Singularitätsstruktur der Zweipunktfunktion des freien Diracfeldes in einer global hyperbolischen Raumzeit

Kai Kratzert
II. Institut für Theoretische Physik
Universität Hamburg

Diplomarbeit

11. Januar 1999

Gutachter der Diplomarbeit:

Prof. Dr. K. Fredenhagen
Prof. Dr. G. Mack

Singularity structure of the two point function of the free Dirac field on a globally hyperbolic spacetime

Abstract

Motivated by the recent progress in our understanding of quantum field theories in a classical gravitational background due to the application of methods from microlocal analysis, we study the singularity structure of vector valued distributions. As a generalization of the wave front set we make use of the polarization set. For solutions of Dirac and Maxwell equations on arbitrary spacetimes the Dencker connection is shown to coincide with the usual spin- and Levi-Civitá-connection respectively, implying that the strongest singularities propagate in a simple way. For the case of the Dirac equation we investigate applications in quantum field theory on curved spacetimes. Hadamard states of the free Dirac field are analyzed and it is shown that the wave front set of their two point functions is the same as in the scalar case. Furthermore we determine the polarization set and show that its form does not depend on the metric background. Finally, possible applications in renormalization theory are discussed.

Zusammenfassung

In Anlehnung an den erfolgreichen Einsatz von Methoden der mikrolokalen Analysis bei der Untersuchung skalarer Quantenfeldtheorien auf gekrümmten Raumzeiten werden die Singularitäten vektorwertiger Distributionen untersucht. Als Verallgemeinerung der Wellenfrontmenge dient hierzu der Begriff der Polarisationsmenge. Für Lösungen der Maxwell- und Dirac-Gleichungen in einem beliebigen klassischen Gravitationshintergrund wird gezeigt, daß der Dencker-Zusammenhang, der die Ausbreitung der Richtungen stärkster Singularitäten beschreibt, mit dem gewöhnlichen Zusammenhang in den zugrundeliegenden Vektorbündeln übereinstimmt. Für den Fall der Dirac-Gleichung werden Anwendungen in der Quantenfeldtheorie untersucht: Für Hadamard-Zustände des freien Dirac-Feldes in einer global hyperbolischen Raumzeit wird bewiesen, daß ihre Zweipunktfunktionen dieselbe Wellenfrontmenge besitzen wie im Falle des Klein-Gordon-Feldes. Weiterhin wird ihre Polarisationsmenge bestimmt und gezeigt, daß diese in gekrümmter Raumzeit die gleiche Form wie im Minkowskiraum hat. Schließlich werden mögliche Anwendungen in der Renormierungstheorie diskutiert.

Inhaltsverzeichnis

Einführung **1**

1 Gekrümmte Raumzeiten **4**
1.1 Grundbegriffe 4
1.2 Kausale Struktur der Raumzeit 6
1.3 Spinoren in gekrümmter Raumzeit 7

2 Mikrolokale Analysis **17**
2.1 Distributionen 17
2.2 Pseudodifferentialoperatoren 20
2.3 Wellenfrontmengen 23
2.4 Multiplikation von Distributionen 25
2.5 Vektorwertige Distributionen 27
2.6 Sobolev-Räume und Skalengrad 33
2.7 Skalarprodukte vektorwertiger Distributionen 36

3 Quantenfeldtheorie in gekrümmter Raumzeit **38**
3.1 Der algebraische Zugang zur Quantenfeldtheorie 39
3.2 Das freie Klein-Gordon-Feld 40
3.3 Das freie Dirac-Feld 42
3.4 Hadamard-Zustände 48

4 Singularitätsstruktur der Zweipunktfunktion **53**
4.1 Klein-Gordon-Feld 53
4.2 Dirac-Feld 56

5 Anwendung auf Feynman-Graphen **67**
5.1 Kausale Störungstheorie 67
5.2 Baumgraphen 69
5.3 Fermionenschleifen 71

6 Zusammenfassung und Ausblick **74**

Literaturverzeichnis **75**

Einführung

Die Quantenfeldtheorie hat sich in den letzten Jahrzehnten als sehr erfolgreich in der Theorie der Elementarteilchen und ihrer Wechselwirkungen herausgestellt. Das Standardmodell der Elementarteilchenphysik stellt heute einen Rahmen dar, in dem die Resultate aller bisher durchgeführten Experimente der Teilchenphysik mit zum Teil beeindruckender Präzision beschrieben werden können.

Dies gilt jedoch nur für die Aspekte der elektromagnetischen, schwachen und starken Wechselwirkung. Die Quantisierung der Gravitation und damit die Beschreibung aller vier fundamentalen Wechselwirkungen in einem einheitlichen Rahmen ist eine sehr schwierige Aufgabe und bis heute nicht befriedigend gelungen.

Es liegt daher nahe, näherungsweise an das Problem heranzugehen und zunächst eine halbklassische Theorie zu entwickeln, in der die Gravitation klassisch durch die allgemeine Relativitätstheorie beschrieben wird, das heißt als gekrümmte Raumzeit, und die Materie als quantisierte Felder in dieser Raumzeit. Wir sprechen daher auch von Quantenfeldtheorie in gekrümmter Raumzeit.

Diese Theorie sollte einen sehr großen Gültigkeitsbereich besitzen und Effekte sowohl des frühen Universums als auch von starken Gravitationsfeldern wie in der Nähe Schwarzer Löcher korrekt beschreiben können. Erst für extreme Gravitationsfelder und sehr kurze Abstände in der Größenordnung der Planck-Länge ist zu erwarten, daß sich tatsächliche Quanteneffekte der Gravitation bemerkbar machen.

Ein eindrucksvolles Beispiel für eine Vorhersage der Quantenfeldtheorie in gekrümmter Raumzeit ist der Hawking-Effekt, die Tatsache, daß massive Sterne, die zu einem Schwarzen Loch kollabieren, durch Teilchenerzeugung in der Nähe des Horizontes thermische Strahlung aussenden. Schwarze Löcher absorbieren somit nicht nur alle Materie, die den Horizont überschreitet, sondern sie verlieren durch diese Hawkingstrahlung wiederum Energie.

Ein weiterer interessanter Aspekt dieser Theorie ist, daß bei der Behandlung von Feldtheorien im gekrümmten Raum einige aus dem Minkowskiraum vertraute mathematische Hilfsmittel wie die Poincaré-Invarianz und die Fouriertransformation nicht zur Verfügung stehen, sondern man die Theorie rein lokal beschreiben muß. Dies führt zu einem besseren Verständnis der lokalen Eigenschaften der Quantenfeldtheorie, was wiederum hilfreich für das Verständnis von Quantenfeldtheorien im Minkowskiraum ist.

Ein wesentliches Problem ist dabei die Charakterisierung von physikalischen

Zuständen, da bei der Auszeichnung des Vakuumzustandes einer Quantenfeldtheorie im Minkowskiraum die Poincaré-Invarianz eine große Rolle spielt. Bei der Abwesenheit von Isometrien der Raumzeit benötigt man natürlich andere Auswahlkriterien. Die Konstruktion von Quantenfeldtheorien in gekrümmter Raumzeit geschieht daher am besten im Rahmen der algebraischen Quantenfeldtheorie, da hier der Schwerpunkt zunächst auf der Konstruktion der Observablenalgebra liegt und erst im Nachhinein eine Klasse von physikalischen Zuständen auf der Algebra der Observablen ausgezeichnet werden muß.

Die lokalen Methoden, die in den letzten Jahren mit großem Erfolg in der Analyse der in der Feldtheorie auftretenden Objekte eingesetzt wurden, sind die der mikrolokalen Analysis. Seit der grundlegenden Arbeit von Radzikowski, in der physikalische Zustände eines freien Skalarfeldes durch die mikrolokalen Eigenschaften ihrer Zweipunkt-Distribution charakterisiert wurden, ist es gelungen, solche Zustände in jeder global hyperbolischen Raumzeit zu konstruieren. Weiterhin konnte die Bedingung auf wechselwirkende Theorien verallgemeinert und der Nutzen dieser Charakterisierung durch die Konstruktion wechselwirkender skalarer Quantenfeldtheorien in beliebigen global hyperbolischen Raumzeiten unter Beweis gestellt werden.

Die sehr umfangreiche Literatur über die Quantenfeldtheorie in gekrümmter Raumzeit bezieht sich fast ausschließlich auf die Theorie des freien Klein-Gordon-Feldes. Über die physikalisch sehr viel relevanteren Dirac-Felder ist bis jetzt erst wenig bekannt. Dies liegt jedoch nicht an prinzipiellen Schwierigkeiten, sondern an der sehr viel größeren mathematischen Komplexität durch das Auftreten mehrkomponentiger Felder.

In dieser Arbeit soll nun versucht werden, die Methoden der mikrolokalen Analysis nicht nur auf skalare Felder, sondern auch auf Dirac-Felder anzuwenden. Wir wollen physikalische Zustände des freien Dirac-Feldes charakterisieren, indem wir, in Anlehnung an das Vorgehen im skalaren Fall, die Singularitätsstruktur ihrer Zweipunktfunktion untersuchen.

Die Arbeit ist folgendermaßen aufgebaut:

Im ersten Kapitel werden zur Klärung der Notation die wichtigsten Grundtatsachen aus der allgemeinen Relativitätstheorie zusammengestellt, um anschließend die Konstruktion von Spinoren in einer allgemeinen, möglicherweise gekrümmten, Raumzeit durchzuführen.

Im folgenden Kapitel wird eine Einführung in die mikrolokale Analysis gegeben und die Methoden dargestellt, die in den späteren Kapiteln zur Analyse der quantenfeldtheoretischen Modelle verwendet werden.

Das dritte Kapitel beschäftigt sich mit der Quantenfeldtheorie in gekrümmter Raumzeit. Nach einem kurzen Überblick über die Prinzipien der algebraischen Quantenfeldtheorie skizzieren wir die wichtigsten Aspekte des skalaren Feldes, um uns anschließend der Konstruktion der Theorie des freien Dirac-Feldes in einer gekrümmten Raumzeit zuzuwenden. Das Kapitel schließt mit der Charakterisierung der physikalisch relevanten Zustände des Klein-Gordon- und Dirac-Feldes,

den Hadamard-Zuständen.

Nachdem alle Grundlagen geklärt wurden, können wir uns im vierten Kapitel der Untersuchung der Zweipunktfunktion und des Feynmanpropagators sowohl des Klein-Gordon-, wie auch des Dirac-Feldes in einer gekrümmten Raumzeit unter Ausnutzung der Methoden der mikrolokalen Analysis zuwenden.

Im fünften Kapitel schließlich soll versucht werden, die physikalische Bedeutung der Ergebnisse darzulegen, indem wir untersuchen, welchen Einfluß die Eigenschaften des Feynmanpropagators auf die Konvergenz bestimmter Feynmandiagramme haben.

Die Arbeit endet mit einer Zusammenfassung und dem Literaturverzeichnis.

Kapitel 1

Gekrümmte Raumzeiten

In den ersten beiden Abschnitten dieses Kapitels werden wir zur Klärung der Notation die wichtigsten Grundbegriffe aus der allgemeinen Relativitätstheorie wiederholen, auf die wir im weiteren zurückgreifen wollen. Details findet man in jedem guten Lehrbuch, zum Beispiel in [Wal84].

Anschließend definieren wir die für die Physik relevanten Vektorbündel über einer gekrümmten Raumzeit, insbesondere das Dirac-Bündel.

Die differentialgeometrischen Grundbegriffe werden hier weitgehend vorausgesetzt, für weitergehende Erklärungen siehe etwa [Nak90].

1.1 Grundbegriffe

Unter einer (möglicherweise gekrümmten) Raumzeit verstehen wir eine vierdimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit, ausgestattet mit einer Lorentz-Metrik, das heißt einem differenzierbaren, symmetrischen und nicht ausgearteten zweifach kovarianten Tensorfeld mit Signatur $(+,-,-,-)$.

In jedem Punkt $x \in \mathcal{M}$ haben wir also eine Bilinearform auf dem Tangentialraum $T_x\mathcal{M}$:

$$g_x : T_x\mathcal{M} \times T_x\mathcal{M} \to \mathbb{R}.$$

In lokalen Koordinaten x^μ, $\mu = 0, \ldots, 3$ schreibt sich die Bilinearform als

$$g_x(X,Y) = g_{\mu\nu}(x) X^\mu Y^\nu,$$

wobei die Tangentialvektoren $X = X^\mu \partial_\mu$, $Y = Y^\nu \partial_\nu \in T_x\mathcal{M}$ durch die Koordinatenbasis $(\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu})_{\mu=0,\ldots,3}$ ausgedrückt werden und wir die übliche Summenkonvention verwenden.

Die Bilinearform ist symmetrisch und nicht ausgeartet, das heißt es gilt

$$g(x) := \det(g_{\mu\nu}(x)) \neq 0, \quad g_{\mu\nu}(x) = g_{\nu\mu}(x).$$

Eine solche Metrik definiert ein kovariantes Volumenelement auf $\mathcal{M}$:

$$d\mu(x) := \sqrt{-g(x)}\, d^4x.$$

Das Tangentialbündel bezeichnen wir mit $T\mathcal{M}$, das Kotangentialbündel mit $T^*\mathcal{M}$. Ein Element in $T^*\mathcal{M}$ können wir in einer lokalen Trivialisierung als (x, ξ) schreiben. $\pi : T^*\mathcal{M} \to \mathcal{M},\ (x, \xi) \mapsto x$ ist die Projektion auf die Basismannigfaltigkeit. In lokalen Koordinaten ist $\xi = \xi_\mu dx^\mu$, dabei ist $(dx^\mu)_{\mu=0,\dots,3}$ die Koordinatenbasis von $T^*_x\mathcal{M}$ mit $dx^\mu(\partial_\nu) = \delta^\mu_\nu$. Für die Menge $\{(x, \xi) \in T^*\mathcal{M} \mid \xi \neq 0\}$ schreiben wir kurz $T^*\mathcal{M} \setminus \mathbf{0}$. Jedes Vektorbündel E über $\mathcal{M}$ läßt sich mittels der Projektion zu einem Vektorbündel π^*E über $T^*\mathcal{M}$ zurückziehen.

Die Menge der glatten Schnitte in einem Vektorbündel $E \xrightarrow{p} \mathcal{M}$, also die Menge der differenzierbaren Abbildungen $v : \mathcal{M} \to E$ mit $p(v(x)) = x\ \forall x \in \mathcal{M}$, nennen wir $\Gamma(\mathcal{M}, E)$, die Menge der lokalen Schnitte über einer offenen Menge $\mathcal{O} \subset \mathcal{M}$ heißt $\Gamma(\mathcal{O}, E)$. Schnitte mit kompaktem Träger in $\mathcal{O} \subset \mathcal{M}$ bilden die Menge $\Gamma_0(\mathcal{O}, E)$.

Zu jeder Metrik gibt es einen eindeutigen Zusammenhang im Tangentialbündel, der symmetrisch und mit der Metrik verträglich ist, den Levi-Civitá-Zusammenhang. Die zugehörige kovariante Ableitung läßt sich wie folgt schreiben:

$$\nabla_\mu v^\nu = \partial_\mu v^\nu + \Gamma^\nu{}_{\mu\lambda} v^\lambda$$

mit den Christoffelsymbolen

$$\Gamma^\nu{}_{\mu\lambda} = \frac{1}{2} g^{\nu\rho}(\partial_\lambda g_{\rho\mu} + \partial_\mu g_{\rho\lambda} - \partial_\rho g_{\mu\lambda}).$$

Aus den Zusammenhangskoeffizienten und ihren Ableitungen konstruiert man den Riemannschen Krümmungstensor

$$R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} = \partial_\rho \Gamma^\mu{}_{\sigma\nu} - \partial_\sigma \Gamma^\mu{}_{\rho\nu} + \Gamma^\mu{}_{\rho\lambda}\Gamma^\lambda{}_{\sigma\nu} - \Gamma^\mu{}_{\sigma\lambda}\Gamma^\lambda{}_{\rho\nu}$$

und seine Kontraktionen, den Ricci-Tensor $R_{\mu\nu} = R^\lambda{}_{\mu\lambda\nu}$ und schließlich den Krümmungsskalar $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$.

Eine spezielle Raumzeit ist die Minkowski-Raumzeit $\mathbb{R}^{1,3} = (\mathbb{R}^4, \eta)$ mit der Metrik $\eta_{\mu\nu} \equiv \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$. In dieser Metrik gilt $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} \equiv 0$ und $R \equiv 0$.

Die Lorentzgruppe $\mathcal{L}$ ist die Gruppe der Matrizen $\Lambda \in \mathrm{GL}(4, \mathbb{R})$, so daß die Koordinatentransformation $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ die Form der Minkowski-Metrik invariant läßt: $\eta'_{\mu\nu} = \eta_{\rho\sigma}\Lambda^\rho{}_\mu \Lambda^\sigma{}_\nu = \eta_{\mu\nu}$. Sie zerfällt in vier Zusammenhangskomponenten, die Zusammenhangskomponente der Eins nennen wir die eigentlich orthochrone Lorentzgruppe $\mathcal{L}^\uparrow_+$. Sie ist die Untergruppe der Lorentztransformationen, die die Raum- und Zeitorientierung des Minkowskiraumes erhalten.

1.2 Kausale Struktur der Raumzeit

Die Metrik unterteilt die Tangentialvektoren $X \in T_x\mathcal{M}$ in raum-, zeit- und lichtartige Vektoren, wenn $g_x(X,X) < 0$, $g_x(X,X) > 0$ oder $g_x(X,X) = 0$. Eine Kurve in $\mathcal{M}$ heißt raum-, zeit- oder lichtartig, wenn ihr Tangentialvektor in jedem Punkt diese Eigenschaft hat. Eine kausale Kurve ist eine in jedem Punkt zeit- oder lichtartige Kurve.

Der offene Lichtkegel im Punkt x besteht aus allen zeitartigen Vektoren in T_xM und zerfällt in zwei Zusammenhangskomponenten. Ist eine globale, stetige Zuordnung von Zukunftslichtkegel V_x^+ und Vergangenheitslichtkegel V_x^- möglich, so nennt man die Raumzeit zeitorientierbar. Diese Zuordnung überträgt sich auf das Kotangentialbündel.

Entsprechend heißt eine Raumzeit raumorientierbar, wenn es eine globale, stetige Zuordnung von rechts- und linkshändigen Dreibeinen von raumartigen Vektoren gibt.

Eine kausale Kurve heißt zukunftsgerichtet, wenn ihr Tangentialvektor in jedem Punkt x im abgeschlossenen Zukunftslichtkegel $\overline{V}_x^+$ liegt.

Die kausale Zukunft eines Punktes $x \in \mathcal{M}$ ist die Menge aller Punkte der Raumzeit, die durch eine zukunftsgerichtete kausale Kurve, ausgehend von x, erreicht werden können. Sie wird mit $J^+(x)$ bezeichnet, die analog definierte kausale Vergangenheit mit $J^-(x)$. Entsprechend definiert man die kausale Zukunft und Vergangenheit einer offenen Menge $\mathcal{O} \subset \mathcal{M}$ als Vereinigung der Mengen $J^\pm(x)$ für alle Punkte $x \in \mathcal{O}$.

Das kausale Abhängigkeitsgebiet $D(\mathcal{O})$ einer Menge $\mathcal{O} \subset \mathcal{M}$ ist die Menge aller Punkte $x \in \mathcal{M}$, so daß jede nichterweiterbare kausale Kurve durch x die Menge $\mathcal{O}$ schneidet. Weiterhin ist $x \in D^\pm(\mathcal{O})$, wenn dies für jede vergangenheits- bzw. zukunftsgerichtete von x ausgehende Kurve dieser Art gilt.

Eine Cauchy-(Hyper-)Fläche ist eine raumartige Hyperfläche $\Sigma \subset \mathcal{M}$, die von jeder nichterweiterbaren kausalen Kurve in $\mathcal{M}$ genau einmal geschnitten wird. Eine Raumzeit $\mathcal{M}$, die eine solche Cauchyfläche Σ besitzt, heißt global hyperbolisch. Man kann zeigen, daß dann $\mathcal{M}$ topologisch die Struktur $\mathcal{M} = \mathbb{R} \times \Sigma$ hat. Insbesondere ist eine solche Raumzeit raum- und zeitorientierbar, und es läßt sich eine globale Zeitkoordinate T wählen, so daß $T = const.$ eine Cauchyfläche definiert.

Im folgenden werden wir stets die globale Hyperbolizität voraussetzen, weil in solchen Raumzeiten das Cauchy-Problem wohldefiniert ist, es also Existenz- und Eindeutigkeitssätze für bestimmte partielle Differentialgleichungen gibt, die wir später untersuchen wollen (siehe Kapitel 3).

Eine konvex normale Umgebung ist eine offene Menge $\mathcal{O} \subset \mathcal{M}$, so daß je zwei Punkte $x, y \in \mathcal{O}$ durch genau eine in $\mathcal{O}$ enthaltene Geodäte $\gamma(\tau), \tau \in [a,b]$, miteinander verbunden werden können. Ihr quadratischer geodätischer Abstand ist dann definiert als

$$\sigma(x,y) := \pm \left(\int_a^b \left| g_{\mu\nu} \frac{d\gamma^\mu(\tau)}{d\tau} \frac{d\gamma^\nu(\tau)}{d\tau} \right|^{1/2} d\tau \right)^2 .$$

Das Vorzeichen wird positiv gewählt, falls die Geodäte raumartig ist, negativ für zeitartige Geodäten. Jeder Punkt besitzt eine konvex normale Umgebung.

Weiterhin werden wir den Begriff einer kausal normalen Umgebung einer Cauchyfläche Σ benötigen. Dies ist eine offene Umgebung $\mathcal{N} \supset \Sigma$, so daß für je zwei Punkte $x, y \in \mathcal{N}$, $y \in J^+(x)$, eine konvex normale Umgebung existiert, die $J^-(y) \cap J^+(x)$ enthält. Für jede Cauchy-Fläche gibt es eine solche kausal normale Umgebung [KW91].

1.3 Spinoren in gekrümmter Raumzeit

Wir kommen jetzt zur Definition der Vektorbündel, in denen sich die Physik abspielt. Das Tangential- und Kotangentialbündel kennen wir bereits, hinzu kommt noch das Dirac-Bündel und allgemeiner beliebige aus Tangential- und Spinorbündel konstruierte Vektorbündel.

Die Darstellung ist angelehnt an [Dim82] und [Ver96], siehe auch die Originalarbeit von Lichnerowicz [Lic64].

Clifford-Algebra und die Gruppe Spin

Zur Definition von Spinoren über einer beliebigen Raumzeit führen wir zunächst die Clifford-Algebra der Dirac-Matrizen im Minkowskiraum $\mathbb{R}^{1,3}$ ein:

Die Clifford-Algebra $\mathrm{Cliff}(\mathbb{R}^{1,3})$ sei die komplexe, assoziative Algebra mit Einselement $\mathbf{1}$, die von den Elementen $\{c(v) \mid v \in \mathbb{R}^{1,3}\}$ und der Relation

$$\{c(v), c(w)\} = 2\eta(v, w)\mathbf{1}$$

erzeugt wird.

Die Dirac-Matrizen erhält man nach der Wahl einer treuen Darstellung ρ der Clifford-Algebra im $\mathbb{R}^{1,3}$: Sei $(e_a)_{a=0,\ldots,3}$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^{1,3}$, so daß $\eta(e_a, e_b) = \eta_{ab}$, dann erhalten wir durch

$$\gamma_a := \rho(c(e_a))$$

vier komplexe (4×4)-Matrizen mit den Antivertauschungsrelationen

$$\{\gamma_a, \gamma_b\} := \gamma_a\gamma_b + \gamma_b\gamma_a = 2\eta_{ab} \cdot \mathbf{1}. \tag{1.1}$$

Nach einem Satz von Pauli sind alle derartigen Darstellungen äquivalent: Sind ρ und ρ' zwei Darstellungen von $\mathrm{Cliff}(\mathbb{R}^{1,3})$ in $\mathbb{R}^{1,3}$, so gilt für die entsprechenden Sätze von Dirac-Matrizen γ_a und γ'_a:

$$T\gamma_a T^{-1} = \gamma'_a, \quad a = 0, \ldots, 3,$$

mit einer nichtsingulären Matrix $T \in \mathrm{GL}(4, \mathbb{C})$, die bis auf einen skalaren Faktor eindeutig bestimmt ist.

Mit Hilfe der γ-Matrizen kann man nun die universelle Überlagerungsgruppe der Lorentzgruppe konstruieren. Wir betrachten die Gruppe $\mathrm{Spin}\,(1,3)$ der Matrizen $S \in \mathrm{SL}(4,\mathbb{C})$ mit der Eigenschaft

$$S\gamma_a S^{-1} = \gamma_b \Lambda^b{}_a, \quad \Lambda^b{}_a \in \mathbb{R}. \tag{1.2}$$

Aufgrund der Antikommutationsrelation (1.1) der Diracmatrizen muß für die Matrizen $\Lambda^b{}_a$ gelten: $\eta_{cd}\Lambda^c{}_a\Lambda^d{}_b = \eta_{ab}$, das heißt die Matrix $\Lambda = (\Lambda^b{}_a)$ ist ein Element der Lorentzgruppe $\mathcal{L}$.

Wie man jetzt leicht zeigen kann, definiert (1.2) eine zweifache Überlagerung $\pi : \mathrm{Spin}\,(1,3) \to \mathcal{L}$. Die Einschränkung auf die Zusammenhangskomponente der Eins, $\mathrm{Spin}_0(1,3)$, liefert die universelle Überlagerung

$$\pi_0 : \mathrm{Spin}_0(1,3) \to \mathcal{L}_+^\uparrow$$

der eigentlich orthochronen Lorentzgruppe $\mathcal{L}_+^\uparrow$. Man kann weiterhin zeigen, daß $\mathrm{Spin}_0(1,3)$ isomorph zu $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ ist.

Da wir im folgenden nur vierdimensionale Lorentzmannigfaltigkeiten betrachten werden, schreiben wir statt $\mathrm{Spin}_0(1,3)$ einfach Spin_0. Es sei aber bemerkt, daß sich diese Konstruktion auch auf höherdimensionale Lorentzmannigfaltigkeiten übertragen läßt.

Spin-Strukturen

Die Konstruktion des Spinorbündels hängt eng zusammen mit dem Bündel der Orthonormalbasen, welches wir nun einführen wollen, und seiner Beziehung zum Tangentialbündel.

Die untersuchte Raumzeit $(\mathcal{M}, g)$ sei raum- und zeitorientierbar, und eine Orientierung sei gewählt. Ein lokales Koordinatensystem sei vorgegeben, damit auch eine lokale Basis $(\partial_\mu)_{\mu=0,\ldots,3}$ des Tangentialbündels $T\mathcal{M}$.

Unter einer Orthonormalbasis $e = (e_a)_{a=0,\ldots,3}$ über einem Punkt x der Raumzeit verstehen wir ein orientiertes System von vier Tangentialvektoren aus $T_x\mathcal{M}$, die orthonormal zueinander stehen:

$$g_x(e_a, e_b) = \eta_{ab}.$$

Indem wir die Vektoren der Orthonormalbasis in der Koordinatenbasis ausdrücken, $e_a = V_a{}^\mu \partial_\mu(x)$, ordnen wir jeder solchen Basis e eine Matrix $(V_a{}^\mu)$ zu. Diese Zuordnung weist ein vernünftiges Transformationsverhalten unter Koordinatentransformationen auf: In zwei Koordinatensystemen x^μ und x'^μ mit den entsprechenden Basen ∂_μ und ∂'_μ im Tangentialbündel gilt nämlich: $e_a = V_a{}^\mu \partial_\mu = V'_a{}^\nu \partial'_\nu$, und damit

$$V'_a{}^\nu = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} V_a{}^\mu.$$

Die Menge der Orthonormalbasen erhält also auf diese Weise eine lokale Trivialisierung mit Übergangsmatrizen $(\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\mu}})$, und die Menge der Orthonormalbasen wird zu einem Faserbündel über $\mathcal{M}$, dem Orthonormalrahmenbündel $F\mathcal{M}$.

Darüber hinaus operiert aber auch die eigentlich orthochrone Lorentzgruppe auf dem Bündel: unter einer Lorentztransformation $\Lambda \in \mathcal{L}_+^{\uparrow}$ geht jede Orthonormalbasis in eine andere über:

$$(R_\Lambda e)_b := e'_b = e_a \Lambda^a{}_b,$$

und jeder Basiswechsel wird durch eine solche Lorentztransformation vermittelt. Man sieht leicht, daß auf diese Weise eine freie, transitive Rechtswirkung R von $\mathcal{L}_+^{\uparrow}$ auf $F\mathcal{M}$ definiert wird. $F\mathcal{M}$ wird somit zu einem $\mathcal{L}_+^{\uparrow}$-Hauptfaserbündel.

In dieser Sprache ist das Tangentialbündel das zu $F\mathcal{M}$ assoziierte $\mathbb{R}^{1,3}$-Vektorbündel $T\mathcal{M} = (F\mathcal{M} \times \mathbb{R}^{1,3})/\mathcal{L}_+^{\uparrow}$: Ein Tangentialvektor kann durch die Wahl einer Orthonormalbasis in $F\mathcal{M}$ sowie von vier Komponenten aus $\mathbb{R}^{1,3}$ charakterisiert werden. Jede Lorentztransformation wirkt sowohl auf die Orthonormalbasis, als auch (entgegengesetzt) auf die Komponenten, aber der dadurch definierte Tangentialvektor bleibt der gleiche. Also ist ein Tangentialvektor eine Bahn in $F\mathcal{M} \times \mathbb{R}^{1,3}$ unter der Wirkung der Lorentzgruppe, und das Tangentialbündel ist der Bahnenraum.

Zur Definition von Spinoren müssen wir das $\mathcal{L}_+^{\uparrow}$-Hauptfaserbündel zu einem Bündel liften, dessen Strukturgruppe die universelle Überlagerungsgruppe Spin_0 ist: Eine Spin-Struktur $(S\mathcal{M}, \varphi)$ für $\mathcal{M}$ ist ein Spin_0-Hauptfaserbündel $S\mathcal{M}$ über $\mathcal{M}$ (genannt Spinrahmenbündel) zusammen mit einem Bündelhomomorphismus $\varphi : S\mathcal{M} \to F\mathcal{M}$, der mit der Gruppenaktion kompatibel ist:

$$\varphi \circ \tilde{R}_S = R_{\Lambda(S)} \circ \varphi \quad \forall S \in \mathrm{Spin}_0.$$

Dabei ist $\tilde{R}$ die Rechtswirkung von Spin_0 auf $S\mathcal{M}$ und $\Lambda(S) = \pi_0(S)$ die S nach Gleichung (1.2) zugeordnete Lorentztransformation.

Die Existenz einer solchen Spin-Struktur hängt von den globalen topologischen Eigenschaften der zugrundeliegenden Mannigfaltigkeit ab und wird durch die zweite Stiefel-Whitney-Klasse charakterisiert. Falls es eine Spin-Struktur gibt, muß sie auch keineswegs eindeutig sein.

Da wir uns im weiteren auf global hyperbolische Raumzeiten beschränken werden, genügt uns folgendes Resultat [Wal84]:

Satz 1.1. *Jede global hyperbolische Raumzeit besitzt eine Spin-Struktur. Das Bündel SM ist in diesem Fall trivial.*

Dirac-Bündel

Jetzt sind wir in der Lage, das Dirac-Bündel $D\mathcal{M}$ über einer Raumzeit $(\mathcal{M}, g)$ mit vorgegebener Spinstruktur $(S\mathcal{M}, \varphi)$ zu definieren.

Gemäß unserer Konstruktion der Gruppe Spin_0 als Untergruppe von $\mathrm{GL}(4,\mathbb{C})$ haben wir eine Darstellung ρ von Spin_0 in $\mathbb{C}^4$. Das Dirac-Spinorbündel ist nun das zu $(S\mathcal{M},\varphi)$ assoziierte $\mathbb{C}^4$-Vektorbündel:

$$D\mathcal{M} := (S\mathcal{M}\times\mathbb{C}^4)/\mathrm{Spin}_0.$$

Die Faser $(D\mathcal{M})_x$ über einem Punkt x der Raumzeit ist also der Bahnenraum der Wirkung $\tilde{R}\times\rho^{-1}$ von Spin_0 in $(S\mathcal{M})_x\times\mathbb{C}^4$.

Ein (globales) Spinorfeld über $\mathcal{M}$ ist dann ein glatter Schnitt $u\in\Gamma(\mathcal{M},D\mathcal{M})$. Die Menge der lokalen Schnitte über einem Teilraum $\mathcal{O}\subset\mathcal{M}$ bezeichnen wir mit $\Gamma(\mathcal{O},D\mathcal{M})$ und die Menge der Spinorfelder mit kompaktem Träger in $\mathcal{O}$ mit $\Gamma_0(\mathcal{O},D\mathcal{M})$.

$D^*\mathcal{M}$ ist das zu $D\mathcal{M}$ duale Vektorbündel: $(D^*\mathcal{M})_x$ ist der zu $(D\mathcal{M})_x$ duale Vektorraum. Schnitte in $D^*\mathcal{M}$ heißen Kospinorfelder, die Menge der Schnitte bezeichnen wir analog mit $\Gamma(\mathcal{M},D^*\mathcal{M})$.

Für ein Spinor- und ein Kospinorfeld $u\in\Gamma(\mathcal{M},D\mathcal{M})$, $v\in\Gamma(\mathcal{M},D^*\mathcal{M})$ ist eine natürliche Paarung

$$<\cdot,\cdot>\colon\Gamma(\mathcal{M},D^*\mathcal{M})\times\Gamma(\mathcal{M},D\mathcal{M})\to\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$$

definiert, es ist

$$<v,u>(x) := v(x)(u(x)),\quad x\in\mathcal{M}.$$

Aus dem Tangential-, dem Diracbündel und ihren dualen Bündeln lassen sich nun Tensorprodukte bilden, und wir erhalten beliebige Spinor-Tensorfelder als Schnitte in diesen Bündeln.

Das Diracbündel über einer Untermannigfaltigkeit $\Sigma\subset\mathcal{M}$ ist das zurückgezogene Vektorbündel $D\mathcal{M}_\Sigma=\iota^*(D\mathcal{M})$, wobei ι die natürliche Einbettung ist.

Die direkte Summe des Spinor- und des Kospinorbündels ergibt das Bündel $\mathcal{D}\mathcal{M} := D\mathcal{M}\oplus D^*\mathcal{M}$.

Lokale Basen

Die Wahl eines lokalen Schnittes $E\in\Gamma(\mathcal{O},S\mathcal{M})$ im Spinrahmenbündel definiert eine lokale Basis in $D\mathcal{M}$ durch $E_A(x) := i(E(x),e_A)$. Hierbei ist $(e_A)_{A=0,\ldots,3}$ die kanonische Basis des $\mathbb{C}^4$ und $i: S\mathcal{M}\times\mathbb{C}^4\to D\mathcal{M}$ die Quotientenabbildung. Jedes Spinorfeld $u\in\Gamma(\mathcal{O},D\mathcal{M})$ läßt sich nun schreiben als $u=u^AE_A$, wobei $u^A\in\mathcal{C}^\infty(\mathcal{O})$.

Ein anderer Schnitt $E'\in\Gamma(\mathcal{O}',S\mathcal{M})$ geht in $\mathcal{O}\cap\mathcal{O}'$ wegen der transitiven Wirkung von Spin_0 durch $E'=\tilde{R}_{S^{-1}}E$ aus E hervor, mit einer differenzierbaren Abbildung $S:\mathcal{O}\cap\mathcal{O}'\to\mathrm{Spin}_0$. Zwischen den Basen besteht dann der Zusammenhang $E'_A=E_B(S^{-1})^B{}_A$, und für die Komponenten des Spinorfeldes in der neuen Basis gilt: $u'^A=S^A{}_Bu^B$.

Ein Schnitt $E \in \Gamma(\mathcal{O}, S\mathcal{M})$ liefert mittels $e(x) := \varphi(E(x))$ einen Schnitt $e \in \Gamma(\mathcal{O}, F\mathcal{M})$ und legt somit auch eine lokale Orthonormalbasis (e_a) in $T\mathcal{M}$ fest. In den dualen Bündeln erhalten wir die dualen Basen (E^{*A}) in $D^*\mathcal{M}$, definiert durch $E^{*B}(E_A) = \delta^B_A$, und (e^{*a}) in $T^*\mathcal{M}$ mit $e^{*b}(e_a) = \delta^b_a$.

Unter Basiswechsel, gegeben durch $S : \mathcal{O} \cap \mathcal{O}' \to \mathrm{Spin}_0$, transformieren sich die Basen wie folgt:

$$\begin{aligned} E'_A &= E_B (S^{-1})^B{}_A, & (E^{*\prime})^B &= S^B{}_A E^{*A}, \\ e'_a &= e_b (\Lambda(S^{-1}))^b{}_a, & (e^{*\prime})^b &= (\Lambda(S))^b{}_a e^{*a}. \end{aligned}$$

Durch Bildung von Tensorprodukten dieser gleitenden Basen erhalten wir Basen in beliebigen Spinor-Tensor-Bündeln. Ein gemischtes Spinor-Tensorfeld

$$f \in \Gamma\big(\mathcal{O}, (\bigotimes_p T\mathcal{M}) \otimes (\bigotimes_q T^*\mathcal{M}) \otimes (\bigotimes_r D\mathcal{M}) \otimes (\bigotimes_s D^*\mathcal{M})\big)$$

läßt sich also durch seine Komponenten $f^{a_1 \ldots a_p}{}_{b_1 \ldots b_q}{}^{A_1 \ldots A_r}{}_{B_1 \ldots B_s}$ beschreiben, so daß

$$f = f^{a_1 \ldots}{}_{b_1 \ldots}{}^{A_1 \ldots}{}_{B_1 \ldots} \cdot e_{a_1} \otimes \ldots \otimes e^{*b_1} \otimes \ldots \otimes E_{A_1} \otimes \ldots \otimes E^{*B_1} \otimes \ldots$$

Hochgestellte Kleinbuchstaben bezeichnen stets Komponenten in $T\mathcal{M}$, tiefgestellte solche in $T^*\mathcal{M}$; entsprechend beziehen sich hoch- und tiefgestellte Großbuchstaben auf Basen in $D\mathcal{M}$ und $D^*\mathcal{M}$.

Der Wechsel einer Basis, gegeben durch $S : \mathcal{O} \cap \mathcal{O}' \to \mathrm{Spin}_0$, transformiert die Komponenten wie folgt:

$$(f')^{a' \ldots}{}_{b' \ldots}{}^{A' \ldots}{}_{B' \ldots} = (\Lambda(S))^{a'}{}_a (\Lambda(S^{-1}))^b{}_{b'} S^{A'}{}_A (S^{-1})^B{}_{B'} f^{a \ldots}{}_{b \ldots}{}^{A \ldots}{}_{B \ldots}$$

Ein besonders wichtiger Spinor-Tensor ist $\gamma \in \Gamma(\mathcal{M}, T^*\mathcal{M} \otimes D\mathcal{M} \otimes D^*\mathcal{M})$, der durch seine Komponenten

$$\gamma_a{}^A{}_B = (\gamma_a)^A{}_B$$

definiert wird, wobei γ_a, $a = 0, \ldots 3$ die Dirac-Matrizen in einer beliebigen Darstellung sind. Die Komponenten von γ sind unabhängig von der gleitenden Basis, dies läßt sich mit Gleichung (1.2) zeigen:

$$\begin{aligned} (\gamma')_{a'}{}^{A'}{}_{B'} &= (\Lambda(S^{-1}))^a{}_{a'} S^{A'}{}_A (S^{-1})^B{}_{B'} \gamma_a{}^A{}_B = (S \gamma_a S^{-1})^{A'}{}_{B'} \Lambda(S^{-1})^a{}_{a'} \\ &= \gamma_{a'}{}^{A'}{}_{B'} \end{aligned}$$

Kontraktionen über duale Spinorindizes können wie im Tangential- und Kotangentialbündel ausgeführt werden. Zum Beispiel schreibt sich die oben eingeführte Paarung $< \cdot, \cdot >: \Gamma(\mathcal{O}, D^*\mathcal{M}) \times \Gamma(\mathcal{O}, D\mathcal{M}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathcal{O})$ in einer lokalen Orthonormalbasis:

$$< v, u > (x) = v(x)^A u(x)_A.$$

Wir verwenden, wenn nicht anders angegeben, die übliche Summationskonvention.

Für ein Kovektorfeld $\xi \in \Gamma(\mathcal{M}, T^*\mathcal{M})$ definieren wir $\not{g}$ als Kontraktion mit γ: $\not{g} = g(\xi, \gamma)$, in einer lokalen Basis: $\not{g}^A{}_B = \eta^{ab}\xi_a\gamma_b{}^A{}_B$. Weiterhin schreiben wir $\not{g}u$ für $\not{g}(u)$, also den Spinor mit Komponenten $(\not{g}u)^A = \not{g}^A{}_B u^B$. Für einen Kospinor ist $(\not{g}v)_B = v_A \not{g}^A{}_B$.

Im Tangentialbündel haben wir außer den Orthonormalbasen (e_a) noch die Koordinatenbasen (∂_μ) mit der Relation

$$e_a = V_a{}^\mu \partial_\mu .$$

Wegen $g(e_a, e_b) = \eta_{ab}$ und $g(\partial_\mu, \partial_\nu) = g_{\mu\nu}$ gilt für die Matrizen $(V_a{}^\mu)$:

$$\begin{aligned} V_a{}^\mu V_{b\mu} = \;& V_a{}^\mu V_b{}^\nu g_{\nu\mu} = \;\; \eta_{ab}, \text{ sowie} \\ V_a{}^\mu V^{a\nu} = \;& V_a{}^\mu V_b{}^\nu \eta^{ba} = \;\; g^{\mu\nu}. \end{aligned}$$

Lateinische Indizes, die sich stets auf eine Orthonormalbasis beziehen, werden mit η_{ab} hinauf- und hinuntergezogen, griechische, die sich stets auf eine Koordinatenbasis beziehen, mit $g_{\mu\nu}$.

Man kann nun auch die Dirac-Matrizen in einer Koordinatenbasis definieren:

$$\gamma_\mu := V^a{}_\mu \gamma_a .$$

Sie erfüllen die Antivertauschungsrelationen

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu} \cdot \mathbf{1}.$$

Wenn wie hier die Spinorindizes weggelassen werden, fassen wir die γ_μ als Matrizen auf und meinen $\gamma_\mu\gamma_\nu = \gamma_\mu{}^A{}_C \gamma_\nu{}^C{}_B \cdot E_A \otimes E^B$.

Mit dieser Notation definieren wir den Kommutator der Dirac-Matrizen:

$$\sigma_{\mu\nu} := \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu].$$

Die Kontraktion des total antisymmetrischen Pseudoeinheitstensors ϵ mit vier Dirac-Matrizen ergibt die Matrix

$$\gamma^5 := i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma .$$

Nach Wahl einer lokalen Basis erhalten wir auf diese Weise, zusammen mit der Einheitsmatrix $\mathbf{1}$ und den Matrizen $\gamma_\mu\gamma^5$, sechzehn linear unabhängige Matrizen. Sie bilden eine lokale Basis des Bündels $D\mathcal{M} \otimes D^*\mathcal{M}$, und man kann mit ihnen rechnen, wie man es aus dem Minkowskiraum gewöhnt ist.

Die kovariante Ableitung eines Vektorfeldes v läßt sich auch in einer Orthonormalbasis in gewohnter Weise schreiben:

$$\nabla_a v^b = \partial_a v^b + \Gamma^b{}_{ac} v^c .$$

Dafür definiert man $\nabla_a := V_a{}^\mu \nabla_\mu$ und entsprechend $\partial_a := V_a{}^\mu \partial_\mu$. Die Christoffelsymbole nehmen dann jedoch die Form

$$\Gamma^b{}_{ac} = V^b{}_\mu (\nabla_\lambda V_c{}^\mu) V_a{}^\lambda$$

an, wie man nach einiger Rechnung feststellt. Zu beachten ist die Antisymmetrie dieser Christoffelsymbole:

$$\Gamma_{bac} = -\Gamma_{cab}$$

im Gegensatz zur Symmetrie $\Gamma^\gamma{}_{\alpha\beta} = \Gamma^\gamma{}_{\beta\alpha}$ der Christoffelsymbole bezüglich einer Koordinatenbasis.

Der Riemann-Tensor läßt sich in einer Orthonormalbasis wie folgt definieren:

$$R^a{}_{bcd} v^b = \nabla_c \nabla_d v^a - \nabla_d \nabla_c v^a - \nabla_{[c,d]} v^a$$

für ein beliebiges Vektorfeld v. Dabei ist $[c,d]$ die Lie-Klammer der Einheitsvektorfelder e_c und e_d.

Je nach Problem kann es von Vorteil sein, in einer Koordinaten- oder einer Orthonormalbasis zu rechnen. Im Spinorbündel jedoch gibt es keine Koordinatenbasis. Wir werden aber aufgrund von Satz 1.1 stets die Möglichkeit haben, eine globale Basis des Dirac-Bündels zu wählen, und der Einfachheit halber unterdrücken wir daher meist die Spinorindizes.

Dirac-Konjugation und Skalarprodukt

Die adjungierten Gamma-Matrizen γ_a^* erfüllen ebenfalls die Antivertauschungsrelationen (1.1). Also muß es eine Matrix β geben, so daß $\gamma_a^* = \beta \gamma_a \beta^{-1}$. Die Bedingung $\det \beta = 1$ legt diese Matrix bis auf einen Faktor $\pm 1, \pm i$ eindeutig fest. Man wählt die Normierung so, daß in einer Standarddarstellung $\beta = \gamma^0$ ist. (Dies ist eine Darstellung, in der gilt: $\gamma_0^* = \gamma_0$, $\gamma_i^* = -\gamma_i$, $i = 1,2,3$.) In jeder anderen Darstellung $\gamma_a' = T \gamma_a T^{-1}$ ($\det T = 1$) setzt man dann $\beta' = T^{*-1} \beta T^{-1}$.

Die Matrix β ermöglicht es uns, zu einem Spinorfeld u das adjungierte Kospinorfeld u^+ zu definieren: $(u^+)_B := \overline{u^A} \beta_{AB}$, wobei der Querstrich die komplexe Konjugation meint. Dies definiert in der Tat unabhängig von der lokalen Basis eine antilineare Abbildung $(\cdot)^+ : \Gamma(\mathcal{M}, D\mathcal{M}) \to \Gamma(\mathcal{M}, D^*\mathcal{M})$. Ihr Inverses wird ebenfalls mit $(\cdot)^+$ bezeichnet und ist gegeben durch: $(v^+)^A = (\beta^{*-1})^{AB} \overline{v}_B$.

Fassen wir einen Spinor u als Spaltenvektor und einen Kospinor v als Zeilenvektor auf, so gilt in Matrixschreibweise: $u^+ = u^* \beta$, $v^+ = (v\beta^{-1})^*$, und man sieht sofort, daß $u^{+\,+} = (u^* \beta \beta^{-1})^* = u$, sowie $v^{+\,+} = ((v\beta^{-1})^*)^* \beta = v$.

Insgesamt haben wir also eine antilineare Abbildung

$$(\cdot)^+ : \Gamma(\mathcal{M}, \mathcal{DM}) \to \Gamma(\mathcal{M}, \mathcal{DM}),\ u \oplus v \mapsto v^+ \oplus u^+$$

konstruiert.

Mit Hilfe dieser antilinearen Abbildung können wir nun eine Sesquilinearform auf dem Diracbündel definieren: Sei n ein vorwärtsgerichtetes zeitartiges Vektorfeld. Dann definiert

$$(u_1, u_2)_n(x) := < u_1^+(x), \not{n} u_2(x) >$$

in jedem Punkt $x \in \mathcal{M}$ eine Sesquilinearform auf $D\mathcal{M}_x$. Analog definieren wir für Kospinorfelder v_1, v_2:

$$(v_1, v_2)_n(x) := < v_2(x), \not{n} v_1^+(x) > .$$

Die gewählte Normierung von β zeichnet sich gerade dadurch aus, daß diese Sesquilinearform positiv definit ist und somit ein Skalarprodukt definiert [Dim82].

Man sieht sofort, daß die Konjugation eine Antiisometrie bezüglich dieses Skalarproduktes ist:

$$(u_1^+, u_2^+)_n = (u_2, u_1)_n.$$

Die Dirac-Konjugation und damit das Skalarprodukt ist zunächst abhängig von der gewählten Darstellung der γ-Matrizen. Für die Wahl einer anderen Darstellung $\gamma'_a = T\gamma_a T^{-1}$ definieren wir eine Abbildung $\alpha_T : \mathcal{DM} \to \mathcal{DM}$ in einer lokalen Basis wie folgt:

$$\alpha_T(u \oplus v) := T^A{}_B u^B E_A \oplus v_A (T^{-1})^A{}_B E^B.$$

Damit läßt sich zeigen, daß

$$\alpha_T((u \oplus v)^+) = (\alpha_T(u \oplus v))^{+'},$$

sowie

$$< \alpha_T(u_1 \oplus v_1), \alpha_T(u_2 \oplus v_2) >' = < u_1 \oplus v_1, u_2 \oplus v_2 > .$$

Die Abbildung α_T ist somit eine Isometrie, die mit der Konjugation vertauscht. Bis auf diese Isometrie ist also die Konstruktion von der Darstellung der Gammamatrizen unabhängig.

Spinzusammenhang

Das Dirac-Bündel erbt auf natürliche Weise einen Zusammenhang, denn der Levi-Civitá-Zusammenhang der Raumzeit $(\mathcal{M}, g)$ läßt sich wie folgt vom Tangential- in das Diracbündel liften:

Durch den Levi-Civitá-Zusammenhang in $T\mathcal{M}$ erhält auch das assoziierte $\mathcal{L}_+^\uparrow$-Hauptfaserbündel $F\mathcal{M}$ einen Zusammenhang, charakterisiert durch die Lie($\mathcal{L}_+^\uparrow$)-wertige Zusammenhangsform. Da die Gruppen $\mathcal{L}_+^\uparrow$ und Spin_0 lokal isomorph sind, sind ihre Lie-Algebren Lie($\mathcal{L}_+^\uparrow$) und Lie(Spin_0) isomorph. Die Zusammenhangsform läßt sich daher mittels der Abbildung φ von $F\mathcal{M}$ nach $S\mathcal{M}$ zurückziehen und

definiert hier als Lie(Spin_0)-wertige Einsform einen Zusammenhang. Dadurch ist auch auf dem assoziierten Vektorbündel $D\mathcal{M}$ ein Zusammenhang definiert, der Spinzusammenhang.

Die kovariante Ableitung eines Spinorfeldes u läßt sich in einer lokalen Orthonormalbasis wie folgt schreiben:

$$\nabla_a u^A = \partial_a u^A + \sigma_a{}^A{}_B u^B.$$

Zwischen den Spinzusammenhangskomponenten $\sigma_a{}^A{}_B$ und den Komponenten $\Gamma^b{}_{ac}$ des Levi-Civitá-Zusammenhanges besteht die folgende Beziehung:

$$\sigma_a{}^A{}_B = \frac{1}{4}\Gamma^b{}_{ac}\gamma_b{}^A{}_D\gamma^{cD}{}_B. \tag{1.3}$$

Für gemischte Spinor-Tensoren wird die kovariante Ableitung auf die übliche Weise durch Anwendung der Leibniz-Regel gebildet. So ist zum Beispiel für einen Spinor-Tensor $f \in \Gamma(\mathcal{M}, T^*\mathcal{M} \otimes D\mathcal{M} \otimes D^*\mathcal{M})$ die kovariante Ableitung in einer lokalen Basis:

$$\nabla_a f_b{}^A{}_B = \partial_a f_b{}^A{}_B - \Gamma^c{}_{ab} f_c{}^A{}_B + \sigma_a{}^A{}_C f_b{}^C{}_B - f_b{}^A{}_C \sigma_a{}^C{}_B.$$

Man kann nun zeigen, daß der Spinor-Tensor γ kovariant konstant ist:

$$\nabla_\mu \gamma_\nu = \partial_\mu \gamma_\nu - \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}\gamma_\lambda + \sigma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \sigma_\mu = 0.$$

Auch für den Spinzusammenhang gibt es einen Krümmungstensor. Man definiert $P \in D\mathcal{M} \otimes D^*\mathcal{M} \otimes T^*\mathcal{M} \otimes T^*\mathcal{M}$ durch

$$P^A{}_{Bcd} u^B = \nabla_c \nabla_d u^A - \nabla_d \nabla_c u^A - \nabla_{[c,d]} u^A$$

für beliebige Spinoren u. Dabei ist $[c, d]$ wieder die Lie-Klammer der Einheitsvektorfelder e_c und e_d.

Zwischen dem Spin-Krümmungstensor und dem Krümmungstensor des Levi-Civitá-Zusammenhanges besteht die folgende Beziehung:

$$P^A{}_{Bcd} = \frac{1}{4} R^a{}_{bcd} (\gamma_a \gamma^b)^A{}_B.$$

Dies folgt direkt aus der in Gleichung (1.3) angegebenen Form der Christoffelsymbole.

Multipliziert man mit zwei weiteren γ-Matrizen und kontrahiert über die Vektorindizes, so erhält man nach einiger Rechnung:

$$\gamma^{cA}{}_B \gamma^{dB}{}_C P^C{}_{Dcd} = -\frac{1}{2}\delta^A{}_D R, \tag{1.4}$$

R ist hierbei der gewöhnliche Krümmungsskalar. Diese Identität werden wir später noch benötigen.

Bi-Spinoren

Ein letztes Vektorbündel werden wir noch benötigen: Oftmals hat man es mit Funktionen zu tun, die von zwei Punkten der Raumzeit abhängen und jeweils Werte in einem Vektorbündel annehmen. Bei uns wird dies konkret die Zweipunktfunktion sein.

Als Beispiel betrachten wir das Produkt eines Spinors und eines Kospinors aus Spinorräumen in verschiedenen Punkten der Raumzeit:

$$f^A{}_B(x,y) := u^A(x) v_B(y).$$

Der Index A transformiert sich also wie ein Spinorindex im Punkt x, der Index B wie ein Kospinorindex im Punkt y.

Dieses Produkt läßt sich als Schnitt in einem neuen Vektorbündel auffassen, dem Bispinor-Bündel $D\mathcal{M} \boxtimes D^*\mathcal{M}$, auch das äußere Tensorprodukt von $D\mathcal{M}$ und $D^*\mathcal{M}$ genannt. Dies ist das Bündel über der Produktmannigfaltigkeit $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$, dessen Faser im Punkt $(x,y) \in \mathcal{M} \times \mathcal{M}$ der Vektorraum $(D\mathcal{M})_x \otimes (D^*\mathcal{M})_y$ ist, mit Übergangsmatrix $S(x) \otimes S^{-1}(y)$.

Glatte Schnitte in $D\mathcal{M} \boxtimes D^*\mathcal{M}$ heißen Bi-Spinoren.

Ein spezieller Bi-Spinor ist der Bi-Spinor des Paralleltransports $\mathcal{J}$. In einer konvex normalen Umgebung $\mathcal{O}$ eines Punktes $x \in \mathcal{M}$ ist jeder Punkt y durch eine eindeutige Geodäte mit x verbunden. Jeder Spinor im Punkt x läßt sich nun entlang dieser Geodäte nach y paralleltransportieren. Dies definiert einen Bi-Spinor $\mathcal{J} \in \Gamma(\mathcal{O} \times \mathcal{O}, D\mathcal{M} \boxtimes D^*\mathcal{M})$. Er wird charakterisiert durch die Bedingungen

$$\mathcal{J}(x,x) = \mathbf{1}, \quad g^{\mu\nu}(\nabla^x_\mu \sigma)(\nabla^x_\nu \mathcal{J}) = 0.$$

Dieser Paralleltransport-Bispinor ist aber im allgemeinen nicht global definiert.

Aus den gleitenden Basen $(E_A(x))$ von $D\mathcal{M}$ und $(E^{*B}(y))$ von $D^*\mathcal{M}$ konstruiert man eine Basis von $D\mathcal{M} \boxtimes D^*\mathcal{M}$ wie folgt:

$$(E \boxtimes E^*)_A{}^B(x,y) = E_A(x) \otimes E^{*B}(y), \quad A,B = 0,\ldots,3.$$

Ein Schnitt $v \in \Gamma(\mathcal{O}, D\mathcal{M} \boxtimes D^*\mathcal{M})$ über $\mathcal{O} \subset \mathcal{M} \times \mathcal{M}$ läßt sich dann schreiben als

$$v(x,y) = v^A{}_B(x,y)(E \boxtimes E^*)_A{}^B(x,y),$$

mit Funktionen $v^A{}_B \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{O})$.

Die Verallgemeinerung auf beliebige Spinor-Tensoren geschieht analog.

Auf offensichtliche Weise kann man über Indizes des gleichen Vektorraumes kontrahieren, zum Beispiel definiert $u_B(y) := v_A(x) f^A{}_B(x,y)$ erneut ein Spinorfeld.

Kapitel 2

Mikrolokale Analysis

Die mikrolokale Analysis beschäftigt sich mit der Untersuchung von Distributionen und ihren Singularitäten, insbesondere im Hinblick auf Anwendungen in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen. Ein wesentliches Werkzeug zur Charakterisierung von Singularitäten ist dabei die Wellenfrontmenge, ein mathematisches Konzept, das sich in der Theorie der partiellen Differentialoperatoren und allgemeiner der Pseudodifferentialoperatoren als sehr nützlich herausgestellt hat.

Wir stellen hier die für uns wichtigsten Definitionen und Sätze zusammen. Details findet man in den grundlegenden Arbeiten von Duistermaat und Hörmander [Hör71, DH72], sowie zum Beispiel in den Monographien [Hör90, Tay81, RS75].

Für vektorwertige Distributionen gibt es eine Erweiterung des Begriffs der Wellenfrontmenge, die Polarisationsmenge. Sie enthält zusätzlich zu den in der Wellenfrontmenge enthaltenen Informationen Aussagen über die Richtungen, in denen eine vektorwertige Distribution am stärksten singulär ist. Wir geben die wichtigsten Resultate aus der Arbeit von Dencker an [Den82].

2.1 Distributionen

Räume von Distributionen

Der Raum der *Testfunktionen* in einem offenen Teilraum $X \subset \mathbb{R}^n$ ist die Menge aller beliebig oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger in X, versehen mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz aller Ableitungen. Wir bezeichnen ihn mit $\mathcal{D}(X) = \mathcal{C}_0^\infty(X)$.

Der zugehörige Dualraum, also die Menge der stetigen linearen Funktionale auf $\mathcal{D}(X)$, ist $\mathcal{D}'(X)$, der Raum der *Distributionen*.

Wichtig sind außerdem $\mathcal{E}'(X)$, der Raum der Distributionen mit kompaktem Träger in X, sowie $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, der Raum der temperierten Distributionen, das ist der Dualraum des Schwartz-Raumes $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ der schnell abfallenden Funktionen.

Der Raum $\mathcal{C}^\infty(X)$ der glatten Funktionen auf X ist als Teilraum in $\mathcal{D}'(X)$

enthalten, denn jede Funktion $f \in \mathcal{C}^\infty(X)$ kann wie folgt mit einer Distribution T_f identifiziert werden:

$$T_f(\phi) := \int_X f(x)\phi(x)d^n x, \quad \phi \in \mathcal{D}(X). \tag{2.1}$$

Es ist sogar jede Distribution Grenzwert einer Folge von glatten Funktionen. Man spricht daher auch von Distributionen als verallgemeinerten Funktionen.

Im Gegensatz zu Funktionen können Distributionen jedoch Singularitäten aufweisen:

Definition 2.1. Der *singuläre Träger* $\operatorname{sing\,supp} u$ einer Distribution $u \in \mathcal{D}'(X)$ ist die Menge aller Punkte aus X, die keine Umgebung U besitzen, in der u mit einer glatten Funktion $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ übereinstimmt, so daß also $u(\phi) = T_f(\phi)$ $\forall \phi \in \mathcal{D}(U)$.

Oftmals bietet sich zur Vereinfachung der Notation an, eine Distribution u wie eine Funktion $u(x)$ zu schreiben. Dies geht natürlich nur formal, und in den Punkten $x \in \operatorname{sing\,supp} u$ ist $u(x)$ nicht definiert. Zum Beispiel ist für die Diracsche Delta-Distribution $\delta^{(n)} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $\delta^{(n)}(\phi) := \phi(0)$: $\delta^{(n)}(x) = 0$ für $x \neq 0$, $\delta^{(n)}(0) = \infty$.

Um eine Operation vom Raum der Testfunktionen auf den Raum der Distributionen zu verallgemeinern, nutzt man stets die Dualität aus: zum Beispiel sind beliebige Ableitungen von Distributionen definiert, indem man diese auf die Testfunktion abwälzt. Für glatte Funktionen f gilt

$$T_{\partial_\mu f}(\phi) = \int \partial_\mu f(x)\phi(x)d^n x = -\int f(x)\partial_\mu\phi(x)d^n x = T_f(-\partial_\mu\phi),$$

und man setzt daher

$$(\partial_\mu u)(\phi) := u(-\partial_\mu\phi).$$

Fouriertransformation und Faltung

Definition 2.2. Sei $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Ihre *Fouriertransformierte* ist definiert als die Funktion $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\widehat{f}(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int f(x)e^{-i<\xi,x>}d^n x\,.$$

Satz 2.1. *Umgekehrt läßt sich $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ durch ihre Fouriertransformierte ausdrücken:*

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int \widehat{f}(\xi)e^{i<\xi,x>}d^n\xi.$$

Satz 2.2. *Die Fouriertransformation läßt sich eindeutig zu einer stetigen Bijektion $\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ ausdehnen. Man definiert für $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$:*

$$\widehat{u}(\phi) := u(\widehat{\phi}), \quad \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Distributionen mit kompaktem Träger werden auf glatte Funktionen abgebildet.

Die Untersuchung der Fouriertransformierten gibt uns Aufschluß über mögliche Singularitäten einer Distribution, wie folgender Satz zeigt:

Satz 2.3. *Sei $u \in \mathcal{D}'(X)$, $X \subset \mathbb{R}^n$ offen. Wenn für jede Funktion $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(X)$ die Funktion $\widehat{\phi u}$ schnell abfällt, das heißt, wenn es für jedes $m \in \mathbb{N}$ eine Konstante C_m gibt, so daß*

$$|\widehat{\phi u}(\xi)| \leq C_m(1 + |\xi|)^{-m} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n,$$

dann ist $u \in \mathcal{C}^\infty(X)$.

Im Zusammenhang mit Produkten von Distributionen benötigen wir den Begriff der Faltung:

Definition 2.3. Seien $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Dann ist ihre *Faltung* die Funktion

$$(f * g)(y) := \int f(y - x)g(x)d^n x.$$

Satz 2.4. *Die Fouriertransformation überführt Produkte in Faltungen und umgekehrt:*

$$\widehat{fg} = (2\pi)^{-n/2}\widehat{f} * \widehat{g}, \quad \widehat{f * g} = (2\pi)^{n/2}\widehat{f} \cdot \widehat{g}.$$

Distributionen über Mannigfaltigkeiten

Bis jetzt haben wir Distributionen nur über dem euklidischen Raum definiert, die Übertragung auf beliebige differenzierbare Mannigfaltigkeiten ist aber problemlos möglich. Wir untersuchen zunächst das Verhalten von Distributionen unter Koordinatentransformationen:

Definition 2.4. Sei $\chi : X \to Y$ ein Diffeomorphismus zweier offener Mengen $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ und $v \in \mathcal{D}'(Y)$. Dann definieren wir die mittels χ zurückgezogene Distribution $\chi^* v \in \mathcal{D}'(X)$ durch

$$\chi^* v(\phi) := v(\det(D\chi)^{-1}\, \phi \circ \chi^{-1}), \quad \phi \in \mathcal{D}(X).$$

Satz 2.5. *Dies ist die eindeutige stetige Erweiterung des Zurückziehens von glatten Funktionen auf den Raum der Distributionen.*

Eine Distribution auf einer Mannigfaltigkeit wird nun durch Zusammenkleben von Distributionen auf den Kartengebieten definiert:

Definition 2.5. Sei $\mathcal{M}$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Wenn für jedes Koordinatensystem $\varphi_\iota : U_\iota \to V_\iota$ ($U_\iota \subset \mathcal{M}, V_\iota \subset \mathbb{R}^n$) eine Distribution $u_\iota \in \mathcal{D}'(V_\iota)$ gegeben ist, so daß

$$u_\iota|_{\varphi_\iota(U_\iota \cap U_\kappa)} = (\varphi_\kappa \circ \varphi_\iota^{-1})^* u_\kappa|_{\varphi_\kappa(U_\iota \cap U_\kappa)} \quad \forall \iota, \kappa,$$

dann wird das System (u_ι) eine Distribution u auf $\mathcal{M}$ genannt. Die Menge aller Distributionen auf $\mathcal{M}$ wird mit $\mathcal{D}'(\mathcal{M})$ bezeichnet.

Man kann sich fragen, warum man den Raum der Distributionen über einer Mannigfaltigkeit nicht einfach als den Dualraum der Menge der differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger definiert. Da im allgemeinen kein ausgezeichnetes Volumenelement definiert ist, ist dann eine natürliche Einbettung der glatten Funktionen nach Gleichung (2.1) nicht möglich. Diese Definition führt stattdessen auf Distributionsdichten. Im Falle (Pseudo-)Riemannscher Mannigfaltigkeiten kann man aber mit Hilfe des vorgegebenen Volumenelementes Funktionen und Dichten identifizieren, und beide Definitionen sind gleichwertig.

2.2 Pseudodifferentialoperatoren

Ein (linearer, partieller) *Differentialoperator* der Ordnung m auf $\mathbb{R}^n$ hat die Form

$$P = p(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha.$$

Die Summe erstreckt sich über alle Multiindizes $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$. Es ist $|\alpha| = \sum_j \alpha_j$ und $D^\alpha = \prod_{j=1}^n (-i\partial/\partial x^j)^{\alpha_j}$, a_α sind glatte Funktionen.

Für $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ gilt dann:

$$\begin{aligned} Pu(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} p(x, D) \int \widehat{u}(\xi) e^{i<x,\xi>} d^n\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int p(x, \xi) \widehat{u}(\xi) e^{i<x,\xi>} d^n\xi. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Wenn wir in diesem Ausdruck für das Polynom $p(x, \xi)$ auch allgemeinere Ausdrücke zulassen, so erhalten wir einen *Pseudodifferentialoperator*. Die Funktion p heißt dann das *Symbol* $\sigma(P)$ des Operators P. Wir verzichten auf die allgemeine Definition eines Symbols, da wir es im folgenden nur mit klassischen Pseudodifferentialoperatoren zu tun haben werden. Genaueres findet man zum Beispiel in [Tay81].

Definition 2.6. Ein *klassischer Pseudodifferentialoperator* P wird durch Gleichung (2.2) definiert, wobei das Symbol eine asymptotische Summe von homogenen Termen ist:

$$p(x,\xi) = p_m(x,\xi) + p_{m-1}(x,\xi) + p_{m-2}(x,\xi) + \dots$$

Es ist $p_m \neq 0$, und die p_j sind homogen in ξ vom Grade j. m heißt der *Grad* des Operators, $\sigma_P(P) = p_m$ ist sein *Hauptsymbol*. Das *Unterhauptsymbol* ist definiert als

$$\sigma_S(P) = p_{m-1} - \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2i} \frac{\partial^2 p}{\partial \xi_j \partial x^j}.$$

Die Übertragung auf Mannigfaltigkeiten liegt auf der Hand: Man definiert den Operator in jedem Kartengebiet und verlangt, daß die Wirkung der Operatoren in jedem Durchschnitt zweier Kartengebiete dieselbe ist.

Die Menge der Pseudodifferentialoperatoren auf $\mathcal{M}$ vom Grad m bezeichnen wir mit $L^m(\mathcal{M})$.

Betrachtet man das Verhalten des Symbols unter Koordinatentransformationen, so zeigt sich, daß das Hauptsymbol eine wohldefinierte Funktion auf dem Kotangentialbündel ist, ebenso das Unterhauptsymbol, wenn der Operator auf Halbdichten wirkt.

Definition 2.7. Die *charakteristische Menge* eines Pseudodifferentialoperators P mit Hauptsymbol p ist die Menge

$$\operatorname{char}(P) = \operatorname{char}(p) := \big\{(x,\xi) \in T^*\mathcal{M} \setminus \mathbf{0} \,|\, p(x,\xi) = 0\big\}.$$

Definition 2.8. Das *Hamiltonsche Vektorfeld* einer Funktion $p \in \mathcal{C}^\infty(T^*\mathcal{M})$ ist das Vektorfeld

$$H_p(x,\xi) := \sum_i \left(\frac{\partial p(x,\xi)}{\partial \xi_i} \frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{\partial p(x,\xi)}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \right).$$

Eine Integralkurve des Hamiltonschen Vektorfeldes H_p ist eine Kurve $\tau \mapsto (x(\tau),\xi(\tau)) \in T^*\mathcal{M}$, so daß $\frac{d}{d\tau}(x(\tau),\xi(\tau)) = H_p(x(\tau),\xi(\tau))$, für die also in einem Koordinatensystem die Hamiltonschen Gleichungen erfüllt sind:

$$\dot{x}^\mu(\tau) = \frac{\partial p}{\partial \xi_\mu}(x(\tau),\xi(\tau)), \quad \dot{\xi}_\mu(\tau) = -\frac{\partial p}{\partial x^\mu}(x(\tau),\xi(\tau)).$$

Der Punkt bedeutet stets Ableitung nach dem Kurvenparameter τ.

Definition 2.9. Sei $P \in L^m(\mathcal{M})$ und p sein Hauptsymbol. Die Integralkurven des Hamiltonschen Vektorfeldes H_p in der charakteristischen Menge von p heißen die *Bicharakteristiken*, ihre Projektionen auf $\mathcal{M}$ die *bicharakteristischen Kurven* von P.

Als Beispiel wollen wir die Bicharakteristiken für einen speziellen Operator ausrechnen, der uns noch mehrfach begegnen wird:

Satz 2.6. *Sei $\mathcal{M}$ eine Raumzeit, $f, b \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$, so daß $0 \neq f(x) \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathcal{M}$, und $a \in \Gamma(\mathcal{M}, T\mathcal{M})$. Die bicharakteristischen Kurven des Operators*

$$P = f\Box + a^\mu \nabla_\mu + b, \quad \Box = g^{\mu\nu}\nabla_\mu \nabla_\nu,$$

sind gerade die Nullgeodäten in $\mathcal{M}$.

Die Bicharakteristiken sind die Kurven $\tau \mapsto (x(\tau), \xi(\tau))$, so daß $x(\tau)$ eine Nullgeodäte beschreibt und $\xi_\mu(\tau) = -(2f(x(\tau)))^{-1} g_{\mu\nu}(x(\tau))\dot{x}^\nu(\tau)$ für alle τ. Durch Umparametrisieren erreicht man $\xi_\mu = g_{\mu\nu}\dot{x}^\nu$.

Beweis. P hat das Hauptsymbol

$$p(x, \xi) = -f(x) g^{\mu\nu}(x)\xi_\mu \xi_\nu .$$

Gesucht ist eine Kurve $\tau \mapsto (x(\tau), \xi(\tau)) \in T^*\mathcal{M}$, so daß $p(x(\tau), \xi(\tau)) = 0\ \forall \tau$ und so daß die Hamilton-Gleichungen erfüllt sind:

$$\begin{aligned} \dot{x}^\mu &= \frac{\partial p}{\partial \xi_\mu} = -2f g^{\mu\nu}\xi_\nu, \\ \dot{\xi}_\mu &= -\frac{\partial p}{\partial x^\mu} = f\partial_\mu g^{\alpha\beta}\xi_\alpha\xi_\beta - \frac{\partial_\mu f}{f} p. \end{aligned}$$

Der Term mit Ableitungen von f verschwindet auf der Kurve, da dort $p = 0$.

Aus der ersten Gleichung folgt $\xi_\mu = -(2f)^{-1} g_{\mu\nu}\dot{x}^\nu$. Die Bedingung $p = 0$ impliziert dann, daß die bicharakteristischen Kurven lichtartig sind: $g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0$.

Es bleibt zu zeigen, daß $x(\tau)$ eine Geodäte ist. Dafür nehmen wir eine Parametertransformation vor: $x'(t) := x(\tau(t))$, so daß in jedem Punkt $\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{f}$. Dann ist $\dot{x}'^\mu = -2g^{\mu\nu}\xi'_\nu$ und $\dot{\xi}'_\mu = \partial_\mu g^{\alpha\beta}\xi'_\alpha\xi'_\beta$.

In die Geodätengleichung eingesetzt, ergibt sich:

$$\begin{aligned} &\ddot{x}'^\mu + \Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}\dot{x}'^\nu \dot{x}'^\lambda \\ &\quad = -2\partial_\lambda g^{\mu\nu}\xi'_\nu \dot{x}'^\lambda - 2g^{\mu\nu}\partial_\nu g^{\alpha\beta}\xi'_\alpha\xi'_\beta + 4\Gamma^\mu{}_{\nu\lambda} g^{\nu\alpha}\xi'_\alpha g^{\lambda\beta}\xi'_\beta \\ &\quad = 2\xi'_\alpha\xi'_\beta \left(2\partial_\lambda g^{\mu\beta} g^{\lambda\alpha} - g^{\mu\nu}\partial_\nu g^{\alpha\beta} + 2\Gamma^\mu{}_{\nu\lambda} g^{\nu\alpha} g^{\lambda\beta}\right) \\ &\quad = 0. \end{aligned}$$

Den letzten Schritt erhält man nach Einsetzen der Christoffelsymbole durch elementare Umformungen.

Der soeben untersuchte Wellenoperator ist ein Beispiel für eine Klasse von Operatoren mit günstigen Eigenschaften:

Definition 2.10. Ein Pseudodifferentialoperator $P \in L^m(\mathcal{M})$ heißt vom *reellen Haupttyp*, wenn sein Hauptsymbol $p(x, \xi)$ reell ist und das Hamiltonsche Vektorfeld H_p für $p = 0$ weder verschwindet noch die radiale Richtung hat (das heißt $H_p \neq -\frac{\partial p}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial \xi_\mu}$).

2.3 Wellenfrontmengen

Bereits in Satz 2.3 haben wir festgestellt, daß die Fouriertransformierte einer in der Umgebung eines Punktes lokalisierten Distribution Aufschluß über mögliche Singularitäten in diesem Punkt geben kann. Die Idee ist nun, genauer die Richtungen im Fourierraum zu analysieren, die diese Singularitäten erzeugen, und nicht nur zu fragen, ob die Fouriertransformierte schnell abfällt, sondern auch, in welchen Richtungen dies der Fall ist.

Definition 2.11. Sei $u \in \mathcal{D}'(X)$, $X \subset \mathbb{R}^n$. Ein Punkt $(x,\xi) \in X \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ heißt ein *regulär gerichteter Punkt von* u, wenn eine Funktion $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(X)$ existiert, die bei x nicht verschwindet, so daß es für jedes $m \in \mathbb{N}$ eine Konstante C_m gibt, mit der gilt:

$$|\widehat{\phi u}(\xi')| \leq C_m(1+|\xi'|)^{-m}$$

für alle ξ' in einer konischen Umgebung $\Gamma \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ von ξ. Eine Umgebung Γ heißt konisch, wenn sie zu jedem Punkt $\xi \in \Gamma$ auch alle $t \cdot \xi$, $t \in \mathbb{R}^+$, enthält.

Definition 2.12. Die *Wellenfrontmenge* $WF(u)$ einer Distribution $u \in \mathcal{D}'(X)$ ist das Komplement in $X \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ der Menge aller regulär gerichteten Punkte von u.

Beispiel 2.1. Die δ-Distribution im $\mathbb{R}^n$ hat die Wellenfrontmenge

$$WF(\delta) = \big\{(0,\xi) \,|\, \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\big\}.$$

Dies liest man direkt an der Fouriertransformierten ab:

$$\widehat{\phi\delta}(\xi) = \delta(e^{-i<\xi,\cdot>}\phi) = \phi(0).$$

Die Wellenfrontmenge enthält jedoch nicht immer den gesamten Raum über einem Punkt des singulären Trägers:

Beispiel 2.2. Die Distribution $u^\pm \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $u^\pm(x) = \frac{1}{x \pm i\epsilon}$, hat die Wellenfrontmenge

$$WF(u^\pm) = \big\{(0,\xi) \,|\, \xi \in \mathbb{R}^\pm \setminus \{0\}\big\},$$

denn ihre Fouriertransformierte ist

$$\widehat{u^\pm}(\xi) = \mp i\sqrt{2\pi}\theta(\pm\xi).$$

Satz 2.7. *Die Wellenfrontmenge einer Distribution $u \in \mathcal{D}'(X)$ hat die folgenden wichtigen Eigenschaften:*

1. *Die Wellenfrontmenge ist eine Verfeinerung des singulären Trägers in folgendem Sinne:*

   $$\pi(WF(u)) = \operatorname{sing\,supp} u.$$

   Insbesondere ist die Wellenfrontmenge einer glatten Funktion leer.

2. *$WF(u)$ ist eine abgeschlossene konische Teilmenge von $X \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$.*

3. *Für alle Testfunktionen $\phi \in \mathcal{D}(X)$ gilt*

$$WF(\phi u) \subseteq WF(u).$$

4. *Für einen Pseudodifferentialoperator P gilt*

$$WF(Pu) \subseteq WF(u),$$

die Anwendung eines Pseudodifferentialoperators vergrößert also nicht die Wellenfrontmenge (pseudolokale Eigenschaft)*.*

5. *Die Summe zweier Distributionen $u, v \in \mathcal{D}'(X)$ hat die Eigenschaft*

$$WF(u+v) \subset WF(u) \cup WF(v).$$

6. *Für das Tensorprodukt der Distributionen $u, v \in \mathcal{D}'(X)$ gilt*

$$\begin{aligned} WF(u \otimes v) \quad \subseteq \quad & WF(u) \times WF(v) \\ & \cup ((\operatorname{supp}(u) \times \{0\}) \times WF(v)) \\ & \cup (WF(u) \times (\operatorname{supp}(v) \times \{0\})). \end{aligned}$$

Die Wellenfrontmenge einer Distribution weist ein vernünftiges Verhalten unter Koordinatentransformationen auf:

Satz 2.8. *Seien $X, Y \subset \mathbb{R}^n$, $\chi : X \to Y$ ein Diffeomorphismus und $v \in \mathcal{D}'(Y)$ eine Distribution. Dann gilt für die Wellenfrontmenge der mittels χ zurückgezogenen Distribution:*

$$WF(\chi^* v) = \chi^* WF(v) := \left\{ (x, {}^t[D\chi(x)]\xi) \mid (\chi(x), \xi) \in WF(v) \right\}.$$

Dieser Satz sagt uns also, daß sich die Elemente der Wellenfrontmenge unter einer Koordinatentransformation wie Kotangentialvektoren transformieren. Man kann die Wellenfrontmenge also als eine Teilmenge des Kotangentialbündels auffassen.

Für eine Distribution u über einer Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ definiert man dann die Wellenfrontmenge in jedem Kartengebiet und erhält durch Zusammenkleben der Kartengebiete die Wellenfrontmenge über der gesamten Mannigfaltigkeit:

$$WF(u) = \bigcup_{\iota} WF(u_\iota) \subset T^*\mathcal{M} \setminus \mathbf{0}.$$

Eine zweite Charakterisierung der Wellenfrontmenge gibt der folgende Satz, der uns insbesondere bei der Verallgemeinerung auf vektorwertige Distributionen leiten wird:

Satz 2.9. *Sei $u \in \mathcal{D}'(X)$ eine Distribution. Für ihre Wellenfrontmenge gilt:*

$$WF(u) = \bigcap_{Au \in \mathcal{C}^\infty} \operatorname{char} A.$$

Der Durchschnitt wird über alle Pseudodifferentialoperatoren $A \in L^0(X)$ gebildet, so daß $Au \in \mathcal{C}^\infty(X)$.

Ein für die Anwendung in der Theorie partieller Differentialgleichungen besonders wichtiges Resultat aus der Arbeit von Duistermaat und Hörmander [DH72] ist der folgende Satz über die Ausbreitung von Singularitäten:

Satz 2.10. *Sei P ein Pseudodifferentialoperator auf $\mathcal{M}$ vom reellen Haupttyp mit Hauptsymbol p. Sind $u, f \in \mathcal{D}'(\mathcal{M})$, so daß $Pu = f$, dann gilt:*

$$WF(u) \setminus WF(f) \subset \operatorname{char}(P),$$

und $WF(u) \setminus WF(f)$ ist invariant unter dem Hamiltonschen Vektorfeld H_p.

Speziell für die Lösung einer homogenen Differentialgleichung $Pu = 0$ ist also die Wellenfrontmenge $WF(u)$ eine Vereinigung von Bicharakteristiken von P. Als Beispiel betrachten wir wieder den Differentialoperator aus Beispiel 2.6:

Corollar 2.11. *Sei $u \in \mathcal{D}'(\mathcal{M})$ eine Lösung der Differentialgleichung $Pu = 0$ mit $P = f\Box + a^\mu \nabla_\mu + b$, wobei $f, b \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$, $0 \neq f(x) \in \mathbb{R}$ $\forall x \in \mathcal{M}$, und $a \in \Gamma(\mathcal{M}, T\mathcal{M})$. Dann gilt für ihre Wellenfrontmenge:*

$$WF(u) \subset \left\{(x,\xi) \in T^*\mathcal{M} \setminus \mathbf{0} \mid g^{\mu\nu}\xi_\mu\xi_\nu = 0\right\}.$$

Liegen die Punkte $x, y \in \mathcal{M}$ auf einer Nullgeodäte γ, so daß ξ kotangential an γ in x ist und η durch Paralleltransport entlang γ aus ξ hervorgeht, dann ist $(x,\xi) \in WF(u)$ genau dann, wenn auch $(y,\eta) \in WF(u)$.

2.4 Multiplikation von Distributionen

Im Gegensatz zu differenzierbaren Funktionen kann man Distributionen im allgemeinen nicht punktweise miteinander multiplizieren. Man kann zeigen, daß sich der Raum der Distributionen nicht stetig in eine assoziative differentielle Algebra einbetten läßt, deren Ableitungsoperator mit dem von $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ bekannten übereinstimmt, so daß auch das Produkt aus $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ erhalten bleibt.

Für Details zu diesem Abschnitt siehe auch das Buch von Oberguggenberger [Obe92].

Beispiel 2.3. Wir betrachten das Produkt der Heaviside-Funktion θ mit der Diracschen δ-Distribution. Wir wählen für beide Distributionen eine Regularisierung durch glatte Funktionen $\delta_\epsilon \to \delta$ und $\theta_\epsilon \to \theta$ für $\epsilon \to 0$ und versuchen, das Produkt als Grenzwert $\lim_{\epsilon\to 0} \theta_\epsilon \delta_\epsilon$ zu definieren.

Offensichtlich hängt aber das Resultat von der Regularisierung ab: Wählen wir die Regularisierung so, daß $\mathrm{supp}(\delta_\epsilon) \subset [-\epsilon, \epsilon]$ und $\theta_\epsilon(x) = 0$ für $x \leq \epsilon$, dann ist $\theta_\epsilon \delta_\epsilon \equiv 0$. Ist hingegen $\theta_\epsilon(x) = 1$ für $x \geq -\epsilon$, dann ist $\theta_\epsilon \delta_\epsilon \equiv \delta_\epsilon \to \delta$.

Eine sinnvolle Definition des Produktes sollte aber von der Regularisierung unabhängig sein.

Für bestimmte Klassen von Distributionen läßt sich dennoch ein sinnvolles Produkt definieren. Zunächst einmal kann man natürlich beliebige Distributionen mit glatten Funktionen multiplizieren. Aber auch unter schwächeren Annahmen existieren Produkte. In Anlehnung an den Zusammenhang zwischen Multiplikation und Faltung von glatten Funktionen (Satz 2.4) definieren wir:

Definition 2.13. Seien $u_1, u_2 \in \mathcal{D}'(X), X \subset \mathbb{R}^n$, zwei Distributionen. Wir sagen, ihr *Fourier-Produkt* existiert als die Distribution $v \in \mathcal{D}'(X)$, wenn es für alle $x \in X$ eine Funktion $\phi \in \mathcal{D}(X)$ gibt, identisch 1 auf einer Umgebung von x, so daß das Faltungsintegral

$$\widehat{\phi^2 v}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int \widehat{\phi u_1}(\eta) \widehat{\phi u_2}(\xi - \eta) d^n\eta$$

absolut konvergiert.

Es gibt a priori noch andere Möglichkeiten, das Produkt zu definieren. Wir werden jedoch nur mit dieser Definition arbeiten und sprechen daher statt vom Fourierprodukt einfach vom *Produkt* zweier Distributionen.

Das Produkt ist, falls es existiert, eindeutig. Da die Definition lokal ist, läßt sie sich problemlos auch auf Mannigfaltigkeiten übertragen.

Das Produkt zweier Distributionen mit disjunktem Träger ist offensichtlich Null. Es ist auch leicht einzusehen, daß das Produkt für zwei Distributionen mit disjunktem singulären Träger stets existiert. Für die Existenz eines Produktes genügt aber auch eine einfache Bedingung an die Wellenfrontmengen der Faktoren:

Satz 2.12. *Seien $u, v \in \mathcal{D}'(X)$, und sei folgende Bedingung für alle $x \in X$ erfüllt:*

$$(x,0) \notin WF(u) \oplus WF(v) := \big\{(x, \xi + \eta) \,|\, (x,\xi) \in WF(u), (x,\eta) \in WF(v)\big\}.$$

Dann existiert das Fourierprodukt $u \cdot v$, und es gilt:

$$WF(u \cdot v) \subseteq (WF(u) \oplus WF(v)) \cup WF(u) \cup WF(v).$$

Beispiel 2.4. Das Produkt der Distribution $u^+(x) = \frac{1}{x + i\epsilon}$ aus Beispiel 2.2 mit sich selbst existiert als Distribution $\frac{1}{(x+i\epsilon)^2} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, denn es gilt

$$WF(u^+) \oplus WF(u^+) = \big\{(0,\xi) \,|\, \xi \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}\big\} \not\ni (x,0).$$

Schließlich sei noch hingewiesen auf den Zusammenhang mit der Regularisierung durch glatte Funktionen mit anschließendem Übergang zum Grenzwert der Produkte, der in der Motivation angesprochen wurde [Obe86]:

Satz 2.13. *Seien $u, v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, und ihr Fourier-Produkt $u \cdot v$ existiere. Dann existiert für alle δ-Folgen $(\rho_j), (\sigma_j)$ der Grenzwert*

$$\lim_{j\to\infty} (\rho_j * u)(\sigma_j * v) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$$

und stimmt mit dem Produkt $u \cdot v$ überein.

Dabei heißt eine Folge (ρ_j) von Testfunktionen $\rho_j \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ eine δ-Folge, wenn

1. *es positive Zahlen $\epsilon_j \to 0$ gibt, so daß $\rho_j(x) = 0$ für $|x| \geq \epsilon_j$,*
2. *$\int \rho_j(x) d^n x = 1$,*
3. *$\rho_j(x) \geq 0 \; \forall x \in \mathbb{R}^n$.*

2.5 Vektorwertige Distributionen

Wir betrachten nun vektorwertige Distributionen $u \in \mathcal{D}'(\mathcal{M}, \mathbb{C}^N)$, das sind Tupel $u = (u_i)_{i=1,\ldots,N}$ von Distributionen $u_i \in \mathcal{D}'(\mathcal{M})$. Ein solches Tupel kann man auffassen als Linearform auf $\mathcal{D}(\mathcal{M})^N = \Gamma_0(\mathcal{M}, \mathcal{M} \times \mathbb{C}^N)$.

Dies läßt sich auf beliebige Vektorbündel E über $\mathcal{M}$ verallgemeinern, indem man $\mathcal{D}'(\mathcal{M}, E)$ als den Dualraum von $\Gamma_0(\mathcal{M}, E^*)$ definiert.

In einer lokalen Basis (E^A) von E läßt sich eine Distribution $u \in \mathcal{D}'(\mathcal{M}, E)$ dann als $u = \sum u_A E^A$ schreiben, mit skalaren Distributionen $u_A \in \mathcal{D}'(\mathcal{M})$. Für $f \in \Gamma_0(\mathcal{M}, E^*)$, $f = \sum f^A E_A$, ist dann $u(f) = \sum u_A(f^A)$.

Die Anwendung eines $M \times N$-Systems $A = (A_{ij})$ von Pseudodifferentialoperatoren auf $\mathcal{M}$ auf eine Distribution $u \in \mathcal{D}'(\mathcal{M}, \mathbb{C}^N)$ definiert eine Distribution $Au \in \mathcal{D}'(\mathcal{M}, \mathbb{C}^M)$ mit

$$(Au)_i := \sum_j A_{ij} u_j, \quad i = 1, \ldots, M.$$

Entsprechend ist ein Pseudodifferentialoperator zwischen zwei Vektorbündeln ein Operator, der in jeder lokalen Trivialisierung diese Form hat. Die Menge der Pseudodifferentialoperatoren vom Grad m zwischen den Vektorbündeln E und F über $\mathcal{M}$ nennen wir $L^m(\mathcal{M}; E, F)$.

Die Verknüpfung zweier Systeme von Pseudodifferentialoperatoren ist auf naheliegende Weise definiert: Ist $A = (A_{ij})$ ein $M \times N$-System und $B = (B_{ij})$ ein $K \times M$-System, dann ist BA ein $K \times N$-System von Pseudodifferentialoperatoren, definiert durch

$$(BA)_{ik} := \sum_j B_{ij} A_{jk}.$$

Die Wellenfrontmenge von $u = (u_j) \in \mathcal{D}'(\mathcal{M}, \mathbb{C}^N)$ ist definiert als die Vereinigung der Wellenfrontmengen ihrer Komponenten:

$$WF(u) := \bigcup_{i=1}^{N} WF(u_i).$$

Polarisationsmenge

Wir definieren jetzt die Polarisationsmenge einer vektorwertigen Distribution und nennen ihre wichtigsten Eigenschaften. Weitere Einzelheiten finden sich in der Originalarbeit von Dencker [Den82].

Definition 2.14. Die *Polarisationsmenge* einer Distribution $u \in \mathcal{D}'(\mathcal{M}, \mathbb{C}^N)$ ist die Menge

$$WF_{pol}(u) = \bigcap_{Au \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})} \mathcal{N}_A,$$

$$\mathcal{N}_A = \{(x, \xi; w) \in (T^*\mathcal{M} \setminus \mathbf{0}) \times \mathbb{C}^N \mid w \in \operatorname{Ker} a(x, \xi)\},$$

wobei der Durchschnitt über alle $1 \times N$-Systeme von klassischen Pseudodifferentialoperatoren A mit Hauptsymbol $\sigma_P(A) = a$ gebildet wird, und $\operatorname{Ker} a(x, \xi)$ ist der Kern der Matrix $a(x, \xi)$.

Wie man sofort sieht, ist $(T^*\mathcal{M} \setminus \mathbf{0}) \times \{0\} \subset WF_{pol}(u)$ für jede Distribution u. Außerdem ist die Polarisationsmenge abgeschlossen, linear in der Faser und konisch in der ξ-Variable.

Für eine Distribution mit Werten in einem Vektorbündel E über $\mathcal{M}$ definiert man die Polarisationsmenge in jeder lokalen Trivialisierung. Es ist klar, daß dies eine lineare Teilmenge des über das Kotangentialbündel zurückgezogenen Bündels π^*E ergibt.

Die Polarisationsmenge gibt an, in welchen Richtungen eine vektorwertige Distribution die stärksten Singularitäten besitzt. Dies wollen wir anhand einiger Beispiele verdeutlichen:

Beispiel 2.5. Sei $u = (u_1, u_2) \in \mathcal{D}'(\mathcal{M}, \mathbb{C}^2)$ und $(y, \eta) \notin WF(u_1)$. Dann gilt über einer konischen Umgebung von (y, η):

$$WF_{pol}(u) \subseteq \{(x, \xi; (0, z)) \in (T^*\mathcal{M} \setminus \mathbf{0}) \times \mathbb{C}^2,\ z \in \mathbb{C}\}.$$

Beispiel 2.6. Sei $u = (v, \Delta v) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^2)$, wobei $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ und Δ der Laplace-Operator ist. Dann gilt

$$WF_{pol}(u) \subseteq \{(x, \xi; (0, z)) \in (T^*\mathbb{R}^n \setminus \mathbf{0}) \times \mathbb{C}^2,\ z \in \mathbb{C}\},$$

da $\Delta u_1 - u_2 = 0$ und $\operatorname{Ker} \sigma_P(\Delta, -1) = \operatorname{Ker}(-\xi^2, 0) = \{(0, z), z \in \mathbb{C}\}$.

Beispiel 2.7. Sei $u = \nabla\delta^{(2)} = \left(\partial_{x_1}\delta^{(2)}(x_1, x_2), \partial_{x_2}\delta^{(2)}(x_1, x_2)\right) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}^2)$. Dann ist

$$WF_{pol}(u) \subseteq \{(0, \xi; \lambda \cdot \xi) \in (T^*\mathbb{R}^2 \setminus \mathbf{0}) \times \mathbb{C}^2,\ \lambda \in \mathbb{C}\},$$

denn u ist Lösung der Differentialgleichung $(-\partial_{x_2}, \partial_{x_1})u = 0 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$, und $\operatorname{Ker}(-i\xi_2, i\xi_1) = \mathbb{C} \cdot (\xi_1, \xi_2)$.

Für skalare Distributionen liefert die Polarisationsmenge aufgrund von Satz 2.9 wieder genau die Informationen der Wellenfrontmenge. Für vektorwertige Distributionen erhalten wir die Wellenfrontmenge zurück, indem wir die nichttrivialen Punkte der Polarisationsmenge auf das Kotangentialbündel projizieren:

Satz 2.14. *Sei $u \in \mathcal{D}'(\mathcal{M}, \mathbb{C}^N)$ und $\pi_{1,2} : T^*\mathcal{M} \times \mathbb{C}^N \to T^*\mathcal{M}$ die Projektion auf das Kotangentialbündel: $\pi_{1,2}(x, \xi; w) = (x, \xi)$. Dann gilt:*

$$\pi_{1,2}(WF_{pol}(u) \setminus \mathbf{0}) = WF(u).$$

In diesem Sinne ist die Polarisationsmenge also eine Verfeinerung der Wellenfrontmenge.

Uns interessiert nun das Verhalten der Polarisationsmenge unter Anwendung eines Systems von Pseudodifferentialoperatoren. Wir wissen bereits aus Satz 2.7, daß dies die Wellenfrontmenge nicht vergrößert. Für die Polarisationsmenge gilt der folgende Satz:

Satz 2.15. *Sei A ein $M \times N$-System von Pseudodifferentialoperatoren auf $\mathcal{M}$ mit Hauptsymbol $a(x, \xi)$, und sei $u \in \mathcal{D}'(\mathcal{M}, \mathbb{C}^N)$. Dann gilt:*

$$a(WF_{pol}(u)) \subseteq WF_{pol}(Au),$$

wobei a auf der Faser operiere: $a(x, \xi; w) := (x, \xi; a(x, \xi)w)$.

Ist E ein $N \times N$-System von Pseudodifferentialoperatoren auf $\mathcal{M}$ und sein Hauptsymbol $e(x, \xi)$ nicht charakteristisch im Punkt $(y, \eta) \in T^*\mathcal{M} \setminus \mathbf{0}$, ist also $\det e(x, \xi) \neq 0$, so gilt sogar

$$e(WF_{pol}(u)) = WF_{pol}(Eu)$$

über einer konischen Umgebung von (y, η).

Ausbreitung von Singularitäten

Wir wenden uns jetzt der Frage zu, welche Aussagen man über die Polarisationsmenge einer Distribution machen kann, die Lösung eines Systems von partiellen Differentialgleichungen oder allgemeiner Pseudodifferentialoperatoren ist.

Zunächst müssen wir jedoch Einschränkungen an die betrachteten Operatoren machen:

Definition 2.15. Ein $N \times N$-System P von Pseudodifferentialoperatoren auf $\mathcal{M}$ mit Hauptsymbol $p(x, \xi)$ heißt vom *reellen Haupttyp* bei $(y, \eta) \in T^*\mathcal{M} \setminus \mathbf{0}$, falls es ein $N \times N$-Symbol $\tilde{p}(x, \xi)$ gibt, so daß

$$\tilde{p}(x, \xi)p(x, \xi) = q(x, \xi) \cdot \mathbf{1}$$

in einer Umgebung von (y, η), mit einem skalaren Symbol $q(x, \xi)$ vom reellen Haupttyp. Wir sagen, P sei vom reellen Haupttyp in $\Omega \subseteq T^*\mathcal{M} \setminus \mathbf{0}$, wenn es dies in jedem Punkt $(y, \eta) \in \Omega$ ist.

Bemerkung. Die Wahl von $\tilde{p}$ und q ist nicht eindeutig. Man kann jedoch zeigen, daß die Freiheit nur in der Multiplikation mit einer glatten, nicht verschwindenden Funktion auf $T^*\mathcal{M} \setminus \mathbf{0}$ besteht.

Für ein System von Pseudodifferentialoperatoren P vom reellen Haupttyp definieren wir die Menge

$$\Omega_P := \{(x,\xi) \in T^*\mathcal{M} \setminus \mathbf{0} \mid \det p(x,\xi) = 0\}.$$

Wählt man lokal $\tilde{p}$, so daß $\tilde{p}p = q \cdot \mathbf{1}$, dann ist $\Omega_P = q^{-1}(0)$. Da q vom reellen Haupttyp ist, ist dies eine Hyperfläche mit nicht-radialem Hamilton-Feld H_q, und die Dimension von $\operatorname{Ker} p$ ist konstant auf Ω_P.

Ist $Pu \in \mathcal{C}^\infty$, so ist für die Existenz von nichttrivialen Elementen $(x,\xi;w)$ der Polarisationsmenge über einem Punkt (x,ξ) nach Definition notwendig, daß $\operatorname{Ker} p(x,\xi) \neq \{0\}$. Also muß (x,ξ) und somit ganz $WF(u)$ in Ω_P liegen.

Nach Satz 2.10 ist die Wellenfrontmenge eine Vereinigung von Bicharakteristiken von q in Ω_P. Da die Wellenfrontmenge nicht von der Wahl von q abhängen kann, folgt, daß eine andere Wahl von $\tilde{p}$ und q auf die gleichen Bicharakteristiken führen muß. Dies sieht man auch leicht, indem man das Vektorfeld H_q mit dem Hamiltonfeld für eine andere Wahl $q' = fq$ vergleicht. Es ist

$$H_{fq} = fH_q + qH_f = fH_q$$

auf Ω_P, da dort q verschwindet. Die Multiplikation von H_q mit einer nicht verschwindenden glatten Funktion f führt aber auf die gleichen, lediglich umparametrisierten, Bicharakteristiken: Sei $(x(\tau),\xi(\tau))$ eine Bicharakteristik von q und $\tilde{x}(t) = x(\tau(t))$, wobei die Parametertransformation $t(\tau)$ so gewählt sei, daß in jedem Punkt $\frac{dt}{d\tau}(\tau) = f(x(\tau))^{-1}$. Dann gilt

$$\frac{d}{dt}(\tilde{x}(t),\tilde{\xi}(t)) = \frac{d\tau}{dt}\frac{d}{d\tau}(x(\tau),\xi(\tau)) = fH_q,$$

also ist die umparametrisierte Kurve $(\tilde{x}(\tau),\tilde{\xi}(\tau))$ Integralkurve von H_{fq}.

Jede Wahl von q führt also auf die gleichen Bicharakteristiken (als unparametrisierte Kurven), und wir werden daher einfach von Bicharakteristiken in Ω_P sprechen, ohne auf ein spezielles q Bezug zu nehmen.

Wir hatten festgestellt, daß die Wellenfrontmenge von u mit $Pu \in \mathcal{C}^\infty$ eine Vereinigung von Bicharakteristiken in Ω_P ist. Es stellt sich nun die Frage, wie sich die Polarisationsvektoren entlang dieser Bicharakteristiken verhalten, und es wird sich herausstellen, daß sie einem einfachen Paralleltransportgesetz gehorchen.

Wir betrachten also ein $N \times N$-System von Pseudodifferentialoperatoren P vom reellen Haupttyp. P habe den Grad m, und sein Symbol ist eine Summe homogener Terme:

$$\sigma(P)(x,\xi) = p(x,\xi) + p_{m-1}(x,\xi) + p_{m-2}(x,\xi) + \ldots$$

$p = \sigma_P(P)$ ist das Hauptsymbol von P, und p_j ist homogen vom Grad j. Das Unterhauptsymbol ist

$$p^s(x,\xi) = p_{m-1}(x,\xi) - \frac{1}{2i}\frac{\partial^2 p(x,\xi)}{\partial x^\mu \partial \xi_\mu}.$$

$\tilde{p}(x,\xi)$ und $q(x,\xi)$ seien wie oben ausgewählt, so daß

$$\tilde{p}p = q \cdot \mathbf{1}.$$

Weiterhin sei

$$\{\tilde{p}, p\} = \partial_{\xi_\mu}\tilde{p}(x,\xi)\partial_{x^\mu}p(x,\xi) - \partial_{x^\mu}\tilde{p}(x,\xi)\partial_{\xi_\mu}p(x,\xi)$$

die Poissonklammer und

$$H_q(x,\xi) = \partial_{\xi_\mu}q(x,\xi)\partial_{x^\mu} - \partial_{x^\mu}q(x,\xi)\partial_{\xi_\mu}$$

das Hamiltonsche Vektorfeld von q.

Definition 2.16. Für ein glattes Vektorfeld w auf $T^*\mathcal{M} \setminus \mathbf{0}$ mit Werten in $\mathbb{C}^N$ definieren wir den *Dencker-Zusammenhang*:

$$D_P w := H_q w + \frac{1}{2}\{\tilde{p}, p\}w + i\tilde{p}p^s w. \tag{2.3}$$

Dies ist ein partieller Zusammenhang entlang der Bicharakteristiken in Ω_P, also ein Zusammenhang in allen $\mathbb{C}^N$-Vektorbündeln über diesen Bicharakteristiken. Es gilt aber sogar folgendes:

Satz 2.16. *Durch (2.3) wird ein partieller Zusammenhang auf $\mathcal{N}_P$ definiert. Insbesondere gilt für jedes Vektorfeld w entlang einer Bicharakteristik γ in Ω_P, daß $D_P w \in \operatorname{Ker} p$ entlang γ genau dann, wenn $w \in \operatorname{Ker} p$ entlang γ, und die Gleichung $D_P w = 0$ kann gelöst werden mit $w \in \mathcal{N}_P$.*

Bemerkung. Die Definition des Zusammenhanges ist wiederum abhängig von der Wahl von $\tilde{p}$ und q. Eine geschickte Wahl von $\tilde{p}$ kann sich zwar in konkreten Rechnungen durchaus bezahlt machen, man kann jedoch zeigen, daß Lösungen der Gleichung $D_P w = 0$ in $\mathcal{N}_P$ durch eine andere Wahl nur um einen skalaren Faktor verändert werden. Dies motiviert die folgende Definition:

Definition 2.17. Ein *Hamilton-Orbit* eines Systems P vom reellen Haupttyp ist ein Geradenbündel $L \subseteq \mathcal{N}_P|_\gamma$ entlang einer Bicharakteristik in Ω_P, aufgespannt von einem Vektorfeld w, das die Gleichung $D_P w = 0$ erfüllt, das also parallel bezüglich des Zusammenhanges D_P ist.

Die Hamilton-Orbits hängen somit nicht von der Wahl von $\tilde{p}$ ab. Damit haben wir alle Vorbereitungen getroffen, um das folgende Hauptresultat aus [Den82] anzugeben:

Theorem 2.17. *Sei P ein $N \times N$-System von Pseudodifferentialoperatoren auf einer Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$, und sei $u \in \mathcal{D}'(\mathcal{M}, \mathbb{C}^N)$. Weiterhin sei P im Punkt $(y, \eta) \in \Omega_P$ vom reellen Haupttyp und $(y, \eta) \notin WF(Pu)$. Über einer Umgebung von (y, η) in Ω_P ist dann $WF_{pol}(u)$ eine Vereinigung von Hamilton-Orbits von P.*

Zur Illustration betrachten wir eine physikalische Anwendung (vergleiche auch [Rad97]):

Beispiel 2.8. Wir untersuchen die Maxwell-Gleichungen in einer Raumzeit $\mathcal{M}$. Sie lauten für ein Vektorfeld $A \in \Gamma(\mathcal{M}, T\mathcal{M})$ in Lorentz-Eichung ($\nabla_\mu A^\mu = 0$) in lokalen Koordinaten:

$$\Box A^\nu - R^\nu{}_\mu A^\mu = 0, \quad \Box = g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu.$$

Zu untersuchen ist also der Pseudodifferentialoperator

$$P^\nu{}_\mu = \delta^\nu_\mu\Box - R^\nu{}_\mu = g^{\alpha\beta}(\delta^\nu_\mu\partial_\alpha\partial_\beta + \Gamma^\nu{}_{\alpha\mu}\partial_\beta - \delta^\nu_\mu\Gamma^\gamma{}_{\alpha\beta}\partial_\gamma + \Gamma^\nu{}_{\beta\mu}\partial_\alpha) + \dots$$

Die Punkte stehen für Terme, die keine Ableitungen enthalten und in der weiteren Rechnung keine Rolle spielen.

P hat das Hauptsymbol

$$p(x,\xi)^\nu{}_\mu = -g^{\alpha\beta}(x)\xi_\alpha\xi_\beta\delta^\nu_\mu,$$

sein Unterhauptsymbol ist

$$\begin{aligned} p^s(x,\xi)^\nu{}_\mu &= ig^{\alpha\beta}\big(\Gamma^\nu{}_{\alpha\mu}\xi_\beta - \delta^\nu_\mu\Gamma^\gamma{}_{\alpha\beta}\xi_\gamma + \Gamma^\nu{}_{\beta\mu}\xi_\alpha\big) + \frac{1}{2i}2\delta^\nu_\mu\partial_\beta g^{\beta\gamma}\xi_\gamma \\ &= 2ig^{\alpha\beta}\Gamma^\nu{}_{\alpha\mu}\xi_\beta + \frac{i}{2}g^{-1}(\partial_\beta g)g^{\beta\gamma}\xi_\gamma\delta^\nu_\mu. \end{aligned}$$

Dabei haben wir die folgende Identität benutzt:

$$\Gamma^\gamma{}_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta} = -\partial_\beta g^{\beta\gamma} - \frac{1}{2}g^{-1}(\partial_\beta g)g^{\beta\gamma}.$$

Wir wählen

$$\tilde{p}^\lambda{}_\nu := \sqrt{-g}\delta^\lambda_\nu,$$

so daß

$$\tilde{p}p = -\sqrt{-g}g^{\alpha\beta}\xi_\alpha\xi_\beta \cdot \mathbf{1} \equiv q(x,\xi)\cdot\mathbf{1}.$$

q ist also ein skalares Symbol vom reellen Haupttyp, und seine Bicharakteristiken sind wieder gerade die Nullgeodäten. Der Raum $\Omega_P = q^{-1}(0)$ besteht aus allen lichtartigen Vektoren aus $T^*\mathcal{M} \setminus \mathbf{0}$. Da $p \propto \mathbf{1}$, ist der Raum $\operatorname{Ker} p(x,\xi)$, auf dem der Dencker-Zusammenhang wirkt, der gesamte Tangentialraum.

Um den Zusammenhang zu berechnen, bestimmen wir

$$\frac{1}{2}\{\tilde{p},p\}^{\nu}{}_{\mu} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}}(\partial_{\alpha}g)g^{\alpha\beta}\xi_{\beta}\delta^{\nu}_{\mu},$$

$$(i\tilde{p}p^{s})^{\nu}{}_{\mu} = \sqrt{-g}\left(-2\Gamma^{\nu}{}_{\alpha\mu}g^{\alpha\beta}\xi_{\beta} - \frac{1}{2}g^{-1}(\partial_{\beta}g)g^{\beta\gamma}\xi_{\gamma}\delta^{\nu}_{\mu}\right),$$

und

$$\begin{aligned} H_q w &= \partial_{\xi_\mu} q(x,\xi)\partial_{x^\mu} w - \partial_{x^\mu} q(x,\xi)\partial_{\xi_\mu} w \\ &= \dot{x}^{\mu}\partial_{x^\mu} w + \dot{\xi}_{\mu}\partial_{\xi_\mu} w \\ &= \frac{dw}{d\tau} \end{aligned}$$

für ein Vektorfeld $w(x(\tau),\xi(\tau))$ entlang einer Bicharakteristik, wobei wir die Hamiltonschen Gleichungen eingesetzt haben.

Der partielle Zusammenhang, angewandt auf $w(\tau)$, ist also

$$\begin{aligned} (D_P w)^{\nu} &= \left(H_q w + \frac{1}{2}\{\tilde{p},p\}w + i\tilde{p}p^{s}w\right)^{\nu} \\ &= \frac{dw^{\nu}}{d\tau} - 2\sqrt{-g}\Gamma^{\nu}{}_{\alpha\mu}g^{\alpha\beta}\xi_{\beta}w^{\mu} \\ &= \frac{dw^{\nu}}{d\tau} + \Gamma^{\nu}{}_{\alpha\mu}\frac{\partial q}{\partial \xi_{\alpha}}w^{\mu} \\ &= \frac{dw^{\nu}}{d\tau} + \Gamma^{\nu}{}_{\alpha\mu}\dot{x}^{\alpha}w^{\mu} \\ &= (\nabla_{\tau}w)^{\nu}, \end{aligned}$$

das heißt er entspricht gerade dem gewöhnlichen Levi-Civitá-Zusammenhang im Tangentialbündel.

Die Hamilton-Orbits für die Maxwell-Gleichungen sind also die parallelen Vektorfelder entlang von Nullgeodäten, und die Polarisationsmenge einer Distributionslösung der Maxwellgleichungen ist eine Vereinigung solcher Hamilton-Orbits.

Dies läßt sich so interpretieren, daß die Bahn eines Lichtstrahls, der sich in einer gekrümmten Raumzeit ausbreitet, eine Nullgeodäte ist und der Polarisationsvektor entlang der Bahn paralleltransportiert wird.

2.6 Sobolev-Räume und Skalengrad

Unsere Überlegungen zur Analyse von Singularitäten gingen davon aus, daß der Abfall der Fouriertransformierten im Unendlichen Aufschluß über die Singularitäten einer Distribution gibt. Eine feinere Klassifikation der Stärke von Singularitäten erreicht man, indem man nicht nur untersucht, ob und in welchen Richtungen die Fouriertransformierte schnell abfällt, sondern auch, *wie* schnell sie abfällt. Dies führt zum Begriff der *Sobolev-Räume*:

Definition 2.18. Wir sagen, $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ liege im Sobolev-Raum $H^s(\mathbb{R}^n)$, $s \in \mathbb{R}$, wenn gilt:

$$\int |\widehat{u}(\xi)|^2 (1+|\xi|^2)^s \, d^n\xi < \infty .$$

Dieses Konzept läßt sich lokalisieren:

Definition 2.19. Sei $u \in \mathcal{D}'(X)$, $X \subset \mathbb{R}^n$ offen. Wir nennen $u \in H^s(X)$ bei $x_0 \in X$, kurz $u \in H^s(x_0)$, wenn es eine Funktion $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(X)$, $\chi(x_0) \neq 0$, gibt, so daß

$$\int |\widehat{\chi u}(\xi)|^2 (1+|\xi|^2)^s \, d^n\xi < \infty .$$

Über einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ sagen wir $u \in H^s(\mathcal{M})$ bei $x_0 \in \mathcal{M}$, wenn es für jede Karte $\varphi : U \to V$, $x_0 \in U$, eine Funktion $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(U)$ gibt, so daß $\chi(x_0) \neq 0$ und $(\varphi^{-1})^*(\chi u) \in H^s(V)$.

Es ist $u \in H^s_{loc}(\mathcal{M})$, wenn $u \in H^s(x)$ für alle $x \in \mathcal{M}$.

Es besteht der folgende Zusammenhang zwischen Sobolev-Räumen und Differenzierbarkeit:

Satz 2.18. *Sei $u \in \mathcal{D}'(X)$, $x \in X \subset \mathbb{R}^n$. Dann liegt u genau dann in $H^s(x)$ für alle $s \in \mathbb{R}$, wenn $x \notin \operatorname{sing\,supp} u$. Ist $u \in H^s(x)$ und $s - \frac{n}{2} > k \in \mathbb{N}$, dann ist u k-mal stetig differenzierbar in x.*

Das Konzept läßt sich noch weiter verfeinern, und man kann eine H^s-Wellenfrontmenge definieren:

Definition 2.20. Wir sagen, eine Distribution u liege im lokalen Sobolev-Raum H^s bei $(x,\xi) \in T^*\mathcal{M} \setminus \mathbf{0}$, kurz $u \in H^s(x,\xi)$, wenn sich u schreiben läßt als $u = u_1 + u_2$, so daß $u_1 \in H^s(x)$ und $(x,\xi) \notin WF(u_2)$.

Satz 2.19. *Eine Distribution $u \in \mathcal{D}'(X)$ ist in $H^s(x,\xi)$ genau dann, wenn es eine Funktion $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(X)$ gibt, $\chi(x) \neq 0$, so daß*

$$\int_\Gamma |\widehat{\chi u}(\xi')|^2 (1+|\xi'|^2)^s d^n\xi' < \infty ,$$

wobei sich das Integral über eine konische Umgebung $\Gamma \ni \xi$ erstreckt.

Definition 2.21. Die H^s-Wellenfrontmenge von $u \in \mathcal{D}'(X)$ ist die Menge

$$WF^s(u) = \{ (x,\xi) \in T^*\mathcal{M} \setminus \mathbf{0} \mid u \notin H^s \text{ bei } (x,\xi) \}.$$

Man kann zeigen, daß Satz 2.10 über die Ausbreitung von Singularitäten auch für diese H^s-Wellenfrontmenge gilt. Ebenso gilt analog zu Satz 2.9:

$$WF^s(u) = \bigcap_{Au \in H^s(X)} \operatorname{char} A.$$

Der Durchschnitt wird über alle Pseudodifferentialoperatoren $A \in L^0(X)$ gebildet, so daß $Au \in H^s(X)$.

Auch die Polarisationsmenge läßt sich in diesem Sinne verallgemeinern:

Definition 2.22. Die H^s-Polarisationsmenge einer Distribution $u \in \mathcal{D}'(X, \mathbb{C}^N)$ ist die Menge

$$WF^s_{pol}(u) = \bigcap_{Au \in H^s(X)} \mathcal{N}_A,$$

$$\mathcal{N}_A = \big\{(x, \xi; w) \in (T^*X \setminus \mathbf{0}) \times \mathbb{C}^N \mid w \in \operatorname{Ker} \sigma_P(A)(x, \xi)\big\},$$

wobei der Durchschnitt über alle $1 \times N$-Systeme von Pseudodifferentialoperatoren $A \in L^0(X)^N$ gebildet wird, so daß $Au \in H^s(X)$.

Wie im $\mathcal{C}^\infty$-Fall gilt $\pi_{1,2}(WF^s_{pol}(u)) = WF^s(u)$.

Auch der Satz über die Ausbreitung von Singularitäten vektorwertiger Distributionen gilt für diese H^s-Polarisationsmenge [Ger83].

Sind zwei Distributionen hinreichend regulär, so kann man ihr Produkt definieren, auch ohne daß ihre Wellenfrontmengen die in Satz 2.12 angegebene Bedingung erfüllen [Obe86]:

Satz 2.20. *Seien $u_i \in H^{s_i}_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $i = 1, 2$, mit $s_1 + s_2 \geq 0$. Dann existiert ihr Produkt $u_1 \cdot u_2$.*

Allgemeiner gilt für $u_1, u_2 \in \mathcal{D}'(\mathcal{M})$: Gibt es für jeden Punkt $(x, \xi) \in T^*\mathcal{M}$ zwei reelle Zahlen s_1, s_2 mit $s_1 + s_2 \geq 0$, so daß $(x, \xi) \notin WF^{s_1}(u_1)$ sowie $(x, -\xi) \notin WF^{s_2}(u_2)$, dann existiert das Produkt $u_1 \cdot u_2$.

In der physikalischen Literatur wird die Stärke einer Singularität meist durch den Skalengrad der Distribution charakterisiert [Ste71, Pra97]:

Definition 2.23. Eine Distribution $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ hat den Skalengrad δ bei $x = 0$, wenn

$$\delta = \inf\{\delta' \in \mathbb{R} \mid \lambda^{\delta'} u(\lambda x) \overset{\lambda \to 0}{\longrightarrow} 0 \text{ im Sinne von Distributionen}\}.$$

Die skalierte Distribution $u(\lambda x)$ ist dabei wie eine Funktion notiert. In korrekter Notation meint sie die Distribution $u_\lambda : \phi \mapsto \lambda^{-n} u(\phi_{\lambda^{-1}})$ mit $\phi_{\lambda^{-1}}(x) = \phi(\frac{x}{\lambda})$.

Wir bezeichnen δ mit $\operatorname{scal\,deg}(u)$ und definieren die singuläre Ordnung von u: $\operatorname{sing\,ord}(u) := [\delta] - n$. ($[\delta]$ ist die größte ganze Zahl kleiner oder gleich δ.)

Wir fassen einige Eigenschaften des Skalengrades zusammen:

Satz 2.21. *Sei* $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{scal\,deg}(u) = \delta$, *und* α *ein Multiindex.*

1. $\operatorname{scal\,deg}(x^\alpha u) = \delta - |\alpha|$.
2. $\operatorname{scal\,deg}(\partial^\alpha u) = \delta + |\alpha|$.
3. *Für* $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ *ist* $\operatorname{scal\,deg}(\phi) \leq 0, \operatorname{scal\,deg}(\phi u) \leq \delta$.
4. $\operatorname{scal\,deg}(u_1 \otimes u_2) = \delta_1 + \delta_2$, *wenn* $\operatorname{scal\,deg}(u_i) = \delta_i, \quad i = 1, 2$.

Beispiel 2.9. Die Distribution $\delta \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ erfüllt $\delta(\lambda x) = |\lambda|^{-n}\delta(x)$. Der Skalengrad von δ ist also n, die singuläre Ordnung Null. Der Skalengrad von $D^\alpha\delta$ ist $|\alpha| + n$. Die singuläre Ordnung ist $|\alpha|$.

2.7 Skalarprodukte vektorwertiger Distributionen

Für glatte vektorwertige Funktionen $u, v \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)^N$ definiert eine Bilinearform

$$f(u,v)(x) := \sum_{i,j=1}^{N} u_i(x) F_{ij}(x) v_j(x)$$

mit einer Matrix von glatten Funktionen $F_{ij} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ stets eine wohldefinierte Funktion $f(u,v) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$. Es ist nun naheliegend zu fragen, auf welche Distributionen ein solches Produkt verallgemeinert werden kann.

Klar ist, daß das Produkt existiert, wenn die Distributionen so regulär sind, daß das Produkt komponentenweise definiert werden kann: Sind $u, v \in (H^s(\mathbb{R}^n))^N$ mit $s \geq 0$, dann existieren die komponentenweisen Produkte. Ebenso ist das der Fall, wenn es für jeden Punkt $(x,\xi) \in T^*\mathbb{R}^n \setminus \mathbf{0}$ zwei Zahlen $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ gibt mit $s_1 + s_2 \geq 0$, so daß $(x,\xi) \notin WF^{s_1}(u)$ und $(x,-\xi) \notin WF^{s_2}(v)$.

Es ist aber zu erwarten, daß das Produkt auch existieren kann, wenn in den Punkten, die diese Bedingung nicht erfüllen, die Richtungen der stärksten Singularitäten im Sinne der Bilinearform senkrecht aufeinander stehen, also

$$\sum F_{ij}(x) w_{1i} w_{2j} = 0 \tag{2.4}$$

für alle $(x, (-1)^i\xi; w_i) \in WF^{s_i}_{pol}(u_i)$.

In der Literatur scheinen solche Produkte bisher wenig Beachtung gefunden zu haben, das einzige bekannte Resultat beschäftigt sich mit der Ausdehnung des Produktes auf die folgenden Räume von Distributionen [Nat89]:

Definition 2.24. Für $A \in (L^m)^{M\times N}$ sei

$$W_{loc}(A; s, t) := \left\{ u \in (H^s_{loc}(\mathbb{R}^n))^N \mid Au \in (H^t_{loc}(\mathbb{R}^n))^M \right\}.$$

Definition 2.25. Seien $A_i \in (L^{m_i})^{M\times N}$, $i = 1,2$. Die bilineare Abbildung f heißt (A_1, A_2)-*kompatibel*, falls es zwei $M \times N$-Matrizen $p_1(x,\xi)$, $p_2(x,\xi)$ gibt, so daß

$$F(x) = {}^t p_2(x,\xi)\sigma_P(A_2)(x,\xi) + {}^t\sigma_P(A_1)(x,-\xi)p_1(x,\xi)$$

für alle $(x,\xi) \in T^*\mathbb{R}^n \setminus \mathbf{0}$.

Lassen sich die Matrizen homogen in ξ vom Grad $-m_1$ bzw. $-m_2$ wählen, so heißt f *regulär* (A_1, A_2)-*kompatibel*.

Satz 2.22. *Sei f eine regulär (A_1, A_2)-kompatible Bilinearform. Seien s_i, t_i für $i = 1,2$ reelle Zahlen, für die gilt: $s_i \le t_i + m_i \le s_i + 1$, $s_1 + t_2 + m_2 \ge 0$ und $s_2 + t_1 + m_1 \ge 0$. Dann läßt sich f stetig zu einer Bilinearform auf dem Raum $W_{loc}(A_1; s_1, t_1) \times W_{loc}(A_2; s_2, t_2)$ mit Werten in H^τ_{loc} ausdehnen. Dabei ist $\tau = \inf\left(s_1, s_2, s_1 + s_2 - \frac{n}{2} - \epsilon\right)$, $\epsilon > 0$.*

Die Forderung, daß f (A_1, A_2)-kompatibel ist, erscheint natürlich, denn sie impliziert die Eigenschaft (2.4) für alle $w_i \in \mathrm{Ker}(\sigma_P(A_i)(x,(-1)^i\xi))$, wie man leicht sieht. Beide Bedingungen sind sogar äquivalent. Es gibt jedoch Beispiele von Distributionen, die diese Bedingung erfüllen, aber nicht multiplizierbar sind. Die Forderung, daß f regulär (A_1, A_2)-kompatibel sein soll, ist also eine echte Einschränkung. Für bestimmte Operatoren A_1, A_2 kann man aber zeigen, daß jede kompatible Bilinearform automatisch regulär kompatibel ist, zum Beispiel für Differentialoperatoren erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

Wir formulieren das obige Resultat für solche Operatoren in einer schwächeren Form, die für unsere Zwecke ausreicht:

Corollar 2.23. *Seien $A_1, A_2 \in L^m(X)^{M\times N}$ zwei Differentialoperatoren erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten und $u_1, u_2 \in \mathcal{D}'(X, \mathbb{C}^N)$ zwei vektorwertige Distributionen, so daß es zwei reelle Zahlen s_1, s_2 gibt mit $s_1 + s_2 = 0$ und $u_i \in H^{s_i-\epsilon}$ $\forall\epsilon > 0$. Außerdem soll gelten: $WF^{s_i}_{pol}(u_i) = \bigcap_{j=1}^M \mathcal{N}_{A_{ij}}$, $i = 1,2$. A_{ij} ist hierbei die j-te Zeile des Operators A_i.*

Gilt weiterhin $\sum F_{ij}(x)w_{1i}w_{2j} = 0$ für alle $w_i \in WF^{s_i}_{pol}(u_i)(x,(-1)^i\xi)$ über allen Punkten $(x,(-1)^i\xi)$, für die es keine $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ gibt mit $t_1 + t_2 \ge 0$, so daß $(x,(-1)^i\xi) \notin WF^{t_i}(u_i)$, dann existiert ihr Produkt $f(u_1,u_2) \in \mathcal{D}'(X)$.

Mit anderen Worten: Sind u_1 und u_2 zwei Distributionen, deren Polarisationsmenge der Durchschnitt der Mengen $\mathcal{N}_{A_{ij}}$ für endlich viele „harmlose“ Operatoren A_{ij} mit $A_{ij}u_i = 0$ ist und die „fast“ das Sobolev-Kriterium für die Multiplizierbarkeit erfüllen, weil $u_i \in H^{s_i-\epsilon}$ mit $s_1 + s_2 = 0$, dann existiert ihr Produkt $f(u_1,u_2)$, wenn über den kritischen Punkten alle Polarisationsvektoren im Sinne von f senkrecht aufeinander stehen.

Kapitel 3

Quantenfeldtheorie in gekrümmter Raumzeit

Um in einer gekrümmten Raumzeit Quantenfeldtheorien formulieren zu können, ist es nötig, einige vertraute Hilfsmittel der Quantisierung im Minkowskiraum aufzugeben. Zum Beispiel steht keine (globale) Fouriertransformation mehr zur Verfügung, die im üblichen Zugang im Minkowskiraum zur Unterscheidung von Lösungen positiver und negativer Frequenz, also zur Auszeichnung des Einteilchenhilbertraumes führt.

Tatsächlich hat das Fehlen der Poincaré-Invarianz zur Folge, daß es im allgemeinen gar keinen ausgezeichneten Vakuumzustand gibt, der im Minkowskiraum ja gerade durch seine Invarianz unter Poincaré-Transformationen sowie die Spektrumsbedingung ausgezeichnet ist. Dies führt dazu, daß in gekrümmter Raumzeit eine Interpretation der Quantenfeldtheorie als Theorie von Elementarteilchen nicht ohne weiteres möglich ist.

Der adäquate Zugang, der zumindest einige der technischen Probleme umgeht, ist der der algebraischen Quantenfeldtheorie. Hier baut die Theorie nicht auf den Feldoperatoren in einem gegebenen Hilbertraum auf, sondern auf den abstrakten Algebren, die von ihnen erzeugt werden. Somit wird es möglich, alle a priori gleichberechtigten Darstellungen der Theorie gleichermaßen zu behandeln. Im Nachhinein muß dann ein Analogon zur Spektrumsbedingung formuliert und so eine Klasse von physikalischen Zuständen ausgezeichnet werden.

Der erste Abschnitt dieses Kapitels gibt eine kurze Einführung in die Konzepte der algebraischen Quantenfeldtheorie. Anschließend wenden wir uns den beiden einfachsten Modellen zu, die wir in dieser Arbeit untersuchen wollen: dem freien Klein-Gordon-Feld sowie dem freien Dirac-Feld. Im letzten Abschnitt werden wir dann die Zustände charakterisieren, die als physikalisch relevant angesehen werden: die Hadamard-Zustände.

Als allgemeine Literatur zu dem Thema dieses Kapitels dienen die Lehrbücher [BD82, Ful89, Wal94].

3.1 Der algebraische Zugang zur Quantenfeldtheorie

Auch die algebraische Quantenfeldtheorie wurde ursprünglich für den Minkowskiraum formuliert und geht auf eine Arbeit von Haag und Kastler zurück [HK64], siehe auch das Lehrbuch [Haa96]. Eine Verallgemeinerung auf beliebige Lorentz-Mannigfaltigkeiten wurde von Dimock vorgeschlagen [Dim80].

Das fundamentale Objekt eines quantenfeldtheoretischen Modells in der Sichtweise der algebraischen Quantenfeldtheorie ist ein Netz von C^*-Algebren: jeder relativ kompakten offenen Teilmenge $\mathcal{O}$ unserer Raumzeit $\mathcal{M}$ wird eine C^*-Algebra $\mathcal{A}(\mathcal{O})$ zugewiesen:

$$\mathcal{O} \mapsto \mathcal{A}(\mathcal{O}).$$

Man interpretiert $\mathcal{A}(\mathcal{O})$ als die Algebra der in dem Gebiet $\mathcal{O}$ meßbaren physikalischen Größen.

Die quasilokale Algebra ist die Vereinigung all dieser Algebren, genauer ihr C^*-induktiver Limes: $\mathcal{A} = \overline{\bigcup_{\mathcal{O}} \mathcal{A}(\mathcal{O})}$.

Damit ein solches Netz tatsächlich eine physikalische Theorie beschreibt, muß es einigen Axiomen genügen, deren physikalische Interpretation offensichtlich ist:

1. Isotonie:

$$\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2 \Rightarrow \mathcal{A}(\mathcal{O}_1) \subset \mathcal{A}(\mathcal{O}_2).$$

2. Primitivität: $\mathcal{A}$ besitzt eine treue irreduzible Darstellung.

3. Lokalität: Für raumartig getrennte $\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2$ ist $[\mathcal{A}(\mathcal{O}_1), \mathcal{A}(\mathcal{O}_2)] = \{0\}$.

4. Kausalität: Ist $\mathcal{O}_1$ kausal abhängig von $\mathcal{O}_2$, also $\mathcal{O}_1 \subset D(\mathcal{O}_2)$, dann ist $\mathcal{A}(\mathcal{O}_1) \subset \mathcal{A}(\mathcal{O}_2)$.

5. Kovarianz: Für jede Isometrie $\kappa : (\mathcal{M}, g) \to (\mathcal{M}, g)$ der Raumzeit gibt es einen Isomorphismus $\alpha_\kappa : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, so daß $\alpha_\kappa(\mathcal{A}(\mathcal{O})) = \mathcal{A}(\kappa(\mathcal{O}))$. Außerdem soll gelten: $\alpha_{id} = id$ und $\alpha_{\kappa_1} \circ \alpha_{\kappa_2} = \alpha_{\kappa_1 \circ \kappa_2}$.

Zusätzlich werden vielfach einige technische Forderungen an die lokalen Algebren gestellt.

Ein *Zustand* auf einer Observablenalgebra ist ein lineares Funktional $\omega : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$, das normiert ist: $\omega(\mathbf{1}) = 1$, sowie positiv: $\omega(A^*A) \geq 0 \; \forall A \in \mathcal{A}$. Die Wahl eines Zustandes läßt sich so interpretieren, daß jeder Observablen ein Erwartungswert zugewiesen wird.

Nicht alle Zustände auf einer Observablenalgebra sind physikalisch akzeptabel. Im Minkowskiraum verlangt man, daß es einen Vakuumzustand gibt, der die Spektrumsbedingung erfüllt. In einer gekrümmten Raumzeit läßt sich diese Bedingung so nicht formulieren, und man muß die physikalisch relevanten Zustände auf eine andere Weise charakterisieren. Wir kommen darauf in Abschnitt 3.4 zurück.

Der Zusammenhang mit dem üblichen Zugang zur Quantenfeldtheorie als Theorie von Operatoren auf einem Hilbertraum wird durch die *GNS-Konstruktion* hergestellt:

Satz 3.1. *Sei ω ein Zustand auf einer C^*-Algebra $\mathcal{A}$. Dann existiert ein* GNS-Tripel $(\mathcal{H}, \pi, \Omega)$*, bestehend aus einem Hilbertraum $\mathcal{H}$, einem Vektor $\Omega \in \mathcal{H}$ und einer Darstellung π von $\mathcal{A}$ durch beschränkte Operatoren auf $\mathcal{H}$, so daß*

1. $< \Omega, \pi(A)\Omega >= \omega(A) \quad \forall A \in \mathcal{A}$,
2. $\pi(\mathcal{A})\Omega$ *ist dicht in $\mathcal{H}$, das heißt Ω ist zyklisch.*

Das GNS-Tripel ist bis auf unitäre Äquivalenz eindeutig bestimmt.

Ist umgekehrt ein Hilbertraum $\mathcal{H}$ mit einer Darstellung von $\mathcal{A}$ gegeben, dann definiert jeder Vektor und jede Dichtematrix in $\mathcal{H}$ einen Zustand auf $\mathcal{A}$, indem die Erwartungswerte der Operatoren gebildet werden, durch welche die Elemente der Algebra dargestellt werden.

3.2 Das freie Klein-Gordon-Feld

Das einfachste Beispiel einer Quantenfeldtheorie ist das freie, skalare Feld, das durch die Feldgleichung

$$(\Box + m^2)\phi = 0,$$

die *Klein-Gordon-Gleichung*, charakterisiert wird. Dabei ist $\Box := g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu$ der zur Metrik g gehörende Laplace-Beltrami-Operator und m eine positive reelle Konstante.

Aufgrund der globalen Hyperbolizität der Raumzeit gibt es eindeutige retardierte und avancierte Fundamentallösungen für den Operator $\Box + m^2$, das heißt Operatoren $\Delta^\pm : \mathcal{D}(\mathcal{M}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$, so daß

$$(\Box + m^2)\Delta^\pm = \Delta^\pm(\Box + m^2) = \mathbf{1}$$

und $\mathrm{supp}(\Delta^\pm f) \subset J^\pm(\mathrm{supp}\, f)$. Wir definieren $\Delta := \Delta^+ - \Delta^-$. Weiterhin identifizieren wir Δ mit der Distribution

$$\Delta : (f, g) \mapsto \Delta(f, g) := \int f(x)(\Delta g)(x) d\mu(x),$$

analog für Δ^+ und Δ^-.

Wir betrachten nun die *-Algebra $\mathcal{A}$, die von den Symbolen $\phi(f)$, $f \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$, und dem Einselement $\mathbf{1}$ erzeugt wird, so daß

1. die Abbildung $f \to \phi(f)$ linear ist,

2. $\phi(f)^* = \phi(\overline{f})$,

3. $\phi((\Box + m^2)f) = 0$,

4. $[\phi(f), \phi(g)] = i\Delta(f,g) \cdot \mathbf{1} \quad \forall f, g \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$.

Die lokalen Algebren $\mathcal{A}(\mathcal{O})$ für relativ kompakte, offene $\mathcal{O} \subset \mathcal{M}$ definiert man als die von den Elementen $\phi(f),\ f \in \mathcal{D}(\mathcal{O})$, erzeugten Unteralgebren.

Man interpretiert ϕ als operatorwertige Distribution, das heißt für jede Testfunktion $f \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$ soll $\phi(f)$ durch einen Operator auf einem Hilbertraum dargestellt werden. Auf diese Weise wird der Zusammenhang zum üblichen Wightman-Formalismus deutlich. Diese Algebra besitzt jedoch leider keine C^*-Norm, was daran liegt, daß die Vertauschungsrelationen keine Darstellung durch beschränkte Operatoren zulassen. Um tatsächlich ein Netz von C^*-Algebren zu erhalten, betrachtet man die Algebra der exponentierten Feldoperatoren $W(f) = e^{i\phi(f)}$, die *Weyl-Algebra*.

Ein Zustand auf $\mathcal{A}$ wird eindeutig festgelegt durch seine n-*Punkt-Funktionen* ω_n, $n \in \mathbb{N}$:

$$\omega_n(f_1, \ldots, f_n) := \omega(\phi(f_1) \ldots \phi(f_n)).$$

Wir betrachten nur Zustände, deren n-Punkt-Funktionen Distributionen sind. Da wir uns bewußt sind, daß es sich um Distributionen handelt, können wir ohne Schaden den üblichen Begriff n-Punkt-*Funktionen* beibehalten.

Wir beschränken uns weiter auf *quasifreie* Zustände. Dies sind Zustände, die durch ihre Zweipunktfunktion $\Lambda \equiv \omega_2$ festgelegt sind: Alle n-Punkt-Funktionen mit ungeradem n sollen verschwinden, für die übrigen gelte

$$\omega_{2n}(f_1, \ldots, f_{2n}) = \sum_{\sigma} \prod_{j=1}^{n} \Lambda(f_{\sigma(j)}, f_{\sigma(j+n)}),\ n \in \mathbb{N},$$

wobei die Summe über alle Permutationen σ von $\{1, \ldots, 2n\}$ mit $\sigma(1) < \sigma(2) < \cdots < \sigma(n)$ und $\sigma(j) < \sigma(j+n)$, $j = 1, \ldots, n$, läuft.

Die Angabe einer Zweipunktfunktion $\Lambda \in \mathcal{D}'(\mathcal{M} \times \mathcal{M})$ führt also zu einer vollständigen Charakterisierung der Theorie. Damit sie aber wirklich einen Zustand auf $\mathcal{A}$ definiert, muß sie die folgenden Axiome erfüllen:

1. $\Lambda(f,g) = \overline{\Lambda(g,f)}$,

2. $\Lambda(\overline{f}, f) \geq 0$,

3. $\mathrm{Im}\Lambda(f,g) = \frac{1}{2}\Delta(f,g)$,

4. $\Lambda((\Box + m^2)f, g) = \Lambda(f, (\Box + m^2)g) = 0 \quad \forall f, g \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$.

Es zeigt sich, daß nicht alle solche Distributionen Λ zu physikalisch akzeptablen Zuständen führen, sondern man muß weitere Einschränkungen machen, die wir in Abschnitt 3.4 besprechen werden.

Außer der Zweipunktfunktion spielt auch der Feynman-Propagator eine wichtige Rolle:

Definition 3.1. Der *Feynmanpropagator* eines Zustands ω des Klein-Gordon-Feldes mit der Zweipunktfunktion Λ ist die Distribution

$$\omega_F := i\Lambda + \Delta^+.$$

Während die Zweipunktfunktion Lösung der Klein-Gordon-Gleichung in beiden Einträgen ist, gilt für den Feynmanpropagator wie auch für die Distributionen $\Delta^{\pm}$:

$$(\Box_x + m^2)\omega_F(x,y) = (\Box_y + m^2)\omega_F(x,y) = \delta(x,y).$$

3.3 Das freie Dirac-Feld

Wir wenden uns nun der Quantisierung des freien Dirac-Feldes auf einer global hyperbolischen Raumzeit zu, wie sie zuerst von Dimock angegeben wurde [Dim82]. Die Darstellung ist zum großen Teil an die Arbeit von Verch angelehnt [Ver96], unter Verwendung von [Hol98, Koe95, Wel97].

Dirac-Gleichung in gekrümmter Raumzeit

Wir definieren den *Dirac-Operator* $\not{\nabla}$ auf dem Raum der glatten Spinor- und Kospinorfelder als Anwendung der kovarianten Ableitung ∇, gefolgt von einer Kontraktion mit γ. Für ein Spinorfeld $u \in \Gamma(\mathcal{M}, D\mathcal{M})$ und ein Kospinorfeld $v \in \Gamma(\mathcal{M}, D^*\mathcal{M})$ gilt also in lokalen Basen:

$$\begin{aligned} \not{\nabla} u &= \gamma^a \nabla_a u = \gamma^a(\partial_a u + \sigma_a u), \\ \not{\nabla} v &= (\nabla_a v)\gamma^a = (\partial_a v - v\sigma_a)\gamma^a, \end{aligned}$$

wobei die Spinorindizes wieder unterdrückt wurden.

Der Dirac-Operator vertauscht mit der Dirac-Konjugation, es gilt also

$$(\not{\nabla} u)^+ = \not{\nabla}(u^+), \quad u \in \Gamma(\mathcal{M}, \mathcal{D}\mathcal{M}).$$

Die *Dirac-Gleichung* lautet für Spinor- und Kospinorfelder u bzw. v:

$$\begin{aligned} (-i\not{\nabla} + m)u &= 0, \\ (i\not{\nabla} + m)v &= 0, \end{aligned}$$

mit einer reellen Konstanten m.

Ein Spinorfeld u ist genau dann eine Lösung der Diracgleichung, wenn der adjungierte Spinor u^+ eine Lösung der adjungierten Diracgleichung ist.

Der Dirac-Operator erfüllt die folgende wichtige *Identität von Lichnerowicz* [Lic64]:

$$(-i\not{\nabla} + m)(i\not{\nabla} + m)u = (\Box - \frac{1}{4}R + m^2)u, \quad u \in \Gamma(\mathcal{M}, \mathcal{D}\mathcal{M}). \tag{3.1}$$

Hierbei ist $\Box = g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu$ der spinorielle Wellenoperator und R der zur Metrik gehörige Krümmungsskalar. Den Operator $(\Box - \frac{1}{4}R + m^2)$ bezeichnet man auch als spinoriellen Klein-Gordon-Operator.

Um zu beweisen, daß $\not{\nabla}\not{\nabla} = \Box - \frac{1}{4}R$, vertauscht man zunächst die Gammamatrizen:

$$\not{\nabla}\not{\nabla} = \frac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu\nabla_\mu\nabla_\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu\nabla_\nu\nabla_\mu) = \frac{1}{2}\gamma^\mu\gamma^\nu(\nabla_\mu\nabla_\nu - \nabla_\nu\nabla_\mu) + g^{\mu\nu}\nabla_\nu\nabla_\mu,$$

und sieht bereits den Term $\Box$. Ersetzt man jetzt den Kommutator der Ableitungen durch den Krümmungstensor des Dirac-Bündels und beachtet, daß man nach Gleichung (1.4) den mit zwei Gammamatrizen kontrahierten Krümmungstensor durch den halben Krümmungsskalar ersetzen darf, so erhält man die gewünschte Gleichung.

Zu beachten ist, daß bei Anwesenheit von Krümmung nur der Hauptteil von $\Box$ diagonalisiert, und es treten nichtdiagonale Terme auf:

$$\Box = \eta^{ab}\nabla_a(\partial_b + \sigma_b) = \eta^{ab}\partial_a\partial_b + \eta^{ab}(\partial_a\sigma_b) + \eta^{ab}\sigma_a\partial_b + \ldots$$

Lösungen der Dirac-Gleichung

Nun untersuchen wir die klassischen Lösungen der Dirac-Gleichung in einer global hyperbolischen Raumzeit $\mathcal{M}$. Nach Dimock besitzt der Dirac-Operator in einer solchen Raumzeit eindeutige Fundamentallösungen:

Satz 3.2. *Der Dirac-Operator $(-i\not{\nabla} + m)$ auf $\Gamma(\mathcal{M}, D\mathcal{M})$ hat eindeutige retardierte und avancierte Fundamentallösungen $S^\pm : \Gamma_0(\mathcal{M}, D\mathcal{M}) \to \Gamma(\mathcal{M}, D\mathcal{M})$ mit*

$$(-i\not{\nabla} + m)S^\pm = S^\pm(-i\not{\nabla} + m) = \mathbf{1} \quad \textit{auf } \Gamma_0(\mathcal{M}, D\mathcal{M})$$

und $\mathrm{supp}(S^\pm f) \subset J^\pm(\mathrm{supp}(f))$.

Analog besitzt der Operator $(i\not{\nabla} + m)$ auf $\Gamma(\mathcal{M}, D^*\mathcal{M})$ eindeutige retardierte und avancierte Fundamentallösungen $S_\pm : \Gamma_0(\mathcal{M}, D^*\mathcal{M}) \to \Gamma(\mathcal{M}, D^*\mathcal{M})$, so daß

$$(i\not{\nabla} + m)S_\pm = S_\pm(i\not{\nabla} + m) = \mathbf{1} \quad \textit{auf } \Gamma_0(\mathcal{M}, D^*\mathcal{M})$$

und $\mathrm{supp}(S_\pm f) \subset J^\pm(\mathrm{supp}(f))$.

Für den Beweis nutzt man die Identität von Lichnerowicz aus: Der spinorielle Klein-Gordon-Operator $\Box - \frac{1}{4}R + m^2$ ist in führender Ordnung diagonal und hyperbolisch und besitzt somit nach einem Theorem von Leray eindeutige retardierte und avancierte Fundamentallösungen $E^{\pm}$. Man definiert $S^{\pm} = (i\not{\nabla} + m)E^{\pm}$ und zeigt, daß diese die geforderten Eigenschaften haben.

Speziell im Minkowskiraum reduziert sich der spinorielle Klein-Gordon-Operator auf den gewöhnlichen Klein-Gordon-Operator, und es ist $E^{\pm} = (\Delta^{\pm} \otimes \mathbf{1})$. $\Delta^{\pm}$ sind wieder die Fundamentallösungen des Klein-Gordon-Operators $\Box + m^2$.

Die Differenz $S = S^+ - S^-$ von retardierter und avancierter Fundamentallösung nennen wir den *Dirac-Propagator* für Spinoren. Entsprechend ist der Dirac-Propagator für Kospinoren definiert als $S_\sharp = S_+ - S_-$.

Es gilt: $S_\sharp u^+ = (Su)^+$ für $u \in \Gamma(\mathcal{M}, D\mathcal{M})$, analog für Kospinorfelder v: $Sv^+ = (S_\sharp v)^+$.

Die Fundamentallösungen $S, S^{\pm}$ können wir mit den Distributionen $S, S^{\pm} \in \Gamma(\mathcal{M}, D\mathcal{M} \boxtimes D^*\mathcal{M})$ identifizieren, indem wir setzen:

$$S(v,u) = \int < v(x), Su(x) > d\mu(x), \quad v \in \Gamma(\mathcal{M}, D^*\mathcal{M}),\, u \in \Gamma(M, D\mathcal{M}).$$

Analog ist $S_\sharp \in \Gamma(\mathcal{M}, D^*\mathcal{M} \boxtimes D\mathcal{M})$:

$$S_\sharp(u,v) = \int < S_\sharp v(x), u(x) > d\mu(x).$$

Zwischen diesen Distributionen besteht der folgende Zusammenhang:

$$S_\sharp(u,v) = -S(v,u). \tag{3.2}$$

Während S und $S_\sharp$ Lösungen der Dirac-Gleichung in beiden Einträgen sind, gilt für die retardierte und avancierte Fundamentallösung:

$$[(-i\not{\nabla}_x + m) \otimes \mathbf{1}]S^{\pm}(x,y) = [\mathbf{1} \otimes (i\not{\nabla}_y + m)]S^{\pm}(x,y) = \delta(x,y) \cdot \mathbf{1}.$$

Nun zeigt man mit Hilfe der Propagatoren, daß das Cauchy-Problem für die Dirac-Gleichung wohldefiniert ist:

Satz 3.3. *Sei $\Sigma \subset \mathcal{M}$ eine Cauchyfläche und $u_0 \in \Gamma_0(\Sigma, D\mathcal{M}_\Sigma)$. Dann existiert ein eindeutiges $u \in \Gamma(\mathcal{M}, D\mathcal{M})$, so daß*

$$(-i\not{\nabla} + m)u = 0 \quad \textit{und} \quad u|_\Sigma = u_0.$$

Außerdem gilt für den Träger von u:

$$\mathrm{supp}(u) \subset J^+(\mathrm{supp}(u_0)) \cup J^-(\mathrm{supp}(u_0)).$$

Eine analoge Aussage gilt für Kospinorfelder.

Auch diesen Satz beweist man, indem man zunächst für den spinoriellen Klein-Gordon-Operator globale Lösungen des Cauchy-Problems konstruiert. Die Anwendung des adjungierten Dirac-Operators auf geeignete Lösungen ergibt dann die gesuchten Lösungen des Cauchy-Problems für die Dirac-Gleichung.

Quantisierung

Wir wollen jetzt die Quantisierung durchführen, also den Lösungen der Dirac-Gleichung ein Netz von Feldalgebren zuordnen, in dem die kanonischen Antivertauschungsrelationen erfüllt sind.

Wir definieren den Raum $\mathcal{K}$ wie folgt:

$$\mathcal{K} := \big(\Gamma_0(\mathcal{M}, D\mathcal{M}) \oplus \Gamma_0(\mathcal{M}, D^*\mathcal{M})\big) / \operatorname{Ker}(S \oplus S_\sharp)$$

und statten ihn mit dem folgenden Skalarprodukt $(\,\cdot\,,\cdot\,) : \mathcal{K} \times \mathcal{K} \to \mathbb{C}$ aus:

$$([u_1 \oplus v_1], [u_2 \oplus v_2]) := -iS(u_1^+, u_2) + iS_\sharp(v_1^+, v_2).$$

Die Dirac-Konjugation liefert uns auf $\mathcal{K}$ eine Involution Γ:

$$\Gamma(u \oplus v) := v^+ \oplus u^+.$$

Γ ist antilinear, und es ist $\Gamma^2 = 1$. Außerdem gilt wegen Gleichung (3.2):

$$(f_1, f_2) = (\Gamma f_2, \Gamma f_1),$$

das heißt Γ ist eine Antiisometrie.

In [Ver96] wird gezeigt, daß der Raum $\mathcal{K}$ mittels der Abbildung $[u \oplus v] \mapsto (Su \oplus S_\sharp v)|_\Sigma$ mit dem Raum aller Anfangswerte auf einer beliebigen Cauchy-Hyperfläche Σ identifiziert werden kann:

$$\mathcal{K} \cong \Gamma_0(\Sigma, D\mathcal{M}_\Sigma) \oplus \Gamma_0(\Sigma, D^*\mathcal{M}_\Sigma),$$

versehen mit dem Skalarprodukt:

$$(u_1 \oplus v_1, u_2 \oplus v_2) = \int_\Sigma \big(< u_1^+(x), (\not{n} u_2)(x) > + < (\not{n} v_2)(x), v_1^+(x) >\big)\, d\mu_\Sigma(x).$$

Hierbei ist n das vorwärtsgerichtete Einheitsnormalenvektorfeld auf Σ und $d\mu_\Sigma$ das auf Σ induzierte Volumenelement.

Nach Araki existiert nun zu diesen Daten eine CAR-Algebra [Ara70]:

Satz 3.4. *Sei $\mathcal{K}$ ein Prähilbertraum und Γ eine antiunitäre Involution auf $\mathcal{K}$. Dann gibt es (bis auf C^*-algebraische Äquivalenz) genau eine C^*-Algebra $\operatorname{CAR}(\mathcal{K}, \Gamma)$, die von den Elementen $B(f)$, $f \in \mathcal{K}$, und dem Einselement $\mathbf{1}$ erzeugt wird mit den Relationen*

$$\begin{aligned} f &\mapsto B(f) \quad \textit{linear,} \\ B(f)^* &= B(\Gamma f) \quad \forall f \in \mathcal{K}, \\ \{B(f_1), B(f_2)\} &= (\Gamma f_1, f_2) \cdot \mathbf{1} \quad \forall f_1, f_2 \in \mathcal{K}. \end{aligned}$$

Die lokalen Algebren $\mathcal{F}(\mathcal{O})$ für offene, relativ kompakte $\mathcal{O} \subset \mathcal{M}$ sind definiert als die von den Elementen $B(f)$, $\operatorname{supp} f \subset \mathcal{O}$, erzeugten Unteralgebren. Dieses Netz $\mathcal{O} \to \mathcal{F}(\mathcal{O})$ von Feldalgebren ist noch nicht das lokale Netz der Observablenalgebren, weil die Algebren für raumartig getrennte Gebiete nicht kommutieren. Wir können dies beheben, indem wir zu Unteralgebren übergehen:

Die lokalen Observablenalgebren $\mathcal{A}(\mathcal{O})$ sind definiert als die geraden Anteile der Algebren $\mathcal{F}(\mathcal{O})$, das heißt sie werden erzeugt von den Elementen der Form $B(f)^*B(g) \in \mathcal{F}(\mathcal{O})$. Auf diese Weise erhalten wir das Netz der lokalen Observablenalgebren $\mathcal{O} \to \mathcal{A}(\mathcal{O})$. Man kann nun leicht zeigen, daß die lokalen Algebren von raumartig getrennten Gebieten kommutieren.

An dieser Stelle lohnt es sich, kurz innezuhalten und sich die Eindeutigkeit dieser Konstruktion zu vergegenwärtigen. Für die CAR-Algebren gilt folgender Satz [Ara70]:

Satz 3.5. *Ist U eine Isometrie auf $\mathcal{K}$, die mit der Involution Γ vertauscht, dann existiert ein *-Automorphismus α_U der CAR-Algebra, so daß gilt:*

$$\alpha_U(B(f)) = B(Uf),$$

genannt der zu U gehörige Bogoliubov-Automorphismus.

Wir haben in Kapitel 1 gesehen, daß unterschiedliche Darstellungen der Clifford-Algebra zu einem solchen Automorphismus des Dirac-Bündels führen und damit zu einer Isometrie auf $\mathcal{K}$. Ebenso führt eine andere Wahl der Cauchyfläche sowie einer anderen (äquivalenten) Spinstruktur zu einer solchen Isometrie. Die resultierende CAR-Algebra ist jedoch bis auf Isomorphie unabhängig von diesen Freiheiten in der Konstruktion.

Zustände

Wir kommen jetzt zur Untersuchung von quasifreien Zuständen auf unserer CAR-Algebra. Ein Zustand ω auf $\mathrm{CAR}(\mathcal{K}, \Gamma)$ heißt quasifrei, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{aligned} \omega(B(f_1)\dots B(f_{2n+1})) &= 0, \\ \omega(B(f_1)\dots B(f_{2n})) &= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \sum_\sigma \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{j=1}^{n} \omega(B(f_{\sigma(j)})B(f_{\sigma(j+n)})), \end{aligned}$$

wobei sich die Summe über alle Permutationen σ von $\{1, \dots, 2n\}$ erstreckt, so daß $\sigma(1) < \sigma(2) < \dots < \sigma(n)$ und $\sigma(j) < \sigma(j+n)$, $j = 1, \dots, n$. $\operatorname{sgn}(\sigma)$ ist $+1(-1)$, wenn σ eine gerade (ungerade) Permutation ist.

Man kann zeigen, daß ω genau dann ein Zustand auf $\mathrm{CAR}(\mathcal{K}, \Gamma)$ ist, wenn es einen beschränkten linearen Operator P auf $\mathcal{K}$ gibt, so daß gilt:

$$\begin{aligned} \omega(B(f)^*B(g)) &= (f, Pg), \quad f, g \in \mathcal{K}, \\ 1 \geq P^* &= P \geq 0, \\ P + \Gamma P \Gamma &= 1. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Umgekehrt definiert ein solcher Operator durch (3.3) einen quasifreien Zustand. Ein Zustand ist genau dann ein reiner Zustand, wenn der zugehörige Operator P eine Projektion ist, also zusätzlich gilt, daß $P^2 = P$. Eine solche Projektion heißt dann *Basisprojektion*.

Für solche Zustände können wir direkt eine Fockraumdarstellung konstruieren:

P projiziert auf den Einteilchenhilbertraum $\mathcal{H} := P\mathcal{K}$, interpretiert als Raum der Zustände mit einzelnen Teilchen oder Antiteilchen. Im Minkowskiraum wählt man die Basisprojektion so, daß $\mathcal{H}$ der Raum der Lösungen positiver Frequenz ist, in einer allgemeinen Raumzeit ist aber zunächst keine der Projektionen ausgezeichnet.

Der antisymmetrische Fockraum über $\mathcal{H}$ ist der Raum

$$\mathcal{F}_a(\mathcal{H}) = \bigoplus_n \bigwedge^n \mathcal{H}.$$

Der Vakuumzustand ist $\Omega = (1, 0, 0, \ldots)$.

Auf $\mathcal{F}_a(\mathcal{H})$ wirken die Erzeugungsoperatoren $a^*(f)$, $f \in \mathcal{H}$:

$$(a^*(f)\phi)_n = \sqrt{n}(f \wedge \phi_{n-1}), \quad \phi = \oplus_n \phi_n \in \mathcal{F}_a(\mathcal{H}),$$

und die Vernichtungsoperatoren $a(f)$, $f \in \mathcal{H}$. Sie sind so definiert, daß für Vektoren der Form $\phi_n = f_1 \wedge \cdots \wedge f_n$ gilt:

$$(a(f)\phi)_{n-1} = \sqrt{n} \sum_{i=1}^{n} (f, f_i) \cdot f_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{f_i} \wedge \cdots \wedge f_n,$$

und so daß das Vakuum vernichtet wird: $a(f)\Omega = 0$.

Sie erfüllen die Antivertauschungsrelationen

$$\{a(f), a^*(g)\} = (f, g) \cdot \mathbf{1}.$$

Die Elemente $B(f)$ der abstrakten CAR-Algebra werden nun dargestellt als Kombination von Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren:

$$\pi_P(B(f)) = a(P\Gamma f) + a^*(Pf).$$

Die Forderung, daß π_P eine Darstellung ist, legt dann alle $\pi_P(A)$, $A \in \mathcal{A}$, fest. Man überprüft leicht, daß π_P die *-Struktur und die Antivertauschungsrelationen erhält.

Der zu der Wahl der Basisprojektion P gehörige Zustand ω_P auf $\mathcal{A}$ ist gegeben durch

$$\omega_P(A) = < \Omega, \pi_P(A)\Omega >, \quad A \in \mathcal{A},$$

$< \cdot, \cdot >$ bezeichnet das Skalarprodukt im Fockraum.

Die Zweipunktfunktion des Zustandes ist dann:

$$\omega_2(f_1, f_2) =< \Omega, \pi_P(B(f_1)B(f_2))\Omega >= (\Gamma f_1, P f_2)$$

und ist eine Distribution $\omega_2 \in \Gamma(\mathcal{M}, \mathcal{D}^*\mathcal{M} \boxtimes \mathcal{D}^*\mathcal{M})$.

Wir definieren die Feldoperatoren für Teilchen und Antiteilchen wie folgt:

$$\psi(v) = \pi_P(B(0 \oplus v)), \quad \overline{\psi}(u) = \pi_P(B(u \oplus 0)),$$

$u \in \Gamma(\mathcal{M}, D\mathcal{M}), v \in \Gamma(\mathcal{M}, D^*\mathcal{M})$. Dies sind operatorwertige Distributionen mit Werten in $D\mathcal{M}$ bzw. $D^*\mathcal{M}$ und Lösungen der Dirac-Gleichung bzw. der adjungierten Dirac-Gleichung:

$$(-i\not{\nabla} + m)\psi = 0 = (i\not{\nabla} + m)\overline{\psi}.$$

Die Zweipunktfunktion ist dann

$$\omega^+(v, u) := \omega(\psi(v)\overline{\psi}(u)), \quad \omega^+ \in \mathcal{D}'(\mathcal{M} \times \mathcal{M}, D\mathcal{M} \boxtimes D^*\mathcal{M}).$$

Sie ist Lösung der Dirac-Gleichung in beiden Einträgen:

$$[(-i\not{\nabla} + m) \otimes \mathbf{1}]\,\omega^+ = [\mathbf{1} \otimes (i\not{\nabla} + m)]\,\omega^+ = 0.$$

Der Antikommutator der Felder lautet

$$\{\psi(v), \overline{\psi}(u)\} = -iS(v, u).$$

Schließlich definieren wir auch für einen Zustand des freien Dirac-Feldes den Feynman-Propagator:

$$S_F := i\omega^+ + S^+.$$

Anwendung des Dirac-Operators auf den Feynmanpropagator ergibt:

$$[(-i\not{\nabla}_x + m) \otimes \mathbf{1}]\, S_F(x, y) = \left[\mathbf{1} \otimes (i\not{\nabla}_y + m)\right] S_F(x, y) = \delta(x, y) \cdot \mathbf{1}.$$

3.4 Hadamard-Zustände

Die obigen Konstruktionen lassen natürlich noch eine Vielzahl verschiedener Darstellungen der Observablenalgebren zu, die nicht alle physikalisch relevant sein können. Wir werden nun eine Klasse von quasifreien Zuständen auszeichnen, die Kandidaten für Zustände mit guten physikalischen Eigenschaften sind. Dies sind die sogenannten *Hadamard-Zustände*.

Im skalaren Fall konnte gezeigt werden, daß für diese Zustände der Erwartungswert des Energieimpulstensors definiert werden kann. Dies ist eine stark physikalisch motivierte Forderung, da man die Rückwirkung des Quantenfeldes auf die Geometrie mittels der semiklassischen Einstein-Gleichungen

$$G_{\mu\nu} = 8\pi \langle T_{\mu\nu} \rangle$$

beschreiben möchte.

Die Hadamard-Bedingung wird zunächst als eine globale Bedingung an die Zweipunktdistribution eines Zustandes und die Form ihrer Singularitäten formuliert. Es konnte aber von Radzikowski gezeigt werden, daß sie äquivalent zu einer lokalen Bedingung an die Wellenfrontmenge der Zweipunktfunktion ist [Rad92]. Dieser lokalen Beschreibung werden wir uns in Kapitel 4 zuwenden.

Klein-Gordon-Feld

DeWitt und Brehme suchten in ihrer grundlegenden Arbeit [DB60] nach Lösungen der Wellengleichung von einer bestimmten Form, die auch die Zweipunktfunktion des freien Klein-Gordon-Feldes im Minkowskiraum annimmt. Die Idee ist nun, dasselbe singuläre Verhalten auch in einer gekrümmten Raumzeit zu verlangen.

Man verlangt, daß die Zweipunktfunktion die folgende Form hat:

$$\Lambda(x,y) = \frac{1}{4\pi^2}\left(\frac{u(x,y)}{\sigma(x,y)} + v(x,y)\ln|\sigma(x,y)| + w(x,y)\right), \tag{3.4}$$

wobei σ der quadratische geodätische Abstand ist und u, v und w glatte Funktionen. u soll so normiert sein, daß $u(x,x) = 1$, und v und w sollen sich in eine Potenzreihe in σ entwickeln lassen:

$$v = \sum_{n=0}^{\infty} v_n \sigma^n, \quad w = \sum_{n=0}^{\infty} w_n \sigma^n. \tag{3.5}$$

Die Forderung, daß die Zweipunktfunktion eine Lösung der Klein-Gordon-Gleichung ist, legt die Funktion $u = \Delta^{1/2}$ eindeutig fest, Δ ist die van-Vleck-Morette-Determinante

$$\Delta(x,y) = -\frac{1}{\sqrt{g(x)\,g(y)}}\det(-\nabla^x_\mu \nabla^y_\nu \sigma(x,y)).$$

Außerdem erhält man die sogenannten Hadamard-Rekursionsrelationen, die die Koeffizienten w_n und v_n eindeutig festlegen, bis auf die freie Wahl von w_0, die der Möglichkeit der Addition einer glatten Lösung der Klein-Gordon-Gleichung entspricht. Die Koeffizienten v_n sind aber unabhängig von dieser Wahl. Die Rekursionsrelationen lauten:

$$\begin{aligned} 0 \;=\; & (n+1)(n+2)v_{n+1} + (n+1)(\nabla_\mu v_{n+1})(\nabla^\mu \sigma) \\ & -\frac{1}{2}(n+1)v_{n+1}\Delta^{-1}(\nabla_\mu \Delta)(\nabla^\mu \sigma) + \frac{1}{2}\left(\Box + m^2\right) v_n, \end{aligned} \tag{3.6}$$

zusammen mit der Randbedingung

$$(\nabla_\mu v_0)(\nabla^\mu \sigma) + \left(1 - \frac{1}{2}\Delta^{-1}(\nabla_\mu \Delta)(\nabla^\mu \sigma)\right) v_0 + \frac{1}{2}\left(\Box + m^2\right)\Delta^{1/2} = 0.$$

Diese Charakterisierung einer Hadamard-Distribution ist noch keineswegs präzise. Zum einen ist die Konvergenz der Reihen (3.5) im allgemeinen nur in analytischen Raumzeiten in einem kleinen Radius garantiert. Auch ist σ nur in einer kausal normalen Umgebung definiert. Schließlich definiert (3.4) so gar keine Distribution, weil $\frac{1}{\sigma}$ nicht integrabel ist, man benötigt also noch eine geeignete ϵ-Vorschrift.

Die erste mathematisch präzise Definition eines Hadamard-Zustandes für freie skalare Felder, die diese Probleme beseitigt, wurde von Kay und Wald angegeben [KW91]. Wir wiederholen diese Definition und übertragen sie anschließend auf das freie Dirac-Feld.

Sei Λ die Zweipunktfunktion eines Zustandes des freien skalaren Feldes in einer global hyperbolischen Raumzeit $\mathcal{M}$. Auf der Raumzeit sei eine Zeitorientierung gewählt, und T sei eine globale Zeitfunktion, die zur Zukunft hin anwächst.

Sei $\mathcal{O} \subset \mathcal{M} \times \mathcal{M}$ eine offene Umgebung der Menge aller kausal verbundenen Punkte $(x\,,y) \in \mathcal{M}\times\mathcal{M}$, so daß $J^+(x)\cap J^-(y)$ und $J^+(y)\cap J^-(x)$ in einer konvex normalen Umgebung enthalten sind. In $\mathcal{O}$ ist dann das Quadrat des geodätischen Abstandes, σ, wohldefiniert und glatt. Für jede ganze Zahl n und $\epsilon \geq 0$ definieren wir die Funktion $G_\epsilon^{T,n}$ in $\mathcal{O}$:

$$G_\epsilon^{T,n}(x\,,y) = \frac{1}{4\pi^2}\left(\frac{\Delta^{1/2}(x\,,y)}{\sigma(x\,,y)+2i\epsilon t+\epsilon^2} + v^{(n)}(x\,,y)\,\ln\left(\sigma(x\,,y)+2i\epsilon t+\epsilon^2\right)\right).$$

Hierbei ist $t = T(x) - T(y)$, Δ ist die van-Vleck-Morette-Determinante und $v^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} v_i\sigma^i$ ist durch die Hadamard-Rekursionsrelationen bis zur n-ten Ordnung festgelegt. $\ln$ ist der Hauptzweig des Logarithmus.

Sei nun Σ eine Cauchyfläche und $\mathcal{N}$ eine kausal normale Umgebung von Σ. Sei weiterhin $\mathcal{O}'$ eine Umgebung der Menge der kausal verbundenen Paare von Punkten in $\mathcal{N}\times\mathcal{N}$, so daß ihr Abschluß in $\mathcal{O}$ enthalten ist. Außerdem wählen wir eine $\mathcal{N}$-Regularisierungsfunktion χ, also eine glatte, reelle Funktion auf $\mathcal{M}\times\mathcal{M}$ mit der Eigenschaft $\chi(x\,,y) = 0$, wenn $(x\,,y) \notin \mathcal{O}$, und $\chi(x\,,y) = 1$, wenn $(x\,,y) \in \mathcal{O}'$.

Definition 3.2. Wir sagen, der quasifreie Zustand ω des freien Klein-Gordon-Feldes über $\mathcal{M}$ sei ein *Hadamard-Zustand*, wenn es für jede natürliche Zahl n eine Funktion $H^{(n)} \in \mathcal{C}^n(\mathcal{N}\times\mathcal{N})$ gibt, so daß seine Zweipunktfunktion Λ für alle $f, g \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{N})$ die folgende Form hat:

$$\Lambda(f,g) = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\mathcal{N}\times\mathcal{N}}\left(\chi(x\,,y)G_\epsilon^{T,n}(x\,,y) + H^{(n)}(x\,,y)\right)f(x)g(y)d\mu(x)d\mu(y).$$

Für weitere Einzelheiten siehe [KW91]. Dort wird auch gezeigt, daß die Definition unabhängig von der Cauchyfläche und den Funktionen T und χ ist. Eine Hadamard-Zweipunktfunktion ist also bereits durch ihr Verhalten in der kausal normalen Umgebung einer Cauchyfläche festgelegt und erfüllt in der Umgebung jeder anderen Cauchyfläche automatisch die Hadamard-Bedingung.

Die angegebene Bedingung an die Form der Singularitäten der Zweipunktdistribution legt diese bis auf einen glatten Anteil eindeutig fest. Zwei Hadamard-Distributionen unterscheiden sich also nur um eine glatte Lösung der Klein-Gordon-Gleichung.

Dirac-Feld

In Analogie zum skalaren Feld definieren wir nun Hadamard-Zustände für das Dirac-Feld, von denen man erwartet, daß sie physikalisch ebenso relevant sind wie im skalaren Fall. Wir lehnen uns dabei an die Arbeit von Köhler [Koe95] an, in der, aufbauend auf dem Ansatz von Najmi und Ottewill [NO84], die erste rigorose Definition solcher Zustände gegeben wird.

Wie betrachten einen quasifreien Zustand ω des freien Dirac-Feldes über einer global hyperbolischen Raumzeit $\mathcal{M}$. Die Hadamard-Bedingung formulieren wir wieder als eine Bedingung an die Zweipunktfunktion ω^+.

Wir hatten gesehen, daß der Dirac-Propagator durch Anwendung des Dirac-Operators aus dem Propagator für die spinorielle Klein-Gordon-Gleichung hervorgeht. Analog führen wir eine Hilfs-Zweipunktfunktion $\tilde{\omega}$ ein, so daß

$$\omega^+ = [(i\not{\nabla} + m) \otimes \mathbf{1}]\, \tilde{\omega}.$$

Für $v \in \Gamma(\mathcal{M}, D^*\mathcal{M})$ und $u \in \Gamma(\mathcal{M}, D\mathcal{M})$ gilt also

$$\omega^+(v,u) = \tilde{\omega}\left((-i\not{\nabla} + m)v, u\right).$$

Da ω^+ eine Lösung der Dirac-Gleichung in beiden Einträgen ist, folgt wegen der Identität von Lichnerowicz, daß $\tilde{\omega}$ eine zweifache Lösung der spinoriellen Klein-Gordon-Gleichung ist:

$$\left[\left(\Box - \frac{1}{4}R + m^2\right) \otimes \mathbf{1}\right] \tilde{\omega} = \left[\mathbf{1} \otimes \left(\Box - \frac{1}{4}R + m^2\right)\right] \tilde{\omega} = 0.$$

Für den spinoriellen Klein-Gordon-Operator können wir nun ebenfalls nach Lösungen suchen, die die Hadamard-Singularitätsstruktur besitzen. Wir fordern, daß $\tilde{\omega}$ wieder von der Form (3.4) ist, wobei jetzt als Koeffizienten glatte Bispinorfelder $\tilde{u}$, $\tilde{v}$, $\tilde{w}$ auftreten.

Das gleiche Vorgehen wie im skalaren Fall führt dann auf die spinorielle van-Vleck-Morette-Determinante

$$\tilde{u}^A{}_B(x,y) = \Delta^{1/2}(x,y)\mathcal{J}^A{}_B(x,y),$$

wobei wieder Δ die skalare van-Vleck-Morette-Determinante und $\mathcal{J}$ der Bispinor des Paralleltransportes ist.

Ebenso erhält man eine Rekursionsrelation für Bispinoren $\tilde{v}_n$. Sie haben die gleiche Form wie für den skalaren Fall, nur daß die kovarianten Ableitungen nun

auf Spinorfelder wirken und statt des skalaren der spinorielle Klein-Gordon-Operator auftritt:

$$\begin{aligned} 0 &= (n+1)(n+2)v_{n+1} + (n+1)(\nabla_\mu v_{n+1})(\nabla^\mu \sigma) \\ &\quad -\frac{1}{2}(n+1)v_{n+1}\Delta^{-1}(\nabla_\mu \Delta)(\nabla^\mu \sigma) + \frac{1}{2}\left(\Box - \frac{1}{4}R + m^2\right) v_n, \end{aligned} \tag{3.7}$$

zusammen mit der Randbedingung

$$\begin{aligned} 0 &= (\nabla_\mu v_0)(\nabla^\mu \sigma) + \left(1 - \frac{1}{2}\Delta^{-1}(\nabla_\mu \Delta)(\nabla^\mu \sigma)\right) v_0 \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(\Box - \frac{1}{4}R + m^2\right)\left(\Delta^{1/2}\mathcal{J}\right). \end{aligned}$$

Wir wählen wieder $\mathcal{O}$ wie oben und definieren für $n \in \mathbb{N}$, $\epsilon \geq 0$ und eine globale Zeitfunktion T eine bispinorwertige Funktion $\mathcal{G}_\epsilon^{T,n} \in \Gamma(\mathcal{O}, D\mathcal{M} \boxtimes D^*\mathcal{M})$:

$$\begin{aligned} &(\mathcal{G}_\epsilon^{T,n})^A{}_B(x,y) = \\ &\quad \frac{1}{4\pi^2}\left(\frac{\Delta^{1/2}(x,y)\mathcal{J}^A{}_B(x,y)}{\sigma(x,y) + 2i\epsilon t + \epsilon^2} + \tilde{v}^{(n)A}{}_B(x,y)\ln\left(\sigma(x,y) + 2i\epsilon t + \epsilon^2\right)\right). \end{aligned}$$

Weiterhin wählen wir wieder $\mathcal{N}$ und χ genauso wie im skalaren Fall und können definieren:

Definition 3.3. Der quasifreie Zustand ω des freien Dirac-Feldes über $\mathcal{M}$ heißt *Hadamardzustand*, wenn es für jede natürliche Zahl n eine Funktion $H^{(n)} \in \mathcal{C}^n(\Gamma_0(\mathcal{N}, D^*\mathcal{M}) \times \Gamma_0(\mathcal{N}, D\mathcal{M}))$ gibt, so daß seine Hilfs-Zweipunktfunktion $\tilde{\omega}$ für alle $v \in \Gamma_0(\mathcal{N}, D^*\mathcal{M}), u \in \Gamma_0(\mathcal{N}, D\mathcal{M})$ die folgende Form hat:

$$\tilde{\omega}(v,u) = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\mathcal{N}\times\mathcal{N}} \chi(x,y)\mathcal{G}_\epsilon^{T,n}{}^A{}_B(x,y)v_A(x)u^B(y)d\mu(x)d\mu(y) + H^n(v,u).$$

Wie im skalaren Fall ist also der singuläre Anteil der Zweipunktfunktion durch die Geometrie festgelegt, und ein Hadamard-Zustand ist vollständig charakterisiert, indem man den glatten Anteil von $\tilde{\omega}$ festlegt.

Kapitel 4

Singularitätsstruktur der Zweipunktfunktion

Wir wollen nun mit den Methoden der mikrolokalen Analysis die Singularitätsstruktur der Zweipunktfunktionen physikalischer Zustände analysieren.

Die Wellenfrontmenge einer skalaren Hadamard-Distribution wurde zuerst von Radzikowski angegeben [Rad92]. Diese lokale Charakterisierung der Hadamard-Singularitätenstruktur hat sich im folgenden als äußerst nützlich herausgestellt. So konnte in [Jun95] mit ihrer Hilfe gezeigt werden, daß zahlreiche schon länger bekannte und für physikalisch relevant gehaltene Zustände tatsächlich Hadamard-Zustände sind. Außerdem konnten Hadamard-Zustände in einer beliebigen global hyperbolischen Raumzeit konstruiert werden.

In [BFK95] wurde die Bedingung an die Wellenfrontmenge der n-Punkt-Funktionen physikalischer Zustände zu einer „mikrolokalen Spektrumsbedingung“ verallgemeinert, die auch auf wechselwirkende Felder anwendbar ist. Der Nutzen dieser Bedingung wurde dann in [BF97] unter Beweis gestellt, indem wechselwirkende skalare Quantenfeldtheorien in gekrümmter Raumzeit konstruiert wurden und gezeigt werden konnte, daß diese unter den gleichen Voraussetzungen wie im Minkowskiraum renormierbar sind.

Wir werden zuerst die Ergebnisse für das Klein-Gordon-Feld wiederholen, um anschließend auch für die Zweipunktfunktion und den Feynmanpropagator von Hadamard-Zuständen des freien Dirac-Feldes die Wellenfront- und Polarisationsmenge zu bestimmen.

4.1 Klein-Gordon-Feld

Wir beginnen mit dem wichtigsten Resultat aus der Dissertation von Radzikowski [Rad92]:

Theorem 4.1. *Ein quasifreier Zustand des Klein-Gordon-Feldes auf einer global hyperbolischen Raumzeit $\mathcal{M}$ ist genau dann ein Hadamard-Zustand, wenn seine*

Zweipunktfunktion Λ die folgende Wellenfrontmenge besitzt:

$$WF(\Lambda) = \left\{(x,y;\xi,-\eta) \in T^*(\mathcal{M}\times\mathcal{M})\setminus \mathbf{0} \,|\, (x,\xi)\sim(y,\eta), \xi \in \overline{V}_x^+\right\}. \quad (4.1)$$

Die Äquivalenzrelation $\sim$ bedeutet dabei, daß es eine lichtartige Geodäte γ gibt, die x und y verbindet, so daß ξ im Punkt x kotangential an γ ist und η der entlang der Geodäte paralleltransportierte Vektor bei y, dort ebenfalls kotangential an γ. Auf der Diagonale bedeutet $(x,\xi)\sim(x,\eta)$, daß ξ lichtartig ist und $\xi=\eta$.

Den Beweis aus [Koe95], daß die Zweipunktfunktion eines Hadamardzustandes die angegebene Wellenfrontmenge besitzt, werden wir hier skizzieren, da er uns auch bei der Übertragung auf Hadamardzustände des Dirac-Feldes leiten wird.

Zunächst untersucht man die Zweipunktfunktion im Minkowskiraum:

Satz 4.2. *Die Zweipunktfunktion des freien Klein-Gordon-Feldes im Minkowskiraum hat die Wellenfrontmenge*

$$\begin{aligned} WF(\Lambda^{\mathrm{Mk}}) \;=\; & \left\{(x,y;\xi,-\xi)\in T^*(\mathbb{R}^{1,3}\times\mathbb{R}^{1,3}) \,|\, x\neq y, (x-y)^2=0,\right. \\ & \qquad\qquad \left. \xi\,||\,(x-y), \xi^0>0\right\} \\ & \cup \left\{(x,x;\xi,-\xi)\in T^*(\mathbb{R}^{1,3}\times\mathbb{R}^{1,3}) \,|\, \xi^2=0, \xi^0>0\right\}, \end{aligned}$$

ist also von der Form (4.1).

Der Beweis findet sich bereits in [RS75]. Er beruht im wesentlichen darauf, daß die Zweipunktfunktion im Minkowskiraum die folgende Fouriertransformierte besitzt:

$$\widehat{\Lambda^{\mathrm{Mk}}}(\xi,\eta) = (2\pi)^{-1}\delta(\xi+\eta)\theta(\xi_0)\delta(\xi^2-m^2).$$

Die Übertragung auf eine beliebige global hyperbolische Raumzeit geschieht nun, indem man die Raumzeit so deformiert, daß die Metrik in einem Teil der Raumzeit mit der Minkowski-Metrik übereinstimmt. Da die Zweipunktfunktion Lösung der Klein-Gordon-Gleichung ist, läßt sich Hörmanders Satz über die Ausbreitung von Singularitäten anwenden und so das Resultat aus dem Minkowskiraum auf die gekrümmte Raumzeit übertragen.

Die Grundlage für diese Deformation der Raumzeit liefert der folgende Satz, der in etwas stärkerer Form in [Koe95] bewiesen wird und auf einem Argument aus [FNW81] basiert:

Satz 4.3. *Sei $(\mathcal{M},g)$ eine global hyperbolische Raumzeit und x ein Punkt auf einer Cauchyfläche $\Sigma\subset\mathcal{M}$. Dann existiert eine konvex normale Umgebung U von x und eine global hyperbolische Raumzeit $(\widetilde{\mathcal{M}},\tilde{g})$ mit den folgenden Eigenschaften:*

1. *Eine kausal normale Umgebung $\mathcal{N}$ von Σ in $\mathcal{M}$ mit $U\subset\mathcal{N}$ ist isometrisch zu einer Umgebung $\tilde{\mathcal{N}}$ in $\widetilde{\mathcal{M}}$, und die Isometrie $\rho:\mathcal{N}\to\tilde{\mathcal{N}}$ ist auch eine Isometrie zwischen Σ und einer Cauchyfläche $\tilde{\Sigma}\subset\tilde{\mathcal{N}}$.*

2. *Es gibt eine raumartige Hyperfläche $\hat{\Sigma}$ mit Umgebung $\hat{U}$ in $\widetilde{\mathcal{M}}$, so daß $\tilde{g}$, eingeschränkt auf $\hat{U}$, die Minkowski-Metrik ist und $\rho(U) = \tilde{U} \subset D(\hat{U})$.*

Die auf der Umgebung $\mathcal{N}$ der Cauchyfläche Σ und damit auch auf $\tilde{\mathcal{N}} = \rho(\mathcal{N})$ vorgegebene Zweipunktfunktion Λ induziert auf der gesamten deformierten Raumzeit $\widetilde{\mathcal{M}}$ eine Hadamard-Distribution $\tilde{\Lambda}$, so daß $\Lambda|_{\mathcal{N}\times\mathcal{N}} = \rho^*(\tilde{\Lambda}|_{\tilde{\mathcal{N}}\times\tilde{\mathcal{N}}})$.

Die Wellenfrontmenge der Distribution $\tilde{\Lambda}$ im flachen Teil von $\widetilde{\mathcal{M}}$ kennen wir bereits: Da in die Hadamard-Rekursionsrelationen nur lokale Eigenschaften der Raumzeit eingehen und die Metrik auf $\hat{U}$ flach ist, gilt auf $\hat{U} \times \hat{U}$ nach Satz 4.2:

$$(\hat{x},\hat{y};\hat{\xi},-\hat{\eta}) \in WF(\tilde{\Lambda}|_{\hat{U}\times\hat{U}}) \;\Leftrightarrow\; (\hat{x},\hat{\xi}) \sim (\hat{y},\hat{\eta}), \hat{\xi} \in \overline{V}^+_{\hat{x}}\,.$$

$\tilde{\Lambda}$ ist Lösung der Klein-Gordon-Gleichung im zweiten Eintrag, und wir können daher für den Operator $\mathbf{1} \otimes (\Box + m^2)$ Hörmanders Satz über die Ausbreitung von Singularitäten anwenden, um die Wellenfrontmenge von $\tilde{\Lambda}$ über Punkten in $\hat{U} \times \tilde{U}$ zu bestimmen. Da $\tilde{U}$ in $D(\hat{U})$ liegt, schneidet jede Nullgeodäte durch $\tilde{U}$ die Menge $\hat{U}$, und nach Corollar 2.11 erhalten wir:

$$\begin{aligned}(\hat{x},y;\hat{\xi},-\eta) \in WF(\tilde{\Lambda}|_{\hat{U}\times\tilde{U}}) \quad &\Leftrightarrow \quad (\hat{x},\hat{y};\hat{\xi},-\hat{\eta}) \in WF(\tilde{\Lambda}|_{\hat{U}\times\hat{U}}), (y,\eta) \sim (\hat{y},\hat{\eta}) \\ &\Leftrightarrow \quad (y,\eta) \sim (\hat{x},\hat{\xi}), \hat{\xi} \in \overline{V}^+_{\hat{x}}\,.\end{aligned}$$

Nochmaliges Anwenden des Satzes, diesmal für den Operator $(\Box + m^2) \otimes \mathbf{1}$, ergibt die Wellenfrontmenge über den Punkten in $\tilde{U} \times \tilde{U}$:

$$(x,y;\xi,-\eta) \in WF(\tilde{\Lambda}|_{\tilde{U}\times\tilde{U}}) \;\Leftrightarrow\; (x,\xi) \sim (\hat{x},\hat{\xi}), (y,\eta) \sim (\hat{x},\hat{\xi}), \hat{\xi} \in \overline{V}^+_{\hat{x}}\,,$$

und damit

$$WF(\tilde{\Lambda}|_{\tilde{U}\times\tilde{U}}) = \big\{(x,y;\xi,-\eta) \in T^*(\tilde{U}\times\tilde{U}) \setminus \mathbf{0} \,\big|\, (x,\xi) \sim (y,\eta), \xi \in \overline{V}^+_x\big\}.$$

Da Λ die mittels der Isometrie ρ zurückgezogene Distribution ist, hat nach Satz 2.8 auch die Wellenfrontmenge von Λ in $U \times U$ diese Form.

Nochmalige Anwendung desselben Propagationsargumentes in der nicht deformierten Raumzeit liefert schließlich die Wellenfrontmenge von Λ über beliebigen Paaren von Punkten $(x,y) \in \mathcal{M} \times \mathcal{M}$:

$$WF(\Lambda) = \big\{(x,y;\xi,-\eta) \in T^*(\mathcal{M}\times\mathcal{M}) \setminus \mathbf{0} \,\big|\, (x,\xi) \sim (y,\eta), \xi \in \overline{V}^+_x\big\},$$

was zu beweisen war.

Auch die Wellenfrontmenge des Feynmanpropagators wurde in [Rad92] hergeleitet:

Theorem 4.4. *Der Feynmanpropagator ω_F eines Hadamardzustandes des freien skalaren Feldes in einer global hyperbolischen Raumzeit $\mathcal{M}$ hat die Wellenfrontmenge*

$$\begin{aligned}WF(\omega_F) \;=\; &\big\{(x,y;\xi,-\eta) \in T^*(\mathcal{M}\times\mathcal{M}) \setminus \mathbf{0} \,\big|\, (x,\xi) \sim (y,\eta), x \neq y, \\ &\qquad\qquad \xi \in \overline{V}^{\pm}_x, \text{ wenn } x \in J^{\pm}(y)\big\} \\ &\cup \big\{(x,x;\xi,-\xi) \in T^*(\mathcal{M}\times\mathcal{M}) \setminus \mathbf{0}\big\}.\end{aligned}$$

Diese Ergebnisse lassen sich folgendermaßen veranschaulichen: In der Wellenfrontmenge der Zweipunktfunktion steht die Bedingung, daß $\xi \in \overline{V}_x^+$, das bedeutet, es treten nur positive Frequenzen auf. Beim Feynmanpropagator ist $\xi \in \overline{V}_x^{\pm}$, falls $x \in J^{\pm}(y)$, das heißt, positive Frequenzen breiten sich vorwärts in der Zeit aus, negative Frequenzen rückwärts. Dies ist die übliche, aus dem Minkowskiraum bekannte Interpretation des Feynmanpropagators. Theorem 4.4 besagt, daß sie in jeder global hyperbolischen Raumzeit gültig ist, wenn der zugrundeliegende Zustand ein Hadamard-Zustand ist.

Die Wellenfrontmenge einer beliebigen m-Punkt-Funktion eines Hadamard-Zustandes läßt sich mit Hilfe von Satz 2.7 über die Wellenfrontmenge eines Tensorproduktes von Distributionen aus der Wellenfrontmenge der Zweipunktfunktion bestimmen.

4.2 Dirac-Feld

Es soll nun gezeigt werden, daß die Zweipunktfunktion und der Feynmanpropagator eines Hadamard-Zustandes des freien Dirac-Feldes dieselbe Wellenfrontmenge besitzen wie die entsprechenden skalaren Distributionen. Außerdem wollen wir ihre Polarisationsmengen bestimmen.

Das Ergebnis wird lauten:

Theorem 4.5. *Sei ω ein Hadamard-Zustand des freien Dirac-Feldes über einer global hyperbolischen Raumzeit $\mathcal{M}$. Dann gilt für seine Zweipunktfunktion ω^+:*

$$WF(\omega^+) = \big\{(x,y;\xi,-\eta) \in T^*(\mathcal{M}\times\mathcal{M})\setminus \mathbf{0} \,|\, (x,\xi)\sim(y,\eta), \xi \in \overline{V}_x^+\big\},$$

$$\begin{aligned} WF_{pol}(\omega^+) = \big\{&(x,y;\xi,\eta;w) \in \pi^*(D\mathcal{M}\boxtimes D^*\mathcal{M}) \,| \\ &(x,y;\xi,\eta) \in WF(\omega^+); (\mathcal{J}_\gamma(x,y)\otimes \mathbf{1})w = \lambda\cdot \not{w}, \lambda\in\mathbb{C}\big\}. \end{aligned}$$

Hierbei ist $\mathcal{J}_\gamma(x,y)$ der Paralleltransport in $D\mathcal{M}$ entlang der Geodäte γ, die x und y verbindet, so daß ξ kotangential an γ im Punkt x ist. $\pi^*(D\mathcal{M}\boxtimes D^*\mathcal{M})$ ist das über das Kotangentialbündel $T^*(\mathcal{M}\times\mathcal{M})$ gehobene Bispinorbündel.

Für den Feynmanpropagator gilt analog:

$$\begin{aligned} WF(S_F) = \big\{&(x,y;\xi,-\eta) \in T^*(\mathcal{M}\times\mathcal{M})\setminus\mathbf{0} \,|\, (x,\xi)\sim(y,\eta), x\neq y, \\ &\qquad\qquad \xi\in\overline{V}_x^{\pm}, \text{ wenn } x\in J^{\pm}(y)\big\} \\ &\cup \big\{(x,x;\xi,-\xi)\in T^*(\mathcal{M}\times\mathcal{M})\setminus\mathbf{0}\big\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} WF_{pol}(S_F) = \big\{&(x,y;\xi,\eta;w) \in \pi^*(D\mathcal{M}\boxtimes D^*\mathcal{M}) \,| \\ &(x,y;\xi,\eta) \in WF(S_F); (\mathcal{J}_\gamma(x,y)\otimes \mathbf{1})w = \lambda\cdot \not{w}, \lambda\in\mathbb{C}\big\}, \end{aligned}$$

zumindest über den Punkten $(x,y;\xi,\eta)$ mit $x\neq y$.

Für den Beweis gehen wir ähnlich vor wie im skalaren Fall. Zunächst bestimmen wir die Polarisationsmenge im Minkowskiraum und übertragen das Resultat dann auf die Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$, indem wir Denckers Satz über die Ausbreitung von Singularitäten anwenden.

Satz 4.6. *Die Zweipunktfunktion ω^+ eines Hadamardzustandes des freien Dirac-Feldes im Minkowskiraum $\mathcal{M} = \mathbb{R}^{1,3}$ hat (bis auf einen glatten Anteil) die Form*

$$\omega^+ = [(i\not{\partial} + m) \otimes \mathbf{1}]\,(\Lambda \cdot \mathbf{1}),$$

wobei Λ die Zweipunktfunktion eines Hadamardzustandes des freien Klein-Gordon-Feldes ist. Ihre Polarisationsmenge ist

$$WF_{pol}(\omega^+) = \\ \left\{(x\,, y; \xi\,, \eta; \lambda \cdot \not{\eta}) \in \pi^*(D\mathcal{M} \boxtimes D^*\mathcal{M}) \mid (x\,, y; \xi\,, \eta) \in WF(\Lambda), \lambda \in \mathbb{C}\right\}.$$

Entsprechend gilt für den Feynmanpropagator:

$$S_F = [(i\not{\partial} + m) \otimes \mathbf{1}]\,(\omega_F \cdot \mathbf{1}),$$

mit dem zu Λ gehörenden Feynmanpropagator ω_F. Er hat die Polarisationsmenge

$$WF_{pol}(S_F) = \\ \left\{(x\,, y; \xi\,, \eta; \lambda \cdot \not{\eta}) \in \pi^*(D\mathcal{M} \boxtimes D^*\mathcal{M}) \mid (x\,, y; \xi\,, \eta) \in WF(\omega_F), \lambda \in \mathbb{C}\right\}.$$

Bemerkung. Das Bündel $D\mathcal{M} \boxtimes D^*\mathcal{M}$ über dem Minkowskiraum ist das triviale Bündel $(\mathcal{M} \times \mathcal{M}) \times \mathbb{C}^{4\times 4}$, und der Paralleltransport ist ebenfalls trivial. Man darf also die Notation vereinfachen, indem man die Spinorräume über allen Punkten identifiziert und darauf verzichtet, den Paralleltransport hinzuschreiben.

Beweis. Im Minkowskiraum verschwindet der Krümmungsskalar sowie alle Ableitungen der Metrik, und die kovariante Ableitung geht in die partielle Ableitung der einzelnen Komponenten über. Daher ist der Paralleltransport-Bispinor $\mathcal{J} \equiv \mathbf{1}$, und die Funktion $\tilde{u}$ in der Definition des Hadamardzustandes nimmt die Form $\tilde{u} = u \cdot \mathbf{1}$ an, mit der entsprechenden skalaren Funktion u. Ebenso gehen die Hadamard-Rekursionsrelationen (3.7) für jede Komponente von $\tilde{v}_n$ in die Form (3.6) für das skalare Feld über, wie auch die Randbedingung, die zudem besagt, daß $\tilde{v}_0 \propto \mathbf{1}$. Also ist auch $\tilde{v}^{(p)} = v^{(p)} \cdot \mathbf{1}$ und somit $(\mathcal{G}_\epsilon^{T,n})^A{}_B = G_\epsilon^{T,n} \cdot \mathbf{1}^A{}_B$. Das bedeutet, daß die Hilfs-Zweipunktfunktion jedes Hadamard-Zustandes des Dirac-Feldes im Minkowskiraum bis auf einen glatten Anteil Vielfaches der Einheitsmatrix und jede Komponente die Zweipunktfunktion eines Hadamard-Zustandes des freien skalaren Feldes ist. Da alle solche Zweipunkt-Distributionen bis auf einen glatten Anteil identisch sind, nimmt die Hilfs-Zweipunktfunktion bis auf einen glatten Anteil die Form $\tilde{\omega}_2 = \Lambda \cdot \mathbf{1}$ an, und es ist

$$\omega^+ = [(i\not{\partial} + m) \otimes \mathbf{1}](\Lambda \cdot \mathbf{1}) \tag{4.2}$$

mit einer skalaren Hadamard-Zweipunktfunktion Λ.

Weiterhin gilt für die Fundamentallösung des Dirac-Operators im Minkowskiraum: $S^+ = [(i\not\partial + m) \otimes \mathbf{1}](\Delta^+ \cdot \mathbf{1})$, wie bereits bei der Definition von S^+ angemerkt wurde, und somit ist (wieder bis auf einen glatten Anteil):

$$\begin{aligned} S_F &= i\omega^+ + S^+ = [(i\not\partial + m) \otimes \mathbf{1}]\,(i\Lambda \cdot \mathbf{1} + \Delta^+ \cdot \mathbf{1}) \\ &= [(i\not\partial + m) \otimes \mathbf{1}]\,(\omega_F \cdot \mathbf{1})\,. \end{aligned}$$

Die weitere Argumentation erfolgt völlig analog für ω^+ und S_F. Sie geht nur davon aus, daß die untersuchte vektorwertige Distribution durch Anwenden des Operators $(i\not\partial + m) \otimes \mathbf{1}$ aus einer skalaren Distribution hervorgeht. Wir beschränken uns daher im folgenden auf die Zweipunktfunktion.

Aus Theorem 4.1 wissen wir, daß die Distribution $\Lambda \cdot \mathbf{1}$ die Wellenfrontmenge (4.1) besitzt, und ihre Polarisationsmenge ist offensichtlich

$$WF_{pol}(\Lambda \cdot \mathbf{1}) = \left\{(x, y; \xi, \eta; \lambda \cdot \mathbf{1}) \mid (x, y; \xi, \eta) \in WF(\Lambda), \lambda \in \mathbb{C}\right\}.$$

ω^+ geht nun durch Anwendung des Pseudodifferentialoperators

$$A = [(i\not\partial + m) \otimes \mathbf{1}]$$

mit Hauptsymbol $a(x, y; \xi, \eta) = -\not\xi \otimes \mathbf{1}$ aus $\Lambda \cdot \mathbf{1}$ hervor. Nach Satz 2.7 vergrößert dies die Wellenfrontmenge nicht. Andererseits wissen wir nach Satz 2.15, daß für die Polarisationsmenge von $\omega^+ = A(\Lambda \cdot \mathbf{1})$ folgendes gilt:

$$\begin{aligned} WF_{pol}(\omega^+) \supseteq\ & \left\{(x, y; \xi, \eta; a(x, y; \xi, \eta)w) \mid (x, y; \xi, \eta; w) \in WF_{pol}(\Lambda \cdot \mathbf{1})\right\} = \\ & \left\{(x, y; \xi, \eta; \lambda \cdot \not\xi) \mid (x, y; \xi, \eta) \in WF(\Lambda), \lambda \in \mathbb{C}\right\}. \end{aligned}$$

Da $\not\xi \neq 0$, wenn $(x, y; \xi, \eta) \in WF(\Lambda)$, und da die Projektion der Polarisationsmenge auf das Kotangentialbündel genau die Wellenfrontmenge ergibt, ist damit gezeigt, daß die Anwendung von A die Wellenfrontmenge auch nicht verkleinert. Insgesamt ist also bewiesen, daß ω^+ die gleiche Wellenfrontmenge wie die skalare Distribution Λ hat.

Die Gleichheit für die Polarisationsmenge folgt aber leider nicht aus Satz 2.15, weil der Operator A gerade in den interessanten Punkten charakteristisch wird: Es ist nämlich $\det a(x, y; \xi, \eta) = -(\xi^2)^2 = 0$ für $(x, y; \xi, \eta) \in WF(\Lambda)$.

Die Gleichheit läßt sich aber auch direkt aus der Definition der Polarisationsmenge herleiten.

Wir wollen also die Polarisationsvektoren w über einem Punkt $(x, y; \xi, \eta)$ der Wellenfrontmenge suchen. Wegen (4.2) müssen solche Vektoren offenbar Linearkombinationen der Gammamatrizen und der Einheitsmatrix sein, wir setzen daher $w = \alpha\mathbf{1} + \beta_\sigma \gamma^\sigma$.

Nach Definition der Polarisationsmenge muß gelten: $a(x, y; \xi, \eta)w = 0$, falls a das Hauptsymbol eines Pseudodifferentialoperators $A : \mathcal{D}'(\mathcal{M} \times \mathcal{M}, \mathbb{C}^{4\times 4}) \to \mathcal{D}'(\mathcal{M} \times \mathcal{M})$ mit $A\omega^+ \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M} \times \mathcal{M})$ ist.

Wir betrachten die Familie von Pseudodifferentialoperatoren

$$A_{B,C}u := \mathrm{tr}\big((\gamma^\mu\eta_{\mu\rho}B^{\rho\nu} - iC_\mu\eta^{\mu\nu}\mathbf{1})\partial_\nu^x u + mC_\mu\gamma^\mu u\big)$$

mit einer beliebigen antisymmetrischen Matrix B und einem beliebigen Vektor C.

Es gilt $A_{B,C}\omega^+ \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}\times\mathcal{M})$, wie folgende Rechnung (mod $\mathcal{C}^\infty$) zeigt:

$$\begin{aligned}
A_{B,C}\omega^+ &= \mathrm{tr}\big((\gamma^\mu\eta_{\mu\rho}B^{\rho\nu} - iC_\mu\eta^{\mu\nu})\partial_\nu^x(i\gamma^\sigma\partial_\sigma^x + m\mathbf{1})\Lambda\big)\\
&\quad + \mathrm{tr}\big(mC_\mu\gamma^\mu(i\gamma^\sigma\partial_\sigma^x + m\mathbf{1})\Lambda\big)\\
&= (i\eta_{\mu\rho}B^{\rho\nu}\partial_\nu^x\partial_\sigma^x\Lambda + imC_\mu\partial_\sigma^x\Lambda)\,\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\sigma)\\
&\quad +(C_\sigma\eta^{\sigma\nu}\partial_\nu^x\partial_\mu^x\Lambda + m\eta_{\mu\rho}B^{\rho\nu}\partial_\nu^x\Lambda + m^2C_\mu\Lambda)\,\mathrm{tr}(\gamma^\mu)\\
&\quad -imC_\mu\eta^{\mu\nu}\partial_\nu^x\Lambda\,\mathrm{tr}(\mathbf{1})\\
&= 4(i\eta_{\mu\rho}B^{\rho\nu}\partial_\nu^x\partial_\sigma^x\Lambda + imC_\mu\partial_\sigma^x\Lambda)\eta^{\mu\sigma}\\
&\quad -4imC_\mu\eta^{\mu\nu}\partial_\nu^x\Lambda\\
&= 4iB^{\sigma\nu}\partial_\nu^x\partial_\sigma^x\Lambda\\
&= 0,
\end{aligned}$$

wegen der Antisymmetrie von $B^{\sigma\nu}$.

Die Polarisationsvektoren $w = \alpha\mathbf{1} + \beta_\sigma\gamma^\sigma$ müssen also die Bedingungen $a_{B,C}(x,y;\xi,\eta)w = 0$ erfüllen, das heißt

$$\begin{aligned}
a_{B,C}(x,y;\xi,\eta)w &= \mathrm{tr}\big((\gamma^\mu\eta_{\mu\rho}B^{\rho\nu} - iC_\mu\eta^{\mu\nu})i\xi_\nu w\big)\\
&= \alpha C_\mu\eta^{\mu\nu}\xi_\nu\,\mathrm{tr}(\mathbf{1}) + \eta_{\mu\rho}B^{\rho\nu}i\xi_\nu\beta_\sigma\,\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\sigma)\\
&= 4\alpha(C\cdot\xi) + 4iB^{\sigma\nu}\xi_\nu\beta_\sigma\\
&\stackrel{!}{=} 0.
\end{aligned}$$

Wählen wir speziell $B = 0$ und C so, daß $C\cdot\xi \neq 0$, so schließen wir, daß $\alpha = 0$.

Für die Wahl $C = 0$ und $B^{\sigma\nu} = \delta^\sigma{}_\iota\delta^\nu{}_\kappa - \delta^\sigma{}_\kappa\delta^\nu{}_\iota$; $\iota,\kappa = 0,\ldots,3$, erhalten wir

$$\xi_\kappa\beta_\iota - \xi_\iota\beta_\kappa = 0.$$

Da $\xi \neq 0$, können wir ι so wählen, daß $\xi_\iota \neq 0$, und erhalten:

$$\beta = \lambda\cdot\xi \quad \text{mit} \quad \lambda = \beta_\iota/\xi_\iota.$$

Also enthält die Polarisationsmenge über $(x,y;\xi,\eta) \in WF(\omega^+)$ höchstens Vektoren der Form $w = \lambda\cdot\not{\xi}$. Wie wir bereits oben festgestellt haben, sind diese Vektoren auch wirklich in der Polarisationsmenge enthalten.

Damit ist der Beweis beendet.

Statt aus der Tatsache, daß die Zweipunktfunktion mittels Gleichung (4.2) aus einer skalaren Distribution hervorgeht, läßt sich die Polarisationsmenge auch aus der Tatsache herleiten, daß ω^+ und S_F (bis auf einen Anteil $\propto \mathbf{1}$) in beiden

Einträgen Lösungen der Dirac-Gleichung sind, unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß sie bis auf glatte Anteile nur Werte in dem Untervektorraumbündel von $\mathcal{M} \times \mathbb{C}^{4\times 4}$ annehmen, das von den Dirac-Matrizen und der Einheitsmatrix aufgespannt wird. Wie wir oben gesehen haben, ist diese Annahme zumindest im Minkowskiraum erfüllt.

Der Einfachheit halber geben wir das Argument nur für den Feynmanpropagator an, es gilt in gleicher Weise für die Zweipunktfunktion.

Wie wir wissen, ist

$$(i\not{\partial} + m)S_F \propto \mathbf{1}.$$

Daraus folgt, da die Spur der Gammamatrizen verschwindet:

$$\operatorname{tr}\big((i\not{\partial} + m)S_F\gamma^\omega\big) = 0.$$

Wir haben also einen Operator $A : \mathcal{D}'(\mathcal{M}\times\mathcal{M}, D\mathcal{M}\boxtimes D^*\mathcal{M}) \to \mathcal{D}'(\mathcal{M}\times\mathcal{M})$ angegeben, so daß $AS_F \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}\times\mathcal{M})$. Damit ein Punkt $(x, y; \xi, \eta; w)$ in der Polarisationsmenge von S_F liegt, muß nach Definition $a(x, y; \xi, \eta)w = 0$ sein, wenn a das Hauptsymbol von A ist, also:

$$\operatorname{tr}(-\not{\xi} w\gamma^\omega) = 0.$$

Setzen wir wieder $w = \alpha\mathbf{1} + \beta_\nu\gamma^\nu$, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}\left(-\not{\xi} w\gamma^\omega\right) &= -\xi_\mu \operatorname{tr}\left(\gamma^\mu(\alpha\mathbf{1} + \beta_\nu\gamma^\nu)\gamma^\omega\right)\\
&= -4\xi_\mu\alpha\eta^{\mu\omega}\\
&= -4\alpha\xi^\omega\\
&\stackrel{!}{=} 0,
\end{aligned}$$

also folgt, da $\xi \neq 0$: $\alpha = 0$.

Analog gilt, da die Spur der Matrizen $\sigma^{\rho\sigma} = \frac{i}{2}[\gamma^\rho, \gamma^\sigma]$ ebenfalls verschwindet:

$$\operatorname{tr}\big((i\not{\partial} + m)S_F\sigma^{\rho\sigma}\big) = 0,$$

und somit muß gelten:

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}\left(-\not{\xi} w\sigma^{\rho\sigma}\right) &= -\xi_\mu \operatorname{tr}\big(\gamma^\mu(\alpha\mathbf{1} + \beta_\nu\gamma^\nu)\sigma^{\rho\sigma}\big)\\
&= -\frac{i}{2}\xi_\mu\beta_\nu \operatorname{tr}\big(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma - \gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\sigma\gamma^\rho\big)\\
&= -2i\xi_\mu\beta_\nu\left(2\eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\rho} - 2\eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma}\right)\\
&= 4i(\xi^\rho\beta^\sigma - \xi^\sigma\beta^\rho)\\
&\stackrel{!}{=} 0,
\end{aligned}$$

also $\xi^\rho\beta^\sigma = \xi^\sigma\beta^\rho$, und es folgt wie oben: $\beta = \lambda\cdot\xi$.

Im Gegensatz zum ersten Beweis läßt sich diese Argumentation direkt auf eine beliebige Raumzeit verallgemeinern. Daß wir den Dirac-Operator nur mit der partiellen Ableitung geschrieben haben, ist unerheblich, weil eventuelle Terme eines nichttrivialen Zusammenhanges im Hauptsymbol des Operators nicht mehr in Erscheinung treten.

Außerhalb der Diagonale ist dann aber eine sorgfältigere Notation erforderlich, da die Spinorräume über unterschiedlichen Punkten nicht mehr einfach miteinander identifiziert werden können.

In den Beweis ging sehr wesentlich die Annahme ein, daß die Zweipunktfunktion bis auf glatte Anteile nur Werte in dem von den Matrizen $\mathbf{1}, \gamma^0, \ldots, \gamma^3$ aufgespannten Unterbündel annimmt. Im hier betrachteten Minkowskiraum konnten wir diese Annahme beweisen, aber es ist zu vermuten, daß sie auch in einer gekrümmten Raumzeit aus den Eigenschaften einer Hadamard-Zweipunktfunktion folgt.

Auch ohne diese Annahme schränkt die Forderung, daß die Distribution in beiden Einträgen die Dirac-Gleichung löst, die möglichen Polarisationsvektoren w über einem Punkt $(x, y; \xi, \eta) \in WF(\omega^+)$ bereits stark ein: Damit der Punkt in der Wellenfrontmenge liegt, muß $\eta = -\xi$ sein. Also muß w die Gleichungen $w \cdot \not{\xi} = 0 = \not{\xi} \cdot w$ erfüllen. Die Matrix $\not{\xi}$ hat, wenn $\xi^2 = 0$, den Rang zwei, und es ist zu erwarten, daß die Gleichungen einen gemeinsamen Lösungsraum der Dimension vier haben. Tatsächlich kann w noch eine Linearkombination der vier Matrizen $\not{\xi}$, $\not{\xi} \cdot \gamma^5$ und $\not{\xi} \cdot \not{a}$ für die beiden unabhängigen Vektoren a mit $a \cdot \xi = 0$, $a \neq \xi$, sein. Die letzten drei Möglichkeiten werden erst durch die physikalischen Eigenschaften der Distribution ausgeschlossen, da es sich um die Zweipunktfunktion eines Hadamardzustandes handelt.

Wir wollen nun das Resultat auf beliebige global hyperbolische Raumzeiten verallgemeinern, indem wir Denckers Satz über die Ausbreitung von Singularitäten vektorwertiger Distributionen ausnutzen. Dafür untersuchen wir zunächst den zur Dirac-Gleichung gehörigen Dencker-Zusammenhang:

Satz 4.7. *Der Dencker-Zusammenhang D_P für den Operator $P = (-i\not{\nabla} + m)$ auf dem Diracbündel über einer beliebigen Raumzeit $\mathcal{M}$ mit vorgegebener Spinstruktur wirkt auf Spinorfelder entlang der Nullgeodäten und stimmt dort mit dem über das Kotangentialbündel gehobenen Spinzusammenhang überein. Analoges gilt für den adjungierten Operator im dualen Bündel.*

Beweis. Ein erster, recht aufwendiger Beweis für eine modifizierte Diracgleichung für Spinor-Halbdichten wurde bereits von Radzikowski angegeben [Rad97]. Wir geben hier einen neuen Beweis, der ohne eine Modifikation der Dirac-Gleichung auskommt und die Bemerkung nach Satz 2.16 beherzigt.

Wir wählen ein Koordinatensystem und Koordinatenbasen im Tangential- und Kotangentialbündel. Der Pseudodifferentialoperator

$$-i\not{\nabla} + m = -i\gamma^\mu(\partial_\mu + \sigma_\mu) + m\mathbf{1}$$

hat dann das Hauptsymbol

$$p(x,\xi) = \xi_\mu \gamma^\mu(x)$$

und das Unterhauptsymbol

$$p^s(x,\xi) = -i\gamma^\mu(x)\sigma_\mu(x) + m\mathbf{1} - \frac{1}{2i}\partial_\mu\gamma^\mu(x).$$

Der Operator ist vom reellen Haupttyp. Wir wählen dafür

$$\tilde{p}(x,\xi) = \sqrt{-g(x)}\xi_\mu\gamma^\mu(x)$$

und erhalten

$$\tilde{p}p = \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\xi_\mu\xi_\nu \cdot \mathbf{1},$$

so daß $q(x,\xi) = \sqrt{-g(x)}g^{\mu\nu}(x)\xi_\mu\xi_\nu$. Die Bicharakteristiken von q sind also nach Satz 2.6 gerade die Nullgeodäten. Der Dencker-Zusammenhang wirkt auf Spinorfelder w entlang dieser Bicharakteristiken, die in jedem Punkt (x,ξ) im Kern von $p(x,\xi)$ liegen, also die Bedingung $\not{\nabla} w(x,\xi) = 0$ erfüllen.

Wir berechnen die im Dencker-Zusammenhang auftretenden Ausdrücke:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\{\tilde{p},p\} &= \frac{1}{2}\left(\partial_{\xi_\mu}\tilde{p}\partial_{x^\mu}p - \partial_{x^\mu}\tilde{p}\partial_{\xi_\mu}p\right)\\
&= \frac{1}{2}\sqrt{-g}\left(\gamma^\mu\xi_\nu(\partial_\mu\gamma^\nu) - \xi_\nu(\partial_\mu\gamma^\nu)\gamma^\mu - \frac{1}{2g}(\partial_\mu g)\xi_\nu\gamma^\nu\gamma^\mu\right),\\
i\tilde{p}p^s &= \sqrt{-g}\left(\xi_\nu\gamma^\nu\gamma^\mu\sigma_\mu + im\xi_\mu\gamma^\mu - \frac{1}{2}\xi_\nu\gamma^\nu(\partial_\mu\gamma^\mu)\right),\\
H_q w &= \frac{\partial q}{\partial\xi_\mu}\partial_{x^\mu}w - \frac{\partial q}{\partial x^\mu}\partial_{\xi_\mu}w\\
&= \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial\tau}\partial_{x^\mu} + \frac{\partial\xi_\mu}{\partial\tau}\partial_{\xi_\mu}\right)w\\
&= \frac{dw}{d\tau},
\end{aligned}$$

wobei wir beachtet haben, daß $w = w(x,\xi) = w(x(\tau),\xi(\tau))$ eine Funktion der Kotangentialbündelvariablen x und ξ ist, die wiederum vom Parameter τ der Bicharakteristik abhängen. Außerdem haben wir die Hamilton-Gleichungen

$$\frac{d\xi_\mu}{d\tau} = -\frac{\partial q}{\partial x^\mu}, \quad \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{\partial q}{\partial\xi_\mu}$$

eingesetzt.

Wir fügen jetzt alles zusammen und ordnen die Terme:

$$\begin{aligned}
D_P w &= H_q w + \frac{1}{2}\{\tilde{p}, p\} + i\tilde{p}p^s \\
&= \frac{dw}{d\tau} + \sqrt{-g}\xi_\nu \left(\frac{1}{2}\gamma^\mu(\partial_\mu\gamma^\nu) - \frac{1}{2}(\partial_\mu\gamma^\nu)\gamma^\mu - \frac{1}{4g}(\partial_\mu g)\gamma^\nu\gamma^\mu\right) w \\
&\quad + \sqrt{-g}\xi_\nu \left(\gamma^\nu\gamma^\mu\sigma_\mu + im\gamma^\nu - \frac{1}{2}\gamma^\nu(\partial_\mu\gamma^\mu)\right) w \\
&= \frac{dw}{d\tau} - \frac{1}{2}\sqrt{-g}\xi_\nu\big((\partial_\mu\gamma^\mu)\gamma^\nu + \gamma^\mu(\partial_\mu\gamma^\nu) + (\partial_\mu\gamma^\nu)\gamma^\mu + \gamma^\nu(\partial_\mu\gamma^\mu)\big) w \\
&\quad - \sqrt{-g}\xi_\nu\frac{1}{4g}(\partial_\mu g)\big(\gamma^\nu\gamma^\mu + \gamma^\mu\gamma^\nu\big) w \\
&\quad + \sqrt{-g}\xi_\nu\big(\gamma^\nu\gamma^\mu\sigma_\mu + \gamma^\mu(\partial_\mu\gamma^\nu) + \gamma^\mu\sigma_\mu\gamma^\nu\big) w \\
&\quad + \sqrt{-g}\left(\frac{1}{2}(\partial_\mu\gamma^\mu) + im\mathbf{1} - \gamma^\mu\sigma_\mu + \frac{1}{4g}(\partial_\mu g)\gamma^\mu\right)\xi_\nu\gamma^\nu w.
\end{aligned}$$

In der ersten Zeile erkennen wir die Ableitung des Antikommutators:

$$\partial_\mu(\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu) = 2\partial_\mu g^{\mu\nu}\mathbf{1}.$$

In der zweiten Zeile ersetzen wir den Antikommutator, und auch in der dritten Zeile vertauschen wir zwei Gamma-Matrizen. Die vierte Zeile schließlich fällt weg, da $\xi_\nu\gamma^\nu = p(x,\xi)$, und $w(x,\xi) \in \mathrm{Ker}\, p(x,\xi)$.

Wir erhalten:

$$\begin{aligned}
D_P w &= \frac{dw}{d\tau} - \sqrt{-g}\xi_\nu\left(\partial_\mu g^{\mu\nu}\mathbf{1} + \frac{1}{2g}(\partial_\mu g)g^{\mu\nu}\mathbf{1}\right) w \\
&\quad + \sqrt{-g}\xi_\nu\big(2g^{\mu\nu}\sigma_\mu - \gamma^\mu\gamma^\nu\sigma_\mu + \gamma^\mu(\partial_\mu\gamma^\nu) + \gamma^\mu\sigma_\mu\gamma^\nu\big) w \\
&= \left(\frac{d}{d\tau} + 2\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\xi_\nu\sigma_\mu\right) w \\
&\quad + \sqrt{-g}\xi_\nu\left(-\partial_\mu g^{\mu\nu} - \frac{1}{2g}(\partial_\mu g)g^{\mu\nu} - \gamma^\mu\Gamma^\nu{}_{\mu\rho}\gamma^\rho\right) w \\
&\quad + \sqrt{-g}\xi_\nu\gamma^\mu\big((\partial_\mu\gamma^\nu) + \Gamma^\nu{}_{\mu\rho}\gamma^\rho + \sigma_\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\sigma_\mu\big) w.
\end{aligned}$$

In der dritten Zeile erkennen wir die kovariante Ableitung $\nabla_\mu\gamma^\nu = 0$.

In der zweiten Zeile können wir wegen der Symmetrie der Christoffelsymbole die Gamma-Matrizen vertauschen. Beachten wir weiterhin die Beziehung $g^{-1}\partial_\mu g = g^{\rho\lambda}\partial_\mu g_{\rho\lambda}$, so erhalten wir

$$-\partial_\mu g^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g^{\rho\lambda}\partial_\mu g_{\rho\lambda} - g^{\mu\rho}\Gamma^\nu{}_{\mu\rho}.$$

Dieser Ausdruck verschwindet jedoch, wie sich leicht zeigen läßt, wenn man die Christoffelsymbole durch Ableitungen der Metrik ersetzt.

Wir verbleiben also mit dem Ausdruck in der ersten Zeile. Hier ist

$$2\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\xi_\nu = \frac{\partial q}{\partial \xi_\mu} = \frac{dx^\mu}{d\tau},$$

und es bleibt

$$D_P w = \left(\frac{d}{d\tau} + \dot{x}^\mu \sigma_\mu\right) w = \nabla_\tau w,$$

also einfach die kovariante Ableitung von w entlang der Geodäte.

Wir haben somit gezeigt, daß $D_P = \nabla_\tau$ entlang einer Bicharakteristik, das heißt entlang einer Nullgeodäte γ. Ein Spinorfeld $w(x,\xi)$ entlang γ ist also genau dann eine Lösung der Gleichung $D_P w = 0$, wenn es entlang der Geodäte bezüglich des normalen Spinzusammenhanges paralleltransportiert wird.

Der Beweis für den adjungierten Dirac-Operator geht analog.

Zum Beweis des Theorems 4.5 geht man nun wie im skalaren Fall vor. Man deformiert die Raumzeit so, daß sie in einem Teil die Minkowski-Metrik trägt. Die Spinstruktur überträgt sich auf die deformierte Raumzeit und läßt sich auf die gesamte Raumzeit ausdehnen, da im global hyperbolischen Fall alle Spinstrukturen triviale Faserbündel sind.

Da die Metrik in der Umgebung einer Cauchyfläche erhalten bleibt, induziert die Zweipunktfunktion des Hadamard-Zustandes in der ursprünglichen Raumzeit auch in der deformierten Raumzeit eine Hadamard-Distribution.

Die Polarisationsmenge im flachen Teil der Raumzeit haben wir bereits oben bestimmt. Auf der Diagonale gilt

$$(\hat{x},\hat{x};\hat{\xi},\hat{\eta};w) \in WF_{pol}(\omega^+|_{\hat{U}\times\hat{U}}) \;\Leftrightarrow\; -\hat{\eta} = \hat{\xi} \in \overline{V}^+_x, \hat{\xi}^2 = 0; w = \lambda \cdot \not{\xi}, \lambda \in \mathbb{C}.$$

Um jetzt die Polarisationsmenge w über einem Punkt $(x,x) \in \tilde{U}\times\tilde{U}$ im gekrümmten Teil der Raumzeit zu bestimmen, beachten wir, daß die Zweipunktfunktion Lösung der Gleichung

$$P\omega^+ := \big((i\not{\nabla} + m)\otimes \mathbf{1} + \mathbf{1}\otimes(-i\not{\nabla} + m)\big)\omega^+ = 0$$

ist. Die Bicharakteristiken für diesen Operator sind die Kurven $(x,x;\xi,-\xi)(\tau)$, so daß $x(\tau)$ eine Geodäte beschreibt und $\xi(\tau)$ in jedem Punkt kotangential an die Geodäte ist. Der Dencker-Zusammenhang für P ist $D_P = \pi^*(\nabla_\tau \otimes \nabla_\tau)$ entlang dieser Kurven.

Nach dem Satz von Dencker setzt sich die Polarisationsmenge aus Hamilton-Orbits des Operators P zusammen. Dies sind bezüglich des Zusammenhanges D_P parallele Vektorfelder w im Bündel $\pi^*(D\mathcal{M}\boxtimes D^*\mathcal{M})|_\gamma$ entlang der Bicharakteristiken γ. Die Parallelität bedeutet in diesem Fall, daß die kovariante Ableitung von w in Richtung der Geodäte verschwindet. Dies ist aber gleichbedeutend damit, daß die Form $w = \lambda\cdot\not{\xi}$ der Polarisationsvektoren, die wir im Minkowskiraum

hergeleitet haben, beim Paralleltransport erhalten bleibt, denn es ist $\nabla \cdot \not{\xi} = 0$ entlang von Nullgeodäten: ξ ist kovariant konstant, weil der Tangentialvektor einer Geodäte entlang der Kurve paralleltransportiert wird, und auch die kovariante Ableitung der Dirac-Matrizen verschwindet.

Somit besteht die Polarisationsmenge über der Diagonale auch im gekrümmten Teil der Raumzeit genau aus den Punkten $(x, x; \xi, -\xi; \lambda \cdot \not{\xi})$, so daß ξ lichtartig ist und im Vorwärtslichtkegel liegt, mit beliebigem $\lambda \in \mathbb{C}$.

Nach Satz 2.15 bleibt diese Form der Polarisationsmenge erhalten, wenn man die Zweipunktdistribution mittels der Isometrie ρ in die nicht deformierte Raumzeit zurückzieht.

Schließlich erhält man die Polarisationsvektoren für nicht zusammenfallende Punkte in der ursprünglichen Raumzeit, indem man den zweiten Spinorindex zum zweiten Punkt transportiert: Für den Operator $P = \mathbf{1} \otimes (-i \not{\nabla} + m)$ ist der Denckerzusammenhang $D_P = \mathbf{1} \otimes \nabla$. Ein Punkt $(x, y; \xi, -\eta; w)$ ist also wiederum nach dem Satz von Dencker genau dann in der Polarisationsmenge von ω^+ enthalten, wenn der Paralleltransport entlang der Nullgeodäte, die x und y verbindet, so daß ξ und η kotangential an die Geodäte sind, einen Polarisationsvektor $\lambda \cdot \not{\xi}$ über dem Punkt $(x, x, \xi, -\xi)$ in w überführt.

Dies ist genau die Aussage von Theorem 4.5 für die Zweipunktfunktion.

Im Falle des Feynmanpropagators ist etwas mehr Vorsicht geboten, da S_F für zusammenfallende Punkte keine Lösung der Diracgleichung mehr ist.

Ist $x \in \mathcal{M}$ ein beliebiger Punkt und U eine Umgebung von x, die bei der Deformation unverändert bleibt, dann erhält man die Polarisationsmenge über der Menge $\{x\} \times (U \setminus \{x\})$ auf die gleiche Weise wie vorher, indem man erst den späteren Punkt in die gekrümmte Raumzeit transportiert und danach den früheren Punkt, ohne dabei die Diagonale zu berühren. Anschließend gewinnt man wieder durch Paralleltransport die Polarisationsmenge über allen Paaren von Punkten außerhalb der Diagonale, von denen einer in der Umgebung U liegt.

Was bleibt, ist zu zeigen, daß die Polarisationsmenge des Feynmanpropagators auch für zusammenfallende Punkte die angegebene Form hat. Aus den Hadamard-Rekursionsrelationen geht hervor, daß die Hilfs-Zweipunktfunktion im Limes zusammenfallender Punkte proportional zur Einheitsmatrix ist. Ebenso ist die stärkste Singularität der Hilfs-Zweipunktfunktion, der Term $\frac{\tilde{u}}{\sigma}$, in einer ganzen Umgebung proportional zur Einheitsmatrix bzw. zum Bispinor des Paralleltransportes, genauso wie im Minkowskiraum. Daher ist zu erwarten, daß auch in gekrümmter Raumzeit keine weiteren Polarisationsvektoren auftreten. Ein formaler Beweis für diesen letzten Schritt steht aber noch aus.

Es konnte also gezeigt werden, daß die Wellenfrontmenge der Zweipunktfunktion eines Hadamard-Zustandes des freien Diracfeldes in einer global hyperbolischen Raumzeit die gleiche Form hat wie für das Klein-Gordon-Feld, und daß die Polarisationsmenge ein eindeutig festgelegtes Geradenbündel über der Wellenfrontmenge ist.

Dies läßt vermuten, daß es wie im skalaren Fall möglich ist, einen Hadamardzustand durch eine Bedingung an die Polarisationsmenge der Zweipunktdistribution zu definieren. Vorher müßte aber noch untersucht werden, ob jeder quasifreie Zustand, dessen Zweipunktfunktion die angegebene Form hat, tatsächlich ein Hadamard-Zustand ist, oder ob weitere Bedingungen gestellt werden müssen. Insbesondere wäre die Rolle der schwächer singulären Richtungen zu analysieren, die von der Polarisationsmenge gar nicht erfaßt werden.

Wenn es gelänge zu zeigen, daß die Zweipunktfunktion auch in gekrümmter Raumzeit in einer Umgebung der Diagonale nur Werte in dem von der Einheitsmatrix und den Diracmatrizen aufgespannten Unterbündel von $D\mathcal{M}\boxtimes D^*\mathcal{M}$ annimmt, könnte man einerseits den Beweis für den Feynman-Propagator abschließen, aber auch einen direkten Beweis ähnlich unserem Vorgehen im Minkowskiraum angeben, der ohne eine Deformation der Raumzeit auskäme.

Vermutlich läßt sich diese Annahme aus den Eigenschaften einer Hadamard-Zweipunktfunktion herleiten. Interessant wäre zu wissen, ob sie bereits aus der Tatsache folgt, daß es sich um einen Zustand handelt, insbesondere aus der Positivität, oder ob auch hier die Hadamard-Bedingung eingeht.

Kapitel 5

Anwendung auf Feynman-Graphen

In diesem Kapitel soll aufgezeigt werden, welchen Nutzen die Kenntnis der Singularitätsstruktur des Feynmanpropagators haben kann: In der störungstheoretischen Behandlung wechselwirkender Quantenfeldtheorien treten formale Produkte von Distributionen auf, die mit den Methoden der mikrolokalen Analysis untersucht werden können.

Zuerst geben wir einen kurzen Überblick über die kausale Störungstheorie, für Details sei auf [BS76, Sch95] verwiesen. Dann soll mit Hilfe der Wellenfrontmenge gezeigt werden, daß die Produkte von Feynmanpropagatoren, die zu Baumgraphen gehören, stets wohldefinierte Distributionen ergeben. Anschließend soll anhand von Beispielen gezeigt werden, welche Bedeutung die Polarisationsmenge für die Konvergenz von Loop-Graphen haben kann.

5.1 Kausale Störungstheorie

In der kausalen Störungstheorie, die auf eine Arbeit von Epstein und Glaser zurückgeht [EG73], konstruiert man die S-Matrix einer wechselwirkenden Quantenfeldtheorie im Minkowskiraum als formale Potenzreihe:

$$S(g) = \mathbf{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int T_n(x_1, \ldots, x_n) g(x_1) \ldots g(x_n) d^4x_1 \ldots d^4x_n.$$

Hierbei ist $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^4)$ eine Testfunktion, die die Wechselwirkung ein- und ausschaltet. Sie spielt die Rolle der Kopplungs-„Konstanten“. Die T_n sind die zeitgeordneten Funktionen. Dies sind operatorwertige Distributionen, die Ordnung für Ordnung aus den Feldoperatoren der freien Theorie konstruiert werden.

In erster Ordnung ist T_1 einfach die Lagrangedichte der Wechselwirkung. Die höheren Ordnungen ergeben sich rekursiv: Für nicht zusammenfallende Punkte ist T_n wohldefiniert als n-faches zeitgeordnetes Produkt der Wechselwirkungs-

Lagrangedichte in den verschiedenen Punkten. Die Forderung, daß die T_n bestimmte physikalische Eigenschaften haben, die man von zeitgeordneten Funktionen erwartet, legt die Distributionen bis auf die totale Diagonale fest. Insbesondere geht hierbei die Kausalität ein.

Um die Distributionen T_n auch auf der totalen Diagonale zu definieren, zeigt man zunächst, daß man sie schreiben kann als das Produkt einer numerischen Distribution und eines Normalproduktes von freien Feldoperatoren. Die numerische Distribution setzt man dann auf die Diagonale fort, wobei man fordert, daß sich der Skalengrad der Distribution dadurch nicht vergrößert. Es zeigt sich, daß diese Fortsetzung stets möglich ist, und zwar ist sie bei hinreichend kleinem Skalengrad eindeutig, bei größerem Skalengrad treten Renormierungsfreiheiten auf.

Daß ein analoges Vorgehen auch in einer gekrümmten Raumzeit möglich ist, wurde in [BF97] gezeigt.

Im konventionellen Zugang zur Störungstheorie entwickelt man die zeitgeordneten Produkte der Wechselwirkungs-Lagrangedichten nach dem Wickschen Theorem formal in Normalprodukte von Feldoperatoren, wobei als Koeffizienten Produkte von Feynmanpropagatoren auftreten. Die Terme dieser Entwicklung lassen sich durch die sogenannten Feynman-Diagramme veranschaulichen. Die formalen Produkte von Feynmanpropagatoren sind aber im allgemeinen für zusammenfallende Punkte nicht definiert. Um auf diesem Wege trotzdem endliche Resultate zu erhalten, ist man gezwungen, die Propagatoren und Kopplungskonstanten zu renormieren.

Als Beispiel wollen wir die Entwicklung von T_2 in der Quantenelektrodynamik angeben [Sch95]:

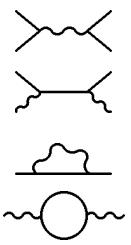
Die Wechselwirkungs-Lagrangedichte lautet

$$\mathcal{L}(x) =: \overline{\psi}(x)\gamma_\mu A^\mu(x)\psi(x) :,$$

wobei A^μ das freie Photonenfeld und $\overline{\psi}$, ψ die freien Dirac-Felder sind.

Die Entwicklung von T_2 nach Normalprodukten und die zugehörigen Feynmangraphen sehen folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned} T_2(x,y) = {} & i :\overline{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)\overline{\psi}(y)\gamma_\mu\psi(y): D_F(x-y) \\ & + i :\overline{\psi}(x)\gamma^\mu S_F(x-y)\gamma^\nu\psi(y) :: A_\mu(x)A_\nu(y) : \\ & - :\overline{\psi}(x)\gamma^\mu S_F(x-y)D_F(y-x)\psi(y) : \\ & - : A_\mu(x)A_\nu(y) : \operatorname{tr}\left(\gamma^\mu S_F(x-y)\gamma^\nu S_F(y-x)\right) \\ & + \dots \end{aligned}$$



Zu unterscheiden sind zum einen die Baumgraphen, im Beispiel die ersten beiden Terme, die stets zu wohldefinierten operatorwertigen Distributionen führen, und zum anderen die sogenannten Loop-Graphen, im Beispiel die letzten beiden. Sie enthalten geschlossene Linien und können unter Umständen divergent sein.

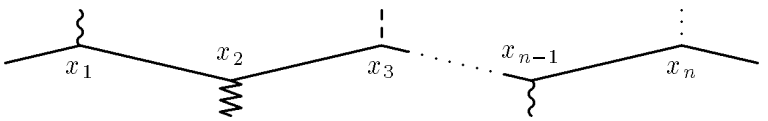
Wir interessieren uns im folgenden vor allem für Graphen mit geschlossenen Fermionenlinien wie den Vakuumpolarisationsgraphen, der dem vierten Term in der Entwicklung von T_2 entspricht. Versucht man, diesen formalen Ausdruck im Impulsraum zu berechnen, stellt man bereits durch Abzählen der Potenzen fest, daß das Produkt der beiden Feynmanpropagatoren nicht definiert ist: Der Integrand im Faltungsintegral der Fouriertransformierten der Propagatoren fällt wie $\frac{1}{\xi^2}$ ab. Damit das Integral existiert, müßte er aber schneller als $\frac{1}{\xi^4}$ abfallen. Dieser Graph ist also divergent und muß ebenso renormiert werden wie der dritte, der sogenannte Selbstenergie-Graph.

Ein solches Potenzenzählen liefert auch in der kausalen Konstruktion der S-Matrix wertvolle Hinweise darauf, an welchen Stellen renormiert werden muß, also die nichttriviale Fortsetzung der zeitgeordneten Distributionen nötig wird. Es wurde jedoch bereits in [ASW97] darauf hingewiesen, daß das bloße Potenzenzählen nicht ausreicht, sondern sorgfältig das Skalenverhalten der auftretenden Distributionen untersucht werden muß. Bei Theorien, die Fermionen oder Vektorfelder enthalten, ist dies um so wichtiger, da auch die Richtungen der beteiligten vektorwertigen Distributionen eine Rolle spielen können.

5.2 Baumgraphen

Wir wollen nun zeigen, daß offene Fermionenlinien als Bestandteile von Feynmandiagrammen nicht zu Divergenzen führen. Auch für allgemeinere Baumgraphen läßt sich eine solche Aussage beweisen. Da in den Beweis nur die Form der Wellenfrontmenge eingeht, können wir ihn gleich für eine gekrümmte Raumzeit formulieren.

Wir wollen also Graphen untersuchen, in denen Vertizes $x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{M}$ mit einer durchgehenden Fermionenlinie verbunden sind:



Zu jedem Abschnitt der Linie korrespondiert ein Propagator $S_F^i(x_i, x_{i+1})$, zu jedem Vertex im Punkt x_i eine Kopplung $V_i(x_i)$. Hierfür lassen wir beliebige glatte Schnitte in $D\mathcal{M} \otimes D^*\mathcal{M}$ zu, eventuell mit weiteren Vektorindizes, was hier keine Rolle spielt.

Wir untersuchen also das Produkt

$$S_F^1(x_1, x_2)^A{}_B \cdot V_2(x_2)^B{}_C \cdot S_F^2(x_2, x_3)^C{}_D \cdot V_3(x_3)^D{}_E \cdot \ldots \cdot S_F^{n-1}(x_{n-1}, x_n)^Y{}_Z$$

und zeigen, daß dieses komponentenweise, also noch vor der Kontraktion der Spinorindizes, als Produkt von Distributionen existiert. Wir fassen dafür die einzelnen Komponenten aller Faktoren als Distributionen in allen n Punkten, also als Elemente in $\mathcal{D}'(\mathcal{M}^n)$ auf.

Als solche besitzen sie die Wellenfrontmenge

$$WF(S_F^i) = \big\{(x_1,\ldots,x_n;\xi_1,\ldots,\xi_n) \in T^*\mathcal{M}^n \setminus \mathbf{0} \,| \\ (x_i,x_{i+1};\xi_i,\xi_{i+1}) \in WF(S_F),\, \xi_j = 0 \text{ für } j \notin \{i,i+1\}\big\}. \quad (5.1)$$

Wir gehen induktiv vor und zeigen, daß in jedem Schritt das Produkt

$$\Pi_i(x_1,\ldots,x_{i+1})^A{}_N := S_F^1(x_1,x_2)^A{}_B \cdot V_2(x_2)^B{}_C \cdot \ldots \cdot S_F^i(x_i,x_{i+1})^M{}_N$$

existiert und für seine Wellenfrontmenge folgendes gilt:

$$\begin{aligned} WF(\Pi_i) \subset & \\ & \big\{(x_1,\ldots,x_{i+1};\xi_1,\ldots,\xi_{i+1}) \,|\, \xi_j \neq 0 \text{ für ein } j \in \{2,3,\ldots,i\}\big\} && (5.2a)\\ & \cup\big\{(x_1,\ldots,x_{i+1};\xi,0,\ldots,0,-\xi) \,|\, \xi \in \overline{V}^+_{x_1}, x_j \in J^+(x_{j+1})\ \forall j\big\} && (5.2b)\\ & \cup\big\{(x_1,\ldots,x_{i+1};\xi,0,\ldots,0,-\xi) \,|\, \xi \in \overline{V}^-_{x_1}, x_j \in J^-(x_{j+1})\ \forall j\big\}. && (5.2c) \end{aligned}$$

Für das Produkt nur eines Propagators, $\Pi_1 \equiv S_F^1$, ist dies nach Gleichung (5.1) offenbar erfüllt.

Das Produkt mit den glatten Funktionen $V_i^B{}_C$ ist nach Satz 2.7 stets definiert und vergrößert die Wellenfrontmenge nicht.

Fügen wir jetzt einem Produkt $\Pi_i(x_1,\ldots,x_{i+1})V_{i+1}(x_{i+1})$ einen weiteren Propagator $S_F^{i+1}(x_{i+1},x_{i+2})$ hinzu, so sieht man an den Wellenfrontmengen der Faktoren, daß das Produkt definiert ist: $\Pi_i V_{i+1}$ hängt nicht von x_{i+2} ab, daher enthält $WF(\Pi_i V_{i+1})$ keine Punkte mit $\xi_{i+2} \neq 0$. Andererseits enthält $WF(S_F^{i+1})$ keine Punkte mit $\xi_{i+2} = 0$. Also sind in $WF(\Pi_i V_{i+1}) \oplus WF(S_F^{i+1})$ keine Punkte der Form $(x,0)$ enthalten, und das Produkt existiert nach Satz 2.12.

Derselbe Satz macht folgende Einschränkung an die Wellenfrontmenge des Produktes:

$$WF(\Pi_{i+1}) \subseteq \big(WF(\Pi_i) \oplus WF(S_F^{i+1})\big) \cup WF(\Pi_i) \cup WF(S_F^{i+1}).$$

Die letzten beiden Anteile haben wieder die Form (5.2a). Die Punkte in der Menge $WF(\Pi_i) \oplus WF(S_F^{i+1})$ haben ebenfalls diese Form, außer für Punkte der Gestalt $(x_1,\ldots,x_{n+2};0,\ldots,0,-\xi_{i+1},\xi_{i+2}) \in WF(S_F^{i+1})$, addiert zu den Punkten $(x_1,\ldots,x_{n+2};\xi_1,\ldots,\xi_{i+1},0) \in WF(\Pi_i)$, die von der Form (5.2b) oder (5.2c) sind. Für solche Punkte in der Wellenfrontmenge des Feynmanpropagators muß die Bedingung $-\xi_{i+1} \in \overline{V}^\pm_{x_{n+1}}$ erfüllt sein, wenn $x_{n+1} \in J^+(x_{n+2})$. Daher ist diese Summe wieder von der Form (5.2b) bzw. (5.2c) für das Produkt Π_{i+1}, wenn dies auch für den ursprünglichen Punkt in $WF(\Pi_i)$ der Fall war.

Damit ist die Aussage für alle diese Produkte gezeigt.

Es wäre interessant, auch die Polarisationsmenge des Produktes Π_{n-1} zu kennen. Im Gegensatz zur Wellenfrontmenge ist jedoch kein Satz bekannt, der uns die Polarisationsmenge eines Produktes bestimmen ließe. Eine solch einfache Formel wie im skalaren Fall läßt sich auch nicht herleiten, da die Einschränkung einer

Distribution auf eine Untermannigfaltigkeit die Polarisationsmenge auf unvorhersehbare Weise verändern kann.

Was wir aber wissen, ist, daß auch das Produkt der Feynmanpropagatoren Lösung der Dirac-Gleichung im ersten Eintrag sowie des adjungierten Dirac-Operators im letzten Eintrag ist. Daher können wir mit den gleichen Argumenten wie für den Feynman-Propagator selbst Einschränkungen an die Polarisationsvektoren über den Punkten der totalen Diagonale machen:

$$WF_{pol}(\Pi_{i-1})(x,\ldots,x;\xi,0,\ldots,0,-\xi) \subset \not{\xi} \cdot span(\mathbf{1},\gamma^5,\not{a}_1,\not{a}_2),$$

wobei a_1, a_2 wieder die beiden linear unabhängigen Vektoren aus $T^*_x\mathcal{M}$ sind mit $a \cdot \xi = 0$, $a \neq \xi$.

5.3 Fermionenschleifen

Wir betrachten nun eine geschlossene Fermionenschleife, in der auch die Punkte x_1 und x_n durch eine Fermionenlinie verbunden sind. Das Produkt Π_{n-1} soll also mit einem weiteren Faktor S_F und den Funktionen V_n und V_1 für die beiden Vertizes multipliziert werden:

$$\Pi_{n-1}(x_1,\ldots,x_n) \cdot V_n(x_n) \cdot S_F^n(x_n,x_1) \cdot V_1(x_1). \tag{5.3}$$

Um zu sehen, ob dieses Produkt existiert, betrachten wir wieder die Wellenfrontmengen: Für den Faktor S_F enthält sie solche Punkte $(x_1,\ldots,x_n;\xi_1,\ldots,\xi_n)$, für die $(x_n,\xi_n) \sim (x_1,-\xi_1)$ und $\xi_n \in \overline{V}^{\pm}_{x_n}$, falls $x_n \in J^{\pm}(x_1)$, sowie $\xi_2 = \cdots = \xi_{n-1} = 0$. Die entsprechenden Punkte in der Wellenfrontmenge von Π_{n-1} erfüllen die Bedingung $\xi_1 \in \overline{V}^{\pm}_{x_1}$, falls $x_1 \in J^{\pm}(x_n)$, was gleichbedeutend ist. In der Summe der Wellenfrontmengen gibt es daher keine Punkte der Form $(x,0)$.

Anders sieht es auf der totalen Diagonale aus, denn hier können die Punkte $(x,\ldots,x;\xi,0,\ldots,0,-\xi)$ für beliebige Richtungen von ξ sowohl in der Wellenfrontmenge von Π_{i-1}, wie auch in der von S_F^n liegen. Die Existenz des Produktes (5.3) ist also zunächst nur für alle Punkte außerhalb der totalen Diagonale garantiert.

Wie wir wissen, ist aber die Bedingung an die Wellenfrontmengen der Faktoren keine notwendige Bedingung. Sind die zu multiplizierenden Distributionen hinreichend regulär, so kann ihr Produkt existieren, auch ohne daß die Wellenfrontmengen die Bedingung erfüllen. Im üblichen Formalismus zur Berechnung von Feynman-Diagrammen im Impulsraum sieht man bei der Rechnung, daß die Distributionen Π_i mit wachsendem i immer regulärer werden, und man kann zeigen, daß in vier Raumzeit-Dimensionen alle Graphen, die nur Fermionenschleifen mit fünf oder mehr Propagatoren enthalten, endlich sind.

Auch Satz 2.20 über das Produkt von Distributionen in bestimmten lokalen Sobolev-Räumen ist in diesem Fall nicht von Nutzen, da die Faktoren Π_i und S_F^n

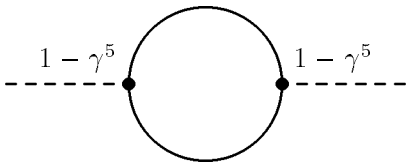
nicht die Voraussetzungen des Satzes erfüllen. Der Grund für die Existenz des Produktes liegt stattdessen in der Tatsache, daß S_F^n nur von den Punkten x_1 und x_n abhängt und daher (im Minkowskiraum) bei der Faltung der Fouriertransformierten die übrigen $4 \cdot (n-2)$ Integrationen über Delta-Distributionen in trivialer Weise ausgeführt werden können.

Der adäquate Weg, um die Existenz des Produktes auch ohne direkte Rechnung und ohne die explizite Form des Feynmanpropagators im Minkowskiraum zu zeigen, geht über den Skalengrad der beteiligten Distributionen: Da das Produkt überall außerhalb der totalen Diagonale existiert, lautet die Frage, ob sich das Produkt eindeutig auf die Diagonale fortsetzen läßt. Ein Satz aus [BF97, Pra97] besagt, daß dies stets möglich ist, wenn der Skalengrad der Distribution kleiner als die Raumzeitdimension ist. Dies ist erfüllt, wenn die Schleife hinreichend viele Propagatoren enthält.

In allen anderen Fällen existiert die Fortsetzung zwar, ist aber nicht eindeutig. Es treten also Renormierungsfreiheiten auf, und die fortgesetzte Distribution kann nicht mehr als Produkt der freien Feynmanpropagatoren interpretiert werden.

Im Falle vektorwertiger Distributionen können solche Produkte aber auch existieren, falls die Richtungen der stärksten Singularitäten geeignet zueinander stehen, obwohl der Graph nach Abzählen der Potenzen divergent sein müßte.

Ein einfaches Beispiel ist der folgende Graph in zwei Dimensionen: eine Schleife von zwei Feynmanpropagatoren mit einer $(1-\gamma^5)$-Kopplung in beiden Vertizes:



Ein solcher Graph ist in zwei Dimensionen normalerweise logarithmisch divergent. Für die angegebene Kopplung können wir aber mit Satz 2.23 zeigen, daß dieser Graph in der Tat konvergent ist, wenn wir uns außerdem in den euklidischen Raum begeben.

Dem Graphen entspricht das Produkt:

$$\operatorname{tr}\big((1-\gamma^5)S_F(x,y)(1-\gamma^5)S_F(y,x)\big), \tag{5.4}$$

das wir als Bilinearform auffassen, das den beiden vektorvertigen Distributionen S_F eine skalare Distribution zuordnen soll.

Die Fouriertransformierte des Feynmanpropagators S_F fällt in allen Richtungen wie $\frac{1}{\xi}$ ab. In zwei Dimensionen liegt der Feynmanpropagator also in H^s für $s < 0$. Die Bedingung, daß die beiden Faktoren in geeigneten Sobolev-Räumen liegen, ist somit erfüllt.

Angewendet auf die Polarisationsvektoren $\lambda_1 \not{\xi}$ von $S_F(x,y)$ über einem Punkt $(x,x;\xi,-\xi)$ der Wellenfrontmenge über der Diagonale sowie einen entsprechen-

den Polarisationsvektor $\lambda_2 \not{\xi}$ von $S_F(y,x)$ ergibt diese Bilinearform:

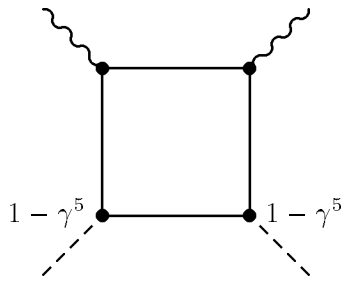
$$\mathrm{tr}\big((1-\gamma^5)\lambda_1 \not{\xi}(1-\gamma^5)\lambda_2 \not{\xi}\big) = \big(\lambda_1 \not{\xi}(1+\gamma^5)(1-\gamma^5)\lambda_2 \not{\xi}\big) = 0.$$

Die Bedingung an die Richtungen der Polarisationsvektoren ist also erfüllt.

Somit existiert das Produkt (5.4), und der angegebene Graph ist tatsächlich konvergent. Bereits im zweidimensionalen Minkowskiraum aber läßt sich die Aussage mit unseren Mitteln nicht mehr beweisen, weil der Feynmanpropagator nicht in dem verlangten Sobolev-Raum liegt. Dies liegt daran, daß in einer indefiniten Metrik der Nenner $\xi^2 - m^2 + i\epsilon$ der Fouriertransformierten des Feynmanpropagators nahe dem gesamten Lichtkegel verschwindet. In höheren Dimensionen ist die Bedingung nicht einmal im euklidischen Raum erfüllt.

Im allgemeinen ist also der eben angewendete Satz 2.23 wenig aussagekräftig, weil die Distributionen, mit denen wir es zu tun haben, nicht in den geeigneten Sobolev-Räumen liegen. Stattdessen wäre es wünschenswert, den Satz so an die vorliegende Situation anzupassen, daß er die eindeutige Fortsetzung eines solchen Produktes auf die totale Diagonale garantiert, falls die Polarisationsvektoren der beiden Faktoren über den kritischen Punkten der Wellenfrontmengen senkrecht zueinander stehen und der Graph logarithmisch divergent erscheint.

Damit ließe sich dann zum Beispiel zeigen, daß Graphen wie der folgende konvergent sind:



Solche Graphen mit aus vier Propagatoren bestehenden Fermionenschleifen sind in vier Dimensionen logarithmisch divergent. Für spezielle Kopplungen könnte aber auf diese Weise ihre Konvergenz gezeigt werden.

Es erscheint sogar denkbar, noch stärkere Aussagen formulieren zu können, falls auch die Richtungen der schwächeren Singularitäten orthogonal zueinander stehen, die in der Polarisationsmenge gar nicht erfaßt werden. So könnte es möglich sein, Theorien zu konstruieren, deren Renormierbarkeit auf diese Weise wesentlich verbessert wird.

Im Minkowskiraum sind die angegebenen Resultate nicht neu, und man kann sie auch mit anderen Herangehensweisen ableiten. Das Besondere an dem gewählten Zugang über die mikrolokale Analysis ist aber, daß die Rechnungen ausschließlich im Ortsraum bleiben und unmittelbar auf die Quantenfeldtheorie in gekrümmter Raumzeit übertragbar sind.

Kapitel 6

Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Diplomarbeit haben wir uns mit physikalischen Anwendungen der mikrolokalen Analysis vektorwertiger Distributionen beschäftigt. Wir konnten für zwei wichtige partielle Differentialgleichungen der mathematischen Physik, die Maxwell- und Dirac-Gleichungen in einem beliebigen klassischen Gravitationshintergrund, zeigen, daß der Dencker-Zusammenhang mit dem gewöhnlichen Zusammenhang in den zugrundeliegenden Vektorbündeln übereinstimmt. Dies hat zur Folge, daß man für Distributionen, die Lösungen einer dieser Gleichungen sind, starke Aussagen über ihre Polarisationsmenge machen kann: Sie setzt sich zusammen aus parallelen Vektor- bzw. Spinorfeldern entlang von Nullgeodäten.

Im ersten Fall, den Maxwell-Gleichungen, eröffnen sich hiermit unmittelbar Anwendungen zum einen für die Ausbreitung von elektromagnetischen Wellen in einem Medium, zum anderen in der Theorie der Gravitationslinsen.

Im Fall der Dirac-Gleichung haben wir uns mit Anwendungen in der Quantenfeldtheorie in gekrümmten Raumzeiten auseinandergesetzt: Für die Zweipunktfunktion eines Hadamard-Zustandes des freien Dirac-Feldes in einer global hyperbolischen Raumzeit konnte gezeigt werden, daß die Wellenfrontmenge die gleiche Form hat wie im Falle des Klein-Gordon-Feldes. Außerdem wurde ihre Polarisationsmenge bestimmt und gezeigt, daß diese in gekrümmter Raumzeit die gleiche Form wie im Minkowskiraum hat.

Für skalare Quantenfeldtheorien kommt die Hadamard-Bedingung einer Einschränkung an die Wellenfrontmenge der Zweipunktfunktion gleich. Ebenso haben wir gesehen, daß die Hadamard-Bedingung eine weitere Einschränkung an die Polarisationsmenge der Zweipunktfunktion macht.

Wenn es gelingt, die Bedeutung der schwächeren Singularitäten einer Distribution, die von der Polarisationsmenge nicht erfaßt werden, genauer zu untersuchen, so sollte man auf diese Weise einen Hadamard-Zustand des freien Dirac-Feldes definieren können, indem man eine mikrolokale Bedingung an die Singularitätsstruktur seiner Zweipunkt-Distribution stellt, in der gleichen Weise, wie dies im Fall eines skalaren Klein-Gordon-Feldes bereits erfolgreich durchgeführt wurde.

Bei der Bestimmung der Polarisationsmenge des Feynmanpropagators und um

so mehr bei der Anwendung auf Produkte von Feynmanpropagatoren in der Analyse von Feynmandiagrammen sind wir auf einige Schwierigkeiten gestoßen, da die Theorie vektorwertiger Distributionen bei weitem nicht so weit entwickelt ist wie für skalare Distributionen. So fehlten uns aussagekräftige Sätze etwa über die Polarisationsmenge von Summen oder Produkten von Distributionen oder Einschränkungen auf Untermannigfaltigkeiten, wie sie im skalaren Fall mit Erfolg eingesetzt werden können.

Ungeachtet dieser Probleme konnte für einzelne Beispiele gezeigt werden, daß die Form der Polarisationsmenge des Feynmanpropagators Auswirkungen auf die Renormierungstheorie hat: Bestimmte Feynmangraphen, die man anhand des naiven Abzählens der Potenzen bei der Berechnung der Graphen im Impulsraum für divergent hält, haben aufgrund der Stellung der Polarisationsvektoren der beteiligten Distributionen in Wirklichkeit einen kleineren Divergenzgrad als erwartet.

Auch hier sollte ein besseres Verständnis der schwächeren Singularitäten sowie der allgemeinen Eigenschaften der Polarisationsmenge zu deutlich stärkeren Resultaten führen können. Ein Schwerpunkt weiterer Arbeiten sollte daher auf einem besseren Verständnis der mathematischen Theorie vektorwertiger Distributionen liegen, insbesondere auch im Hinblick auf die speziellen Probleme der physikalischen Anwendungen, um damit zu aussagestarken physikalischen Resultaten zu gelangen.

Literaturverzeichnis

[Ara70] H. Araki: *On Quasifree States of CAR and Bogoliubov Automorphisms*. Publ. RIMS Kyoto Univ. **6** (1970), 385–442.

[ASW97] A. Aste, G. Scharf, U. Walther: *Power counting degree versus singular order in the Schwinger model*. hep-th/9805022.

[BD82] N. D. Birell und P. C. W. Davies: *Quantum Fields in Curved Space*. Cambridge University Press, 1982.

[BFK95] R. Brunetti, K. Fredenhagen und M. Köhler: *The Microlocal Spectrum Condition and Wick Polynomials of Free Fields on Curved Spacetimes*. DESY 95-196.

[BF97] R. Brunetti und K. Fredenhagen: *Interacting Quantum Fields in Curved Space: Renormalizability of* φ^4. DESY 97-005.

[BS76] N. N. Bogoliubov und D. V. Shirkov: *Introduction to the theory of quantized fields*. John Wiley and Sons, 3rd edition, 1976.

[DB60] B. S. DeWitt und R. W. Brehme: *Radiation Damping in a Gravitational Field*. Ann. Phys. **9** (1960), 220–259.

[Den82] N. Dencker: *On the Propagation of Polarization Sets for Systems of Real Principal Type*. J. Funct. Anal. **46** (1982), 351–372.

[DH72] J. J. Duistermaat und L. Hörmander: *Fourier integral operators II*. Acta Math. **128** (1972), 183–269.

[Dim80] J. Dimock: *Algebras of Local Observables on a Manifold*. Comm. Math. Phys. **77** (1980), 219–228.

[Dim82] J. Dimock: *Dirac Quantum Fields on a Manifold*. Trans. Amer. Math. Soc. **269** (1982), No. 1, 133–147.

[EG73] H. Epstein, V. Glaser: *The role of locality in perturbation theory*. Ann. Inst. Henri Poincaré Sect. A **XIX** (1973), 211–295.

[FNW81] S. A. Fulling, F. J. Narcowich und R. M. Wald: *Singularity structure of the two-point function in quantum field theory in curved spacetime, II*. Ann. Phys. **136** (1981), 243–272.

[Ful89] S. Fulling: *Aspects of Quantum Field Theory in Curved Spacetime*. Cambridge University Press, 1989.

[Ger83] C. Gérard: *Réflexion du front d'onde polarisé des solutions de systèmes d'équations aux dérivées partielles*. C. R. Acad. Sc. Paris **297** (1983), 409–412.

[Haa96] R. Haag: *Local Quantum Physics*. 2nd ed., Springer-Verlag, 1996.

[HK64] R. Haag und D. Kastler: *An Algebraic Approach to Quantum Field Theory*. J. Math. Phys. **5** (1964), 848–861.

[Hör71] L. Hörmander: *Fourier Integral Operators I*. Acta Math. **127** (1971), 79–183.

[Hör90] L. Hörmander: *The analysis of linear partial differential operators I*. 2nd ed., Springer, 1990.

[Hol98] S. Hollands: *Adiabatic Hadamard states for free spinor quantum fields*. Unpubliziertes Manuskript, 1998.

[Jun95] W. Junker: *Adiabatic Vacua and Hadamard States for Scalar Quantum Fields on Curved Spacetime*. DESY 95-144.

[Koe95] M. Köhler: *The Stress Energy Tensor of a Locally Supersymmetric Quantum Field on a Curved Spacetime*. DESY 95-080.

[KW91] B. S. Kay und R. M. Wald: *Theorems on the uniqueness and thermal properties of stationary, nonsingular, quasifree states on spacetimes with a bifurcate killing horizon*. Phys. Rep. **207** (1991), No. 2, 49–136.

[Lic64] A. Lichnerowicz: *Champs spinoriel et propagateurs*. Bull. Soc. Math. France **92** (1964), 11–100.

[NO84] A.-H. Najmi und A. C. Ottewill: *Quantum states and the Hadamard form. II. Energy minimization for spin-$\frac{1}{2}$ fields*. Phys. Rev. D **30** (1984), 2573–2578.

[Nak90] M. Nakahara: *Geometry, Topology and Physics*. IOP Publishing, 1990.

[Nat89] R. Natalini: *Multiplication de distributions avec conditions de compatibilité*. Ann. Fac. Sc. Toulouse **X** (1989), no. 1, 75–91.

[Obe86] M. Oberguggenberger: *Products of distributions*. J. reine angew. Math. **365** (1986), 1–11.

[Obe92] M. Oberguggenberger: *Multiplication of distributions and applications to partial differential equations*. Longman Scientific & Technical, 1992.

[Pra97] D. Prange: *Kausale Störungstheorie und Differentielle Renormierung*. Diplomarbeit, II. Institut für Theoretische Physik, Hamburg, 1997.

[Rad92] M. Radzikowski: *The Hadamard Condition and Kay's Conjecture in (Axiomatic) Quantum Field Theory on Curved Space-Time*. Ph.D. thesis, Princeton University, 1992.

[Rad97] M. Radzikowski: *Propagation of polarization set for Klein gordon, Maxwell and Dirac equations on a curved spacetime*. Unpubliziertes Manuskript, 1997.

[RS75] M. Reed und B. Simon: *Methods of Modern Mathematical Physics II*. Academic Press, 1975.

[Sch95] G. Scharf: *Finite Quantum Electrodynamics. The causal approach*. 2nd. ed., Springer-Verlag, 1995.

[Ste71] O. Steinmann: *Perturbation expansions in axiomatic field theory*. Lecture Notes in Physics, vol. 11, Springer-Verlag, 1971.

[Tay81] M. E. Taylor: *Pseudodifferential Operators*. Princeton University Press, 1981.

[Ver96] R. Verch: *Scaling Analysis and Ultraviolet Behaviour of Quantum Field Theories in Curved Spacetime*. Doktorarbeit, II. Institut für Theoretische Physik, Hamburg, 1996.

[Wal84] R. M. Wald: *General Relativity*. The University of Chicago Press, 1984.

[Wal94] R. M. Wald: *Quantum Field Theory in Curved Spacetime and Black Hole Thermodynamics*. The University of Chicago Press, 1994.

[Wel97] M. Wellmann: *Adiabatische Vakuumzustände des Dirac-Feldes auf einer gekrümmten Raumzeit*. Diplomarbeit, II. Institut für Theoretische Physik, Hamburg, 1997.

Danksagung

Ich möchte mich an dieser Stelle bei Herrn Fredenhagen für die interessante Aufgabenstellung sowie die immer freundliche und verständnisvolle Betreuung meiner Arbeit bedanken. Marek Radzikowski verdanke ich viele hilfreiche und anregende Diskussionen.
Für die Fertigstellung der Arbeit mindestens ebenso wichtig wie die fachliche Betreuung war jedoch die ständige Motivation wie auch die Ablenkung durch meine Freundinnen und Freunde.
Ein ganz besonderer Dank gebührt aber meinen Eltern für ihre jahrelange Unterstützung, ohne die ein Studium ohne materielle Sorgen gar nicht möglich gewesen wäre.

Danke schön!