}{2\rho\Omega} - \frac{\chi\gamma_0\omega_1^2\omega_2^2\,\mathsf{c2y\ sxh}}{3\rho\Omega^4} - \frac{\left(-2\left(-2\gamma_0+a\left(-3+\gamma_0^2\right)\right)\omega_1^2\omega_2^2+3\varsigma\left(\omega_1^4+\omega_2^4\right)\right)\mathsf{cy\ sxh}}{6\rho\Omega^4} - \frac{1}{2}a\chi\zeta\,\mathsf{v\ cxh\ syh}^{\,2}$	010001
$-\frac{3\chi^2\,\mathsf{cxh}}{16} + \frac{1}{16}\chi^2\,\mathsf{cxh}\,(-\mathsf{c2y}\,+4\,\mathsf{cy}\,) - \frac{\chi\omega_2\mathrm{W}\,\mathsf{sxh\ sy}}{12\Omega^3}$	020000
$\frac{\chi\gamma_0\varphi\omega_1\,\mathsf{u\ cy\ sxh}}{4\rho\Omega^2} + \frac{\chi^2\gamma_0\omega_2\,\mathsf{cxh\ sy}^{\,2}}{4\rho} + \frac{\chi\gamma_0\omega_1^2\omega_2^2\,\mathsf{s2y\ sxh}}{3\rho\Omega^3} - \frac{a\chi\omega_2\zeta\,\mathsf{y\ cxh\ sy}}{4} + \frac{\left(6a\Omega^4-\gamma_0\left(3(-1+a\gamma_0)\omega_1^4+(-7+5a\gamma_0)\omega_1^2\omega_2^2-6\omega_2^4\right)\right)\mathsf{sxh\ sy}}{12\rho\Omega^3}$	100001
$-\frac{1}{2}\chi^2\Omega\,\mathsf{cxh\ sy\ syh}^{\,2} + \frac{\chi\omega_1^2\omega_2(\,\mathsf{c2y}-\mathsf{cy}\,)\,\mathsf{sxh}}{3\Omega^2}$	110000
$-\frac{1}{8}\chi^2\Omega^2\,\mathsf{cxh\ sy}^{\,2} - \frac{\chi\omega_1^2\omega_2(\,\mathsf{s2y}+\mathsf{sy}\,)\,\mathsf{sxh}}{6\Omega}$	200000

,

γ_{x}	$k_{\mathrm{x}}k_{\mathrm{a}}k_{\mathrm{y}}k_{\mathrm{b}}k_{\tau}k_{\delta}$
$-\omega_1 \mathrm{Y}\,\mathsf{chuh}$	001000
$-\mathrm{Y}\,\mathsf{shuh}$	000100
$-\frac{\mathrm{H}\,\mathsf{cxh}}{2\eta^2\rho\sigma} + \frac{\mathrm{I}\,\mathsf{chu\ cxh}}{2\eta^2\rho\Omega^2} + \frac{\mathrm{D\,u\ cxh\ shu}}{4\eta\rho\Omega^2} - \frac{a\mathrm{E\,v\ chu\ sxh}}{4\eta\rho\Omega^2} + \frac{\chi\gamma_0\lambda\omega_2\,\mathsf{sxh\ sy}}{4\eta\rho\Omega} + \frac{a\gamma_0\omega_1\omega_2\mathrm{C}\,\mathsf{shu\ sxh}}{4\eta^2\rho\Omega^2} - \frac{\gamma_0\omega_1\omega_2\mathrm{B\,cy\ shu\ sxh}}{2\rho\sigma\Omega^2} + \frac{\chi\gamma_0\omega_1\omega_2^2\mathrm{F\,cxh\ shu\ sy}}{4\eta\rho\sigma\Omega^3} - \frac{a\gamma_0^2\phi\omega_1^2\omega_2^2\,\mathsf{chu\ cxh\ cy}}{\rho\sigma\Omega^2} - \frac{\gamma_0\omega_2^3\mathrm{G\,sy\ chu\ sxh}}{4\eta\rho\sigma\Omega^3} - \frac{a\lambda\zeta\,\mathsf{v\ sxh}}{4\eta}$	000101
$\frac{\omega_1\mathrm{L}\,\mathsf{cxh\ shu}}{4\eta^2\rho\Omega^2} + \frac{\omega_1\mathrm{D\,u\ chu\ cxh}}{4\eta\rho\Omega^2} - \frac{a\omega_2\mathrm{E\,u\ shu\ sxh}}{4\eta\rho\Omega^2} + \frac{\gamma_0\omega_1^2\omega_2\mathrm{M}\,\mathsf{sxh}}{2\eta^2\rho\sigma} + \frac{a\gamma_0\omega_1^2\omega_2\mathrm{N}\,\mathsf{chu\ sxh}}{2\eta^2\rho\Omega^2} - \frac{\gamma_0\omega_1^2\omega_2\mathrm{B}\,\mathsf{chu\ cy\ sxh}}{2\rho\sigma\Omega^2} + \frac{\chi\gamma_0\omega_1^2\omega_2^2\mathrm{F}\,\mathsf{chu\ cxh\ sy}}{4\eta\rho\sigma\Omega^3} + \frac{a\gamma_0\omega_1^2\omega_2^2\mathrm{K}\,\mathsf{cxh\ sy}}{4\eta\rho\Omega} - \frac{a\gamma_0^2\omega_1^3\omega_2^2\phi\,\mathsf{cxh\ cy\ shu}}{\rho\sigma\Omega^2} - \frac{\gamma_0\omega_1\omega_2^3\mathrm{G}\,\mathsf{shu\ sxh\ sy}}{4\eta\rho\sigma\Omega^3} - \frac{a^2\psi\omega_1\omega_2^2\zeta\,\mathsf{u\ cxh}}{4\eta}$	001001
$\frac{\chi\lambda\,\mathsf{cy\ sxh}}{4\eta} + \frac{\mathrm{R}\,\mathsf{chu\ sxh}}{4\eta\Omega^2} + \frac{\omega_1\mathrm{B}\,\mathsf{sy\ shu\ sxh}}{2\sigma\Omega} - \frac{\omega_1\omega_2\mathrm{P}\,\mathsf{cxh\ shu}}{4\eta\Omega^2} + \frac{\chi\omega_1\omega_2\mathrm{F}\,\mathsf{cy\ cxh\ shu}}{4\eta\sigma\Omega^2} + \frac{a\omega_1^2\omega_2\phi\gamma_0\,\mathsf{chu\ cxh\ sy}}{\sigma\Omega} - \frac{\omega_2^2\mathrm{Q}\,\mathsf{sxh}}{4\eta\sigma} - \frac{\omega_2^2\mathrm{G}\,\mathsf{sxh\ chu\ cy}}{4\eta\sigma\Omega^2}$	010100
$\frac{\omega_1\mathrm{R}\,\mathsf{shu\ sxh}}{4\eta\Omega^2} + \frac{\omega_1^2\mathrm{B}\,\mathsf{chu\ sxh\ sy}}{2\sigma\Omega} + \frac{a\omega_1^2\omega_2\mathrm{K}\,\mathsf{cxh\ cy}}{4\eta} + \frac{a\omega_1^2\omega_2\mathrm{S}\,\mathsf{cxh}}{4\eta\sigma} - \frac{\omega_1^2\omega_2\mathrm{P}\,\mathsf{chu\ cxh}}{4\eta\Omega^2} + \frac{\chi\omega_1^2\omega_2\mathrm{F}\,\mathsf{chu\ cxh\ cy}}{4\eta\sigma\Omega^2} + \frac{a\gamma_0\phi\omega_1^3\omega_2\,\mathsf{cxh\ shu\ sy}}{\sigma\Omega} - \frac{\omega_1\omega_2^2\mathrm{G}\,\mathsf{cy\ shu\ sxh}}{4\eta\sigma\Omega^2}$	011000
$-\frac{\chi\lambda\Omega\,\mathsf{sy\ sxh}}{4\eta} + \frac{\omega_1\mathrm{B}\,\mathsf{cy\ shu\ sxh}}{2\sigma} - \frac{\chi\omega_1\omega_2\mathrm{F}\,\mathsf{cxh\ shu\ sy}}{4\eta\sigma\Omega} + \frac{a\gamma_0\omega_1^2\omega_2\phi\,\mathsf{cxh\,(-1+\ chu\ cy\,)}}{\sigma} + \frac{\omega_2^2\mathrm{G}\,\mathsf{chu\ sxh\ sy}}{4\eta\sigma\Omega}$	100100
$\frac{\omega_1^2\mathrm{B}(1+\,\mathsf{chu\ cy}\,)\,\mathsf{sxh}}{2\sigma} - \frac{\chi\omega_1^2\omega_2\mathrm{F}\,\mathsf{chu\ cxh\ sy}}{4\eta\sigma\Omega} - \frac{a\Omega\omega_1^2\omega_2\mathrm{K}\,\mathsf{cxh\ sy}}{4\eta} + \frac{a\phi\gamma_0\omega_1^3\omega_2\,\mathsf{cxh\ cy\ shu}}{\sigma} + \frac{\omega_1\omega_2^2\mathrm{G}\,\mathsf{shu\ sxh\ sy}}{4\eta\sigma\Omega}$	101000

,

γ_{y}	$k_{\mathrm{x}}k_{\mathrm{a}}k_{\mathrm{y}}k_{\mathrm{b}}k_{\tau}k_{\delta}$
$-\,\mathsf{sxh}$	000000
$-\frac{1}{2}\chi\Omega\,\mathsf{sy}\;\mathsf{cxh}$	100000
$-\chi\,\mathsf{cxh}\;\mathsf{syh}^{\,2}$	010000
$\mathrm{X}\,\mathsf{cxh}$	000001
$-\frac{\chi\gamma_0^2\varphi\omega_1^2\,\mathsf{v}\;\mathsf{cxh}\;\mathsf{cy}}{4\rho^2\Omega^4}-\frac{\omega_2\mathrm{T}\,\mathsf{cxh}\;\mathsf{sy}}{12\rho^2\Omega^5}+\frac{\chi^2\gamma_0^2\omega_2^2\,\mathsf{sxh}\;\mathsf{sy}^{\,2}}{8\rho^2\Omega^2}-\frac{\chi\gamma_0^2\omega_1^2\omega_2^3\,\mathsf{cxh}\;\mathsf{s2y}}{6\rho^2\Omega^5}-\frac{\chi\zeta\omega_2\,\mathsf{x}\;\mathsf{sxh}\;\mathsf{sy}}{4\rho\Omega}+\frac{1}{8}a^2\zeta^2\,\mathsf{v}^{\,2}\,\mathsf{sxh}$	000002
$-\frac{\mathrm{V}\,\mathsf{sxh}}{16\eta^2}+\frac{\chi\lambda\,\mathsf{chu}^{\,2}\,\mathsf{sxh}}{8\eta}+\frac{\lambda^2\,\mathsf{chu}\;\mathsf{sxh}}{4\eta^2}-\frac{a\lambda\psi\omega_1\omega_2\,\mathsf{cxh}\;\mathsf{shu}}{4\eta^2}+\frac{\varepsilon\,\mathsf{x}\;\mathsf{cxh}}{8\eta}-\frac{\chi\theta\omega_2\,\mathsf{sy}\;\mathsf{cxh}}{4\Omega\xi}+\frac{\omega_2\mathrm{J}\,\mathsf{cxh}\;\mathsf{sh2u}}{16\eta\omega_1\xi}-\frac{a^2\psi\omega_2^2\zeta\,\mathsf{ch2u}\;\mathsf{sxh}}{16\eta}$	000200
$\frac{\omega_1\mathrm{U}\,\mathsf{chuh}^{\,2}\,\mathsf{shu}\;\mathsf{sxh}}{2\eta}+\frac{a\omega_2\mathrm{A}\,\mathsf{cxh}}{8\eta}+\frac{\omega_2\mathrm{J}\,\mathsf{ch2u}\;\mathsf{cxh}}{8\eta\xi}+\frac{\chi\omega_1^2\omega_2\,\mathsf{cy}\;\mathsf{cxh}}{2\xi}$	001100
$-\frac{\omega_1^2\mathrm{O}\,\mathsf{sxh}}{16\eta^2}+\frac{\chi\lambda\omega_1^2\,\mathsf{ch2u}\;\mathsf{sxh}}{16\eta}+\frac{a\lambda\psi\omega_1^3\omega_2\,\mathsf{cxh}\;\mathsf{shu}}{4\eta^2}+\frac{a^2\psi^2\omega_1^4\omega_2^2\,\mathsf{chu}\;\mathsf{sxh}}{4\eta^2}-\frac{\varepsilon\omega_1^2\,\mathsf{x}\;\mathsf{cxh}}{8\eta}+\frac{\omega_1\omega_2\mathrm{J}\,\mathsf{cxh}\;\mathsf{sh2u}}{16\eta\xi}+\frac{\omega_1^4\omega_2\chi\,\mathsf{cxh}\;\mathsf{sy}}{2\Omega\xi}-\frac{a^2\psi\omega_1^2\omega_2^2\zeta\,\mathsf{chu}^{\,2}\,\mathsf{sxh}}{8\eta}$	002000
$\frac{\varsigma\,\mathsf{cxh}}{2\rho}+\frac{\chi\gamma_0\varphi\omega_1\,\mathrm{u}\;\mathsf{cxh}\;\mathsf{sy}}{4\rho\Omega^3}-\frac{\chi^2\gamma_0\omega_2\,\mathsf{sxh}\;\mathsf{sy}\;\mathsf{syh}^{\,2}}{2\rho\Omega}-\frac{\chi\gamma_0\omega_1^2\omega_2^2\,\mathsf{c2y}\;\mathsf{cxh}}{3\rho\Omega^4}-\frac{\left(\left(4\gamma_0-2a\left(-3+\gamma_0^2\right)\right)\omega_1^2\omega_2^2+3\varsigma\left(\omega_1^4+\omega_2^4\right)\right)\mathsf{cxh}\;\mathsf{cy}}{6\rho\Omega^4}+\frac{a\chi\zeta\,\mathsf{v}\;\mathsf{sxh}\;\mathsf{syh}^{\,2}}{2}$	010001
$\chi\left(\frac{1}{2}\chi\,\mathsf{sxh}\;\mathsf{syh}^{\,4}-\frac{\omega_2\mathrm{W}\,\mathsf{cxh}\;\mathsf{sy}}{12\Omega^3}\right)$	020000
$\frac{\chi\omega_1\varphi\gamma_0\,\mathrm{u}\;\mathsf{cxh}\;\mathsf{cy}}{4\rho\Omega^2}-\frac{\chi^2\gamma_0\omega_2\,\mathsf{sxh}\;\mathsf{sy}^{\,2}}{4\rho}+\frac{\chi\omega_1^2\omega_2^2\gamma_0\,\mathsf{cxh}\;\mathsf{s2y}}{3\rho\Omega^3}+\frac{\left(\gamma_0\left(3\omega_1^4+7\omega_1^2\omega_2^2+6\omega_2^4\right)+a\left(6\Omega^4-\gamma_0^2\left(3\omega_1^4+5\omega_1^2\omega_2^2\right)\right)\right)\mathsf{cxh}\;\mathsf{sy}}{12\rho\Omega^3}+\frac{a\chi\zeta\omega_2\,\mathsf{y}\;\mathsf{sxh}\;\mathsf{sy}}{4}$	100001
$\frac{1}{2}\chi^2\Omega\,\mathsf{sxh}\;\mathsf{sy}\;\mathsf{syh}^{\,2}+\frac{\chi\omega_1^2\omega_2\,\mathsf{cxh}\,(\,\mathsf{c2y}-\mathsf{cy}\,)}{3\Omega^2}$	110000
$\frac{1}{8}\chi^2\Omega^2\,\mathsf{sxh}\;\mathsf{sy}^{\,2}-\frac{\chi\omega_1^2\omega_2\,\mathsf{cxh}\,(\,\mathsf{s2y}+\mathsf{sy}\,)}{6\Omega}$	200000

,

γ_1	$k_x k_a k_y k_b k_\tau k_\delta$
$\omega_1 \mathrm{Z}\,\mathsf{shuh}$	001000
$\mathrm{Z}\,\mathsf{chuh}$	000100
$-\frac{\mathrm{H}\,\mathsf{sxh}}{2\eta^2\rho\sigma} - \frac{\mathrm{I}\,\mathsf{chu\ sxh}}{2\eta^2\rho\Omega^2} - \frac{\mathrm{D}\,\mathsf{u\ sxh\ shu}}{4\eta\rho\Omega^2} - \frac{a\,\mathrm{E}\,\mathsf{v\ chu\ cxh}}{4\eta\rho\Omega^2} - \frac{\chi\gamma_0\lambda\omega_2\,\mathsf{cxh\ sy}}{4\eta\rho\Omega} + \frac{a\gamma_0\omega_1\omega_2\mathrm{C}\,\mathsf{shu\ cxh}}{4\eta^2\rho\Omega^2} - \frac{\gamma_0\omega_1\omega_2\mathrm{B}\,\mathsf{cy\ shu\ cxh}}{2\rho\sigma\Omega^2} - \frac{\chi\gamma_0\omega_1\omega_2^2\mathrm{F}\,\mathsf{sxh\ shu\ sy}}{4\eta\rho\sigma\Omega^3} + \frac{a\gamma_0^2\phi\omega_1^2\omega_2^2\,\mathsf{chu\ sxh\ cy}}{\rho\sigma\Omega^2} - \frac{\gamma_0\omega_2^3\mathrm{G}\,\mathsf{sy\ chu\ cxh}}{4\eta\rho\sigma\Omega^3} + \frac{a\lambda\zeta\,\mathsf{v\ cxh}}{4\eta}$	000101
$-\frac{\omega_1\mathrm{L}\,\mathsf{sxh\ shu}}{4\eta^2\rho\Omega^2} - \frac{\omega_1\mathrm{D}\,\mathsf{u\ chu\ sxh}}{4\eta\rho\Omega^2} - \frac{a\omega_2\mathrm{E}\,\mathsf{u\ shu\ cxh}}{4\eta\rho\Omega^2} - \frac{\gamma_0\omega_1^2\omega_2\mathrm{M}\,\mathsf{cxh}}{2\eta^2\rho\sigma} + \frac{a\gamma_0\omega_1^2\omega_2\mathrm{N}\,\mathsf{chu\ cxh}}{2\eta^2\rho\Omega^2} - \frac{\gamma_0\omega_1^2\omega_2\mathrm{B}\,\mathsf{chu\ cy\ cxh}}{2\rho\sigma\Omega^2} - \frac{\chi\gamma_0\omega_1^2\omega_2^2\mathrm{F}\,\mathsf{chu\ sxh\ sy}}{4\eta\rho\sigma\Omega^3} + \frac{a\gamma_0\omega_1^2\omega_2^2\mathrm{K}\,\mathsf{sxh\ sy}}{4\eta\rho\Omega} + \frac{a\gamma_0^2\omega_1^3\omega_2^2\phi\,\mathsf{sxh\ cy\ shu}}{\rho\sigma\Omega^2} - \frac{\gamma_0\omega_1\omega_2^3\mathrm{G}\,\mathsf{shu\ cxh\ sy}}{4\eta\rho\sigma\Omega^3} - \frac{a^2\psi\omega_1\omega_2^2\zeta\,\mathsf{u\ sxh}}{4\eta}$	001001
$-\frac{\chi\lambda\,\mathsf{cy\ cxh}}{4\eta} + \frac{\mathrm{R}\,\mathsf{chu\ cxh}}{4\eta\Omega^2} + \frac{\omega_1\mathrm{B}\,\mathsf{sy\ shu\ cxh}}{2\sigma\Omega} + \frac{\omega_1\omega_2\mathrm{P}\,\mathsf{sxh\ shu}}{4\eta\Omega^2} - \frac{\chi\omega_1\omega_2\mathrm{F}\,\mathsf{cy\ sxh\ shu}}{4\eta\sigma\Omega^2} - \frac{a\omega_1^2\omega_2\phi\gamma_0\,\mathsf{chu\ sxh\ sy}}{\sigma\Omega} + \frac{\omega_2^2\mathrm{Q}\,\mathsf{cxh}}{4\eta\sigma} - \frac{\omega_2^2\mathrm{G}\,\mathsf{cxh\ chu\ cy}}{4\eta\sigma\Omega^2}$	010100
$\frac{\omega_1\mathrm{R}\,\mathsf{shu\ cxh}}{4\eta\Omega^2} + \frac{\omega_1^2\mathrm{B}\,\mathsf{chu\ cxh\ sy}}{2\sigma\Omega} + \frac{a\omega_1^2\omega_2\mathrm{K}\,\mathsf{sxh\ cy}}{4\eta} + \frac{a\omega_1^2\omega_2\mathrm{S}\,\mathsf{sxh}}{4\eta\sigma} + \frac{\omega_1^2\omega_2\mathrm{P}\,\mathsf{chu\ sxh}}{4\eta\Omega^2} - \frac{\chi\omega_1^2\omega_2\mathrm{F}\,\mathsf{chu\ sxh\ cy}}{4\eta\sigma\Omega^2} - \frac{a\gamma_0\phi\omega_1^3\omega_2\,\mathsf{sxh\ shu\ sy}}{\sigma\Omega} - \frac{\omega_1\omega_2^2\mathrm{G}\,\mathsf{cy\ shu\ cxh}}{4\eta\sigma\Omega^2}$	011000
$\frac{\chi\lambda\Omega\,\mathsf{sy\ cxh}}{4\eta} + \frac{\omega_1\mathrm{B}\,\mathsf{cy\ shu\ cxh}}{2\sigma} + \frac{\chi\omega_1\omega_2\mathrm{F}\,\mathsf{sxh\ shu\ sy}}{4\eta\sigma\Omega} - \frac{a\gamma_0\omega_1^2\omega_2\phi\,\mathsf{sxh\,(1+\,chu\ cy\,)}}{\sigma} + \frac{\omega_2^2\mathrm{G}\,\mathsf{chu\ cxh\ sy}}{4\eta\sigma\Omega}$	100100
$-\frac{\omega_1^2\mathrm{B}(1-\,\mathsf{chu\ cy}\,)\,\mathsf{cxh}}{2\sigma} + \frac{\chi\omega_1^2\omega_2\mathrm{F}\,\mathsf{chu\ sxh\ sy}}{4\eta\sigma\Omega} - \frac{a\Omega\omega_1^2\omega_2\mathrm{K}\,\mathsf{sxh\ sy}}{4\eta} - \frac{a\phi\gamma_0\omega_1^3\omega_2\,\mathsf{sxh\ cy\ shu}}{\sigma} + \frac{\omega_1\omega_2^2\mathrm{G}\,\mathsf{shu\ cxh\ sy}}{4\eta\sigma\Omega}$	101000

(8.6)

8.5 Sextupol

Die Spintransferquaternion des Sextupols lautet bis in 2. Ordnung Anfangskoordinaten

κ	$k_{\mathrm{x}}k_{\mathrm{a}}k_{\mathrm{y}}k_{\mathrm{b}}k_{\tau}k_{\delta}$
1	000000

,

γ_{x}	$k_{\mathrm{x}}k_{\mathrm{a}}k_{\mathrm{y}}k_{\mathrm{b}}k_{\tau}k_{\delta}$
$-\kappa_{\mathrm{Sext}}l$	101000
$-\frac{\kappa_{\mathrm{Sext}}l^2}{2}$	011000
$-\frac{\kappa_{\mathrm{Sext}}l^2}{2}$	1001000
$-\frac{\kappa_{\mathrm{Sext}}l^3}{3}$	010100

,

γ_{y}	$k_{\mathrm{x}}k_{\mathrm{a}}k_{\mathrm{y}}k_{\mathrm{b}}k_{\tau}k_{\delta}$
$-\frac{\kappa_{\mathrm{Sext}}l}{2}$	200000
$-\frac{\kappa_{\mathrm{Sext}}l^2}{2}$	110000
$-\frac{\kappa_{\mathrm{Sext}}l^3}{6}$	020000
$\frac{\kappa_{\mathrm{Sext}}l}{2}$	002000
$\frac{\kappa_{\mathrm{Sext}}l^2}{2}$	001100
$-\frac{\kappa_{\mathrm{Sext}}l^3}{6}$	000200

. (8.7)

8.6 Weitere Elemente

Neben den bisher betrachteten teilchenoptischen Elementen werden in analoger Weise die Spintransferquaternionen für

- den Quadrupol, der in x-Richtung defokussiert,

$$\vec{B}_{\mathrm{Quad}}(x,y,l) = -\omega_1^2 \frac{p_0}{q}\left(y\vec{e}_{\mathrm{x}} + x\vec{e}_{\mathrm{y}}\right) ,$$

- die Kombination aus Quadrupol und Dipol, deren Quadrupol in x-Richtung defokussiert und deren Quadrupolstärke größer als die Dipolstärke ist,

$$\vec{B}_{\mathrm{Komb}}(x,y,l) = \frac{p_0}{q}\left(-\omega_1^2 y\vec{e}_{\mathrm{x}} + \left(\omega_2 - \omega_1^2 x\right)\vec{e}_{\mathrm{y}}\right),\ \omega_1 \geq \omega_2\,,$$

- die Kombination aus Quadrupol und Dipol, deren Quadrupol in x-Richtung defokussiert und deren Quadrupolstärke kleiner als die Dipolstärke ist,

$$\vec{B}_{\mathrm{Komb}}(x,y,l) = \frac{p_0}{q}\left(-\omega_1^2 y\vec{e}_{\mathrm{x}} + \left(\omega_2 - \omega_1^2 x\right)\vec{e}_{\mathrm{y}}\right),\ \omega_1 \leq \omega_2\,,$$

- die Kombination aus Quadrupol und Dipol, deren Quadrupol in x-Richtung defokussiert und deren Quadrupolstärke gleich der Dipolstärke ist,

$$\vec{B}_{\mathrm{Komb}}(x,y,l) = \frac{p_0}{q}\left(-\omega_1^2 y\vec{e}_{\mathrm{x}} + \left(\omega_2 - \omega_1^2 x\right)\vec{e}_{\mathrm{y}}\right),\ \omega_1 = \omega_2\,.$$

berechnet. Da die Ergebnisse für sich selbst keine neuen Erkenntnisse bringen und die Spintransferquaternionen für die verschiedenen Kombinationen aus Quadrupol und Dipol von gleicher „Schlichtheit“ wie im ersten Fall (s. 8.4) sind, wird auf die beiliegende CD-ROM und hier speziell auf das Notebook „*result.nb*“ mit allen Ergebnissen verwiesen.

Kapitel 9

Der elektrostatische Quadrupol

Eine Arbeitsgruppe um Vernon Hughes von der Universität Yale, Connecticut untersucht die Spinpräzession in elektrostatischen Feldern, um daraus den g-Faktor von Myonen exakter bestimmen zu können. Die Theorie der Spinpräzession in einem Beschleunigerelement, die in [8] vorgestellt wurde, wird exemplarisch auf das Feld des elektrischen Quadrupols zur Berechnung der linearen Spinbewegung angewandt. Die höheren Ordnungen folgen analog wie im magnetischen Fall.

9.1 Die Phasenraumbewegung

Das Feld des elektrostatischen Quadrupols ist durch

$$\vec{E}\,(x,y,l) = k_{\mathrm{el}}\,(x\vec{e}_{\mathrm{x}} - y\vec{e}_{\mathrm{y}}\,) \tag{9.1}$$

gegeben. Die linearisierten Bewegungsgleichungen (4.11) lauten für den elektrostatischen Quadrupol

$$\begin{aligned} x' &= a\,, \\ a' &= \frac{qk_{\mathrm{el}}}{p_0 v_0} x\,, \\ y' &= b\,, \\ b' &= -\frac{qk_{\mathrm{el}}}{p_0 v_0} y\,, \\ \tau' &= \left(\frac{K_0 mc^2}{(p_0 c)^2}\right)^2 \delta\,, \\ \delta' &= 0\,. \end{aligned} \tag{9.2}$$

Die Lösung dieses Systems ergibt für $q > 0\,, k_{\mathrm{el}} > 0$ oder $q < 0\,, k_{\mathrm{el}} < 0$

$$\underline{\mathrm{M}}^{(1)}_{\mathrm{ElQu}} = \begin{pmatrix} \cosh\omega_{\mathrm{el}} l & \frac{1}{\omega_{\mathrm{el}}}\sinh\omega_{\mathrm{el}} l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \omega_{\mathrm{el}}\sinh\omega_{\mathrm{el}} l & \cosh\omega_{\mathrm{el}} l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\omega_{\mathrm{el}} l & \frac{1}{\omega_{\mathrm{el}}}\sin\omega_{\mathrm{el}} l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega_{\mathrm{el}}\sin\omega_{\mathrm{el}} l & \cos\omega_{\mathrm{el}} l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \left(\frac{K_0 mc^2}{(p_0 c)^2}\right)^2 l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{9.3}$$

und für $q > 0\,, k_{\mathrm{el}} < 0$ oder $q < 0\,, k_{\mathrm{el}} > 0$

$$\underline{\mathrm{M}}^{(2)}_{\mathrm{ElQu}} = \begin{pmatrix} \cos\omega_{\mathrm{el}} l & \frac{1}{\omega_{\mathrm{el}}}\sin\omega_{\mathrm{el}} l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\omega_{\mathrm{el}}\sin\omega_{\mathrm{el}} l & \cos\omega_{\mathrm{el}} l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cosh\omega_{\mathrm{el}} l & \frac{1}{\omega_{\mathrm{el}}}\sinh\omega_{\mathrm{el}} l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_{\mathrm{el}}\sinh\omega_{\mathrm{el}} l & \cosh\omega_{\mathrm{el}} l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \left(\frac{K_0 mc^2}{(p_0 c)^2}\right)^2 l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{9.4}$$

mit $\omega_{\mathrm{el}}^2 = \frac{|q k_{\mathrm{el}}|}{p_0 v_0}$.

9.2 Die Spinbewegung

Die Spintransferquaternion für den elektrostatischen Quadrupol wird, wie bei den vorhergehenden Elementen auch, einmal über die Spinmatrizen und zum anderen direkt aus ihren Bewegungsgleichungen berechnet. Beide Wege führen unter Verwendung der Abkürzung $\tilde{k}_{\mathrm{el}} = \frac{q k_{\mathrm{el}}(1+a+a\gamma_0)}{\omega_{\mathrm{el}} mc^2(1+\gamma_0)}$ für $q > 0\,, k_{\mathrm{el}} > 0$ oder $q < 0\,, k_{\mathrm{el}} < 0$ zu

κ	$k_{\mathrm{x}} k_{\mathrm{a}} k_{\mathrm{y}} k_{\mathrm{b}} k_\tau k_\delta$
1	000000

,

γ_{x}	$k_{\mathrm{x}} k_{\mathrm{a}} k_{\mathrm{y}} k_{\mathrm{b}} k_\tau k_\delta$
$\frac{\tilde{k}_{\mathrm{el}}}{2}\sin\omega_{\mathrm{el}} l$	001000
$\frac{\tilde{k}_{\mathrm{el}}}{\omega_{\mathrm{el}}}\sin^2\frac{\omega_{\mathrm{el}} l}{2}$	000100

,

γ_{y}	$k_{\mathrm{x}} k_{\mathrm{a}} k_{\mathrm{y}} k_{\mathrm{b}} k_\tau k_\delta$
$\frac{\tilde{k}_{\mathrm{el}}}{2}\sinh\omega_{\mathrm{el}} l$	100000
$\frac{\tilde{k}_{\mathrm{el}}}{\omega_{\mathrm{el}}}\sinh^2\frac{\omega_{\mathrm{el}} l}{2}$	010000

. (9.5)

Für den Fall $q > 0\,, k_{\mathrm{el}} < 0$ oder $q < 0\,, k_{\mathrm{el}} > 0$ erhält man

κ	$k_{\mathrm{x}} k_{\mathrm{a}} k_{\mathrm{y}} k_{\mathrm{b}} k_\tau k_\delta$
1	000000

,

γ_{x}	$k_{\mathrm{x}} k_{\mathrm{a}} k_{\mathrm{y}} k_{\mathrm{b}} k_\tau k_\delta$
$\frac{\tilde{k}_{\mathrm{el}}}{2} \sinh \omega_{\mathrm{el}} l$	001000
$\frac{\tilde{k}_{\mathrm{el}}}{\omega_{\mathrm{el}}} \sinh^2 \frac{\omega_{\mathrm{el}} l}{2}$	000100

,

γ_{y}	$k_{\mathrm{x}} k_{\mathrm{a}} k_{\mathrm{y}} k_{\mathrm{b}} k_\tau k_\delta$
$\frac{\tilde{k}_{\mathrm{el}}}{2} \sin \omega_{\mathrm{el}} l$	100000
$\frac{\tilde{k}_{\mathrm{el}}}{\omega_{\mathrm{el}}} \sin^2 \frac{\omega_{\mathrm{el}} l}{2}$	010000

. (9.6)

Kapitel 10

Spintransport

Nachdem bisher lediglich die Frage nach der Spinbewegung in einem einzelnen Element hinsichtlich einer iterativen Lösung und verschiedener Darstellungen behandelt wurde, sucht man nun die Berechnung für zwei, i.a. mehrere hintereinander angeordnete Elemente. Damit wird gleichzeitig die Herleitung der Gleichung (7.51) nachgereicht.
Sind für zwei aufeinanderfolgende, teilchenoptische Elemente die Abbildung der Phasenraumkoordinaten $\mathcal{M}_1(\vec{z}_\mathrm{i}, l)$, die Spintransferquaternion $\vec{\gamma}_1(\vec{z}_\mathrm{i}, l)$ und $\kappa_1(\vec{z}_\mathrm{i}, l)$ für das erste Element sowie die Spintransferquaternion $\vec{\gamma}_2(\vec{z}_\mathrm{i}, l)$ und $\kappa_2(\vec{z}_\mathrm{i}, l)$ für das zweite bekannt, dann lautet die gesamte Quaternion $\vec{\gamma}_{1/2}(\vec{z}_\mathrm{i}, l)$ und $\kappa_{1/2}(\vec{z}_\mathrm{i}, l)$ nach [8]

$$\begin{aligned}
\vec{\gamma}_{1/2}(\vec{z}_\mathrm{i}, l) &= \kappa_1(\vec{z}_\mathrm{i}, l)\vec{\gamma}_2(\mathcal{M}_1(\vec{z}_\mathrm{i}, l), l) + \kappa_2(\mathcal{M}_1(\vec{z}_\mathrm{i}, l), l)\vec{\gamma}_1(\vec{z}_\mathrm{i}, l) \\
&\quad -\vec{\gamma}_1(\vec{z}_\mathrm{i}, l) \times \vec{\gamma}_2(\mathcal{M}_1(\vec{z}_\mathrm{i}, l), l)\,, \qquad (10.1) \\
\kappa_{1/2}(\vec{z}_\mathrm{i}, l) &= \kappa_1(\vec{z}_\mathrm{i}, l)\kappa_2(\mathcal{M}_1(\vec{z}_\mathrm{i}, l), l) - \vec{\gamma}_1(\vec{z}_\mathrm{i}, l) \cdot \vec{\gamma}_2(\mathcal{M}_1(\vec{z}_\mathrm{i}, l), l)\,. \qquad (10.2)
\end{aligned}$$

Denn zwei Drehungen hintereinander werden durch Matrizenmultiplikation der zugehörigen SO(3)- oder SU(2)-Matrizen beschrieben. In der SU(2)-Schreibweise erhält man mit (7.4)

$$\begin{aligned}
\underline{Q}_1\underline{Q}_2 &= (\kappa_2\underline{\mathrm{I}}_{2\times 2} - \mathrm{i}\underline{\vec{\sigma}} \cdot \vec{\gamma}_2)(\kappa_1\underline{\mathrm{I}}_{2\times 2} - \mathrm{i}\underline{\vec{\sigma}} \cdot \vec{\gamma}_1) \qquad (10.3) \\
&= \kappa_1\kappa_2\underline{\mathrm{I}}_{2\times 2} - (\underline{\vec{\sigma}}\vec{\gamma}_2)(\underline{\vec{\sigma}}\vec{\gamma}_1) - \mathrm{i}\underline{\vec{\sigma}}(\kappa_2\vec{\gamma}_1 + \kappa_1\vec{\gamma}_2)\,. \qquad (10.4)
\end{aligned}$$

Man setzt (7.10) ein,

$$\begin{aligned}
\underline{Q}_2\underline{Q}_1 &= (\kappa_1\kappa_2 - \vec{\gamma}_1\vec{\gamma}_2)\underline{\mathrm{I}}_{2\times 2} - \mathrm{i}\underline{\vec{\sigma}}\,(\kappa_2\vec{\gamma}_1 + \kappa_1\vec{\gamma}_2 - \vec{\gamma}_1 \times \vec{\gamma}_2) \\
&\stackrel{!}{=} \kappa_{1/2}\underline{\mathrm{I}}_{2\times 2} - \mathrm{i}\underline{\vec{\sigma}}\vec{\gamma}_{1/2}\,,
\end{aligned}$$

womit (10.1) und (10.2) gezeigt sind.

Kapitel 11

Berechnung mit *Mathematica*

Alle Rechnungen in dieser Diplomarbeit sind mit Hilfe von *Mathematica*, Version 3.0, durchgeführt worden. Dieser Diplomarbeit liegt eine CD-ROM mit den verwendeten Notebooks bei. Jedes ist für sich selbstständig und kann ohne Ergebnisse aus anderen gestartet werden, da eventuell benötigte Lösungen aus vorangegangenen Rechnungen in „Input"-Zellen eingefügt sind. Während die Gleichungen zur Berechnung der Spintransferquaternionen ohne Kommentar verwendet werden, sind rechentechnische Überlegungen stichpunktartig dokumentiert. Falls der Leser sich ausschließlich für die Lösung interessiert, findet sich diese in *\mathematica \result.nb*. In den übrigen Notebooks des Verzeichnisses *\mathematica* findet der geneigte Leser folgende Inhalte:

- *phasraum.nb*
  Berechnung der Phasenraumbewegung bis in 2. Ordnung Anfangskoordinaten für die Drift, den Quadrupol mit Fokussierung in x-Richtung, den Quadrupol mit Fokussierung in y-Richtung, den Dipol, den Sextupol und die verschiedenen Kombinationen von Quadrupol und Dipol sowie die Berechnung der linearen Phasenraumbewegung für den dejustierten Quadrupol.

- *gamkapmap.nb*
  Berechnung der Spintransferquaternion direkt aus ihrer Bewegungsgleichung bis in 2. Ordnung Anfangskoordinaten für den Quadrupol mit Fokussierung in x-Richtung, den Quadrupol mit Fokussierung in y-Richtung, den Dipol, den Sextupol und die Kombination von Quadrupol und Dipol, deren Quadrupol in x-Richtung fokussiert.

- *spinmap.nb*
  Berechnung der Spintransferquaternion bis in 2. Ordnung über die Spinmatrizen für die Magnetfelder, die in *gamkapmap.nb* betrachtet werden.

- *gakaco.nb*
  Berechnung der Spintransferquaternion direkt aus ihrer Bewegungsgleichung

bis in 2. Ordnung für die Kombination aus Quadrupol und Dipol, deren Quadrupol in x-Richtung defokussiert und deren Quadrupolstärke größer als die Dipolstärke ist, sowie der Grenzübergang zu gleichen Magnetfeldstärken.

- *spico.nb*
  Berechnung der Spintransferquaternion aus den Spinmatrizen für das Magnetfeld aus *gakaco.nb*.

- *gakaco2.nb*
  Berechnung der Spintransferquaternion direkt aus ihrer Bewegungsgleichung bis in 2. Ordnung für die Kombination aus Quadrupol und Dipol, deren Quadrupol in x-Richtung defokussiert und deren Quadrupolstärke kleiner als die Dipolstärke ist, sowie der Grenzübergang zu gleichen Magnetfeldstärken.

- *spico2.nb*
  Berechnung der Spintransferquaternion aus den Spinmatrizen für das Magnetfeld aus *gakaco2.nb*.

- *gakaco3.nb*
  Berechnung der Spintransferquaternion direkt aus ihrer Bewegungsgleichung bis in 2. Ordnung für die Kombination aus Quadrupol und Dipol, deren Quadrupol in x-Richtung defokussiert und deren Quadrupolstärke gleich der Dipolstärke ist.

- *zusammenf.nb*
  Vereinfachung und Reduktion aller berechneter Spintransferquaternionen.

- *result.nb*
  Darstellung der Ergebnisse.

- *electrostat.nb*
  Berechnung der Spintransferquaternion für den elektrostatischen Quadrupol bis in 1. Ordnung Anfangskoordinaten.

Kapitel 12

Zusammenfassung und Ausblick

Die in dieser Diplomarbeit zur Beschreibung der Spindynamik mit Quaternionen vorgestellte Theorie unterliegt hinsichtlich der elektromagnetischen Felder keiner Einschränkung. Sowohl die Bewegungsgleichungen wie auch die Iterationsverfahren sind uneingeschränkt auf beliebige Beschleunigerelemente übertragbar, sofern Referenzkurve und Bahn des Referenzteilchen identisch gewählt sind. Ebenso liefern die Iterationsverfahren die exakten Spintransferquaternionen bis in beliebig hohe Ordnung. Da sich ihre iterative Berechnung über die Spinmatrix als aufwendig erweist, rechtfertigen sich die theoretischen Anstrengungen, die Spintransferquaternionen iterativ über einen kürzeren Weg, ihre Bewegungsgleichungen, zu bestimmen. In dieser Arbeit werden die Spintransferquaternionen zwar mit beiden Methoden berechnet, um die Resultate zu überprüfen, gleichwohl ist das Verfahren über die Bewegungsgleichungen kürzer und deshalb zu bevorzugen. Jedoch ist mit der Bestimmung der 2. Ordnung eine Grenze erreicht, die höheren Ordnungen mit einem vertretbaren Aufwand zu berechnen. Obwohl die Spintransferquaternionen der einzelnen Multipole (Dipol, Quadrupol, Sextupol) problemlos auch in 3. Ordnung bestimmt werden könnten, ist bereits die 2. Ordnung für die Kombination von Quadrupol und Dipol nicht mehr auf triviale Art und Weise lösbar. Da die Formeln (s. 8.4) zu umständlich werden, um daraus direkt Ursachen für depolarisierende Effekte abzulesen, wäre eine numerische Lösung vorzuziehen. Falls die 3. Ordnung erforderlich werden sollte, wäre unter Beibehaltung der vorgestellten Theorie ein möglicher Lösungsweg, das Integral zur Berechnung der 3. Ordnung (s. die verschiedenen Iterationsverfahren) im speziellen Fall der Kombination aus Quadrupol und Dipol für jedes teilchenoptische Element numerisch auszuwerten. Dies könnte innerhalb des eigentlichen Programms, z.B. SPRINT [9], geschehen. Die unmittelbar nächste Aufgabe wird es nun sein, die berechneten 2. Ordnungen der Quaternionen in die Simulation der Polarisation von Protonen bei HERA zu implementieren. Damit kann ihr Einfluß auf die Spinverteilung in der Nähe von Resonanzen konkret diskutiert werden. Insbesondere sollten dabei der nichtlineare Einfluß der Strahl - Strahl Wechselwirkung und der Sextupolfelder, die man zur Korrektur der Chromatizität und des Tune spreads einsetzt, untersucht

werden. Weiterhin werden die hergeleiteten Formeln für die Analyse dejustierter, teilchenoptischer Elemente zum Einsatz kommen.

Literaturverzeichnis

[1] G. H. Hoffstätter, M. Vogt, and D. P. Barber. Higher-order effects in polarized proton dynamics. *DESY Report* 97-161, 1997 and *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research* (1998) submitted.

[2] H. Rose. Hamiltonian magnetic optics. *Nucl. Instr. Method A* **258**, 1987.

[3] G. H. Hoffstätter. Nonlinear dependence of synchrotron radiation on beam parameters. *Proceedings PAC95*, Dallas/TX, 1995.

[4] H. Goldstein. Classical Mechanics, 2nd. ed.. *New-York: Addison-Wesley*, 1980.

[4.1] S. 393, (9-58).

[4.2] S. 347, (8-34).

[4.3] S. 150, (4-60).

[4.4] S. 357, (8-56).

[5] E. D. Courant and H. S. Snyder. Theory of the Alternating-Gradient Synchrotron. *Ann. Phys.* **3**, 1958.

[5.1] S. 45 ff.

[6] V. Bargmann, Louis Michel and V. L. Telegdi. Precession of the polarization of particles moving in a homogeneous electromagnetic field. *Phys. Rev. Lett.* , **2**, 1959.

[6.1] S.435-436

[7] G. H. Hoffstätter. Persönliche Mitteilungen.

[8] G. H. Hoffstätter. Spin Dynamics. Talk in: *Mathematical Aspects of Accelerator Physics*, Bad Honnef, 1996.

[9] K. Heinemann, G. H. Hoffstätter. A tracking algorithm for the stable spin polarization field in storage rings using stroboscopic averaging. *DESY Report* 96-078, Mai 1996.

Danksagung

Danken möchte ich Herrn Prof. Dr. H. Rose für sein Interesse und sein großes Engagement am erfolgreichen Fortgang der Arbeit. Mein besonderer Dank gilt Herrn Dr. G. Hoffstätter, der mir bei meiner Arbeit stets hilfreich zur Seite stand. Aufgetretene Fragen diskutierte und beantwortete Herr Dr. Hoffstätter zu jeder Zeit. Ebenso möchte ich allen Mitgliedern der Arbeitsgruppe Licht- und Teilchenoptik meinen Dank für die angenehme Atmosphäre sowie die Unterstützung in vielfältigen Angelegenheiten aussprechen.
Finanziell wurde diese Arbeit dankenswerterweise durch das Deutsche Elektronen-Synchrotron (DESY), Hamburg unterstützt.
Ich hoffe, zum ehrgeizigen Ziel „Polarisierte Protonen in HERA“ einen konstruktiven Beitrag geleistet zu haben, und wünsche der weiteren Verwirklichung viel Erfolg.

Erklärung

Ich erkläre hiermit an Eides Statt, daß ich die vorliegende Arbeit unter Verwendung der angegebenen Hilfsmittel selbstständig angefertigt und bisher keinen Versuch unternommen habe, ein Diplom in Physik zu erlangen.

Darmstadt, den 31. Juli 1998