CP-Verletzung und Asymmetrieentwicklung in einem exakt lösbaren Modell

(CP violation and evolution of an asymmetry in an exactly solvable model)

Stefan Fredenhagen
Fachbereich Physik
Universität Hamburg

Diplomarbeit

August 1999

Abstract

Theories of baryogenesis often make use of the scenario of out-of-equilibrium decay of heavy particles. The computational tool to describe the evolution of an asymmetry is provided by the Boltzmann equation. However, it is not much known about the accuracy of this procedure.
In this work an exactly solvable model of coupled harmonic oscillators is studied. It is shown how a *CP* violation can be incorporated which leads to the generation of an asymmetry.
Furthermore it is discussed how this model can be applied to leptogenesis. The known production rate of the lepton asymmetry is reproduced.

Zusammenfassung

Theorien der Baryogenese machen oft Gebrauch vom Szenario des Nichtgleichgewichtszerfalls schwerer Teilchen. Die Entwicklung einer Asymmetrie wird mithilfe der Boltzmann-Gleichung beschrieben. Es ist jedoch nicht viel über die Güte dieses Verfahrens bekannt.
In dieser Arbeit wird ein exakt lösbares Modell gekoppelter harmonischer Oszillatoren untersucht. Es wird gezeigt, wie in ein solches Modell eine *CP*-Verletzung eingebaut werden kann, die zur Erzeugung einer Asymmetrie führt.
Es wird überdies diskutiert, wie dieses Modell in der Leptogenese angewandt werden kann. Die bekannte Erzeugungsrate für die Leptonenasymmetrie wird reproduziert.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **3**

2 Baryogenese **5**

2.1 Voraussetzungen 5

2.2 Ein einfaches Szenario 6

2.2.1 Spezifikationen 6

2.2.2 Freie Boltzmann-Gleichung 6

2.2.3 Thermisches Ungleichgewicht 7

2.2.4 Entstehung der Asymmetrie 9

2.3 Boltzmann-Gleichung 9

2.3.1 Struktur der Boltzmann-Gleichung 9

2.3.2 *CP*-Verletzung in einem einfachen Modell 12

2.4 Baryogenese durch Leptogenese 15

2.4.1 Sphaleronprozesse 15

2.4.2 Neutrinomassen und Seesaw-Mechanismus 15

2.4.3 Leptogenese durch den Zerfall schwerer Neutrinos 16

3 Das verwendete Modell **20**

3.1 Motivation 20

3.2 Das Modell eines zerfallenden Teilchens 20

3.2.1 Einführung 20

3.2.2 Eigenschaften 23

3.3 Das Modell bei endlicher Temperatur 25

3.3.1 Thermisches Gleichgewicht 25

3.3.2 Nichtgleichgewicht und Boltzmann-Gleichung 26

3.4 *CP*-Asymmetrie 27

3.4.1 Erzeugung einer Asymmetrie 27

3.4.2 Abbau einer Asymmetrie 31

4 Anwendung des Modells **33**
4.1 Idee . . . 33
4.2 Paarzustände . . . 33
4.2.1 Zusammengesetzte Operatoren . . . 33
4.2.2 Struktur der Wechselwirkung . . . 35
4.2.3 Thermische Verteilung . . . 36
4.3 Schwierigkeiten . . . 37
4.3.1 Kommutator und kinetischer Term . . . 37
4.3.2 Asymmetrieabbau . . . 41
4.3.3 Expansion und Abkühlung . . . 41
4.4 *CP*-Verletzung . . . 41
4.4.1 Ausintegration der schweren Generationen . . . 41
4.4.2 Übertragung auf das Oszillatormodell . . . 44
4.4.3 Vergleich der Asymmetrieerzeugungsrate . . . 46

5 Zusammenfassung **49**

A Wichtige Formeln **51**

B Konventionen **53**
B.1 Skalares Feld . . . 53
B.2 Dirac-Feld . . . 54
B.3 Majorana-Feld . . . 55

C Matrixelemente und Spuren **56**
C.1 Matrixelemente . . . 56
C.2 Spuren . . . 57

Kapitel 1

Einleitung

Warum gibt es mehr Materie als Antimaterie? Diese Frage bedarf einiger Erläuterung. Sie impliziert, dass[1] es in unserem Universum überhaupt eine Asymmetrie zwischen Materie und Antimaterie gibt. Woher wissen (oder zumindest glauben) wir das? Zunächst stellt man fest, dass auf der Erde keine Antimaterie vorkommt, abgesehen von einem kleinen durch Sekundärprozesse erklärbaren Teil der kosmischen Strahlung und dem, was Menschen künstlich erzeugen. Den mit Sonden erforschten Bereich des Universums können wir auch als Hort von Antimaterie ausschließen. Die Nichtbeobachtung von Vernichtungsstrahlung lässt darauf schließen, dass eventuell vorkommende Antimaterie räumlich getrennt von gewöhnlicher Materie vorkommen muss. Die Existenz von interstellarer Materie und auch von intergalaktischer Materie in Galaxienhaufen bedeutet damit, dass Materie und Antimaterie auf Größenskalen von $l \sim 20\,\mathrm{Mpc}$ getrennt sein müssen.

Es ist natürlich nicht ausgeschlossen, dass diese Asymmetrie nur lokal ist und dass eine globale Symmetrie besteht. Es ist allerdings schwer zu erklären, wie es vor der Annihilationskatastrophe zwischen Baryonen und Antibaryonen im frühen Universum zu einer solchen starken räumlichen Trennung gekommen sein sollte.

Nehmen wir also an, dass unser Universum eine Baryonenasymmetrie besitzt. Dann stellt sich wieder die Eingangsfrage: Woher kommt sie? Hierzu sind im Laufe der Zeit verschiedene Mechanismen vorgeschlagen worden. In der Theorie der elektroschwachen Baryogenese[2] tritt eine Baryonenzahlverletzung aufgrund der chiralen Anomalie auf. Große vereinheitlichte Theorien (GUTs) vereinigen die starke und elektroschwache Wechselwirkung und sagen Baryonenzahlverletzung schon auf Baumgraphenniveau voraus. Sie sind dadurch auch Kandidaten für eine Theorie der Baryogenese.

Ein wichtiges Konzept beruht auf dem Szenario des Nichtgleichgewichtszerfalls eines schweren Teilchens in Materie und Antimaterie mit verschiedenen Raten. Auch im Modell der Ba-

[1] In dieser Arbeit wird die neue Rechtschreibung [1] verwendet.

[2] Baryogenese=Erzeugung einer Baryonenasymmetrie

ryogenese durch Leptogenese wird auf eine solche Weise zunächst eine Leptonenasymmetrie erzeugt, die dann durch Sphaleronprozesse in eine Baryonenasymmetrie umgewandelt wird.

Im Modell der Leptogenese sind diese Teilchen schwere Majorana-Neutrinos, die dem Standardmodell hinzugefügt werden. Sie zerfallen in Lepton-Higgs- und in Antilepton-Antihiggs-Paare, verletzen also Leptonenzahlerhaltung. Die den Zerfall vermittelnde Yukawa-Kopplungsmatrix kann eine *CP* verletzende Phase enthalten, die dazu führt, dass die Raten für den Zerfall in Leptonen und Antileptonen verschieden sind. Im frühen Universum ist die Temperatur zunächst sehr hoch, sodass alle Teilchen extrem relativistisch und mit dem Strahlungsfeld im Gleichgewicht sind. Durch die Expansion des Universums sinkt die Temperatur. Kommt sie in die Größenordnung der Masse der Majorana-Neutrinos, so entkoppeln diese vom Hintergrund, geraten aus dem Gleichgewicht und zerfallen asymmetrisch in Leptonen und Antileptonen: Eine Leptonenasymmetrie entsteht.

Obwohl dieser Mechanismus qualitativ gut verstanden ist, birgt die quantitative Analyse einige Schwierigkeiten. Dies liegt daran, dass es sich um einen Nichtgleichgewichtsprozess handelt. Der bisherige Zugang verwendet klassische Gaskinetik, die stattfindenden Prozesse werden mithilfe der boltzmannschen Stoßgleichung beschrieben, wobei die Reaktionsraten aus der S-Matrix der Quantenfeldtheorie gewonnen werden. Es ist bislang nicht klar, wie gut diese Beschreibung ist, und es fehlt eine Abschätzung über die auftretenden Fehler.

Im Rahmen meiner Diplomarbeit habe ich einen neuen Zugang zu diesem Problem untersucht. Er beruht auf einem exakt lösbaren quantenmechanischen Modell, das die Relaxation eines angeregten Niveaus in einem Wärmebad beschreibt. Das angeregte Niveau entspricht dem Majorana-Neutrino, das Wärmebad dem Bad der Lepton-Higgs-Paare.

Die Arbeit ist wie folgt gegliedert: In Kapitel 2 werden die Bedingungen, die für die Entstehung einer Teilchen-Antiteilchen-Asymmetrie notwendig sind, erläutert. Das Szenario des Nichtgleichgewichtszerfalls wird anhand eines einfachen Modells vorgestellt. Es folgt eine Vorstellung des bisherigen Zugangs über die Boltzmann-Gleichung. Insbesondere wird besprochen, wie *CP* verletzende Prozesse in die Boltzmann-Gleichung eingehen. Als Anwendung folgt ein Einblick in die Leptogenese.

Im Kapitel 3 wird das untersuchte Modell der gekoppelten Oszillatoren eingeführt. Es wird ein Weg gezeigt, auch in ein solches Modell eine *CP*-Verletzung durch einen Zusatzterm einzubauen und die Entstehung einer Asymmetrie mittels Störungsrechnung zu beschreiben.

Kapitel 4 gibt schließlich einen Überblick, inwieweit eine Übertragung der gewonnenen Ergebnisse auf das quantenfeldtheoretische Modell möglich ist. Es werden auch die hierbei auftretenden Schwierigkeiten vorgestellt. Zum Schluss wird die Asymmetrieerzeugungsrate im Oszillatormodell mit der in den Boltzmann-Gleichungen vorkommenden Rate verglichen. Kapitel 5 fasst die wichtigsten Ergebnisse zusammen.

In Anhang A und B finden sich wichtige Formeln und Konventionen, die in der Arbeit verwendet werden, Anhang C enthält einige ergänzende Rechnungen.

Kapitel 2

Baryogenese

2.1 Voraussetzungen

Symmetrien spielen in der Physik eine wichtige Rolle. In der klassischen Physik treten kontinuierliche Symmetrietransformationen wie Drehungen und Translationen und diskrete Symmetrietransformationen wie Raumspiegelung und Zeitumkehr auf.

Invarianz unter Raumspiegelung, vermittelt durch den Paritätsoperator P, ist in der Elementarteilchenphysik nicht mehr gegeben. Auch Invarianz unter dem Zeitumkehroperator T ist nicht mehr gewährleistet. Zu diesen diskreten Transformationen gehört auch die Ladungskonjugation (gegeben durch den Operator C), die Teilchen in Antiteilchen überführt. Auch unter dieser Operation ist die Elementarteilchenphysik nicht invariant. Die Kombination dieser drei Operationen CPT ist aber nach heutigem Wissen eine unverletzte Symmetrie. Diese Symmetrie wurde im berühmten CPT-Theorem unter sehr allgemeinen Voraussetzungen für lorentzinvariante Quantenfeldtheorien bewiesen [2].

Die Verletzung der C-Invarianz spielt natürlich eine wichtige Rolle in Theorien, die ausgehend von symmetrischen Anfangsbedingungen die Entstehung einer Baryonenasymmetrie (Baryogenese) beschreiben, die der heute beobachteten entspricht.

Schon 1967 erkannte Sakharov [3], unter welchen Umständen eine Baryonenasymmetrie erzeugt werden kann. Setzt man CPT-Invarianz voraus, so müssen drei Bedingungen dafür erfüllt sein:

- Verletzung der Baryonenzahlerhaltung
- Verletzung der C- und CP-Invarianz
- Abweichung vom thermischen Gleichgewicht

Die erste Bedingung ist offensichtlich: Wenn die Baryonenzahl eine Erhaltungsgröße ist, kann keine Asymmetrie entstehen. Die zweite Bedingung ist auch leicht einzusehen: Die Ba-

ryonenzahl B ist antisymmetrisch unter Ladungskonjugation und auch unter der kombinierten CP-Transformation. Wäre die Physik invariant unter diesen Transformationen, so kann sich aus symmetrischen Anfangsbedingungen keine Asymmetrie mit $B \neq 0$ entwickeln.

Sind schließlich alle Prozesse, auch die Baryonenzahl verletzenden, im thermischen Gleichgewicht, so wird das System durch die Dichtematrix $\rho = e^{-\beta H}$ beschrieben, wenn H der das System beschreibende Hamiltonoperator ist. Der Erwartungswert von B ist dann Null, denn

$$\begin{aligned} \langle B \rangle &= Tr\,(\rho B) = Tr\left[(CPT)(CPT)^{-1} e^{-\beta H} B\right] \\ &= Tr\left[e^{-\beta H}(CPT)^{-1} B (CPT)\right] = -Tr\,(\rho B)\ , \end{aligned}$$

wobei ausgenutzt wurde, dass H mit CPT kommutiert. Natürlich ist ein exaktes thermisches Gleichgewicht im expandierenden Universum nicht vorhanden, und es ist auch gerade die Expansion, die die benötigte Nichtgleichgewichtssituation herzustellen vermag.

Es gibt verschiedene Ansätze für eine Theorie der Baryogenese. Einen guten Überblick liefert [4]. Im nächsten Abschnitt soll ein einfaches Modell zeigen, wie die drei Bedingungen von Sakharov erfüllt werden können. In Abschnitt 2.4 wird dann ein realistisches Modell vorgestellt.

2.2 Ein einfaches Szenario

2.2.1 Spezifikationen

Ein einfaches Modell, das die Entstehung einer Asymmetrie beschreibt, ist das eines schweren zerfallenden Teilchens, das durch die Expansion des Universums aus dem Gleichgewicht kommt.

Angenommen, ein schweres, skalares Teilchen X kann sowohl in die Teilchen a, b als auch in die CP-konjugierten Zustände $\bar{a}, \bar{b}$ zerfallen. b trage Baryonenzahl 1, $\bar{b}$ trage -1 und a trage keine Baryonenzahl. Das Modell zeigt also Baryonenzahlverletzung.

Das Teilchen X zerfalle häufiger in Baryonen als in Antibaryonen, sodass das Modell C- und CP-Verletzung trägt.

Was noch fehlt, ist die Abweichung vom thermischen Gleichgewicht. Hierzu muss erst einmal geklärt werden, wie man überhaupt Thermodynamik in einem expandierenden Universum beschreibt.

2.2.2 Freie Boltzmann-Gleichung

Es wird angenommen, dass die Teilchendichte gering genug ist, sodass eine klassische Beschreibung der kinetischen Prozesse möglich ist. $f(\vec{x}, \vec{p})$ sei die klassische Phasenraumverteilungsfunktion. Im flachen Raum erfüllt f im Falle verschwindender Wechselwirkung aufgrund des liouvilleschen Satzes die Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} f + \vec{\nabla} f \cdot \vec{v} = 0\ . \tag{2.1}$$

Die allgemeinrelativistische Verallgemeinerung lautet dann [5]

$$\left(p^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \Gamma^k_{\nu\lambda} p^\nu p^\lambda \frac{\partial}{\partial p^k}\right) f = 0 \ , \tag{2.2}$$

wobei $\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$ die Christoffelsymbole sind. Der Index k läuft nur über die räumlichen Indizes $1, 2, 3$. Die Komponente p^0 ist bei gegebenem Impuls durch die Masse der Teilchen bestimmt: $m^2 = p^\alpha p_\alpha$.

In kosmologischen Anwendungen werden oft Robertson-Walker-Raumzeiten betrachtet, d. h. Raumzeiten, die räumlich homogen und isotrop sind. Der metrische Tensor lässt sich dann in der Form

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - R^2(t) \left(\frac{\mathrm{d}r^2}{1 - kr^2} + r^2 \mathrm{d}\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \mathrm{d}\phi^2\right)$$

schreiben. $R(t)$ beschreibt als kosmologischer Skalenfaktor die Expansion des Universums, k gibt die räumliche Krümmung an. Letztere spielt bei der frühen Entwicklung des Universums kaum eine Rolle, sodass für das Folgende $k = 0$ angenommen wird.

In einem räumlich flachen Robertson-Walker-Universum, dessen Expansionsrate durch den Hubble-Parameter $H(t) = \frac{\dot{R}(t)}{R(t)}$ gegeben wird, vereinfacht sich die Gleichung (2.2) zu

$$E \frac{\partial f}{\partial t} - H \left|\vec{p}\right|^2 \frac{\partial f}{\partial E} = 0 \ . \tag{2.3}$$

Hierbei gilt $E^2 = |\vec{p}|^2 + m^2$. Die Phasenraumverteilungsfunktion wird wegen der Homogenität und Isotropie keine Abhängigkeit von $\vec{x}$ oder von der Richtung von $\vec{p}$ haben. Integriert man die Gleichung über den Impulsraum, so erhält man nach einer partiellen Integration

$$\dot{n}(t) + 3H(t)n(t) = 0 \ , \tag{2.4}$$

wobei $n(t) = \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} f(|\vec{p}|, t)$ die Teilchenzahldichte ist. Diese Gleichung beschreibt, wie sich die Teilchenzahldichte durch die Expansion verdünnt.

2.2.3 Thermisches Ungleichgewicht

Die einsteinschen Feldgleichungen bestimmen die Dynamik der Metrik und führen im Falle einer Robertson-Walker-Metrik auf die Friedmann-Gleichungen. Bei Vorgabe einer Zustandsgleichung (z. B. $p = \frac{1}{3}\rho$ für Strahlung) bestimmen die Friedmann-Gleichungen die Zeitabhängigkeit des Skalenfaktors $R(t)$.

Im strahlungsdominierten Friedmann-Universum ist die Hubble-Rate $H(t) = \frac{1}{2t}$ und die Temperatur $T^2 \propto \frac{1}{t}$. Die Lösung der freien integrierten Boltzmann-Gleichung (2.4) ist dann

$$n(t) = n(t_0) \frac{T^3}{T_0^3} \propto T^3 \ . \tag{2.5}$$

Es stellt sich nun die Frage, wie die Teilchenzahldichten im Gleichgewicht von der Temperatur abhängen. In der klassischen Maxwell-Boltzmann-Statistik ist $f^{\mathrm{eq}}(|\vec{p}|,T) = e^{-E/T}$, womit sich

$$n^{\mathrm{eq}}(T) = \frac{Tm^2}{2\pi^2} K_2\left(\frac{m}{T}\right) \tag{2.6}$$

ergibt[1][6]. Hierbei ist m die Masse des betrachteten Teilchens und K_2 eine modifizierte Besselfunktion [7]. In den Grenzfällen großer und kleiner Temperaturen wird dies zu

$$n^{\mathrm{eq}} \propto T^3 \quad \text{für } T \gg m \tag{2.7}$$

$$\propto T^{3/2} e^{-m/T} \quad \text{für } T \ll m\,. \tag{2.8}$$

Im masselosen Fall gilt (2.7) exakt.

Einmal im Gleichgewicht folgen masselose Teilchen auch bei Expansion (siehe (2.5)) der Gleichgewichtsverteilung.

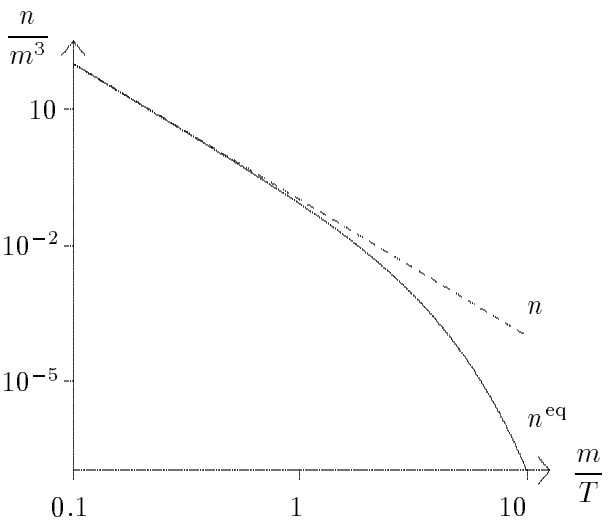


Abbildung 2.1: Hier ist die Teilchendichte logarithmisch gegenüber dem Parameter $\frac{m}{T}$ aufgetragen. Man sieht, wie bei einer Temperatur $T \approx m$ die Teilchendichte n von der Gleichgewichtsdichte n^{eq} abzuweichen beginnt.

Anders sieht dies aus für massive Teilchen, insbesondere für das betrachtete schwere Teilchen X. Die Gleichgewichtsdichte sinkt bei fallender Temperatur schneller, als sich das Gas tatsächlich durch die Expansion verdünnt, es ergibt sich eine Abweichung vom Gleichgewicht. Diese Abweichung beginnt, wenn die Temperatur T in die Nähe der Masse m_X des Teilchens gelangt (siehe Abb. 2.1), wo der Übergang stattfindet zwischen dem Potenzverhalten (2.7) und der exponentiellen Unterdrückung (2.8).

[1] In der gesamten Arbeit gelten die Konventionen $k_B = \hbar = c = 1$.

Nun ist es ja nicht richtig, dass keine Wechselwirkungen stattfinden, wie es für die freie Boltzmann-Gleichung vorausgesetzt wurde. Das Teilchen X kann zerfallen, und dies wird es nun tun, um das Gleichgewicht wiederherzustellen. Wenn die Zerfallsrate Γ sehr viel größer ist als die Expansionsrate H, dann wird sich die Teilchendichte sehr schnell dem Gleichgewichtswert anpassen. Eine deutliche Abweichung vom Gleichgewicht wird nur erreicht, wenn die Zerfallsrate von der Größenordnung der Hubble-Rate oder kleiner ist.

2.2.4 Entstehung der Asymmetrie

Die schweren Teilchen X erzeugen durch ihren Zerfall eine Baryonenasymmetrie, denn sie zerfallen häufiger in Baryonen als in Antibaryonen. Wenn die Teilchen X durch den Zerfall wieder ihre Gleichgewichtsdichte erreichen, versiegt die Baryonenproduktion.

Das System tendiert nun dahin, die sich gebildete Asymmetrie durch Zerfälle und inverse Zerfälle wieder „auszuwaschen“, denn nur dann ist das Gleichgewicht wieder vollständig hergestellt. Dieser Prozess wird verhindert bzw. unterdrückt, wenn die Temperatur inzwischen so weit abgesunken ist, dass die Zerfallsprodukte nicht mehr genügend Energie besitzen, um ein schweres Teilchen X zu erzeugen, der inverse Zerfall also kaum stattfindet.

Das bedeutet, dass die Zerfallsrate des Teilchens X nicht zu groß sein darf, weil sonst die Baryonenproduktion zu früh, d.h. bei zu hohen Temperaturen gestoppt wird, sodass der Auswaschvorgang einen großen Teil der Asymmetrie wieder zerstören kann.

Die quantitative Analyse dieses Vorgangs geschieht durch die Boltzmann-Gleichungen, die im folgenden Abschnitt vorgestellt werden.

2.3 Boltzmann-Gleichung

2.3.1 Struktur der Boltzmann-Gleichung

Die im letzten Abschnitt eingeführte freie Boltzmann-Gleichung (2.3) für ein Teilchen X erfährt bei Anwesenheit von Wechselwirkungen Korrekturen durch einen zusätzlichen Stoßterm $C[f]$, der von den Phasenraumverteilungsfunktionen aller beteiligten Teilchen abhängt:

$$E_X \frac{\partial f_X}{\partial t} - H\,|\vec{p}_X|^2\,\frac{\partial f_X}{\partial E_X} = C[f]\,. \tag{2.9}$$

Der Kollisionsterm zählt alle elastischen und inelastischen Stöße, an denen das Teilchen X beteiligt ist. Das entstandene, sehr komplizierte System partieller Integro-Differenzialgleichungen lässt sich glücklicherweise in den hier interessanten Fällen unter einfachen Annahmen in ein System gewöhnlicher Differenzialgleichungen umformen.

Wie in Abschnitt 2.2 wird die Boltzmann-Gleichung über den Phasenraum integriert und

man erhält (vgl. (2.4))

$$\dot{n}_X + 3Hn_X = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{\mathrm{d}^3 p_X}{E_X} C[f] \,. \tag{2.10}$$

Der Term auf der rechten Seite ist eine Summe über alle Prozesse, in denen das Teilchen X vernichtet oder erzeugt wird. Die Beiträge elastischer Prozesse fallen durch das Integrieren fort, sie haben keinen Einfluss auf Zu- oder Abnahme der Teilchendichte. Bezeichnet man die Raum-Zeit-Dichte der Vernichtungs- bzw. Erzeugungsreaktionen mit $\gamma_r^{\mathrm{hin/rück}}$, wobei r die möglichen Reaktionen parametrisiert, so erhält die Boltzmann-Gleichung die einfache Form

$$\dot{n}_X + 3Hn_X = -\sum_r \gamma_r^{\mathrm{hin}} + \sum_r \gamma_r^{\mathrm{rück}} \,. \tag{2.11}$$

Für den Prozess $X + a + b + \cdots \longrightarrow i + j + \cdots$ erhält man den Beitrag [8]

$$\begin{aligned}\gamma(X + a + b + \cdots \to i + j + \cdots) = \\ \int \mathrm{d}\tilde{p}_X \mathrm{d}\tilde{p}_a \mathrm{d}\tilde{p}_b \ldots \mathrm{d}\tilde{p}_i \mathrm{d}\tilde{p}_j \ldots (2\pi)^4 \delta(p_X + p_a + p_b + \cdots - p_i - p_j - \cdots) \\ \times \left|\mathcal{M}'_{X+a+b+\cdots \to i+j+\ldots}\right|^2 f_X f_a f_b \ldots (1 \pm f_i)(1 \pm f_j) \ldots\end{aligned} \tag{2.12}$$

Dabei bezeichnet $\mathrm{d}\tilde{p}_i$ das Phasenraumelement

$$\mathrm{d}\tilde{p}_i = \frac{\mathrm{d}^3 p_i}{(2\pi)^3 2E_i} \,.$$

In (2.12) wurden Korrekturen aus der Quantenstatistik berücksichtigt – das obere Vorzeichen gilt für Bosonen, das untere für Fermionen. Mit diesen Korrekturen wird die Boltzmann-Gleichung auch Uehling-Uhlenbeck-Gleichung genannt [6].

Das quadrierte Matrixelement $|\mathcal{M}'_{X+a+b+\cdots \to i+j+\ldots}|^2$ wird über die inneren Freiheitsgrade der Teilchen im Eingangs- und Ausgangskanal summiert. Das Matrixelement darf keine Prozesse enthalten, die über einen reellen Zwischenzustand ablaufen, da diese schon durch die Boltzmann-Gleichung erfasst werden. Zur Unterscheidung von dem vollen Matrixelement $\mathcal{M}$ wurde die Bezeichnung $\mathcal{M}'$ gewählt.

Die Integrale in (2.12) können ausgewertet werden, wenn man kinetisches Gleichgewicht voraussetzt, d. h. wenn man annimmt, dass die elastischen Prozesse verglichen mit der Expansionsrate des Universums sehr schnell ablaufen. Dann sind die Phasenraumverteilungsfunktionen durch die Temperatur und das chemische Potenzial bestimmt,

$$f_i(\vec{p}_i) = \frac{1}{e^{\beta(E_i - \mu_i)} \mp 1} \,.$$

Im Falle kleiner Besetzungszahlen kann Maxwell-Boltzmann-Statistik verwendet werden, sodass die Phasenraumverteilung die Form

$$f_i(\vec{p}_i) = \frac{n_i}{n_i^{\mathrm{eq}}} e^{-\beta E_i}$$

hat mit n_i^{eq} als Teilchendichte im Gleichgewicht.

Unter diesen Voraussetzungen erhält man eine gewöhnliche Differenzialgleichung, die integrierte Boltzmann-Gleichung,

$$\dot{n}_X + 3Hn_X = -\sum_{\substack{a,b,\dots\\ i,j,\dots}} \left[\frac{n_X n_a n_b \dots}{n_X^{\mathrm{eq}} n_a^{\mathrm{eq}} n_b^{\mathrm{eq}} \dots} \gamma^{\mathrm{eq}}(X + a + b + \dots \to i + j + \dots) \right.$$
$$\left. - \frac{n_i n_j \dots}{n_i^{\mathrm{eq}} n_j^{\mathrm{eq}} \dots} \gamma^{\mathrm{eq}}(i + j + \dots \to X + a + b + \dots) \right] . \qquad (2.13)$$

γ^{eq} ist die Raum-Zeit-Dichte der Reaktionen im thermischen Gleichgewicht,

$$\gamma^{\mathrm{eq}}(X + a + b + \dots \to i + j + \dots) = \int \mathrm{d}\tilde{p}_X \mathrm{d}\tilde{p}_a \mathrm{d}\tilde{p}_b \dots \mathrm{d}\tilde{p}_i \mathrm{d}\tilde{p}_j \dots$$
$$\times\ (2\pi)^4 \delta(p_X + p_a + p_b + \dots - p_i - p_j - \dots) \left| \mathcal{M}'_{X+a+b+\dots \to i+j+\dots} \right|^2 e^{-\beta E_{\mathrm{ges}}} , \qquad (2.14)$$

mit der Gesamtenergie $E_{\mathrm{ges}} = E_X + E_a + E_b + \dots = E_i + E_j + \dots$.

Man sieht leicht, dass in zeitumkehrinvarianten Theorien, wo diese Reaktionsdichten für Prozess und Umkehrprozess gleich sind, die rechte Seite von (2.13) im thermischen Gleichgewicht ($n = n^{\mathrm{eq}}$) verschwindet. Wäre keine Expansion vorhanden, blieben die Teilchendichten konstant. Dies muss natürlich auch in Theorien gelten, in denen die Zeitumkehrinvarianz verletzt ist, was anhand von (2.13) zunächst nicht ersichtlich ist. Dieser Punkt wird im folgenden Abschnitt genauer behandelt werden.

Ein einfaches Beispiel soll nun dazu dienen, die integrierte Boltzmann-Gleichung zu veranschaulichen.

Ein Teilchensorte X befinde sich in einem Wärmebad einer konstanten Temperatur, das von Teilchen der Sorten i, j bevölkert werde. Es gebe eine Wechselwirkung, die den Zerfall von X in i, j verursacht. Es liege keine Expansion des Raumes vor ($H = 0$) und die Prozesse zeigen Zeitumkehrinvarianz, d. h.

$$\gamma^{\mathrm{eq}}(X \to i + j) = \gamma^{\mathrm{eq}}(i + j \to X) .$$

Definiert man die Reaktionsrate pro Teilchen $\Gamma := \frac{\gamma^{\mathrm{eq}}}{n_X^{\mathrm{eq}}}$, so lautet die integrierte Boltzmann-Gleichung (2.13) für dieses System

$$\dot{n}_X = -\Big(\frac{n_X}{n_X^{\mathrm{eq}}} - 1 \Big) \gamma^{\mathrm{eq}}(X \to i + j) = -(n_X - n_X^{\mathrm{eq}})\Gamma$$

mit der Lösung

$$n_X(t) = n_X^{\mathrm{eq}} + (n_X(0) - n_X^{\mathrm{eq}}) e^{-\Gamma t} .$$

Die Teilchenzahl nähert sich also exponentiell der Gleichgewichtsverteilung.

2.3.2 *CP*-Verletzung in einem einfachen Modell

Um eine Teilchen-Antiteilchen-Asymmetrie zu erzeugen, müssen *CP* verletzende Prozesse vorhanden sein. In *CPT*-invarianten Theorien heißt dies, dass auch die Zeitumkehrinvarianz verletzt ist. Es soll nun wie in Abschnitt 2.2 die folgende Situation vorliegen: Ein schweres Teilchen X zerfalle in leichte Teilchen a, b sowie in die *CP*-konjugierten Zustände $\bar{a}, \bar{b}$ (für X gelte $X = \bar{X}$). Wieder sollen b und $\bar{b}$ die Baryonenzahlen 1 und -1 tragen. Der Zerfallprozess soll *CP*-Invarianz verletzen, die Amplitudenquadrate lauten

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}(X \to a + b)|^2 &= |\mathcal{M}_0|^2 \frac{1}{2}(1 + \varepsilon) \\ |\mathcal{M}(X \to \bar{a} + \bar{b})|^2 &= |\mathcal{M}_0|^2 \frac{1}{2}(1 - \varepsilon) \ , \end{aligned}$$

der Parameter ε misst die *CP*-Verletzung. Die mittleren Amplituden $\mathcal{M}_0(p_a, p_b)$ hängen natürlich noch von den Viererimpulsen von a, b ab.

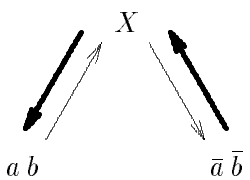
Die Amplitudenquadrate für die inversen Zerfälle lauten wegen der *CPT*-Invarianz

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}(a + b \to X)|^2 &= |\mathcal{M}_0|^2 \frac{1}{2}(1 - \varepsilon) \\ |\mathcal{M}(\bar{a} + \bar{b} \to X)|^2 &= |\mathcal{M}_0|^2 \frac{1}{2}(1 + \varepsilon) \ . \end{aligned}$$

Die Unterschiede in den Quadraten der Reaktionsamplituden übertragen sich direkt auf die Gleichgewichtsreaktionsdichten γ^{eq} (die Gesamtreaktionsdichte wird entsprechend zur Amplitude $\mathcal{M}_0$ mit γ_0^{eq} bezeichnet). Die Boltzmann-Gleichung (2.13) lautet für das Teilchen X im thermischen Gleichgewicht

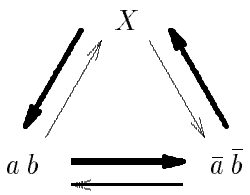
$$\begin{aligned} \dot{n}_X + 3Hn_X &= -\left(\gamma^{\mathrm{eq}}(X \to a + b) - \gamma^{\mathrm{eq}}(a + b \to X)\right) \\ &\quad -\left(\gamma^{\mathrm{eq}}(X \to \bar{a} + \bar{b}) - \gamma^{\mathrm{eq}}(\bar{a} + \bar{b} \to X)\right) \\ &= -\varepsilon\gamma_0^{\mathrm{eq}} + \varepsilon\gamma_0^{\mathrm{eq}} \\ &= 0 \ , \end{aligned}$$

wie es zu erwarten war. Interessant ist aber, dass die Beiträge der Reaktionen mit a, b und $\bar{a}, \bar{b}$ nicht einzeln verschwinden, wie es in einer T-invarianten Theorie der Fall wäre, sondern sich gegenseitig aufheben. Anschaulich lässt sich dies so darstellen:



Die dicken Pfeile bezeichnen eine größere Reaktionsrate als die dünnen. Die Teilchendichte von X ändert sich nicht.

Anders sieht dies für die Teilchen a, b bzw. $\bar{a}, \bar{b}$ aus. Damit sie im Gleichgewicht konstante Dichten haben, muss es direkte $2 \to 2$-Prozesse zwischen ihnen geben, die ebenfalls *CP* verletzend sind:



Man erwartet also, dass es solche direkten $2 \to 2$-Prozesse gibt, sodass die Differenz der Raten im Gleichgewicht gerade

$$\gamma^{\mathrm{eq}}(a + b \to \bar{a} + \bar{b}) - \gamma^{\mathrm{eq}}(\bar{a} + \bar{b} \to a + b) = \varepsilon \gamma_0^{\mathrm{eq}} \tag{2.15}$$

ist. Wie dies zustande kommt, soll im Folgenden erklärt werden.

Das Quadrat der vollen Reaktionsamplitude werde mit $\left|\mathcal{M}(ab \to \bar{a}\bar{b})\right|^2$ bezeichnet, das Amplitudenquadrat der Prozesse mit reellem Zwischenzustand mit $\left|\mathcal{M}_{\mathrm{ris}}(ab \to \bar{a}\bar{b})\right|^2$ (ris=real intermediate state). In die Boltzmann-Gleichung geht gerade die Differenz

$$\left|\mathcal{M}'(ab \to \bar{a}\bar{b})\right|^2 := \left|\mathcal{M}(ab \to \bar{a}\bar{b})\right|^2 - \left|\mathcal{M}_{\mathrm{ris}}(ab \to \bar{a}\bar{b})\right|^2 \tag{2.16}$$

dieser Terme ein, da die Prozesse mit reellem Zwischenzustand hierin schon berücksichtigt sind.

Die Gleichgewichtsrate für den Prozess $ab \to \bar{a}\bar{b}$ lautet dann (vgl. (2.14))

$$\gamma^{\mathrm{eq}}(ab \to \bar{a}\bar{b}) = \int \mathrm{d}\tilde{p}_a \mathrm{d}\tilde{p}_b \mathrm{d}\tilde{p}_{\bar{a}} \mathrm{d}\tilde{p}_{\bar{b}} (2\pi)^4 \delta(p_a + p_b - p_{\bar{a}} - p_{\bar{b}}) \left|\mathcal{M}'(ab \to \bar{a}\bar{b})\right|^2 e^{-\beta E_{\mathrm{ges}}} \,. \tag{2.17}$$

Letztendlich soll die Differenz $\Delta\gamma^{\mathrm{eq}}$ der Gleichgewichtsraten für diesen und den umgekehrten Prozess bestimmt werden. Hierbei kann man zwei Beiträge unterscheiden. Der eine Beitrag $\Delta\gamma^{\mathrm{eq}}_{\mathrm{ris}}$ stammt von den Prozessen mit reellem Zwischenzustand, der andere Beitrag $\Delta\gamma^{\mathrm{eq}}_{\mathrm{tot}}$ enthält die vollen Matrixelemente. Der zweite Beitrag verschwindet in dieser Ordnung der Störungsrechnung. Das sieht man wie folgt ein:

Aus der Unitarität der S-Matrix, d.h. aus der Erhaltung der Wahrscheinlichkeit folgt

$$\sum_i \left(|\mathcal{M}(ab \to i)|^2 - |\mathcal{M}(i \to ab)|^2 \right) = 0 \,,$$

wobei über alle Zustände i summiert wird. Der führende Beitrag zu dem Ausdruck wird von den Zweiteilchenstreuzuständen mit den Teilchen a, b oder $\bar{a}, \bar{b}$ kommen. In führender Ordnung gilt also

$$\sum_{a'b'} \left(\left|\mathcal{M}(ab \to a'b')\right|^2 + \left|\mathcal{M}(ab \to \bar{a}'\bar{b}')\right|^2 - \left|\mathcal{M}(a'b' \to ab)\right|^2 - \left|\mathcal{M}(\bar{a}'\bar{b}' \to ab)\right|^2 \right) = 0 \,.$$

Hierbei wird über den gesamten Phasenraum der Teilchen a', b' integriert (mit der Einschränkung $E_{a'} + E_{b'} = E_{\rm ges} = E_a + E_b$) sowie über alle inneren Freiheitsgrade summiert. Führt man die gleiche Summation (bei konstanter Energie) für die Teilchen a, b aus, so heben sich der erste und dritte Summand aus Symmetriegründen auf und man erhält

$$\sum_{ab} \sum_{a'b'} \left(\left| \mathcal{M}(ab \to \bar{a'}\bar{b'}) \right|^2 - \left| \mathcal{M}(\bar{a'}\bar{b'} \to ab) \right|^2 \right) = 0 \; .$$

Dies bedeutet aber gerade, dass die vollen Matrixelemente in der betrachteten Ordnung keinen Beitrag zur gesuchten Differenz liefern, $\Delta\gamma^{\rm eq}_{\rm tot} = 0$.

Nun wird der Beitrag $\Delta\gamma^{\rm eq}_{\rm ris}$ betrachtet. Bei dem Prozess $ab \to \bar{a}\bar{b}$ kann im s-Kanal das instabile Teilchen X ausgetauscht werden. Der Propagator von X lautet im s-Kanal[9]

$$\frac{1}{s - m_X^2 + i m_X \Gamma_X}$$

mit der Zerfallsbreite Γ_X, der Masse m_X und dem Quadrat der Gesamtenergie im Ruhesystem s. Der Imaginärteil des Propagators liefert den Beitrag des reellen Zwischenzustands. Sein Quadrat lautet

$$\frac{m_X^2 \Gamma_X^2}{\left((s - m_X)^2 + m_X^2 \Gamma_X^2 \right)^2} \; .$$

Für langlebige Teilchen ($\Gamma_X \ll m_X$) lässt sich dies schreiben als

$$\frac{\pi}{m_X \Gamma_X} \delta(s - m_X^2) \; .$$

Der gesamte Beitrag mit reellem Zwischenzustand lautet dann

$$\begin{aligned} \left| \mathcal{M}_{\rm ris}(ab \to \bar{a}\bar{b}) \right|^2 &\approx \left| \mathcal{M}(ab \to X) \right|^2 \frac{\pi}{m_X \Gamma_X} \delta(s - m_X^2) \left| \mathcal{M}(X \to \bar{a}\bar{b}) \right|^2 \\ &= \frac{\pi}{4 m_X \Gamma_X} |\mathcal{M}_0(p_a, p_b)|^2 |\mathcal{M}_0(p_{\bar{a}}, p_{\bar{b}})|^2 \delta(s - m_X^2)(1 - \varepsilon)^2 \; . \end{aligned}$$

Analog ergibt sich

$$\left| \mathcal{M}_{\rm ris}(\bar{a}\bar{b} \to ab) \right|^2 \approx \frac{\pi}{4 m_X \Gamma_X} |\mathcal{M}_0(p_a, p_b)|^2 |\mathcal{M}_0(p_{\bar{a}}, p_{\bar{b}})|^2 \delta(s - m_X^2)(1 + \varepsilon)^2 \; .$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned} \Delta\gamma^{\rm eq} &= \gamma^{\rm eq}_{\rm ris}(\bar{a}\bar{b} \to ab) - \gamma^{\rm eq}_{\rm ris}(ab \to \bar{a}\bar{b}) \\ &\approx \int \mathrm{d}\tilde{p}_a \mathrm{d}\tilde{p}_b \mathrm{d}\tilde{p}_{\bar{a}} \mathrm{d}\tilde{p}_{\bar{b}} (2\pi)^4 \delta(p_a + p_b - p_{\bar{a}} - p_{\bar{b}}) \\ &\quad \times \frac{\varepsilon\pi}{m_X \Gamma_X} |\mathcal{M}_0(p_a, p_b)|^2 |\mathcal{M}_0(p_{\bar{a}}, p_{\bar{b}})|^2 \delta(s - m_X^2) e^{-\beta E_{\rm ges}} \\ &= \int \mathrm{d}\tilde{p}_X \mathrm{d}\tilde{p}_a \mathrm{d}\tilde{p}_b \mathrm{d}\tilde{p}_{\bar{a}} \mathrm{d}\tilde{p}_{\bar{b}} (2\pi)^4 \delta(p_a + p_b - p_X) (2\pi)^4 \delta(p_X - p_{\bar{a}} - p_{\bar{b}}) \\ &\quad \times \frac{\varepsilon}{2 m_X \Gamma_X} |\mathcal{M}_0(p_a, p_b)|^2 |\mathcal{M}_0(p_{\bar{a}}, p_{\bar{b}})|^2 e^{-\beta E_X} \\ &= \varepsilon \int \mathrm{d}\tilde{p}_X \mathrm{d}\tilde{p}_a \mathrm{d}\tilde{p}_b (2\pi)^4 \delta(p_a + p_b - p_X) |\mathcal{M}_0(p_a, p_b)|^2 e^{-\beta E_{\rm ges}} \\ &= \varepsilon \gamma^{\rm eq}_0 \; . \end{aligned} \tag{2.18}$$

Dies ist gerade das Ergebnis (2.15), das aus allgemeinen Überlegungen heraus erwartet wurde.

Nun kann die Boltzmann-Gleichung für die zeitliche Entwicklung der Baryonenasymmetrie $n_B := n_b - n_{\bar{b}}$ aufgestellt werden. Es wird dabei angenommen, dass sich die Teilchen a im thermischen Gleichgewicht befinden.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} n_B + 3H n_B = \varepsilon \gamma_0^{\mathrm{eq}} \left(\frac{n_X}{n_X^{\mathrm{eq}}} - 1 \right) - \frac{1}{2} \gamma_0^{\mathrm{eq}} \frac{n_B}{n_b^{\mathrm{eq}}} - 2\gamma_{2-2}^{\mathrm{eq}} \frac{n_B}{n_b^{\mathrm{eq}}} \tag{2.19}$$

mit $\gamma_{2-2}^{\mathrm{eq}}$ als mittlerer Rate für die direkten $2 \to 2$-Prozesse. Der erste Term erzeugt die Asymmetrie, die anderen Terme versuchen, die Asymmetrie abzubauen.

Mithilfe von $\Gamma_X = \frac{\gamma_0^{\mathrm{eq}}}{n_X^{\mathrm{eq}}}$ lautet die Asymmetrieerzeugungsrate

$$\varepsilon \Gamma_X \left(n_X - n_X^{\mathrm{eq}} \right) . \tag{2.20}$$

Es sei noch einmal darauf hingewiesen, dass im Gleichgewicht keine Asymmetrie erzeugt wird. Um dieses Resultat zu erhalten, mussten neben Zerfällen und inversen Zerfällen auch die direkten $2 \to 2$-Prozesse berücksichtigt werden.

Im letzten Abschnitt dieses Kapitels geht es nun um ein konkretes Modell, in dem die bisher besprochenen Ideen und Konzepte zur Anwendung kommen.

2.4 Baryogenese durch Leptogenese

2.4.1 Sphaleronprozesse

1983 wurden sogenannte Sphaleronlösungen im Standardmodell entdeckt [10, 11]. Dies sind klassische, nichtstörungstheoretische Lösungen des Standardmodells, die die Erhaltung von $(B+L)$ verletzen, aber $(B-L)$ erhalten[2]. Bei den im frühen Universum vorherrschenden Temperaturen sind die Sphaleronen thermisch angeregt und können eine vorliegende $(B+L)$-Asymmetrie auswaschen. Andererseits sind die Sphaleronen auch in der Lage, eine anfängliche L-Asymmetrie teilweise in eine B-Asymmetrie umzuwandeln.

Diese „Baryogenese durch Leptogenese“ wurde 1986 von Fukugita und Yanagida vorgeschlagen [12]. In ihrem Modell ist das Standardmodell um schwere, rechtshändige Majorana-Neutrinos erweitert, deren Zerfall entsprechend dem in Abschnitt 2.2 dargestellten Szenario eine Leptonenasymmetrie hervorruft. Diese Leptogenese-Modelle wurden sorgfältig untersucht [13, 14, 15] mit dem Ergebnis, dass die beobachtete Baryonenasymmetrie auf natürliche Weise erklärt werden kann.

2.4.2 Neutrinomassen und Seesaw-Mechanismus

Betrachtet wird eine Erweiterung des Standardmodells durch drei rechtshändige Neutrinos $\nu_{Ri}, i = 1, \ldots, 3$, eins in jeder Generation. Die ν_R sind wie die anderen rechtshändigen Lepto-

[2] B bezeichnet hier die Baryonenzahl, L die Leptonenzahl.

nen e_R $SU(2)$-Singletts. Die Yukawa-Kopplung der Leptonen an das Higgs-Boson, durch die im Standardmodell die Massen der Fermionen erzeugt werden, erhält einen zusätzlichen Term für die ν_R,

$$\mathcal{L}_Y = \overline{l}_L \phi \lambda_l^* e_R + \overline{l}_L \epsilon \phi^\dagger \lambda_\nu^* \nu_R + \text{h.c.} .$$

Dabei sind $l_L = (\nu_L, e_L)$ die linkshändigen Leptondubletts, $\phi = (\varphi^+, \varphi^0)$ ist das Higgsdublett des Standardmodells[3]. Im zweiten Term werden sie bezüglich ihrer Isospinindizes mit dem antisymmetrischen ϵ-Tensor ($\epsilon_{12} = -1, \epsilon_{21} = 1, \epsilon_{11} = \epsilon_{22} = 0$) kontrahiert. λ_l und λ_ν sind komplexe 3×3-Matrizen entsprechend drei Generationen.

Im Higgs-Mechanismus bekommen die Fermionen eine Masse durch einen nicht verschwindenden Vakuumerwartungswert $\langle \phi \rangle = (0, v)$, $v = 174\text{GeV}$. Insbesondere entsteht nun auch ein Dirac-Massenterm für die Neutrinos mit der Massenmatrix $m_D = v\lambda_\nu^*$, er lautet

$$-\overline{\nu_L} m_D \nu_R + \text{h.c.}$$

Da die Neutrinos keine Ladung tragen, ist es möglich, einen weiteren eichinvarianten Massenterm hinzuzufügen, einen Majorana-Massenterm

$$-\frac{1}{2}\overline{\nu_R^C} M \nu_R + \text{h.c.} ,$$

mit einer 3×3-Matrix M. Es kann immer eine Basis von ν_R gewählt werden, sodass die Massenmatrix M reell und diagonal wird, $M = \text{diag}(M_1, M_2, M_3)$, mit positiven Eigenwerten M_i.

Für große Majorana-Massen $M_i \gg v$ machen sich die Felder ν_R durch einen effektiven Majorana-Massenterm für die linkshändigen Neutrinos ν_L bemerkbar,

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = -\frac{1}{2}\overline{\nu_L^C} m_\nu \nu_L + \text{h.c.} ,$$

mit $m_\nu = -m_D M^{-1} m_D^T$. Ist die Dirac-Massenmatrix von gleicher Größenordnung wie die der geladenen Fermionen, so erklärt sich die sehr kleine Masse der Neutrinos aus der Größe der schweren Massenskala M. Dieser sogenannte Seesaw-Mechanismus [16] ist das einfachste Modell, das zu kleinen, nicht verschwindenden Neutrinomassen führt.

2.4.3 Leptogenese durch den Zerfall schwerer Neutrinos

Es soll nun der Zerfall der schweren Neutrinos untersucht werden. Die Yukawa-Kopplung und der Majorana-Massenterm lauten mit ausgeschriebenen Indizes

$$\mathcal{L} = \sum_{i,j,a,b} \left(\epsilon_{ab} \overline{l_{Lj}^a} \phi^{b\dagger} \lambda_{\nu ji}^* \nu_{Ri} + \text{h.c.} \right) - \sum_i \left(\frac{1}{2} M_i \overline{\nu_{Ri}^C} \nu_{Ri} + \text{h.c.} \right) . \tag{2.21}$$

[3] Der Term + h.c. bedeutet, dass das hermitisch konjugierte des Ausdrucks hinzuaddiert wird.

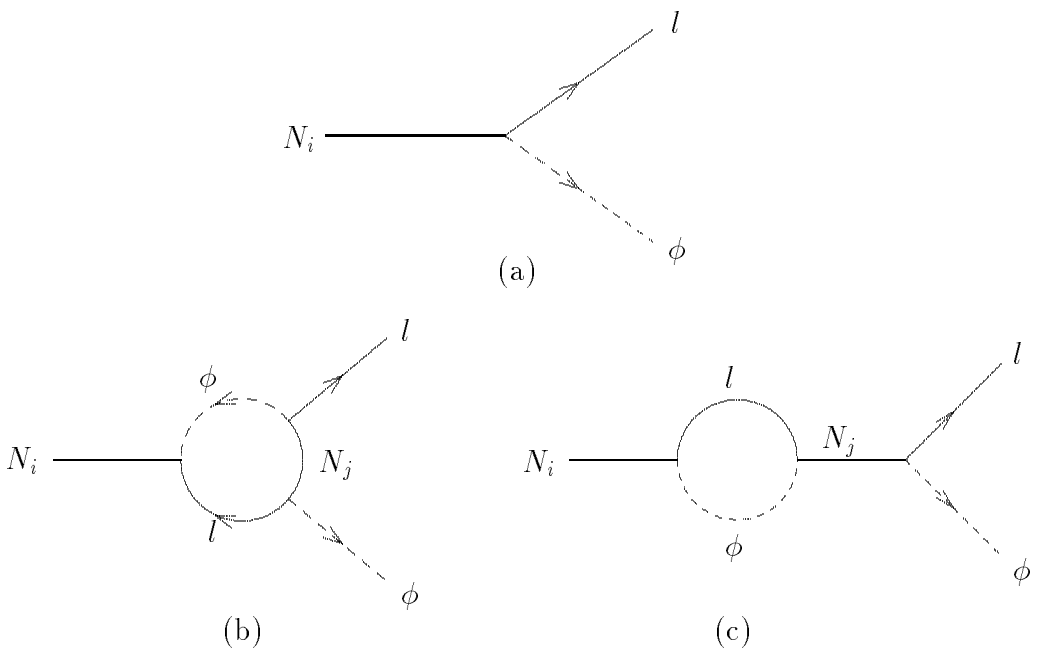


Abbildung 2.2: Zerfall der Majorana-Neutrinos: (a) Baumgraph, (b) Vertexkorrektur, (c) Selbstenergiekorrektur

Hierbei sind i, j Familienindizes und a, b $SU(2)$-Indizes. Wenn λ_ν reell ist, dann ist die Yukawa-Kopplung CP-invariant, für eine CP-Verletzung ist also $\lambda_\nu \neq \lambda_\nu^*$ notwendig.

Die zu den Masseneigenwerten M_i gehörigen physikalischen Masseneigenzustände sind die drei Majorana-Neutrinos $N_i = \nu_{Ri} + \nu_{Ri}^C$. Mit ihnen schreibt sich (2.21) als

$$\mathcal{L} = \sum_{i,j,a,b} \left(\epsilon_{ab} \overline{l_{Lj}^a} \phi^{b\dagger} \lambda_{\nu ji}^* N_i + \epsilon_{ab} \overline{N}_i \phi^b \lambda_{\nu ji} l_{Lj}^a \right) - \sum_i \frac{1}{2} M_i \overline{N}_i N_i \; . \tag{2.22}$$

Nun lassen sich die Raten für den Zerfall der Majorana-Neutrinos in Lepton-Higgs-Paare bestimmen. Wegen der CP-Verletzung erwartet man unterschiedliche Raten für die Zerfälle $N_i \to \phi + l$ und $N_i \to \overline{\phi} + \overline{l}$. In der niedrigsten Ordnung der Störungsrechnung, auf Baumgraphenniveau, sind die beiden Raten gleich. Die CP-Verletzung kommt erst durch Interferenz des Baumgraphen mit Schleifendiagrammen zustande. Hier gibt es zwei Typen von Diagrammen. Zum einen sind dies Diagramme, die Vertexkorrekturen liefern (siehe Abb. 2.2b). Zum anderen gibt es Selbstenergiediagramme wie in Abb. 2.2c, die eine Mischung der Neutrinogenerationen beschreiben.

Das Ergebnis für die Raten lautet [14, 17, 18]

$$\begin{aligned} \Gamma(N_i \to l + \phi) &= \frac{1}{2}(1 + \varepsilon_i)\Gamma_i \\ \Gamma(N_i \to \overline{l} + \overline{\phi}) &= \frac{1}{2}(1 - \varepsilon_i)\Gamma_i \; . \end{aligned}$$

Dabei ist Γ_i die totale Zerfallsbreite von N_i, die auf Baumniveau den Wert

$$\Gamma_i = \frac{1}{8\pi} M_i (\lambda_\nu^\dagger \lambda_\nu)_{ii} \tag{2.23}$$

hat. Der Parameter ε_i misst die *CP*-Asymmetrie und hat Anteile von den Vertexkorrekturen und von den Mischungseffekten. Der Vertexanteil hat die Größe

$$\varepsilon_i^V = -\frac{1}{8\pi} \sum_j \frac{\mathrm{Im}[(\lambda_\nu^\dagger \lambda_\nu)_{ij}^2]}{(\lambda_\nu^\dagger \lambda_\nu)_{ii}} f\left(\frac{M_j^2}{M_i^2}\right)$$
$$\text{mit} \quad f(x) = \sqrt{x}\left(1 - (1+x)\ln\left(\frac{1+x}{x}\right)\right) .$$

Man sieht sofort, dass die Summe nur Beiträge liefert für $j \neq i$, da sonst der Imaginärteil verschwindet. Die Anwesenheit mehrerer Generationen ist also wichtig für das Vorhandensein einer *CP*-Asymmetrie. Überdies stellt man fest, dass eine diagonale Kopplungsmatrix λ_ν keine Asymmetrie erzeugen kann.

Für den Zerfall des leichtesten Majorana-Neutrinos N_1 vereinfacht sich der Ausdruck für die Asymmetrie, wenn die schwereren Neutrinos N_2, N_3 deutlich größere Massen besitzen ($\frac{M_j}{M_1} \gg 1$, $j = 2, 3$),

$$\varepsilon_1^V = \frac{1}{16\pi} \sum_j \frac{\mathrm{Im}[(\lambda_\nu^\dagger \lambda_\nu)_{1j}^2]}{(\lambda_\nu^\dagger \lambda_\nu)_{11}} \frac{M_1}{M_j} + \mathcal{O}\Big(\Big(\frac{M_1}{M_j}\Big)^3\Big) . \tag{2.24}$$

Die *CP*-Asymmetrie aufgrund der Generationenmischung hat im Falle großer Massendifferenzen, $|M_i - M_j| \gg |\Gamma_i - \Gamma_j|$, den Wert

$$\varepsilon_i^M = -\frac{1}{8\pi} \sum_j \frac{\mathrm{Im}[(\lambda_\nu^\dagger \lambda_\nu)_{ij}^2]}{(\lambda_\nu^\dagger \lambda_\nu)_{ii}} \frac{M_i M_j}{M_i^2 - M_j^2} .$$

Für $i = 1$ und große Massen der schweren Generationen $M_1 \ll M_2, M_3$ liefert dies gerade das Doppelte des Vertexbeitrags, sodass $\varepsilon_1 = \varepsilon_1^M + \varepsilon_1^V$ den Wert

$$\varepsilon_1 = \frac{3}{16\pi} \sum_j \frac{\mathrm{Im}[(\lambda_\nu^\dagger \lambda_\nu)_{1j}^2]}{(\lambda_\nu^\dagger \lambda_\nu)_{11}} \frac{M_1}{M_j} + \mathcal{O}\Big(\Big(\frac{M_1}{M_j}\Big)^3\Big) \tag{2.25}$$

hat.

Nun sind alle Zutaten zur Hand, um eine Leptonenasymmetrie zu erzeugen: *CP* und Leptonenzahl verletzende Zerfallsraten erzeugen eine Asymmetrie, wenn die Temperatur in die Größenordnung der Masse M_1 kommt (siehe Abschnitt 2.2).

Will man diesen Prozess quantitativ auswerten, so muss man die Boltzmann-Gleichungen für die schweren Neutrinos und für die leichten Leptonen aufstellen und dieses System gewöhnlicher Differenzialgleichungen lösen. Die beiden schwersten Neutrinofamilien haben nur einen geringen

Einfluss [14], es genügt daher, Entwicklungsgleichungen für die Dichte n_1 der Neutrinos N_1 und für die Asymmetriedichte $n_L = n_l - n_{\bar{l}}$ zu betrachten. Sie lauten:

$$\dot{n}_1 + 3Hn_1 = -\Gamma_1(n_1 - n_1^{\mathrm{eq}}) \tag{2.26}$$

$$\dot{n}_L + 3Hn_L = \varepsilon_1\Gamma_1(n_1 - n_1^{\mathrm{eq}}) - \frac{1}{2}\gamma_1^{\mathrm{eq}}\frac{n_L}{n_l^{\mathrm{eq}}} - 2\gamma_{2-2}^{\mathrm{eq}}\frac{n_L}{n_l^{\mathrm{eq}}} \tag{2.27}$$

Bei einer genaueren Analyse erhält man noch Zusatzterme beispielsweise aus Eichkopplungen und Wechselwirkung mit dem Top-Quark [14].

Wie gut ist aber die Beschreibung durch die Boltzmann-Gleichungen? Leider ist die Antwort nicht bekannt. Um den Zerfallsprozess und die Annäherung ans Gleichgewicht besser zu verstehen, wird im nächsten Kapitel ein einfaches Modell vorgestellt, in dem der Relaxationsprozess ohne Näherungen beschrieben werden kann.

Kapitel 3

Das verwendete Modell

3.1 Motivation

In diesem Kapitel soll nun das untersuchte Modell vorgestellt werden. Es handelt sich um ein sehr einfaches Modell gekoppelter Oszillatoren, das, wenn es nur leicht aus dem Gleichgewicht gebracht wird, thermalisiert. Solche Modelle sind unter verschiedenen Fragestellungen untersucht worden [19, 20, 21]. In [22] wurde die Idee diskutiert, aus solchen Modellen auch etwas für die Beschreibung der Prozesse im frühen Universum zu lernen, insbesondere auch für die Baryogenese. Inwieweit das möglich ist, wird in diesem und dem nächsten Kapitel diskutiert.

3.2 Das Modell eines zerfallenden Teilchens

3.2.1 Einführung

In diesem Modell ist ein quantenmechanischer Oszillator mit Frequenz E_1 an ein Bad von Oszillatoren mit kontinuierlichen Frequenzen $\omega \geq \omega_c$ mit unterem Schwellenwert ω_c gekoppelt. Der einzelne Oszillator wird durch Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $c^\dagger, c$ beschrieben, das Bad durch $b^\dagger(\Omega,\omega), b(\Omega,\omega)$, wobei Ω ein weiterer kontinuierlicher oder diskreter Parameter ist.

Der Hamiltonoperator lautet:

$$H = E_1 c^\dagger c + \int_{\omega_c}^{\infty} \mathrm{d}\omega \int \mathrm{d}\Omega \ \omega b^\dagger(\Omega,\omega) b(\Omega,\omega) + \int_{\omega_c}^{\infty} \mathrm{d}\omega \int \mathrm{d}\Omega \ \Big(\zeta(\Omega,\omega) b^\dagger(\Omega,\omega) c + \zeta^*(\Omega,\omega) c^\dagger b(\Omega,\omega) \Big) \ . \quad (3.1)$$

Hierbei ist $\zeta(\Omega,\omega)$ die komplexe Kopplung. Es wird vorausgesetzt, dass $\omega_c < E_1$.

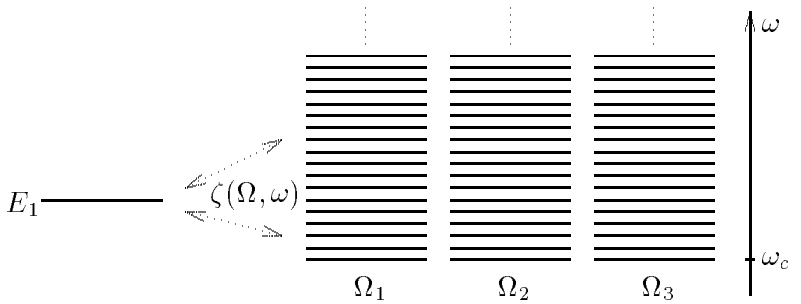


Abbildung 3.1: Die Wechselwirkung im Modell anschaulich dargestellt

Die Operatoren erfüllen die Vertauschungsrelationen

$$[c, c^\dagger] = 1 \quad , \quad [c, b^\dagger(\Omega,\omega)] = 0 \ ,$$
$$[b(\Omega,\omega), b^\dagger(\Omega',\omega')] = \delta(\Omega-\Omega')\delta(\omega-\omega') \ ,$$

die übrigen Kommutatoren sind Null.

Der Hamiltonoperator kann explizit diagonalisiert werden mithilfe der Operatoren

$$B^\dagger(\Omega,\omega) = b^\dagger(\Omega,\omega) + F(\omega+i\epsilon)\left(-\zeta^*(\Omega,\omega)c^\dagger + \int \mathrm{d}\omega'\mathrm{d}\Omega' \, \frac{\zeta^*(\Omega,\omega)\zeta(\Omega',\omega')}{\omega'-\omega-i\epsilon} b^\dagger(\Omega',\omega')\right) \ . \quad (3.2)$$

Dabei ist F folgendermaßen definiert:

$$F(z) = \left(-z + E_1 - \int \mathrm{d}\omega\mathrm{d}\Omega \, \frac{|\zeta(\Omega,\omega)|^2}{\omega - z}\right)^{-1} \ . \quad (3.3)$$

F ist analytisch außer auf dem Schnitt entlang der reellen Achse für $z > \omega_c$. Bei dieser Betrachtung wird angenommen, dass $\sigma(\omega) := \int \mathrm{d}\Omega \, |\zeta(\Omega,\omega)|^2$ gutes Hochfrequenzverhalten hat, sodass $\int \mathrm{d}\omega \frac{\sigma(\omega)}{\omega}$ existiert und $F(z)$ für große $|z|$ das asymptotische Verhalten $(E_1 - z)^{-1}$ hat. Hat $\sigma(\omega)$ ein schlechtes Hochfrequenzverhalten, so kann geeignet renormiert werden [23].

Entlang des Schnitts hat F die Gestalt

$$\begin{aligned} F(\omega \pm i\epsilon) &= \frac{1}{-\omega + E_1 - \int \mathrm{d}\omega' \frac{\sigma(\omega')}{\omega' - \omega \mp i\epsilon}} = \frac{1}{-\omega + E_1 - \Pi(\omega) \mp i\pi\sigma(\omega)} \\ &= \frac{-\omega + E_1 - \Pi(\omega) \pm i\pi\sigma(\omega)}{(-\omega + E_1 - \Pi(\omega))^2 + (\pi\sigma(\omega))^2} \ , \end{aligned}$$

wobei das reelle $\Pi(\omega)$ durch den folgenden Hauptwert gegeben ist:

$$\Pi(\omega) := \mathcal{P} \int_{\omega_c}^{\infty} \mathrm{d}\omega' \, \frac{1}{\omega' - \omega} \sigma(\omega') \ . \quad (3.4)$$

Die Unstetigkeit von F am Schnitt ist also

$$F(\omega + i\epsilon) - F(\omega - i\epsilon) = 2\pi i \sigma(\omega) \, |F(\omega + i\epsilon)|^2 \ . \quad (3.5)$$

Aus diesen Überlegungen kann eine wichtige Identität gewonnen werden, nämlich

$$\int_{\omega_c}^{\infty} \mathrm{d}\omega \ \sigma(\omega) \left|F(\omega + i\epsilon)\right|^2 \ = \ 1 \ . \tag{3.6}$$

Die neuen Operatoren $B(\Omega, \omega)$ erlauben es, den Hamiltonoperator H in einer einfachen Form zu schreiben:

$$H = \int_{\omega_c}^{\infty} \mathrm{d}\omega \int \mathrm{d}\Omega \ \omega B^\dagger(\Omega, \omega) B(\Omega, \omega) \ . \tag{3.7}$$

Außerdem gelten folgende Vertauschungsrelationen

$$\left[B(\Omega, \omega), B^\dagger(\Omega', \omega')\right] \ = \ \delta(\Omega - \Omega')\delta(\omega - \omega') \ ,$$

sodass die Zeitentwicklung dieser Operatoren einfach

$$B^\dagger(\Omega, \omega, t) = e^{iHt} B^\dagger(\Omega, \omega) e^{-iHt} = e^{i\omega t} B^\dagger(\Omega, \omega)$$

ist.

Die Zeitentwicklung der ursprünglichen Operatoren kann mithilfe der folgenden Inversionsformeln bestimmt werden:

$$b^\dagger(\Omega, \omega) = B^\dagger(\Omega, \omega) + \int \mathrm{d}\omega' \mathrm{d}\Omega' \ \frac{\zeta^*(\Omega, \omega)\zeta(\Omega', \omega') F^*(\omega' + i\epsilon)}{\omega - \omega' + i\epsilon} B^\dagger(\Omega', \omega') \tag{3.8}$$

$$c^\dagger = - \int \mathrm{d}\omega \mathrm{d}\Omega \ \zeta(\Omega, \omega) F^*(\omega + i\epsilon) B^\dagger(\Omega, \omega) \ . \tag{3.9}$$

So ergibt sich

$$\begin{aligned} c^\dagger(t) &= - \int \mathrm{d}\omega \mathrm{d}\Omega \ \zeta(\Omega, \omega) F^*(\omega + i\epsilon) e^{i\omega t} B^\dagger(\Omega, \omega) \\ &= g(t) c^\dagger + i \int \mathrm{d}\omega \mathrm{d}\Omega \ \zeta(\Omega, \omega) h(\omega, t) e^{i\omega t} b^\dagger(\Omega, \omega) \end{aligned} \tag{3.10}$$

mit den Funktionen

$$g(t) = \int_{\omega_c}^{\infty} \mathrm{d}\omega \ \sigma(\omega) \left|F(\omega + i\epsilon)\right|^2 e^{i\omega t} \tag{3.11}$$

$$h(\omega, t) = iF^*(\omega + i\epsilon) - ik(\omega, t) \tag{3.12}$$

$$k(\omega, t) = \int_{\omega_c}^{\infty} \mathrm{d}\omega' \ \sigma(\omega') \left|F(\omega' + i\epsilon)\right|^2 \frac{e^{i(\omega' - \omega)t}}{\omega' - \omega + i\epsilon} \ . \tag{3.13}$$

Die eingeführten Hilfsfunktionen F, g, h, k erleichtern die Beschreibung des Systems sehr. Ihre Eigenschaften werden im nächsten Abschnitt besprochen. Auch die Zeitentwicklung des kontinuierlichen Oszillatorbads lässt sich mit diesen Funktionen beschreiben:

$$\begin{aligned} b^\dagger(\Omega, \omega, t) =& e^{i\omega t} b^\dagger(\Omega, \omega) + e^{i\omega t} \zeta^*(\Omega, \omega) i h(\omega, t) c^\dagger \\ &+ \int \mathrm{d}\omega' \mathrm{d}\Omega' \ \frac{\zeta^*(\Omega, \omega)\zeta(\Omega', \omega')}{\omega - \omega' + i\epsilon} \left(i h(\omega, t) e^{i\omega t} - i h(\omega', t) e^{i\omega' t} \right) b^\dagger(\Omega', \omega') \ . \end{aligned} \tag{3.14}$$

Wird das System anfangs im Zustand $c^\dagger|0\rangle$ präpariert[1], so „zerfällt“ dieser Zustand, die Besetzungszahl nimmt ab:

$$\langle c^\dagger c\rangle(t) = |g(t)|^2 \ . \tag{3.15}$$

Für $|g(t)|^2$ erwartet man ein exponentielles Verhalten $e^{-\Gamma t}$ mit der Zerfallsrate Γ. Dieses Verhalten wird sich auch später in einem gewissen Limes (schwache Kopplung, „mittlere“ Zeiten) ergeben. Die Besetzungszahl im Oszillatorbad nimmt entsprechend zu,

$$\left\langle \int \mathrm{d}\omega \mathrm{d}\Omega \; b^\dagger(\Omega,\omega) b(\Omega,\omega) \right\rangle (t) = 1 - |g(t)|^2 \ , \tag{3.16}$$

da in diesem Modell die „Teilchenzahl” erhalten ist:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(c^\dagger(t)c(t) + \int \mathrm{d}\omega \mathrm{d}\Omega \; b^\dagger(\Omega,\omega,t) b(\Omega,\omega,t) \right) = 0 \ . \tag{3.17}$$

3.2.2 Eigenschaften

Es sollen die charakteristischen Eigenschaften der Zeitentwicklung in diesem Modell aufgezeigt werden. Dazu ist es notwendig, die Eigenschaften der eingeführten Hilfsfunktionen zu untersuchen.

Bei ausgeschalteter Wechselwirkung wäre $F(z) = (E_1 - z)^{-1}$, hätte also einen einfachen Pol bei $z = E_1$. Schaltet man die Wechselwirkung ein, bleibt der Pol erhalten, wandert aber in das zweite Blatt, das man durch analytische Fortsetzung von F durch den Schnitt auf der reellen Achse erreicht. Auf dem ersten Blatt, also dort, wo F ursprünglich definiert ist, gibt es keinen Pol. Sei nämlich $z = x + iy$ mit $y > 0$. Dann ist

$$\mathrm{Im}\left(-z + E_1 - \int_{\omega_c}^{\infty} \mathrm{d}\omega \, \frac{\sigma(\omega)}{\omega - z} \right) = -y - \int_{\omega_c}^{\infty} \mathrm{d}\omega \, \sigma(\omega) \frac{y}{(\omega - x)^2 + y^2} < 0 \ ,$$

d.h. der Nenner in der Definition von F (3.3) kann nicht Null werden. Die Argumentation läuft entsprechend für $y < 0$.

Für schwache Wechselwirkungen liegt der Pol noch nahe bei E_1. Setzt man F von negativen Imaginärwerten her kommend durch den Schnitt fort (die Funktion werde dort F_{II} genannt), so erhält man in der Nähe von E_1 näherungsweise

$$\begin{aligned} F_{II}(z) &\approx \left(-z + E_1 - \int_{\omega_c}^{\infty} \mathrm{d}\omega \, \frac{\sigma(\omega)}{\omega - (E_1 - i\epsilon)} \right)^{-1} \\ &= \left(-z + E_1 - \Pi(E_1) + i\pi\sigma(E_1) \right)^{-1} \ . \end{aligned}$$

Für schwache Kopplung ($\Pi(E_1) \ll E_1$) liegt der Pol also bei $z \approx E_1 + i\pi\sigma(E_1)$.

[1] $|0\rangle$bezeichnet hierbei den Grundzustand des Systems

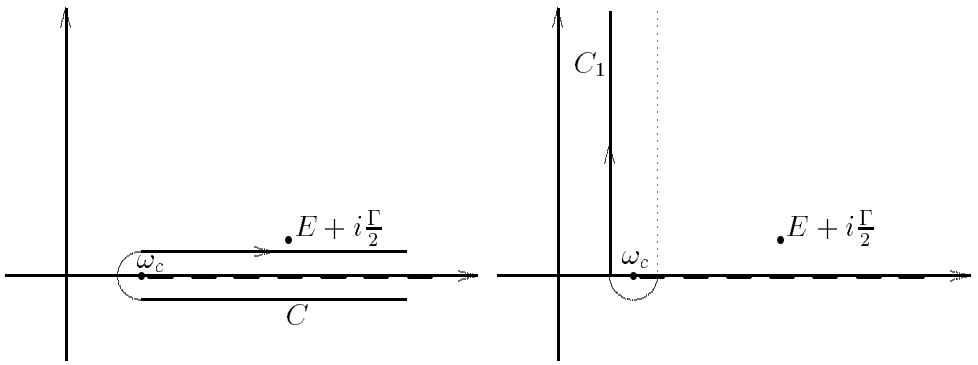


Abbildung 3.2: Integrationswege in der komplexen Ebene: der gepunktete Weg und der Pol liegen im zweiten Blatt.

Die den Zerfall charakterisierende Funktion g erhält durch diesen Pol einen Anteil, der exponentiell abfällt. Dies liegt daran, dass $|F(\omega + i\epsilon)|^2$ in der Nähe des Pols eine Breit-Wigner-Form besitzt, sodass das Integral (3.11) für schwache Kopplung und nicht zu große Zeiten durch diesen Beitrag dominiert wird. Man erhält dann näherungsweise

$$g(t) \approx \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega \frac{\sigma(E_1)}{(\omega - E_1)^2 + (\pi\sigma(E_1))^2} e^{i\omega t} = e^{iE_1 t} e^{-\pi\sigma(E_1)} \; . \tag{3.18}$$

Dies entspricht also einer Zerfallsrate $\Gamma = 2\pi\sigma(E_1)$ (siehe (3.15)).

Die Struktur von g erfasst man am besten, indem man die analytischen Eigenschaften von F ausnutzt. Zunächst kann g mittels (3.5) als Kurvenintegral längs des Weges C (siehe Abb. 3.2), der um den Schnitt herumläuft, beschrieben werden:

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega_c}^{\infty} \mathrm{d}\omega \; \left(F(\omega + i\epsilon) - F(\omega - i\epsilon)\right) e^{i\omega t} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \mathrm{d}z \; F(z) e^{izt} \; . \end{aligned} \tag{3.19}$$

Nun kann der Integrationsweg derart deformiert werden, dass ein Teil des Weges in das zweite Blatt verschoben wird (siehe Abb. 3.2). Dadurch bekommt man Beiträge der Residuen im zweiten Blatt. Bei schwacher Kopplung wird es einen Pol nahe der reellen Achse geben, der den Hauptbeitrag liefert. Wie in der Wigner-Weisskopf-Näherung (siehe z.B. [24]) wird nur dieser eine Pol mitgenommen. Ist seine Lage $E + i\frac{\Gamma}{2}$, so liefert er den Beitrag

$$g_0(t) = n e^{-\frac{\Gamma}{2}t + iEt} \tag{3.20}$$

mit einer Konstanten $n \approx 1$.

Zusätzlich gibt es noch den Beitrag vom verbleibenden Integrationsweg C_1. Für große t kommt der Hauptbeitrag vom Bereich mit $z \approx \omega_c$, er wird also dominiert vom Schwellenverhalten von σ bei ω_c. Für $\sigma(\omega) = \lambda(\omega - \omega_c)^\alpha$, $\lambda = const.$ erhält man [23]

$$g_1(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \mathrm{d}z \; F(z) e^{izt} \approx i\lambda \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{(E_1 - \omega_c)^2 t^{\alpha+1}} e^{i\omega_c t + i\frac{\pi}{2}\alpha} \; . \tag{3.21}$$

Die unterschiedlichen Anteile von $g = g_0 + g_1$ bewirken eine Änderung im Verhalten bei großen Zeiten. Zu Anfang überwiegt g_0, da g_1 durch die Kopplung λ unterdrückt wird, und damit ist $|g(t)|^2 \propto e^{-\Gamma t}$. Da g_0 aber bei großen Zeiten exponentiell unterdrückt wird, überwiegt dort g_1, und es gilt $|g(t)|^2 \propto t^{-2(\alpha+1)}$.

Auch die Funktion k lässt sich als Kurvenintegral darstellen. Aus (3.13) erhält man

$$k(\omega, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \mathrm{d}z \frac{F(z)}{z - \omega} e^{i(z-\omega)t} \ . \tag{3.22}$$

Analog zum Vorgehen oben erhält man auch für k Polbeitrag und Schwellenbeitrag. In der Poldominanznäherung ist

$$k(\omega, t) \approx F^*(\omega + i\epsilon) e^{-i\omega t} g(t) \ . \tag{3.23}$$

Aus der Definition (3.13) sieht man sofort, dass k die Differenzialgleichung

$$\dot{k}(\omega, t) = i e^{-i\omega t} g(t) \tag{3.24}$$

erfüllt. Zusammen mit der Randbedingung $\lim_{t\to\infty} k(\omega, t) = 0$ ist k dadurch eindeutig bestimmt. Entsprechend erfüllt h die Differenzialgleichung

$$\dot{h}(\omega, t) = e^{-i\omega t} g(t) \tag{3.25}$$

mit $\lim_{t\to\infty} h(\omega, t) = i F^*(\omega + i\epsilon)$, wie aus (3.12) ersichtlich ist.

3.3 Das Modell bei endlicher Temperatur

3.3.1 Thermisches Gleichgewicht

Wenn sich das System im thermischen Gleichgewicht zur inversen Temperatur $\beta = \frac{1}{T}$ befindet, so gilt

$$\left\langle B^\dagger(\Omega, \omega) B(\Omega', \omega') \right\rangle = \delta(\Omega - \Omega') \delta(\omega - \omega') f_\beta^{\mathrm{th}}(\omega) \ . \tag{3.26}$$

Dabei ist $f_\beta^{\mathrm{th}}(\omega) = \left(e^{\beta\omega} - 1\right)^{-1}$ die thermische Einstein-Bose-Verteilung.

Im thermischen Gleichgewicht ist der Erwartungswert von $c^\dagger c$ daher (siehe (3.9))

$$\langle c^\dagger c \rangle = \int_{\omega_c}^{\infty} \mathrm{d}\omega \, \sigma(\omega) \, |F(\omega + i\epsilon)|^2 \, f_\beta^{\mathrm{th}}(\omega) \ . \tag{3.27}$$

Für schwache Kopplung hat $|F(\omega + i\epsilon)|^2$ eine Breit-Wigner-Resonanz nahe $\omega = E_1$. Wenn die Temperatur nicht zu niedrig ist, also β nicht zu groß ist, dominiert diese Resonanz und die Besetzungszahl ist

$$\langle c^\dagger c \rangle \approx f_\beta^{\mathrm{th}}(E_1) \ . \tag{3.28}$$

Ist die Temperatur sehr niedrig ($T \ll E_1$), so wird dieser Resonanzbeitrag durch $f_\beta^{\rm th}(E_1)$ unterdrückt, und der wesentliche Beitrag stammt von der Schwelle bei ω_c. Für $\sigma(\omega) = \lambda(\omega - \omega_c)^\alpha$ erhält man

$$\langle c^\dagger c\rangle \approx \frac{\lambda}{(E_1-\omega_c)^2}\int_{\omega_c}^{\infty} {\rm d}\omega\, \frac{(\omega-\omega_c)^\alpha}{e^{\beta\omega}-1}\ . \tag{3.29}$$

Falls $\omega_c \ll T \ll E_1$, so ergibt sich

$$\langle c^\dagger c\rangle \approx \frac{\lambda}{(E_1-\omega_c)^2}\int_0^{\infty} {\rm d}\omega \frac{\omega^\alpha}{e^{\beta\omega}-1} = \frac{\lambda\zeta(\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)}{(E_1-\omega_c)^2}T^{\alpha+1}\ , \tag{3.30}$$

für noch kleinere Temperaturen $T \ll \omega_c$ ist

$$\langle c^\dagger c\rangle \approx \frac{\lambda}{(E_1-\omega_c)^2}\int_{\omega_c}^{\infty} {\rm d}\omega\, (\omega-\omega_c)^\alpha e^{-\beta\omega} = \frac{\lambda\Gamma(\alpha+1)}{(E_1-\omega_c)^2}e^{-\beta\omega_c}T^{\alpha+1}\ . \tag{3.31}$$

Hierbei bezeichnet ζ die riemannsche Zetafunktion und Γ die Gammafunktion. Das Gleichgewichtsverhalten von $\langle c^\dagger c\rangle$ entspricht bei tiefen Temperaturen nicht dem exponentiellen Abfall $f_\beta^{\rm th}(E_1)$, sondern wird durch ein Potenzgesetz beschrieben.

3.3.2 Nichtgleichgewicht und Boltzmann-Gleichung

Nun soll der Zerfallsprozess eines Teilchens im thermischen Medium beschrieben werden. In diesem Modell bedeutet dies, dass das Oszillatorbad zu Beginn eine thermische Verteilung mit Temperatur T hat, der „zerfallende“ Oszillator hat eine beliebige Anfangsbesetzungszahl f_0. Die Oszillatoren sollen im Anfangszustand unkorreliert sein. Es werden also folgende Anfangsbedingungen gestellt:

$$\begin{aligned}\langle b^\dagger(\Omega,\omega)b(\Omega',\omega')\rangle &= \delta(\Omega-\Omega')\delta(\omega-\omega')f_\beta^{\rm th}(\omega)\ ,\\ \langle c^\dagger c\rangle = f_0 \quad &, \quad \langle c^\dagger b(\Omega,\omega)\rangle = 0\ .\end{aligned} \tag{3.32}$$

Die Zeitentwicklung der Besetzungszahl $\langle c^\dagger(t)c(t)\rangle =: f(t)$ lautet dann

$$f(t) = |g(t)|^2 f_0 + \int_{\omega_c}^{\infty} {\rm d}\omega\, \sigma(\omega)\, |h(\omega,t)|^2 f_\beta^{\rm th}(\omega)\ . \tag{3.33}$$

Um eine der Boltzmann-Gleichung ähnliche Beziehung zu erhalten, wird diese Gleichung nach der Zeit abgeleitet. Hierbei wird (3.25) ausgenutzt und die zeitabhängige Zerfallsrate

$$\Gamma(t) := -2{\rm Re}\frac{\dot g(t)}{g(t)} \tag{3.34}$$

eingeführt:

$$\frac{\rm d}{{\rm d}t}f(t) = -\,|g(t)|^2\,\Gamma(t)f_0 + \int_{\omega_c}^{\infty}{\rm d}\omega\,\sigma(\omega)2{\rm Re}(g(t)h^*(\omega,t)e^{-i\omega t})f_\beta^{\rm th}(\omega)\ .$$

Nun wird mittels (3.33) f_0 zugunsten von $f(t)$ eliminiert, und man erhält

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(t) = -\Gamma(t)f(t) + \int_{\omega_c}^{\infty} \mathrm{d}\omega\, \sigma(\omega) \left(2\mathrm{Re}(g(t)h^*(\omega,t)e^{-i\omega t}) + \Gamma(t)\,|h(\omega,t)|^2\right) f_\beta^{\mathrm{th}}(\omega)\ . \tag{3.35}$$

Der erste Summand auf der rechten Seite beschreibt im Wesentlichen den Zerfall, der zweite Summand kann als Quellterm für den inversen Zerfall aus dem Oszillatorbad heraus interpretiert werden.

Für schwache Kopplung und nicht zu tiefe Temperaturen kommt der Hauptbeitrag des Integrals von $\omega \approx E_1$ (siehe Abschnitt 3.3.1). Ersetzt man daher $f_\beta^{\mathrm{th}}(\omega)$ durch $f_\beta^{\mathrm{th}}(E_1)$, so ergibt sich unter Verwendung von (A.15) und (A.14)

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = -\Gamma(t)\left(f(t) - f_\beta^{\mathrm{th}}(E_1)\right)\ . \tag{3.36}$$

Betrachtet man außerdem nicht zu große Zeiten, sodass die Poldominanznäherung anwendbar ist, ergibt sich mit (3.20)

$$\Gamma(t) = \Gamma = const.$$

Die Gleichung (3.36) beschreibt dann die Relaxation ans Gleichgewicht mit der konstanten Rate Γ. Dies entspricht der Boltzmann-Gleichung in diesem Modell.

Interessant ist es nun, die Abweichung von diesem einfachen Zerfallsgesetz zu untersuchen. Da $\lim_{t\to\infty} g(t) = 0$ und $\lim_{t\to\infty} h(\omega,t) = iF^*(\omega + i\epsilon)$ ist, folgt aus (3.33), dass $f(t)$ für $t \to \infty$ gegen die Gleichgewichtsverteilung (3.27) strebt. Das anfängliche thermische Ungleichgewicht wird also mit der Zeit abgebaut, das System kommt ins Gleichgewicht.

Dies geschieht aber nun nicht mit der konstanten Rate Γ. Die Relaxationsrate $\Gamma(t)$ nimmt mit der Zeit ab. Für große Zeiten fällt $g(t)$ wie $t^{1+\alpha}$ (siehe (3.21)), aus (3.34) ergibt sich dann

$$\Gamma(t) \approx \frac{2(1+\alpha)}{t}\ . \tag{3.37}$$

Neben der langsameren Relaxation bei großen Zeiten ist der zweite wichtige Effekt die größere Gleichgewichtsbesetzungszahl bei tiefen Temperaturen, wie in Abschnitt 3.3.1 hergeleitet wurde.

Wenn später Prozesse im expandierenden Universum untersucht werden, treten beide Effekte zusammen auf, da die Temperatur dort für große Zeiten klein wird.

3.4 *CP*-Asymmetrie

3.4.1 Erzeugung einer Asymmetrie

Dieses Modell soll auch dazu dienen, die Entstehung einer Asymmetrie zwischen Teilchen und Antiteilchen zu beschreiben. Es werden jetzt also zwei Sorten von Oszillatoren betrachtet, die durch den Parameter $\alpha \in \{1, -1\}$ unterschieden werden.

Dann wird ein unitärer Operator $\tilde{C}$ eingeführt, der folgendermaßen auf die Modelloperatoren wirkt:

$$\tilde{C}b_\alpha(\Omega,\omega)\tilde{C} = b_{-\alpha}(\Omega,\omega) \ .$$

Dieser Operator bewirkt also einen Übergang zwischen den verschiedenen Oszillatorsorten, er entspricht der Ladungskonjugation. Im Prinzip kann in der Definition der Wirkung noch ein Phasenfaktor auftreten, dieser kann aber in die Definition der Operatoren b absorbiert werden.

Außerdem wird ein antiunitärer Operator $\tilde{T}$ verwendet mit

$$\tilde{T}b_\alpha(\Omega,\omega)\tilde{T} = b_\alpha(\Omega_T,\omega) \ ,$$

wobei im Falle, dass in Ω Spinfreiheitsgrade enthalten sind, die Transformation $\Omega \to \Omega_T$ im quantenfeldtheoretischen Modell dem Umklappen des Spins entspricht. Werden beispielsweise nur skalare Teilchen betrachtet, so ist $\Omega_T = \Omega$, was zunächst der Einfachheit halber angenommen werden soll. Wieder wird ein möglicher Phasenfaktor weggelassen.

Dieser Operator erinnert an den Zeitumkehroperator in der Quantenfeldtheorie. Tatsächlich entspricht er dem Produkt aus Zeitumkehr T und Raumspiegelung P.

Will man das System mit einem quantenfeldtheoretischen System in Verbindung bringen, das CPT-Invarianz besitzt, so muss in diesem Modell $\tilde{C}\tilde{T}$-Invarianz gelten. Andererseits ist es notwendig, dass in dem Modell eine $\tilde{C}$-Verletzung vorliegt, damit eine Asymmetrie zwischen den beiden Oszillatorarten zustande kommen kann.

Der Wechselwirkungsterm lautet

$$\int \mathrm{d}\omega \mathrm{d}\Omega \sum_\alpha \left(\zeta_\alpha(\Omega,\omega) b^\dagger_\alpha(\Omega,\omega) c + \zeta^*_\alpha(\Omega,\omega) b_\alpha(\Omega,\omega) c^\dagger \right) \ . \tag{3.38}$$

Unter $\tilde{C}$ und $\tilde{T}$ verhält sich dieser Term auf folgende Weise:

$$\begin{aligned}
&\textstyle\sum_\alpha \left(\zeta_\alpha(\Omega,\omega) b^\dagger_\alpha(\Omega,\omega) c \ + \ \zeta^*_\alpha(\Omega,\omega) b_\alpha(\Omega,\omega) c^\dagger \right) \\
&\qquad\qquad \tilde{C} \downarrow \\
&\textstyle\sum_\alpha \left(\zeta_\alpha(\Omega,\omega) b^\dagger_{-\alpha}(\Omega,\omega) c \ + \ \zeta^*_\alpha(\Omega,\omega) b_{-\alpha}(\Omega,\omega) c^\dagger \right) \\
&\qquad\qquad \tilde{T} \downarrow \\
&\textstyle\sum_\alpha \left(\zeta^*_\alpha(\Omega,\omega) b^\dagger_{-\alpha}(\Omega,\omega) c \ + \ \zeta_\alpha(\Omega,\omega) b_{-\alpha}(\Omega,\omega) c^\dagger \right) \\
=&\textstyle\sum_\alpha \left(\zeta^*_{-\alpha}(\Omega,\omega) b^\dagger_\alpha(\Omega,\omega) c \ + \ \zeta_{-\alpha}(\Omega,\omega) b_\alpha(\Omega,\omega) c^\dagger \right)
\end{aligned}$$

$\tilde{C}\tilde{T}$-Invarianz bedeutet also

$$\zeta_\alpha(\Omega,\omega) = \zeta^*_{-\alpha}(\Omega,\omega) \ . \tag{3.39}$$

Die Phase von ζ kann in b absorbiert werden, sodass ζ reell gewählt werden kann. Das System besitzt dann auch $\tilde{C}$ als Symmetrie, eine Asymmetrie entsteht nicht.

Die Erzeugung einer Asymmetrie ist also ohne eine Erweiterung des Modells nicht möglich. Die einfachste Erweiterung des Systems ist ein zusätzlicher Wechselwirkungsterm

$$H_2 = \int \mathrm{d}\omega \mathrm{d}\Omega \sum_\alpha \int \mathrm{d}\omega' \mathrm{d}\Omega' \sum_{\alpha'} \eta_{\alpha\alpha'}(\Omega, \Omega', \omega, \omega') b^\dagger_\alpha(\Omega, \omega) b_{\alpha'}(\Omega', \omega') \ , \tag{3.40}$$

mit einer dimensionslosen Kopplung η, die aufgrund der Hermitizität von H

$$\eta^*_{\alpha\alpha'}(\Omega, \Omega', \omega, \omega') = \eta_{\alpha'\alpha}(\Omega', \Omega, \omega', \omega) \tag{3.41}$$

erfüllen muss. $\tilde{C}\tilde{T}$-Symmetrie bedeutet dann

$$\eta_{\alpha\alpha'}(\Omega, \Omega', \omega, \omega') = \eta^*_{(-\alpha)(-\alpha')}(\Omega, \Omega', \omega, \omega') \ . \tag{3.42}$$

Ist η komplex, so ist das Modell nicht mehr invariant unter $\tilde{C}$-Transformation. Die Phase von η kann nicht mehr in b absorbiert werden, wenn die Kopplung ζ zwischen b und c schon reell gewählt wurde.

Es ist schwierig, die Entstehung einer Asymmetrie in den Besetzungszahlen der beiden Oszillatorsorten für allgemeines η zu beschreiben. Es wird daher Folgendes über η vorausgesetzt:

$$\eta_{\alpha\alpha}(\Omega, \Omega', \omega, \omega') = 0 \tag{3.43}$$

$$\int \mathrm{d}\Omega \mathrm{d}\Omega' \, \mathrm{Im}\left(\zeta^*_1(\Omega, \omega) \eta_{1(-1)}(\Omega, \Omega', \omega, \omega') \zeta_{-1}(\Omega', \omega')\right) = \kappa \, \sigma(\omega)\sigma(\omega') \quad , \kappa = const. \tag{3.44}$$

Wie sich später herausstellen wird, lassen sich diese Annahmen im quantenfeldtheoretischen Modell motivieren.

Um jetzt die Entwicklung einer Asymmetrie zu beschreiben, wird das Modell in Störungsrechnung behandelt. Die Kopplung zwischen b und c wird exakt erfasst, nach der Kopplung η wird entwickelt.

Zunächst lässt sich der zusätzliche Wechselwirkungsterm (3.40) durch die in (3.2) definierten Operatoren $B, B^\dagger$ ausdrücken,

$$H_2 = \int \mathrm{d}\omega \mathrm{d}\Omega \sum_\alpha \int \mathrm{d}\omega' \mathrm{d}\Omega' \sum_{\alpha'} \tilde{\eta}_{\alpha\alpha'}(\Omega, \Omega', \omega, \omega') B^\dagger_\alpha(\Omega, \omega) B_{\alpha'}(\Omega', \omega') \ , \tag{3.45}$$

dabei geht $\tilde{\eta}$ aus η durch eine lineare Transformation hervor,

$$\begin{aligned}
\tilde{\eta}_{\alpha\alpha'}(\Omega, \Omega', \omega, \omega') = \eta_{\alpha\alpha'}(\Omega, \Omega', \omega, \omega') &+ \int \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\Phi \sum_\beta \eta_{\alpha\beta}(\Omega, \Phi, \omega, \varphi) \frac{\zeta_\beta(\Phi, \varphi)\zeta^*_{\alpha'}(\Omega', \omega')}{\varphi - \omega' - i\epsilon} F_{\omega'} \\
&+ \int \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\Phi \sum_\beta \eta_{\beta\alpha'}(\Phi, \Omega', \varphi, \omega') \frac{\zeta^*_\beta(\Phi, \varphi)\zeta_\alpha(\Omega, \omega)}{\varphi - \omega + i\epsilon} F^*_\omega \\
&+ \int \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\varphi' \mathrm{d}\Phi \mathrm{d}\Phi' \sum_{\beta\beta'} \eta_{\beta\beta'}(\Phi, \Phi', \varphi, \varphi') \frac{\zeta_\alpha(\Omega, \omega)\zeta^*_\beta(\Phi, \varphi)\zeta^*_{\alpha'}(\Omega', \omega')\zeta_{\beta'}(\Phi', \varphi')}{(\varphi - \omega + i\epsilon)(\varphi' - \omega' - i\epsilon)} F^*_\omega F_{\omega'} \ .
\end{aligned} \tag{3.46}$$

Die Zeitentwicklung von $B^\dagger$ ist dann

$$\begin{aligned} B^\dagger_\alpha(\Omega,\omega,t) =& e^{i\omega t}B^\dagger_\alpha(\Omega,\omega) \\ &+ \int \mathrm{d}\omega'\mathrm{d}\Omega' \sum_{\alpha'} \tilde{\eta}_{\alpha\alpha'}(\Omega,\Omega',\omega,\omega')\frac{e^{i\omega' t}-e^{i\omega t}}{\omega'-\omega}B^\dagger_{\alpha'}(\Omega',\omega') + \mathcal{O}(\eta^2) \ . \end{aligned} \tag{3.47}$$

Durch Einsetzen in die Inversionsformel (3.8) erhält man die Zeitentwicklung für $b^\dagger_\alpha(\Omega,\omega,t)$. Damit kann die Asymmetrie

$$A := \left\langle \int \mathrm{d}\omega\mathrm{d}\Omega \ \left(b^\dagger_1(\Omega,\omega,t)b_1(\Omega,\omega,t) - b^\dagger_{-1}(\Omega,\omega,t)b_{-1}(\Omega,\omega,t)\right)\right\rangle \tag{3.48}$$

bestimmt werden. Hierzu werden die Anfangswerte (3.32) verwendet und die Eigenschaften (3.43) und (3.44) von η. Bei der Durchführung der Rechnung treten einige Integrale auf, deren Ergebnisse in Anhang A gegeben sind.

Das Ergebnis der Rechnung lautet

$$A = 4\kappa \int_{\omega_c}^{\infty} \mathrm{d}\omega\, \sigma(\omega)\mathrm{Re}\left(h(\omega,t) - g(t)h^*(\omega,t)e^{-i\omega t}\right)\left(f_0 - f^{\mathrm{th}}_\beta(\omega)\right) \ . \tag{3.49}$$

Für eine reelle Kopplung η ist $\kappa = 0$, in diesem Fall verschwindet die Asymmetrie.

In der Poldominanznäherung vereinfacht sich das Resultat weiter. Unter Verwendung von (3.23) kann gezeigt werden, dass dann gilt

$$\mathrm{Re}\left(h(\omega,t) - g(t)h^*(\omega,t)e^{-i\omega t}\right) \approx \pi\sigma(\omega)\left|h(\omega,t)\right|^2 \ . \tag{3.50}$$

Das auf der rechten Seite auftretende $\sigma(\omega)$ kann bei einer scharfen Resonanz durch $\sigma(E_1) = \frac{\Gamma}{2\pi}$ ersetzt werden. Ebenso wird $f^{\mathrm{th}}_\beta(\omega)$ wie in Abschnitt 3.3.1 durch $f^{\mathrm{th}}_\beta(E_1)$ ersetzt. Mit dem Ergebnis (A.14) für das verbleibende Integral folgt für die Asymmetrie

$$A = 2\kappa\left(1 - |g(t)|^2\right)\Gamma\ \left(f_0 - f^{\mathrm{th}}_\beta(E_1)\right) \ . \tag{3.51}$$

Die Zeitableitung dieser Größe ist

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A = 2\kappa\Gamma\ \Gamma\left|g(t)\right|^2\left(f_0 - f^{\mathrm{th}}_\beta(E_1)\right) \ . \tag{3.52}$$

Mit der im ursprünglichen Modell abgeleiteten Zeitentwicklung (3.33) kann f_0 durch $f(t)$ ausgedrückt werden. Durch die zusätzliche Wechselwirkung erhält diese Entwicklung zwar auch Korrekturen, diese treten in der Entwicklung von A aber erst als Korrekturen höherer Ordnung auf. In der Poldominanznäherung lautet dann die Entwicklungsgleichung für A:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A = (2\Gamma\kappa)\Gamma\left(f(t) - f^{\mathrm{th}}_\beta(E_1)\right) \ . \tag{3.53}$$

Der erste Faktor ist dimensionslos und entspricht dem CP-Asymmetrie-Parameter ε, wie ein Vergleich mit (2.20) ergibt.

Diese Rechnung bezieht sich also auf den Quellterm für die Asymmetrie. Es wird erwartet, dass es auch einen Term gibt, der dafür sorgt, dass eine vorhandene Asymmetrie wieder abgebaut wird. Dass dieser Term nicht auftritt, ist ein erster Hinweis auf die Grenzen des Modells. Hierum geht es im nächsten Abschnitt.

3.4.2 Abbau einer Asymmetrie

Was passiert, wenn in den Anfangsbedingungen schon eine Asymmetrie vorgegeben wird? Man erwartet, dass das System dahin tendiert, diese das Gleichgewicht störende Asymmetrie abzubauen.

Die Anfangsbedingungen werden daher abweichend von (3.32) nun als

$$\left\langle b^\dagger_\alpha(\Omega,\omega) b_{\alpha'}(\Omega',\omega') \right\rangle = \delta_{\alpha\alpha'}\delta(\Omega-\Omega')\delta(\omega-\omega') f^{\mathrm{th}}_{\beta,\alpha\cdot\mu}(\omega) \tag{3.54}$$

gestellt mit dem chemischen Potenzial μ. Dabei ist

$$f^{\mathrm{th}}_{\beta,\mu}(\omega) = \frac{1}{e^{\beta(\omega-\mu)}-1} \,. \tag{3.55}$$

Die in (3.48) definierte Asymmetrie A ist bei diesen Anfangsbedingungen unendlich groß. Es wäre sinnvoller, das Verhältnis dieser Asymmetrie zur Gesamtbesetzungszahl der Badoszillatoren zu betrachten. Nichtsdestoweniger kann die Zeitableitung von A als endliche Größe erkannt werden. Dies soll zunächst im ursprünglichen Modell geschehen. Mithilfe von (3.14) und (3.54) erhält man unter Berücksichtigung von (3.25) die Zeitableitung von A,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A(t) = -\int_{\omega_c}^{\infty} \mathrm{d}\omega\, \sigma(\omega)\mathrm{Re}(h(\omega,t))(f^{\mathrm{th}}_{\beta,\mu}(\omega) - f^{\mathrm{th}}_{\beta,-\mu}(\omega)) \,. \tag{3.56}$$

Dieser Ausdruck kann nach μ entwickelt werden gemäß

$$f^{\mathrm{th}}_{\beta,\mu}(\omega) = f^{\mathrm{th}}_{\beta}(\omega) - \mu\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}f^{\mathrm{th}}_{\beta}(\omega) + \frac{\mu^2}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\omega^2}f^{\mathrm{th}}_{\beta}(\omega) + \ldots$$

Zur Asymmetrie tragen nur die ungeraden Potenzen von μ bei. Vernächlässigt man Terme der Ordnung $\mathcal{O}(\mu^3)$, so ergibt sich ein Ausdruck proportional zu μ:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A(t) = 2\mu\int_{\omega_c}^{\infty} \mathrm{d}\omega\, \sigma(\omega)\mathrm{Re}(h(\omega,t))\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}f^{\mathrm{th}}_{\beta}(\omega) \,. \tag{3.57}$$

Dies ist eine endliche Größe, die in der Poldominanznäherung (verwende (3.50)) die Form

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A(t) \approx -\mu\Gamma\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}f^{\mathrm{th}}_{\beta}(\omega)\big|_{\omega=E_1} \tag{3.58}$$

annimmt. Ein ähnlicher Term tritt auch in der Boltzmann-Gleichung (2.19) auf. Dort ist die Abbaurate proportional zur Asymmetrie, diese ist wiederum proportional zum chemischen Potenzial μ.

Es wird also Folgendes festgestellt: Ein endliches chemisches Potenzial führt zu einer Asymmetrie, die im Modell nicht abgebaut werden kann, da die Abnahme der Asymmetrie mit einer im Vergleich zur Asymmetrie unendlich kleinen Rate abläuft. Aus Abschnitt 3.4.1 folgt außerdem, dass durch den Zerfall des einzelnen Niveaus zwar eine Asymmetrie erzeugt werden kann, diese aber im Vergleich zur Gesamtbesetzungszahl unendlich klein ist, also auch keinem endlichen chemischen Potenzial entspricht. Eine solche Asymmetrie wird nicht abgebaut, das System kommt nicht ins Gleichgewicht.

Kapitel 4

Anwendung des Modells

4.1 Idee

Das in Kapitel 3 vorgestellte Modell soll nun auf das Problem der Baryo- oder Leptogenese angewendet werden. Es wird erst einmal wieder das einfache Szenario mit den Teilchen $X, a, \bar{a}, b$ und $\bar{b}$ betrachtet. Die Idee hierbei ist, den einzelnen Oszillator, der durch c und $c^\dagger$ beschrieben wird, mit dem schweren zerfallenden Teilchen X in Verbindung zu bringen und das Wärmebad der Teilchen a, b[1] mit dem Oszillatorbad zu identifizieren.

So eine Übertragung des Problems wird nur näherungsweise möglich sein, denn das Oszillatormodell ist analytisch lösbar, das ursprüngliche System nicht. Der Vorteil des Oszillatormodells liegt also darin, dass man die Zeitentwicklung selbst für große Zeiten bestimmen kann, wo eine Störungsrechnung kaum Aussagen machen kann. Man wird nun versuchen, die wesentlichen Aspekte des Langzeitverhaltens des ursprünglichen Systems mit dem Oszillatormodell zu beschreiben.

4.2 Paarzustände

4.2.1 Zusammengesetzte Operatoren

Die Felder der beteiligten Teilchen können in Fouriermoden entwickelt werden und lassen sich durch Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren ausdrücken. Die Teilchen X, a, b werden durch die Operatoren $c^{(\dagger)}, b_a^{(\dagger)}, b_b^{(\dagger)}$ beschrieben. Die Entwicklung des Feldes ϕ_X lautet z. B.

$$\phi_X(\vec{x}, t) = \int \frac{\mathrm{d}^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_q}} \left[e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} a(\vec{q}, t) + e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}} a^\dagger(\vec{q}, t) \right] \ , \tag{4.1}$$

wobei $\omega_q(\vec{q}) = \sqrt{m_X^2 + |\vec{q}|^2}$.

[1] Im Folgenden wird zwischen a und $\bar{a}$ und zwischen b und $\bar{b}$ nur unterschieden, wenn es um Fragen der Asymmetrie geht.

Der das System beschreibende Hamiltonoperator ist dann

$$H = \int \frac{\mathrm{d}^3 q}{(2\pi)^3} \omega_q(\vec{q}) c^\dagger(\vec{q}) c(\vec{q}) + \int \frac{\mathrm{d}^3 k_a}{(2\pi)^3} \omega_a(\vec{k}_a) b_a^\dagger(\vec{k}_a) b_a(\vec{k}_a) + \int \frac{\mathrm{d}^3 k_b}{(2\pi)^3} \omega_b(\vec{k}_b) b_b^\dagger(\vec{k}_b) b_b(\vec{k}_b) + H_1 \tag{4.2}$$

mit dem Wechselwirkungsterm H_1. Dieser soll die Form einer Yukawa-Wechselwirkung haben, z. B. $\lambda \int \mathrm{d}^3 x \varphi_X \varphi_a \varphi_b$ im Falle von Skalarfeldern. Entwickelt in Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren erhält man

$$H_1 = \int \frac{\mathrm{d}^3 q}{(2\pi)^3} \frac{\mathrm{d}^3 k_a}{(2\pi)^3} \frac{\mathrm{d}^3 k_b}{(2\pi)^3} (2\pi)^3 \delta(\vec{q} - \vec{k}_a - \vec{k}_b) \frac{\lambda}{\sqrt{8\omega_q \omega_a \omega_b}} \left(b_a^\dagger(\vec{k}_a) b_b^\dagger(\vec{k}_b) c(\vec{q}) + \text{h.c.} \right) + \ldots \tag{4.3}$$

Die Punkte stehen hier für Terme, die nicht direkt den Zerfall oder inversen Zerfall beschreiben wie z. B. $c\, b_a b_b$ oder $c^\dagger b_a^\dagger b_b$. Im Folgenden wird dieser Beitrag nicht betrachtet, sondern das Augenmerk nur auf die für den Zerfall verantwortlichen Terme gerichtet.

Bei der Übertragung dieses Modells werden die Operatoren $c^{(\dagger)}(\vec{q})$ mit den Operatoren $c^{(\dagger)}$ des Oszillatormodells identifiziert. Dabei entspricht die Energie E_1 jetzt der Frequenz ω_q. Das Oszillatormodell beschreibt also nur die Zeitentwicklung einer Mode zum Impuls $\vec{q}$. Die Modelle zu verschiedenen $\vec{q}$ sollen unabhängig sein, damit die Zeitentwicklung wie in Kapitel 3 bestimmt werden kann. $\vec{q}$ ist damit ein weiterer Parameter für alle Größen im Modell.

Damit sich der Wechselwirkungsterm H_1 (4.3) übertragen lässt auf das Oszillatormodell (zunächst ohne den Zusatzterm aus Abschnitt 3.4.1, siehe Gleichung (3.1)), muss folgende Identifizierung gemacht werden:

$$\begin{aligned} H_1 &= \int \frac{\mathrm{d}^3 q}{(2\pi)^3} \frac{\mathrm{d}^3 k_a}{(2\pi)^3} \frac{\mathrm{d}^3 k_b}{(2\pi)^3} (2\pi)^3 \delta(\vec{q} - \vec{k}_a - \vec{k}_b) \frac{\lambda}{\sqrt{8\omega_q \omega_a \omega_b}} \left(b_a^\dagger(\vec{k}_a) b_b^\dagger(\vec{k}_b) c(\vec{q}) + \text{h.c.} \right) \\ &\stackrel{!}{=} \int \frac{\mathrm{d}^3 q}{(2\pi)^3} \mathrm{d}\omega \mathrm{d}\Omega \left(\zeta(\Omega, \omega, \vec{q}) b^\dagger(\Omega, \omega, \vec{q}) c(\vec{q}) + \text{h.c.} \right) . \end{aligned} \tag{4.4}$$

Der Parameter Ω muss bei gegebenem Gesamtimpuls $\vec{q}$ und bei gegebener Gesamtenergie $\omega = \omega_a + \omega_b$ die Impulse $\vec{k}_a$ und $\vec{k}_b$ vollständig bestimmen. Der Index Ω steht damit für zwei kontinuierliche Parameter, beispielsweise könnte man die Richtung von $\vec{k}_a$ hierfür wählen.

Die Einzelimpulse lassen sich dann als Funktionen von $\Omega, \omega, \vec{q}$ schreiben,

$$\vec{k}_a = \vec{k}_a(\Omega, \omega, \vec{q}) \quad , \quad \vec{k}_b = \vec{k}_b(\Omega, \omega, \vec{q}) \; .$$

Damit kann in den Integralen eine Variablentransformation durchgeführt werden,

$$\int \frac{\mathrm{d}^3 k_a}{(2\pi)^3} \frac{\mathrm{d}^3 k_b}{(2\pi)^3} = \int \frac{\mathrm{d}^3 q}{(2\pi)^3} \mathrm{d}\omega \mathrm{d}\Omega \underbrace{\left| \frac{\partial(\vec{k}_a, \vec{k}_b)}{\partial(\Omega, \omega, \vec{q})} \right|}_{\text{Jacobideterminante des Koordinatenwechsels}} \frac{1}{(2\pi)^3} \; . \tag{4.5}$$

Es wird nun $f(\Omega,\omega,\vec{q}) := \left|\frac{\partial(\vec{k}_a,\vec{k}_b)}{\partial(\Omega,\omega,\vec{q})}\right| \frac{1}{(2\pi)^3}$ gesetzt. Für die Identifizierung (4.4) müssen nun zusammengesetzte Operatoren konstruiert werden:

$$b^\dagger(\Omega,\omega,\vec{q}) = \sqrt{f(\Omega,\omega,\vec{q})}\, b_a^\dagger(\vec{k}_a(\Omega,\omega,\vec{q}))b_b^\dagger(\vec{k}_b(\Omega,\omega,\vec{q}))\ . \tag{4.6}$$

Unterscheidet man zwischen Teilchen und Antiteilchen, so erhalten die zusammengesetzten Operatoren noch einen weiteren Index wie in Abschnitt 3.4.1. Damit die Identifizierung vollständig wird, muss

$$\zeta(\Omega,\omega,\vec{q}) := \frac{\lambda\sqrt{f(\Omega,\omega,\vec{q})}}{\sqrt{8\omega_q(\vec{q})\omega_a(\vec{k}_a(\Omega,\omega,\vec{q}))\omega_b(\vec{k}_b(\Omega,\omega,\vec{q}))}} \tag{4.7}$$

gesetzt werden.

Die charakteristische Funktion $\sigma(\omega,\vec{q}) = \int \mathrm{d}\Omega |\zeta(\Omega,\omega,\vec{q})|^2$ lautet dann

$$\begin{aligned}\sigma(\omega,\vec{q}) &= \int \mathrm{d}\Omega \frac{\lambda^2 f(\Omega,\omega,\vec{q})}{8\omega_q\omega_a\omega_b} \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^3q'}{(2\pi)^3}\mathrm{d}\omega'\mathrm{d}\Omega(2\pi)^3\delta(\vec{q}-\vec{q'})\delta(\omega-\omega')\frac{\lambda^2}{8\omega_q\omega_a\omega_b}f(\Omega,\omega,\vec{q}) \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^3k_a}{(2\pi)^3}\frac{\mathrm{d}^3k_b}{(2\pi)^3}(2\pi)^3\delta(\vec{q}-\vec{k}_a-\vec{k}_b)\delta(\omega-\omega_a-\omega_b)\frac{\lambda^2}{8\omega_q\omega_a\omega_b}\ .\end{aligned} \tag{4.8}$$

Dieses Ergebnis ist nur für Skalarfelder richtig. Sind beispielsweise Spinorfelder involviert, so tauchen in der Entwicklung der Felder (4.1) noch Spinorfunktionen auf. Allgemein erscheint im Ausdruck für $\sigma(\omega,\vec{q})$ das über innere Freiheitsgrade (z. B. Spin) summierte Absolutquadrat des Matrixelements für den Zerfall auf Baumniveau auf (siehe Anhang C.1):

$$\sigma(\omega,\vec{q}) = \int \frac{\mathrm{d}^3k_a}{(2\pi)^3}\frac{\mathrm{d}^3k_b}{(2\pi)^3}\frac{1}{8\omega_q\omega_a\omega_b}(2\pi)^3\delta(\vec{q}-\vec{k}_a-\vec{k}_b)\delta(\omega-\omega_a-\omega_b)\sum_{\text{spins}}|\mathcal{M}(q,k_a,k_b)|^2\ . \tag{4.9}$$

Da $\omega \neq \omega_q$ möglich ist, beschreibt das im Vergleich zur Streutheorie verallgemeinerte Matrixelement einen Prozess ohne Energieerhaltung.

Für $\omega = \omega_q$ ergibt sich aber gerade der Ausdruck für die Zerfallsrate eines Teilchens X mit Impuls $\vec{q}$, d. h. es gilt

$$\sigma(\omega_q,\vec{q}) = \frac{1}{2\pi}\Gamma_X(\vec{q}) = \frac{1}{2\pi}\frac{m_X}{\omega_q}\Gamma_X^{\text{rs}}\ , \tag{4.10}$$

wobei Γ_X^{rs} die Zerfallsrate im Ruhesystem von X ist.

4.2.2 Struktur der Wechselwirkung

Sei $\sigma_0(\omega) := \sigma(\omega,\vec{q}=0)$. Falls $\mathcal{M}(q,k_a,k_b)$ unabhängig von q ist, gilt

$$\sigma(\omega,\vec{q}) = \frac{m_X}{\omega_q}\sigma_0(\sqrt{\omega^2-\vec{q}^2})\ . \tag{4.11}$$

Die Funktion $\sigma_0(\omega)$ hängt vom verwendeten Zerfallsmodell ab. Im Falle einer Wechselwirkung zwischen drei skalaren Feldern ergibt sich

$$\sigma_0(\omega) = \frac{\lambda^2}{32\pi^2 m_X}\left(1-\frac{4m^2}{\omega^2}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{4.12}$$

für gleiche Massen m der Teilchen a, b. Die Schwellenenergie beträgt hier $\omega_c = 2m$.

Für den Zerfall eines skalaren Teilchens in zwei Spin-$\frac{1}{2}$-Fermionen $\phi_X \to \psi\overline{\psi}$ mit der dazugehörigen Lagrangedichte $\mathcal{L}_1 = \lambda\phi\overline{\psi}\psi$ ergibt sich

$$\sigma_0(\omega) = \frac{\lambda^2}{16\pi^2 m_X}\omega^2\left(1-\frac{4m^2}{\omega^2}\right)^{\frac{3}{2}} , \tag{4.13}$$

m ist hierbei die Masse der Fermionen, die Schwellenenergie ist wieder $\omega_c = 2m$.

Beim Zerfall der schweren Majorana-Neutrinos $N_1 \to \varphi l$ tritt gerade der Fall auf, dass $\mathcal{M}(q, k_a, k_b)$ von q abhängt und damit die einfache Relation (4.11) nicht mehr gilt. Vielmehr erhält man

$$\sigma(\omega, \vec{q}) = \frac{M_1}{\omega_q}\frac{\omega_q\omega - \vec{q}^2}{M_1\sqrt{\omega^2-\vec{q}^2}}\sigma_0(\sqrt{\omega^2-\vec{q}^2}) . \tag{4.14}$$

Hier ist

$$\sigma_0(\omega) = \frac{(\lambda_\nu^\dagger\lambda_\nu)_{11}}{16\pi^2}\omega , \tag{4.15}$$

wenn die Massen der Zerfallsprodukte vernachlässigt werden. Der Vergleich mit (2.23) zeigt auch wieder, dass

$$\sigma_0(M_1) = \frac{\Gamma_1^{\mathrm{rs}}}{2\pi} .$$

4.2.3 Thermische Verteilung

Bei der Übertragung des Modells müssen auch die Anfangsverteilungen betrachtet werden. Man setzt voraus, dass die Teilchen a, b zu Beginn einer freien thermischen Verteilung folgen, d. h.

$$\begin{aligned}\left\langle b_a^\dagger(\vec{k}_a)b_a(\vec{k}'_a)\right\rangle &= (2\pi)^3\delta(\vec{k}_a-\vec{k}'_a)f_{a,\beta}^{\mathrm{th}}(\vec{k}_a)\\ \left\langle b_b^\dagger(\vec{k}_b)b_b(\vec{k}'_b)\right\rangle &= (2\pi)^3\delta(\vec{k}_b-\vec{k}'_b)f_{b,\beta}^{\mathrm{th}}(\vec{k}_b) ,\end{aligned}$$

und a und b sollen unkorreliert sein (sofern a und b verschiedene Teilchen sind).

Gemäß der Definition (4.6) der zusammengesetzten Operatoren $b(\Omega, \omega, \vec{q})$ ergibt sich für diese die Anfangsverteilung

$$\begin{aligned}\left\langle b^\dagger(\Omega,\omega,\vec{q})b(\Omega',\omega',\vec{q}')\right\rangle &= \sqrt{f(\Omega,\omega,\vec{q})f(\Omega',\omega',\vec{q}')}\left\langle b_a^\dagger(\vec{k}_a)b_b^\dagger(\vec{k}_b)b_a(\vec{k}'_a)b_b(\vec{k}'_b)\right\rangle\\ &= f(\Omega,\omega,\vec{q})(2\pi)^6\delta(\vec{k}_a-\vec{k}'_a)\delta(\vec{k}_b-\vec{k}'_b)f_{a,\beta}^{\mathrm{th}}(\vec{k}_a)f_{b,\beta}^{\mathrm{th}}(\vec{k}_b)\\ &= (2\pi)^3\delta(\vec{q}-\vec{q}')\delta(\omega-\omega')\delta(\Omega-\Omega')f_{a,\beta}^{\mathrm{th}}(\vec{k}_a)f_{b,\beta}^{\mathrm{th}}(\vec{k}_b) .\end{aligned}$$

Das hier auftretende Produkt der thermischen Verteilungsfunktionen hängt über $\vec{k}_a$ und $\vec{k}_b$ auch von Ω ab und ist somit keine nur von ω abhängige Verteilungsfunktion wie in (3.32). Viele der im Kapitel 3 geführten Rechnungen beruhen aber gerade darauf, dass eine Ω-Abhängigkeit nur in der Kopplung $\zeta(\Omega,\omega)$ auftritt.

Im klassischen Grenzfall niedriger Besetzungszahlen folgen die Verteilungsfunktionen der Maxwell-Boltzmann-Statistik. Neben der Temperatur soll noch ein chemisches Potenzial μ auftreten, das die Anwesenheit einer Asymmetrie in der Häufigkeit von b und $\overline{b}$ beschreibt. Also ist

$$\begin{aligned} f^{\mathrm{th}}_{a,\beta}(\vec{k}_a) = e^{-\beta\omega_a}\ ,\ f^{\mathrm{th}}_{b/\overline{b},\beta,\mu}(\vec{k}_b) = e^{-\beta(\omega_b\mp\mu)} \\ \Rightarrow f^{\mathrm{th}}_{a,\beta}(\vec{k}_a) f^{\mathrm{th}}_{b,\beta,\mu}(\vec{k}_b) = e^{-\beta(\omega-\mu)}\ , \end{aligned}$$

sodass das Produkt der Verteilungsfunktionen wieder eine Maxwell-Boltzmann-Verteilung in ω ist. In diesem Fall sind also die Ergebnisse aus Kapitel 3 anwendbar.

4.3 Schwierigkeiten

4.3.1 Kommutator und kinetischer Term

Durch die Definition der zusammengesetzten Operatoren (4.6) konnte der Zerfallsanteil des Wechselwirkungsterms des quantenfeldtheoretischen Modells in das Oszillatormodell übertragen werden. Es ist nun möglich, Ergebnisse des Oszillatormodells auf die Entwicklung der Teilchen X,a,b zu übertragen. Um zu verstehen, wie der Zusammenhang zwischen der tatsächlichen Entwicklung und der Entwicklung im Oszillatormodell ist, müssen die Unterschiede klar herausgearbeitet werden.

Es fällt auf, dass der kinetische Anteil der Badteilchen im Oszillatormodell eine andere Form hat als der kinetische Term der Zerfallsprodukte a,b:

$$\begin{aligned} H_{\mathrm{Bad}} &= \int\frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\Omega\,\omega b^\dagger(\Omega,\omega,\vec{q})b(\Omega,\omega,\vec{q}) \\ &= \int\frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\Omega\,\omega f(\Omega,\omega,\vec{q})b_a^\dagger(\vec{k}_a)b_b^\dagger(\vec{k}_b)b_a(\vec{k}_a)b_b(\vec{k}_b) \\ &= \int\frac{\mathrm{d}^3k_a}{(2\pi)^3}\frac{\mathrm{d}^3k_b}{(2\pi)^3}(\omega_a+\omega_b)b_a^\dagger(\vec{k}_a)b_b^\dagger(\vec{k}_b)b_a(\vec{k}_a)b_b(\vec{k}_b) \\ &= N_aH_b + N_bH_a \\ H_a + H_b &= \int\frac{\mathrm{d}^3k_a}{(2\pi)^3}\omega_a(\vec{k}_a)b_a^\dagger(\vec{k}_a)b_a(\vec{k}_a) + \int\frac{\mathrm{d}^3k_b}{(2\pi)^3}\omega_b(\vec{k}_b)b_b^\dagger(\vec{k}_b)b_b(\vec{k}_b)\ . \end{aligned}$$

Hierbei bezeichnen N_a und N_b jeweils die Teilchenzahloperatoren.

Offensichtlich sind die kinetischen Terme verschieden. Die Zeitentwicklung im Oszillatormodell wird also von einem modifizierten Hamiltonoperator $\tilde{H} = \tilde{H}_0 + H_1$ beherrscht.

Eine weitere Modifikation erfahren die Vertauschungsrelationen. Die zusammengesetzten Operatoren $b^{(\dagger)}(\Omega,\omega,\vec{q})$ sollten die Relationen

$$\begin{aligned}
&[b(\Omega,\omega,\vec{q}),b^\dagger(\Omega',\omega',\vec{q'})]\\
&= \sqrt{f(\Omega,\omega,\vec{q})f(\Omega',\omega',\vec{q'})}[b_a(\vec{k}_a)b_b(\vec{k}_b),b_a^\dagger(\vec{k}'_a)b_b^\dagger(\vec{k}'_b)]\\
&= \sqrt{ff'}\Big((2\pi)^6\delta(\vec{k}_a-\vec{k}'_a)\delta(\vec{k}_b-\vec{k}'_b)\\
&\quad +(2\pi)^3\delta(\vec{k}_a-\vec{k}'_a)b_b^\dagger(\vec{k}'_b)b_b(\vec{k}_b)+(2\pi)^3\delta(\vec{k}_b-\vec{k}'_b)b_a^\dagger(\vec{k}'_a)b_a(\vec{k}_a)\Big)\\
&= (2\pi)^3\delta(\vec{q}-\vec{q'})\delta(\omega-\omega')\delta(\Omega-\Omega')\\
&\quad +\sqrt{ff'}\Big((2\pi)^3\delta(\vec{k}_a-\vec{k}'_a)b_b^\dagger(\vec{k}'_b)b_b(\vec{k}_b)+(2\pi)^3\delta(\vec{k}_b-\vec{k}'_b)b_a^\dagger(\vec{k}'_a)b_a(\vec{k}_a)\Big)
\end{aligned}$$

erfüllen. Im Oszillatormodell taucht nur der erste Summand auf, der so veränderte Kommutator wird mit $[\cdot,\cdot]_\sim$ bezeichnet,

$$[b(\Omega,\omega,\vec{q}),b^\dagger(\Omega',\omega',\vec{q'})]_\sim=(2\pi)^3\delta(\vec{q}-\vec{q'})\delta(\omega-\omega')\delta(\Omega-\Omega')\;. \tag{4.16}$$

Auch dies beeinflusst natürlich die Zeitentwicklung.

Was für Auswirkungen haben diese Modifikationen? Zunächst bemerkt man, dass die Modifikationen nicht unabhängig zu sehen sind, sondern derart geschaffen sind, dass die freie Entwicklung der Systeme identisch ist:

$$[\tilde{H}_0,\,\cdot\,]_\sim=[H_0,\,\cdot\,]\;. \tag{4.17}$$

Zu beachten ist natürlich, dass im Oszillatormodell nur die Entwicklung von Operatoren betrachtet werden kann, die in der von $c^{(\dagger)},b^{(\dagger)}$ erzeugten Algebra liegen. Die Identifizierung (4.6) gibt eine eindeutige Abbildung[2] von normalgeordneten Produkten in normalgeordnete Produkte in der von $c^{(\dagger)},b_a^{(\dagger)},b_b^{(\dagger)}$ erzeugten Algebra. Für solche Produkte gilt (4.17). Die Abbildung ist aber nicht injektiv, daher gibt es keine Umkehrung.

Anders sieht es bei der Entwicklung bei nicht verschwindender Kopplung aus. Es gilt zwar

$$[H_1,c^{(\dagger)}]_\sim=[H_1,c^{(\dagger)}]\;, \tag{4.18}$$

aber

$$\begin{aligned}
[H_1,b^\dagger(\Omega,\omega,\vec{q})]_\sim &= c^\dagger(\vec{q})\zeta^*(\Omega,\omega,\vec{q})\\
[H_1,\sqrt{f}b_a^\dagger(\vec{k}_a)b_b^\dagger(\vec{k}_b)] &= c^\dagger(\vec{q})\zeta^*(\Omega,\omega,\vec{q})\\
&\quad +\sqrt{f}\int\frac{\mathrm{d}^3q'}{(2\pi)^3}\frac{\lambda}{\sqrt{8\omega_q\omega_a\omega_b}}c^\dagger(\vec{q'})\left(b_a^\dagger(\vec{k}_a)b_a(\vec{q'}-\vec{k}_b)+b_b^\dagger(\vec{k}_b)b_b(\vec{q'}-\vec{k}_a)\right)\;.
\end{aligned}$$

[2] Im Grunde sollte in der Identifizierung (4.6) eine Abbildungsvorschrift stehen statt eines Gleichheitszeichens. Letzteres wurde lediglich aus Notationsgründen gewählt und sollte nicht zu Missverständnissen führen.

Es soll nun die Zeitentwicklung von $c^\dagger(\vec{q})c(\vec{q})$ in beiden Systemen verglichen werden. Formal lässt sich schreiben

$$e^{iHt}c^\dagger(\vec{q})c(\vec{q})e^{-iHt} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \underbrace{i[H, i[H, \ldots i[H}_{n-mal}, c^\dagger(\vec{q})c(\vec{q})] \ldots]] \; . \tag{4.19}$$

Dabei ist

$$i[H, c^\dagger(\vec{q})c(\vec{q})]_{(\sim)} = \int \mathrm{d}\omega \mathrm{d}\Omega \, \zeta(\Omega, \omega, \vec{q}) \left(i b^\dagger(\Omega, \omega, \vec{q}) c(\vec{q}) + \mathrm{h.c.} \right) \tag{4.20}$$

für beide Systeme noch gleich. Dann gilt aber

$$\begin{aligned}
&i[H_1, i[H, c^\dagger(\vec{q})c(\vec{q})]] = \\
&\quad \int \frac{\mathrm{d}^3q'}{(2\pi)^3} \frac{\mathrm{d}^3k_a}{(2\pi)^3} \frac{\mathrm{d}^3k_b}{(2\pi)^3} \frac{\mathrm{d}^3k'_a}{(2\pi)^3} \frac{\mathrm{d}^3k'_b}{(2\pi)^3} \\
&\quad \times (2\pi)^6 \delta(\vec{q} - \vec{k}_a - \vec{k}_b) \delta(\vec{q'} - \vec{k}'_a - \vec{k}'_b) \frac{\lambda^2}{8\sqrt{\omega_q \omega_a \omega_b \omega_{q'} \omega_{a'} \omega_{b'}}} \\
&\quad \times \Big((2\pi)^3 \delta(\vec{q} - \vec{q'}) b_a^\dagger(\vec{k}_a) b_a(\vec{k}'_a) b_b^\dagger(\vec{k}_b) b_b(\vec{k}'_b) - (2\pi)^6 \delta(\vec{k}_a - \vec{k}'_a) \delta(\vec{k}_b - \vec{k}'_b) c^\dagger(\vec{q'}) c(\vec{q}) \\
&\quad - (2\pi)^3 \delta(\vec{k}_a - \vec{k}'_a) c^\dagger(\vec{q'}) c(\vec{q}) b_b^\dagger(\vec{k}_b) b_b(\vec{k}'_b) - (2\pi)^3 \delta(\vec{k}_b - \vec{k}'_b) c^\dagger(\vec{q'}) c(\vec{q}) b_a^\dagger(\vec{k}_a) b_a(\vec{k}'_a) + \mathrm{h.c.} \Big) \; .
\end{aligned}$$

Beim entsprechenden Ausdruck im Oszillatormodell treten die letzten beiden Terme nicht auf.

Rechnet man den Erwartungswert dieses Beitrags aus, so tritt ein Term $(2\pi)^3 \delta^{(3)}(0)$ auf, der als Volumenterm V interpretiert wird. Der Erwartungswert lautet:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{V} \left\langle i[H_1, i[H, c^\dagger(\vec{q})c(\vec{q})]] \right\rangle = \int \frac{\mathrm{d}^3k_a}{(2\pi)^3} \frac{\mathrm{d}^3k_b}{(2\pi)^3} (2\pi)^3 \delta(\vec{q} - \vec{k}_a - \vec{k}_b) \frac{\lambda^2}{8\omega_q \omega_a \omega_b} \\
\times \left(f_\beta^{\mathrm{th}}(\vec{k}_a) f_\beta^{\mathrm{th}}(\vec{k}_b) - f(\vec{q})(1 + f_\beta^{\mathrm{th}}(\vec{k}_a) + f_\beta^{\mathrm{th}}(\vec{k}_b)) \right) \; .
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Der Übergang zum Oszillatormodell bedeutet, die Näherung

$$1 + f_\beta^{\mathrm{th}}(\vec{k}_a) + f_\beta^{\mathrm{th}}(\vec{k}_b) \approx 1 \tag{4.22}$$

zu machen.

Man sieht schon, worauf es hinausläuft: Ordnet man die Summanden in normalgeordnete Produkte, so sind es nur die quadratischen Ausdrücke in $c^{(\dagger)}, b^{(\dagger)}$, die auch im Oszillatormodell auftauchen. Geht man zu Erwartungswerten über, so bedeutet der Übergang, dass Besetzungszahlen f, f_β^{th} gegenüber 1 vernachlässigt werden. Im Falle niedriger Besetzungszahlen wird das Oszillatormodell die wichtigsten Terme der Zeitentwicklung widerspiegeln.

Während also die Zeitentwicklung von $c^\dagger(\vec{q})c(\vec{q})$ in beiden Systemen ähnlich sein sollte, ist die Betrachtung für die Badteilchen schwieriger. Dies sieht man schon daran, dass im

ursprünglichen System die Teilchenzahl $N_a + N_c$ bzw. $N_b + N_c$ erhalten ist, im Oszillatormodell dagegen $N_a N_b + N_c$, denn aufgrund der Identifizierung (4.6) ist

$$N_a N_b = \int \frac{\mathrm{d}^3 q}{(2\pi)^3} \mathrm{d}\omega \mathrm{d}\Omega b^\dagger(\Omega, \omega, \vec{q}) b(\Omega, \omega, \vec{q}) \tag{4.23}$$

der Besetzungszahloperator des Oszillatorbades.

Die Zeitentwicklung von $N_a N_b$ wird sich also in den beiden Systemen stark unterscheiden. Man stellt aber fest, dass gilt:

$$\begin{aligned} i[\tilde{H}, N_a N_b]_\sim &= i[H, N_a] = i[H, N_b] \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^3 q}{(2\pi)^3} \frac{\mathrm{d}^3 k_a}{(2\pi)^3} \frac{\mathrm{d}^3 k_b}{(2\pi)^3} (2\pi)^3 \delta(\vec{q} - \vec{k}_a - \vec{k}_b) \frac{\lambda}{\sqrt{8\omega_q \omega_a \omega_b}} \left(i c^\dagger(\vec{q}) b_a(\vec{k}_a) b_b(\vec{k}_b) + \text{h.c.} \right) . \end{aligned} \tag{4.24}$$

Parametrisiert man die Zeitentwicklung im Oszillatormodell mit τ, so bedeutet diese Gleichung, dass zum Zeitpunkt der Identifizierung der Systeme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(N_a N_b) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} N_a \tag{4.25}$$

gilt. Unterscheidet man wieder zwischen Teilchen und Antiteilchen, so erhält man eine entsprechende Beziehung für die Änderung der Asymmetrie in den zwei Systemen[3],

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} A = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(N_b - N_{\bar{b}}) . \tag{4.26}$$

Diese Übereinstimmung kann helfen, auch die Entwicklung der Badteilchen in den Systemen zu vergleichen. Für die Zeitentwicklung eines Terms wie in (4.24) gilt das, was schon bei der Zeitentwicklung von $c^\dagger(\vec{q}) c(\vec{q})$ diskutiert wurde. Bei kleinen Besetzungszahlen wird die Zeitentwicklung in den beiden Systemen vergleichbar.

Das bedeutet also, dass die Rate, mit der eine Asymmetrie $N_b - N_{\bar{b}}$ erzeugt oder vernichtet wird, im Oszillatormodell bestimmt werden kann durch $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} A$, auch wenn die absolute Größe von A keine Bedeutung im ursprünglichen System hat.

Nun sind die Resultate aus den Abschnitten 3.4.1 und 3.4.2 nicht mehr verwunderlich. Es wurde dort festgestellt, dass eine durch ein chemisches Potenzial μ vorgegebene Asymmetrie einen dieser Asymmetrie entgegengerichteten Term in $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} A$ hervorruft, wie er auch in den Boltzmann-Gleichungen (2.19) vorkommt. Die Asymmetrieänderungsrate wird also zunächst richtig wiedergegeben, auch wenn die Asymmetrie im Oszillatormodell nicht abgebaut wird. Auf Dauer wird deshalb aber auch die Rate falsch werden. Denn diese sollte mit der Zeit abnehmen, dadurch dass die Asymmetrie abgebaut wird. Im Oszillatormodell ist dies nicht der Fall, die Abbaurate pendelt sich auf einen konstanten Wert ein.

[3] Zur Definition von A siehe (3.48).

4.3.2 Asymmetrieabbau

Wie kann im Oszillatormodell also ein Abbau der Asymmetrie beschrieben werden? Da im Oszillatormodell selbst keine Änderung der Asymmetrie auftritt, muss die Asymmetrieänderung von außen eingegeben werden. Es gibt eine einfache Möglichkeit, Gleichungen zu erhalten, die den gewöhnlichen Boltzmann-Gleichungen entsprechen [22]: Das in der Ratengleichung (3.57) auftauchende μ wird ersetzt durch ein zeitabhängiges $\mu(t)$. Dieses $\mu(t)$ wird aus der Asymmetrie bestimmt, denn für $\mu \ll T$ ist die Asymmetrie proportional zum chemischen Potenzial, $\mu \propto \frac{1}{V}\langle N_b - N_{\bar{b}}\rangle$.

Auf diese Weise wirkt eine Änderung der Asymmetrie zurück auf die Rate, mit der sich die Asymmetrie ändert.

Es ist leider nicht klar, wie gut das System nach diesem manuellen Eingriff beschrieben wird. Die geänderte Asymmetrie $\mu(t)$ wird in die Anfangsbedingungen des Systems eingebaut, die Änderung der Asymmetrie zur Zeit t wird also so berechnet, als wäre das chemische Potenzial zu Beginn $\mu(t)$ gewesen. Es wäre wünschenswert, einen besseren Ansatz für dieses Problem zur Verfügung zu haben.

4.3.3 Expansion und Abkühlung

Ein ganz anderes Problem besteht darin, in das System die Expansion und Abkühlung des Universums zu berücksichtigen. Es gibt hierbei zwei Aspekte. Der eine Aspekt besteht in der Abnahme der Dichte der Teilchen X durch die Expansion. In der Bilanzgleichung für die Dichte kann dies durch eine Ersetzung

$$\dot{n}_X \to \dot{n}_X + 3Hn_X \tag{4.27}$$

berücksichtigt werden.

Der andere Aspekt besteht in der Abnahme der Temperatur und der Verdünnung des Teilchenbades. Das Problem ist hier ähnlich gelagert wie bei der Berücksichtigung der Asymmetrieänderung: es tritt eine Änderung am Bad auf, die, da sie im Modell nicht vorgesehen ist, von außen eingebaut werden muss. Auch in diesem Fall wird in [22] vorgeschlagen, in den Bilanzgleichungen zur Zeit t eine Ersetzung $T(t_0) \to T(t)$ zu machen. In der Näherung schwacher Kopplung erhält man dann aus dem Oszillatormodell die Boltzmann-Gleichungen, es gelten für diese Ersetzung aber die gleichen Vorbehalte wie in Abschnitt 4.3.2.

4.4 *CP*-Verletzung

4.4.1 Ausintegration der schweren Generationen

Am Beispiel der Leptogenese wurde klar, dass für eine *CP*-Verletzung das Vorhandensein mehrerer Generationen nötig ist. Die Verletzung trat dort als Interferenz zwischen dem Baumgraphen

und den Einschleifendiagrammen mit einem virtuellen Neutrino einer schwereren Generation auf. Das Oszillatormodell eignet sich aber nur für die Beschreibung einer Generation. Wie in Abschnitt 3.4.1 deutlich wurde, kann im ursprünglichen Oszillatormodell auch keine *CP*-Verletzung eingebaut werden.

Wenn die Temperatur deutlich unter den Massen der schweren Generationen liegt, so treten diese schweren Felder nur in Schleifendiagrammen auf, die eigentliche Dynamik des Zerfallsvorgangs steckt in der leichtesten Generation und dem Bad der Zerfallprodukte. Nur diese sind auch Bestandteil des Oszillatormodells, und es bietet sich an, zu einer effektiven Theorie überzugehen durch Ausintegration der schweren Neutrinogenerationen.

Der Anteil der schweren Majorana-Neutrinos in der Lagrangedichte lautet (vergleiche (2.22))

$$\mathcal{L}_N = \sum_i \frac{1}{2}\overline{N}_i(i\partial\!\!\!/ - M_i)N_i + \sum_{i,j}\left(\lambda^*_{\nu ji}\overline{l_{Lj}}\epsilon\phi^\dagger N_i + \lambda_{\nu ji}\overline{N}_i l_{Lj}\epsilon\phi\right) \ . \tag{4.28}$$

Berücksichtigt man $\overline{N}_i = N_i^T\mathrm{C}$ mit der unitären Ladungskonjugationsmatrix C, so erhält man

$$\mathcal{L}_N = \sum_i \frac{1}{2}N_i^T\mathrm{C}(i\partial\!\!\!/ - M_i)N_i + \sum_i N_i^T\mathrm{C}X_i \tag{4.29}$$

mit

$$X_i = \sum_j\left(-\lambda^*_{\nu ji}(\overline{l_{Lj}}\mathrm{C})^T\epsilon\phi^\dagger + \lambda_{\nu ji}l_{Lj}\epsilon\phi\right) \ . \tag{4.30}$$

Diese Lagrangedichte bestimmt die Wirkung

$$S[N,\phi,l] = \int \mathrm{d}x\,\mathcal{L} \ .$$

Die effektive Wirkung nach Ausintegration der schweren Generationen $i = 1,2$ lautet in der Pfadintegralformulierung [25]

$$e^{i\Gamma_{\mathrm{eff}}[N_1,\phi,l]} = \int[\mathrm{d}N_2][\mathrm{d}N_3]e^{iS[N,\phi,l]} \ . \tag{4.31}$$

Jetzt werden $\tilde{N}_i, i = 2,3$, so gewählt, dass

$$\left.\frac{\partial S[N,\phi,l]}{\partial N_i(x)}\right|_{N_i=\tilde{N}_i} = 0 \ ,$$

d.h. die $\tilde{N}_i$ erfüllen die Euler-Lagrange-Gleichungen der klassischen Feldtheorie:

$$(i\partial\!\!\!/ - M_i)\tilde{N}_i = -X_i \ . \tag{4.32}$$

Entwickelt man die Wirkung nun um $\tilde{N}_i$, so ergibt sich

$$S[N,\phi,l] = S[\tilde{N}_i,N_1,\phi,l] + S_2[N_i - \tilde{N}_i] \ ,$$

wobei S_2 quadratisch in $N_i - \tilde{N}_i$ und unabhängig von den übrigen Feldern ist. Bei der Gauß-Integration über die schweren Moden liefert dieser Term daher nur einen konstanten Beitrag. Die effektive Wirkung ist also

$$\Gamma_{\text{eff}}[N_1, \phi, l] = S[\tilde{N}_i, N_1, \phi, l] \,,$$

wobei die $\tilde{N}_i$ gegeben sind durch

$$\tilde{N}_i = (M_i - i\partial\!\!\!/)^{-1} X_i \ .$$

Interessiert man sich nur für Temperaturen $T \ll M_2, M_3$, so kann der Propagator in Niederenergienäherung als $\frac{1}{M_i}$ gesetzt werden, also

$$\tilde{N}_i = \frac{1}{M_i} X_i \ , i = 2, 3 \ .$$

Dies eingesetzt in die Lagrangedichte ergibt für den Anteil der beiden schweren Generationen

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{eff}}^{2,3} &= \sum_{i=2,3} \left(-\frac{1}{2M_i} X_i^T \mathrm{C} X_i + \frac{1}{M_i} X_i^T \mathrm{C} X_i \right) \\ &= \sum_{i=2,3} \frac{1}{2M_i} X_i^T \mathrm{C} X_i \ . \end{aligned}$$

Ersetzt man X_i gemäß (4.30), so wird daraus

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}^{2,3} = \sum_{\substack{i,j,k \\ i \neq 1}} \frac{1}{2M_i} \left(\lambda_{\nu ji}^* \lambda_{\nu ki}^* \, \overline{l_{Lj}} \epsilon \phi^\dagger \, \mathrm{C} \, \overline{l_{Lk}}^{\,T} \epsilon \phi^\dagger + \lambda_{\nu ji} \lambda_{\nu ki} \, l_{Lj}^T \epsilon \phi \, \mathrm{C} \, l_{Lk} \epsilon \phi \right) \ . \tag{4.33}$$

Dabei ist zu beachten, dass Produkte der Form $\overline{l_{Lj}} l_{Lk}$ Null ergeben.

Man erhält also effektiv eine neue Viererkopplung zwischen Leptonen und Higgs-Bosonen. Diese Kopplung verletzt Leptonenzahlerhaltung.

Insgesamt ergibt sich daraus der Hamiltonoperator

$$\begin{aligned} H = & \underbrace{\int \mathrm{d}^3x \left(\frac{1}{2} N_1^T \mathrm{C} (i\vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} + M_1) N_1 + \sum_{i,a} \overline{l_{Li}^a} (i\vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla}) l_{Li}^a + \sum_a (\partial_0 \phi^{a\dagger} \partial_0 \phi^a + \vec{\nabla} \phi^{a\dagger} \cdot \vec{\nabla} \phi^a) \right)}_{H_0} \\ & \underbrace{- \int \mathrm{d}^3x \sum_i (\lambda_{\nu i1} \, N_1^T \mathrm{C} L_i + \lambda_{\nu i1}^* \, \overline{L_i} N_1)}_{H_1} \\ & \underbrace{- \int \mathrm{d}^3x \sum_{\substack{i,j,k \\ i \neq 1}} \frac{1}{2M_i} \left(\lambda_{\nu ji} \lambda_{\nu ki} \, L_j^T \mathrm{C} L_k + \lambda_{\nu ji}^* \lambda_{\nu ki}^* \, \overline{L_j} \mathrm{C} \overline{L_k}^{\,T} \right)}_{H_2} \end{aligned} \tag{4.34}$$

mit $L_i := l_{Li} \epsilon \phi$.

4.4.2 Übertragung auf das Oszillatormodell

Nun soll die Übertragung auf das Oszillatormodell geschehen. Dazu werden die Felder in Fouriermoden entwickelt[4]:

$$N_1(x) = \sum_s \int \frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3\sqrt{2\omega_q}} \left(c_s(\vec{q},t)u_s(\vec{q})e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} + c_s^\dagger(\vec{q})v_s(\vec{q})e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}}\right) \tag{4.35}$$

$$l_{Li}^a(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3\sqrt{2\omega_k}} \left(a_{ia}(\vec{k},t)u_L(\vec{k})e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + b_{ia}^\dagger(\vec{k},t)v_L(\vec{k})e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}\right) \tag{4.36}$$

$$\phi^a(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3\sqrt{2\omega_k}} \left(\tilde{a}_a(\vec{k},t)e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + \tilde{b}_a^\dagger(\vec{k},t)e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}\right) . \tag{4.37}$$

Dabei stehen s für den Spin, i für die Generation und a für den schwachen Isospin. Diese Entwicklungen können nun in den Ausdruck für H eingesetzt werden. Für den normalgeordneten kinetischen Anteil ergibt sich

$$\begin{aligned} H_0 = &\int \frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3} \sum_s \omega_q c_s^\dagger(\vec{q})c_s(\vec{q}) && \text{(Neutrinos)} \\ &+ \sum_{ia} \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3} \omega_k \left(a_{ia}^\dagger(\vec{k})a_{ia}(\vec{k}) + b_{ia}^\dagger(\vec{k})b_{ia}(\vec{k})\right) && \text{(Leptonen)} \\ &+ \sum_a \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3} \omega_k \left(\tilde{a}_a^\dagger(\vec{k})\tilde{a}_a(\vec{k}) + \tilde{b}_a^\dagger(\vec{k})\tilde{b}_a(\vec{k})\right) . && \text{(Higgs-Bosonen)} \end{aligned}$$

Der Wechselwirkungsterm H_1 kann wie in Abschnitt 4.2 in das Oszillatormodell übertragen werden. Dabei werden nur die Anteile berücksichtigt, die direkt den Zerfall oder inversen Zerfall der Neutrinos N_1 beschreiben, d.h. nur solche, die sich ins Oszillatormodell übertragen lassen:

$$\begin{aligned} H_1 = &\int \frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3} \frac{\mathrm{d}^3k_1}{(2\pi)^3} \frac{\mathrm{d}^3k_2}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{8\omega_q\omega_1\omega_2}} \sum_{s,i} (2\pi)^3\delta(\vec{q}-\vec{k}_1-\vec{k}_2) \\ &\times \Big(\left(\lambda_{\nu i1}\, b_i^\dagger(\vec{k}_1)\epsilon\tilde{b}^\dagger(\vec{k}_2)\; u_s^T(\vec{q})\mathrm{C}v_L(\vec{k}_1) - \lambda_{\nu i1}^*\, a_i^\dagger(\vec{k}_1)\epsilon\tilde{a}^\dagger(\vec{k}_2)\; \overline{u_L}(\vec{k}_1)u_s(\vec{q}) + \ldots\right)c_s(\vec{q}) \\ &+ c_s^\dagger(\vec{q})\left(-\lambda_{\nu i1}\, a_i(\vec{k}_1)\epsilon\tilde{a}(\vec{k}_2)\; v_s^T(\vec{q})\mathrm{C}u_L(\vec{k}_1) + \lambda_{\nu i1}^*\, b_i(\vec{k}_1)\epsilon\tilde{b}(\vec{k}_2)\; \overline{v_L}(\vec{k}_1)v_s(\vec{q}) + \ldots\right)\Big) . \end{aligned}$$

[4] zu den Normierungen und Konventionen siehe Anhang B

Genauso lässt sich H_2 entwickeln, auch hier werden nur die Anteile ausgeschrieben, die sich ins Oszillatormodell übertragen lassen:

$$\begin{aligned}H_2 = &\int \frac{\mathrm{d}^3k_1}{(2\pi)^3}\frac{\mathrm{d}^3k_2}{(2\pi)^3}\frac{\mathrm{d}^3k_3}{(2\pi)^3}\frac{\mathrm{d}^3k_4}{(2\pi)^3}\frac{1}{4\sqrt{\omega_1\omega_2\omega_3\omega_4}}\sum_{\substack{i,j,k\\ i\neq 1}}\sum_{abcd}(2\pi)^3\delta(\vec{k}_1+\vec{k}_2-\vec{k}_3-\vec{k}_4)\\ &\frac{1}{M_i}\Big(\big(-\lambda_{\nu ji}\lambda_{\nu ki}\, b^\dagger_{ja}(\vec{k}_1)\tilde{b}^\dagger_b(\vec{k}_2)a_{kc}(\vec{k}_3)\tilde{a}_d(\vec{k}_4)\; v_L^T(\vec{k}_1)\mathrm{C}u_L(\vec{k}_3)(\epsilon_{ab}\epsilon_{cd}+\epsilon_{ad}\epsilon_{bc})+\ldots\big)\\ &\quad+\big(-\lambda^*_{\nu ji}\lambda^*_{\nu ki}\, a^\dagger_{ja}(\vec{k}_1)\tilde{a}^\dagger_b(\vec{k}_2)b_{kc}(\vec{k}_3)\tilde{b}_d(\vec{k}_4)\; \overline{u_L}(\vec{k}_1)\mathrm{C}\overline{v_L}^{\,T}(\vec{k}_3)(\epsilon_{ab}\epsilon_{cd}+\epsilon_{ad}\epsilon_{bc})+\ldots\big)\Big)\ .\end{aligned}$$

Es werden nun wieder zusammengesetzte Operatoren $b^{(\dagger)}_{\alpha,r}(\Omega,\omega,\vec{q})$ definiert:

$$b_{\alpha,r}(\Omega,\omega,\vec{q}) := \begin{cases}\sqrt{f(\Omega,\omega,\vec{q})}a_{ka}(\vec{k}_1)\tilde{a}_b(\vec{k}_2) & \text{für } \alpha=1,\\ \sqrt{f(\Omega,\omega,\vec{q})}b_{ka}(\vec{k}_1)\tilde{b}_b(\vec{k}_2) & \text{für } \alpha=-1,\end{cases} \tag{4.38}$$

wobei $\vec{k}_1,\vec{k}_2$ durch Ω,ω und $\vec{q}$ bestimmt sind und r stellvertretend für die Indizes k,a,b steht, also für Generations- und Isospinindizes. Damit ergibt sich

$$H_1 = \sum_{\alpha rs}\int\frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\Omega\left(\zeta_{\alpha,rs}(\Omega,\omega,\vec{q})b^\dagger_{\alpha,r}(\Omega,\omega,\vec{q})c_s(\vec{q})+\mathrm{h.c.}\right) \tag{4.39}$$

mit

$$\zeta_{\alpha,rs}(\Omega,\omega,\vec{q}) = \begin{cases}-\sqrt{f(\Omega,\omega,\vec{q})}\frac{\lambda^*_{\nu k1}}{\sqrt{8\omega_q\omega_1\omega_2}}\epsilon_{ab}\overline{u_L}(\vec{k}_1)u_s(\vec{q}) & ,\ \alpha=1\ ,\\ \sqrt{f(\Omega,\omega,\vec{q})}\frac{\lambda_{\nu k1}}{\sqrt{8\omega_q\omega_1\omega_2}}\epsilon_{ab}\overline{v_s}(\vec{q})v_L(\vec{k}_1) & ,\ \alpha=-1\ .\end{cases} \tag{4.40}$$

Entsprechend übersetzt sich der Anteil H_2 in

$$H_2 = \sum_{\alpha\alpha'}\sum_{rr'}\int\frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}\omega'\mathrm{d}\Omega'\eta_{\alpha\alpha' rr'}(\Omega,\Omega',\omega,\omega',\vec{q})b^\dagger_{\alpha,r}(\Omega,\omega,\vec{q})b_{\alpha',r'}(\Omega',\omega',\vec{q}) \tag{4.41}$$

mit

$$\begin{aligned}\eta_{1(-1)rr'}(\Omega,\omega,\Omega',\omega',\vec{q}) =& -\sqrt{f(\Omega,\omega,\vec{q})f(\Omega',\omega',\vec{q})}\frac{1}{4\sqrt{\omega_1\omega_2\omega_3\omega_4}}\\ &\times\sum_{i=2,3}\frac{\lambda^*_{\nu ki}\lambda^*_{\nu k'i}}{M_i}\overline{u_L}(\vec{k}_1)\,\mathrm{C}\,\overline{v_L}^{\,T}(\vec{k}_3)\left(\epsilon_{ab}\epsilon_{a'b'}+\epsilon_{ab'}\epsilon_{a'b}\right)\\ \eta_{(-1)1rr'}(\Omega,\omega,\Omega',\omega',\vec{q}) =& \eta^*_{1(-1)rr'}(\Omega',\omega',\Omega,\omega,\vec{q})\\ \eta_{11} =& \eta_{(-1)(-1)} = 0\ .\end{aligned} \tag{4.42}$$

Dabei sind $\vec{k}_1$ und $\vec{k}_2$ durch $\Omega,\omega,\vec{q}$ bestimmt, $\vec{k}_3$ und $\vec{k}_4$ durch Ω',ω' und $\vec{q}$. Die letzte Eigenschaft ist gerade die Forderung (3.43) aus Kapitel 3.

Nun ist die Situation fast die gleiche wie in Abschnitt 3.4.1. Der Unterschied liegt darin, dass es zu einem Impuls $\vec{q}$ jetzt zwei Operatoren $c_s(\vec{q})$ gibt, die den möglichen Spinausrichtungen entsprechen. Um das Oszillatormodell trotzdem anzuwenden, werden die verschiedenen Spineinstellungen getrennt behandelt, in der Näherung, dass die Wirkung, die die Oszillatoren zum Spin s auf das Bad haben, die Oszillatoren zum Spin $-s$ kaum beeinflusst.

Es werden jetzt also zwei entkoppelte Systeme betrachtet, die sich durch die spinabhängige Kopplung $\zeta_{\alpha,rs}$ unterscheiden. Nun soll die charakteristische Funktion $\sigma_s(\omega,\vec{q})$ berechnet werden:

$$\begin{aligned}\sigma_s(\omega,\vec{q}) =& \sum_{\alpha r}\int \mathrm{d}\Omega |\zeta_{\alpha,rs}|^2 \\ =& 2\sum_k |\lambda_{\nu k1}|^2 \int \mathrm{d}\Omega \frac{f(\Omega,\omega,\vec{q})}{8\omega_q\omega_1\omega_2}\left(|\overline{u_L}(\vec{k}_1)u_s(\vec{q})|^2 + |\overline{v_s}(\vec{q})v_L(\vec{k}_1)|^2\right) \\ =& 2(\lambda_\nu^\dagger\lambda_\nu)_{11}\int \mathrm{d}\Omega \frac{f(\Omega,\omega,\vec{q})}{8\omega_q\omega_1\omega_2}\mathrm{Tr}\left(u_L\overline{u_L}u_s\overline{u_s} + v_L\overline{v_L}v_s\overline{v_s}\right) . \end{aligned} \tag{4.43}$$

Setzt man das Resultat (C.2) für die Spur ein, so ergibt sich ein Ergebnis unabhängig von s:

$$\begin{aligned}\sigma(\omega,\vec{q}) =& 4(\lambda_\nu^\dagger\lambda_\nu)_{11}\int \mathrm{d}\Omega \frac{f(\Omega,\omega,\vec{q})}{8\omega_q\omega_1\omega_2} k_1\cdot q \\ =& 4(\lambda_\nu^\dagger\lambda_\nu)_{11}\int \frac{\mathrm{d}^3k_1}{(2\pi)^3}\frac{\mathrm{d}^3k_2}{(2\pi)^3}\frac{1}{8\omega_q\omega_1\omega_2}(2\pi)^3\delta(\vec{q}-\vec{k}_1-\vec{k}_2)\delta(\omega-\omega_1-\omega_2)k_1\cdot q \\ =& 4(\lambda_\nu^\dagger\lambda_\nu)_{11}\int \frac{\mathrm{d}^3k_1}{(2\pi)^3}\frac{\mathrm{d}^3k_2}{(2\pi)^3}\frac{1}{8\omega_q\omega_1\omega_2}(2\pi)^3\delta(\vec{k}_1+\vec{k}_2)\delta(\sqrt{\omega^2-\vec{q}^2}-\omega_1-\omega_2)\omega_1\frac{\omega_q\omega-\vec{q}^2}{\sqrt{\omega^2-\vec{q}^2}} \\ =& \frac{\omega_q\omega-\vec{q}^2}{M_1\sqrt{\omega^2-\vec{q}^2}}\frac{M_1}{\omega_q}\sigma_0(\sqrt{\omega^2-\vec{q}^2}) \end{aligned}$$

mit (vergleiche (4.15))

$$\sigma_0(\omega) = \frac{(\lambda_\nu^\dagger\lambda_\nu)_{11}}{16\pi^2}\omega . \tag{4.44}$$

Im letzten Schritt wurde eine Lorentztransformation durchgeführt, die den Vierervektor $(\omega,\vec{q})$ in $(\sqrt{\omega^2-\vec{q}^2},0)$ überführt hat. Der Vierervektor $q=(\omega_q,\vec{q})$ wurde dabei in einen Vektor transformiert mit der Nullkomponente $\frac{\omega_q\omega-\vec{q}^2}{\sqrt{\omega^2-\vec{q}^2}}$.

Die Funktion σ ist also unabhängig vom Spin s, sodass auch alle Hilfsfunktionen g,h,k keine Spinabhängigkeit besitzen, sondern universell sind.

4.4.3 Vergleich der Asymmetrieerzeugungsrate

Nun soll die Rate, mit der im Oszillatormodell die Asymmetrie A erzeugt wird, bestimmt werden. Bei der Berechnung von A werden die Anteile der verschiedenen Spins s aufsummiert.

Es tritt dabei der Ausdruck

$$\kappa(\omega,\omega',\vec{q}) := \sum_{srr'} \int \mathrm{d}\Omega \mathrm{d}\Omega' \, \mathrm{Im}\left[\zeta^*_{1,rs}(\Omega,\omega)\eta_{1(-1)rr'}(\Omega,\Omega',\omega,\omega')\zeta_{-1,r's'}(\Omega',\omega')\right] \tag{4.45}$$

auf (vergleiche (3.44)). Um diesen zu bestimmen, wird zunächst die Summation über Spin, Isospin und Generation ausgeführt:

$$\begin{aligned}\sum_{srr'} \zeta^*_{1,rs}(\Omega,\omega)\eta_{1(-1)rr'}(\Omega,\Omega',\omega,\omega')\zeta_{-1,r's'}(\Omega',\omega') &= \frac{ff'}{32\omega_q\omega_1\omega_2\omega_3\omega_4} \sum_{i=2,3} \frac{1}{M_i}(\lambda^\dagger_\nu\lambda_\nu)^2_{i1} \\ &\times \sum_{aa'bb'} \left(\epsilon_{ab}(\epsilon_{ab}\epsilon_{a'b'}+\epsilon_{ab'}\epsilon_{a'b})\epsilon_{a'b'}\right) \left(\overline{u_L}(\vec{k}_1)u_s(\vec{q})\right)^* \overline{u_L}(\vec{k}_1)\mathrm{C}\overline{v_L}^T(\vec{k}_3)\overline{v_s}(\vec{q})v_L(\vec{k}_3) \ .\end{aligned}$$

Die Summation über den schwachen Isospin liefert

$$\begin{aligned}&\sum_{aa'bb'} \left(\epsilon_{ab}(\epsilon_{ab}\epsilon_{a'b'}+\epsilon_{ab'}\epsilon_{a'b})\epsilon_{a'b'}\right) \\ &\quad = \underbrace{\sum_{aa'bb'} \epsilon^2_{ab}\epsilon^2_{a'b'}}_{\quad 4 \quad} + \underbrace{\sum_{aa'bb'} \epsilon_{ab}\epsilon_{ab'}\epsilon_{a'b}\epsilon_{a'b'}}_{\quad 2 \quad} = 6 \ .\end{aligned} \tag{4.46}$$

Diese beiden Beiträge zur Asymmetrie entsprechen den in Abschnitt 2.4.3 genannten Beiträgen zur *CP*-Verletzung durch Mischungseffekte und Vertexkorrekturen.

Mit dem Ergebnis (C.3) für das über den Spin summierte Produkt von Spinoren ergibt sich dann für den Ausdruck in (4.45):

$$\kappa(\omega,\omega',\vec{q}) = -12 \sum_{i=2,3} \frac{M_1}{M_i} \mathrm{Im}\left[(\lambda^\dagger_\nu\lambda_\nu)^2_{i1}\right] \int \mathrm{d}\Omega \mathrm{d}\Omega' \frac{f(\Omega,\omega,\vec{q})f'(\Omega,\omega,\vec{q})}{32\omega_q\omega_1\omega_2\omega_3\omega_4} k_1\cdot k_3 \ . \tag{4.47}$$

Die Integration über Ω und Ω' kann durch eine Variablentransformation auf eine Integration über die Impulse $\vec{k}_1,\ldots,\vec{k}_4$ gebracht werden mit $\omega_1+\omega_2=\omega$, $\omega_3+\omega_4=\omega'$ und Gesamtimpuls $\vec{q}=\vec{k}_1+\vec{k}_2=\vec{k}_3+\vec{k}_4$. Die Beiträge von ω und ω' faktorisieren, das Ergebnis lautet

$$\kappa(\omega,\omega',\vec{q}) = -\frac{3}{2} \sum_{i=2,3} \frac{1}{M_i} \frac{\mathrm{Im}[(\lambda^\dagger_\nu\lambda_\nu)^2_{i1}]}{(\lambda^\dagger_\nu\lambda_\nu)^2_{11}} \frac{M_1\omega_q\sqrt{\omega^2-\vec{q}^2}\sqrt{\omega'^2-\vec{q}^2}}{(\omega_q\omega-\vec{q}^2)(\omega_q\omega'-\vec{q}^2)} \sigma(\omega,\vec{q})\sigma(\omega',\vec{q}) \ . \tag{4.48}$$

Dieses Ergebnis hat beinahe die Form wie in (3.44). Der Unterschied liegt im kinematischen Faktor, der eine zusätzliche ω-Abhängigkeit beinhaltet. Für niedrige Temperaturen $T \lesssim M_1$ sind die Impulse $\vec{q}$ der Neutrinos N_1 klein gegenüber M_1 und es ist

$$\frac{M_1\omega_q\sqrt{\omega^2-\vec{q}^2}\sqrt{\omega'^2-\vec{q}^2}}{(\omega_q\omega-\vec{q}^2)(\omega_q\omega'-\vec{q}^2)} \approx 1 \ .$$

Also ist

$$\kappa(\omega,\omega',\vec{q}) = \kappa \ \sigma(\omega,\vec{q})\sigma(\omega',\vec{q}) \tag{4.49}$$

mit

$$\kappa = -\frac{3}{2}\sum_{i=2,3}\frac{1}{M_i}\frac{\mathrm{Im}[(\lambda_\nu^\dagger\lambda_\nu)_{i1}^2]}{(\lambda_\nu^\dagger\lambda_\nu)_{11}^2} \ . \tag{4.50}$$

Das Ergebnis für die Asymmetrierate (3.53) in der Näherung schwacher Kopplung lautet nach Integration über $\vec{q}$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(n_l - n_{\bar{l}}) = \kappa\Gamma_1\Gamma_1(n_1 - n_1^{\mathrm{eq}}) \ . \tag{4.51}$$

Der Faktor 2 aus (3.53) steckt in n_1, der über den Spinfreiheitsgrad summierten Teilchendichte der Neutrinos N_1. Die Auswertung des Faktors $\kappa\Gamma_1$ ergibt

$$\begin{aligned}\kappa\Gamma_1 &= -\frac{3}{2}\sum_{i=2,3}\frac{1}{M_i}\frac{\mathrm{Im}[(\lambda_\nu^\dagger\lambda_\nu)_{i1}^2]}{(\lambda_\nu^\dagger\lambda_\nu)_{11}^2}\frac{1}{8\pi}M_1(\lambda_\nu^\dagger\lambda_\nu)_{11} \\ &= \frac{3}{16\pi}\sum_{i=2,3}\frac{\mathrm{Im}[(\lambda_\nu^\dagger\lambda_\nu)_{1i}^2]}{(\lambda_\nu^\dagger\lambda_\nu)_{11}}\frac{M_1}{M_i} \ .\end{aligned} \tag{4.52}$$

Dies ist gerade der Ausdruck für die *CP*-Asymmetrie ε_1 (2.25). Also lautet die Erzeugungsrate

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(n_l - n_{\bar{l}}) = \varepsilon_1\Gamma_1(n_1 - n_1^{\mathrm{eq}}) \ , \tag{4.53}$$

und dies ist genau der Ausdruck, der auch in (2.27) auftritt.

Somit hat sich gezeigt, dass der Ansatz für einen *CP* verletzenden Term im Oszillatormodell vernünftig war. Die Asymmetrieerzeugungsrate stimmt in der Näherung schwacher Kopplung mit dem Resultat der Boltzmann-Gleichung überein und erlaubt, Korrekturen hierzu zu betrachten.

Kapitel 5

Zusammenfassung

Diese Arbeit hat sich mit einem neuen Zugang zur Erzeugung einer Teilchen-Antiteilchen-Asymmetrie beschäftigt.

Die Grundidee ist die, ein einfaches exakt lösbares Modell, in dem man alle interessanten Größen bestimmen kann, zu untersuchen, um damit etwas über ein komplizierteres System zu lernen.

Es ist klar, dass ein wesentliches Problem darin besteht, die Ergebnisse auf ein realistisches Modell zu übertragen. Ginge dies problemlos, so bräuchte man nicht den Umweg über das einfache Modell zu gehen, sondern könnte gleich das kompliziertere lösen.

Nun hat sich aber herausgestellt, dass nicht nur die Übertragung problematisch ist, sondern dass das Modell in der originalen Fassung eine wesentliche Eigenschaft vermissen lässt: die Entwicklung einer Asymmetrie. Das Modell war sozusagen „zu“ einfach und bedurfte einer Abwandlung, ohne den entscheidenden Vorteil der guten Lösbarkeit wesentlich zu beeinträchtigen.

Ausgangspunkt war ein quantenmechanisches Modell bestehend aus gekoppelten Oszillatoren. Dieses Modell ist exakt lösbar und beschreibt die Relaxation eines angeregten Niveaus in einem Wärmebad. Die spezifischen Eigenschaften des Modells wurden untersucht und besprochen, insbesondere mit Blick darauf, Unterschiede zur Boltzmann-Gleichung aufzuzeigen. Die Unterschiede liegen in einer langsameren Relaxation bei großen Zeiten und in einer größeren Gleichgewichtshäufigkeit bei tiefen Temperaturen.

Es wurde dann die Frage untersucht, inwieweit es möglich ist, die Entwicklung einer Asymmetrie in diesem Modell zu beschreiben, und zwar so, dass das Modell eine physikalisch sinnvolle Situation beschreibt, um eine Übertragung auf realistische Modelle zu ermöglichen. Es wurde daher Wert darauf gelegt, eine Art CPT-Invarianz des Modells zu gewährleisten. Es zeigte sich, dass dies ohne eine Erweiterung des Modells nicht möglich ist.

Das Modell erhielt einen zusätzlichen CP verletzenden Term. Tatsächlich liefert dieser eine Asymmetrieerzeugungsrate mit physikalisch sinnvollen Eigenschaften. Sie hat die richtige

Abhängigkeit von den Kopplungen und nimmt in der Poldominanznäherung die Form der Rate in der Boltzmann-Gleichung an.

Es hat sich herausgestellt, dass das Wärmebad in gewissem Sinne zu groß gegenüber dem einzelnen Oszillator ist, das Bad kann sich nicht thermalisieren. Wird eine anfängliche Asymmetrie vorausgesetzt, so bleibt diese erhalten und kann nicht abgebaut werden. Das Modell beschreibt gut die Thermalisierung des angeregten Niveaus, die Rückwirkung auf das umgebende Medium hat sich als problematischer herausgestellt.

Schließlich ging es um die Anwendung des Modells, um eine Übertragung auf ein realistisches Szenario wie das der Leptogenese. Es wurde gezeigt, wie eine solche Übertragung aussehen könnte. Auch die Fehler, die dabei gemacht werden, wurden besprochen.

Weiterhin wurde erläutert, wie sich die *CP*-Verletzung im Leptogenese-Modell überträgt und wie sich durch Ausintegration der schweren Neutrinogenerationen ein solcher Zusatzterm ergibt, wie er oben angesprochen wurde. Die Rate, mit der eine Asymmetrie erzeugt wird, entspricht in der Poldominanznäherung genau der Rate, die sich im bisherigen Zugang aus Einschleifenvertex- und Selbstenergiekorrekturen ergibt. Damit ist es also gelungen, den von Yoshimura et al. vorgeschlagenen Zugang [22] auf den Fall der Leptogenese anzuwenden.

Es wurde schon darauf hingewiesen, dass es noch einige unverstandene Punkte gibt, deren Klärung höchst wünschenswert wäre. Das bei der Anwendung des Oszillatormodells auftretende Problem, dass die Entwicklung des umgebenden Mediums nicht richtig wiedergegeben wird, kommt daher, dass die Zustände des Oszillatormodells überzählt werden. Ein Zustand bestehend aus zwei Paaren, k_1, k_2 und k_1', k_2', wird unterschieden von einem mit den Paaren k_1, k_2' und k_1', k_2. Hierdurch wird das Wärmebad regelrecht aufgebläht, was erklärt, wieso das Bad „zu groß“ erscheint. Ein Ansatz hierfür wäre, die Überzählung durch geeignete Normierungen zu berücksichtigen.

Die Zusammenfassung der Zerfallsprodukte in Paare, die bei der Übertragung geschieht, scheint willkürlich. Doch im Falle der Leptogenese könnte es sinnvoll sein, jeweils Paare zu betrachten, die ein schwaches Isospinsinglett bilden. Man erwartete dann aber auch durch die Eichkopplung vermittelte Streuprozesse von solchen Paaren, was einen weiteren effektiven Wechselwirkungsterm erforderlich machte.

Die Leptogenese ist ein vielversprechender Kandidat für die Erklärung einer Baryonenasymmetrie im Universum. Es wurde gerade in letzter Zeit viel getan, um die Teilumwandlung der Leptonenasymmetrie in eine Baryonenasymmetrie durch Sphaleronprozesse auch quantitativ besser zu verstehen (siehe z. B. [26]). Das Verständnis der Asymmetrieerzeugung durch den Zerfall schwerer Teilchen ist bei enormen Fortschritten in der numerischen Analyse konzeptionell seit Anfang der Achtzigerjahre nicht vorangekommen.

Diese Arbeit sollte einen kleinen Schritt in Richtung eines besseren, über die Boltzmann-Gleichungen hinausgehenden Verständnisses der Asymmetrieerzeugung tun.

Anhang A

Wichtige Formeln

Beim Rechnen im Oszillatormodell ist es sinnvoll, einige Hilfsfunktionen einzuführen. Hier nochmal eine Zusammenstellung wichtiger Definitionen:

$$F(z) = \left(-z + E_1 - \int_{\omega_c}^{\infty} \mathrm{d}\omega' \, \frac{\sigma(\omega')}{\omega' - z} \right)^{-1} \tag{A.1}$$

$$g(t) = \int_{\omega_c}^{\infty} \mathrm{d}\omega' \, \sigma(\omega') \, |F_{\omega'}|^2 \, e^{i\omega' t} \tag{A.2}$$

$$k(\omega, t) = \int_{\omega_c}^{\infty} \mathrm{d}\omega' \, \sigma(\omega') \, |F_{\omega'}|^2 \, \frac{1}{\omega' - \omega + i\epsilon} e^{i(\omega' - \omega)t} \tag{A.3}$$

$$h(\omega, t) = iF_{\omega}^{*} - ik(\omega, t) \tag{A.4}$$

$$\Gamma(t) = -2\mathrm{Re}\frac{\dot{g}(t)}{g(t)} \; . \tag{A.5}$$

Dabei wurde die Notation

$$F_{\omega} := F(\omega + i\epsilon)$$

eingeführt.

Direkt aus den obigen Definitionen ergeben sich folgende Eigenschaften

$$F_{\omega} - F_{\omega}^{*} = 2\pi i \sigma(\omega) \, |F_{\omega}|^2 \tag{A.6}$$

$$\dot{h}(\omega, t) = e^{-i\omega t} g(t) \tag{A.7}$$

$$\dot{k}(\omega, t) = ie^{-i\omega t} g(t) \; . \tag{A.8}$$

Die Formel (A.6) ermöglicht es, Integrale über $\sigma(\omega) \, |F_{\omega}|^2$ in komplexe Kurvenintegrale über F entlang des Schnittes umzuschreiben und so die Auswertung mit Mitteln der Funktionentheorie

zu ermöglichen. Im Folgenden wird eine Reihe solcher Integrale ohne Herleitung aufgelistet.

$$\int_{\omega_c}^{\infty} \mathrm{d}\omega'\, \sigma(\omega')\, |F_{\omega'}|^2 \;=\; 1 \tag{A.9}$$

$$\int_{\omega_c}^{\infty} \mathrm{d}\omega'\, \sigma(\omega')\, |F_{\omega'}|^2\, \frac{1}{\omega - \omega' - i\epsilon} \;=\; -F_{\omega}^{*} \tag{A.10}$$

$$\int_{\omega_c}^{\infty} \mathrm{d}\omega'\, \sigma(\omega')\, |F_{\omega'}|^2\, \frac{e^{i\omega' t} - e^{i\omega t}}{\omega' - \omega} \;=\; i e^{i\omega t} h(\omega, t) \tag{A.11}$$

$$\begin{aligned} &\int_{\omega_c}^{\infty} \mathrm{d}\omega'\, \sigma(\omega')\, |F_{\omega'}|^2\, \frac{e^{i\omega' t} - e^{i\omega'' t}}{\omega' - \omega''} \frac{1}{\omega' - \omega - i\epsilon} \\ &\quad = \; \frac{1}{\omega - \omega''} \left[e^{i\omega t} i h(\omega, t) - e^{i\omega'' t} i h(\omega'', t) + F_{\omega}(e^{i\omega t} - e^{i\omega'' t}) \right] \end{aligned} \tag{A.12}$$

$$\begin{aligned} &\int_{\omega_c}^{\infty} \mathrm{d}\omega'\, \sigma(\omega')\, |F_{\omega'}|^2\, \frac{e^{i\omega' t} - e^{i\omega'' t}}{\omega' - \omega''} \frac{1}{\omega' - \omega + i\epsilon} \\ &\quad = \; \frac{1}{\omega - \omega''} \left[e^{i\omega t} i h(\omega, t) - e^{i\omega'' t} i h(\omega'', t) + F_{\omega}^{*}(e^{i\omega t} - e^{i\omega'' t}) \right] \end{aligned} \tag{A.13}$$

$$\int_{\omega_c}^{\infty} \mathrm{d}\omega'\, \sigma(\omega')\, \left| h(\omega', t) \right|^2 \;=\; 1 - |g(t)|^2 \tag{A.14}$$

$$\int_{\omega_c}^{\infty} \mathrm{d}\omega'\, \sigma(\omega') 2\mathrm{Re}(g(t) h^{*}(\omega', t) e^{-i\omega' t}) \;=\; |g(t)|^2\, \Gamma(t) \tag{A.15}$$

$$\begin{aligned} &\int_{\omega_c}^{\infty} \mathrm{d}\omega'\, \sigma(\omega') \frac{1}{\omega - \omega'} \mathrm{Re}(i h(\omega', t) h^{*}(\omega, t) e^{i(\omega' - \omega) t}) \\ &\quad = \; \mathrm{Re}(h(\omega, t) - g(t) h^{*}(\omega, t) e^{-i\omega t}) \end{aligned} \tag{A.16}$$

$$\begin{aligned} &\int_{\omega_c}^{\infty} \mathrm{d}\omega'\, \sigma(\omega') \frac{i h_{\omega'} e^{i\omega' t} - i h_{\omega} e^{i\omega t}}{\omega' - \omega} \frac{-i h_{\omega'}^{*} e^{-i\omega' t} + i h_{\omega''}^{*} e^{-i\omega'' t}}{\omega' - \omega''} \\ &\quad = \; -h_{\omega} h_{\omega''}^{*} e^{i(\omega - \omega'') t} + \frac{i(h_{\omega}^{*} + h_{\omega''}) - i(h_{\omega''}^{*} + h_{\omega}) e^{i(\omega - \omega'') t}}{\omega - \omega''} \end{aligned} \tag{A.17}$$

$$\left(h_{\omega} = h(\omega, t)\right)$$

Anhang B

Konventionen

B.1 Skalares Feld

Sei ϕ ein skalares Quantenfeld der Masse m und

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - V(\phi)$$

die Lagrangedichte, die die Dynamik des Feldes bestimmt. Der kanonisch konjugierte Impuls ist

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}(x)} = \dot{\phi}(x) \ .$$

Die fouriertransformierten Felder $\phi(\vec{p})$ und $\pi(\vec{p})$ lassen sich zu Leiteroperatoren kombinieren,

$$a(\vec{p}) := \sqrt{\frac{\omega_p}{2}}\phi(\vec{p}) + i\frac{1}{\sqrt{2\omega_p}}\pi(\vec{p})$$

mit $\omega_p = \sqrt{m^2 + \vec{p}^2}$. Damit schreiben sich die Felder als

$$\begin{aligned}
\phi(\vec{x},t) &= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_p}}\left(a(\vec{p},t)e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} + a^\dagger(\vec{p},t)e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}}\right) \\
\pi(\vec{x},t) &= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}(-i)\sqrt{\frac{\omega_p}{2}}\left(a(\vec{p},t)e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} - a^\dagger(\vec{p},t)e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}}\right) \ .
\end{aligned}$$

Bei der Quantisierung fordert man die kanonischen Vertauschungsrelationen,

$$[\phi(\vec{x},t), \pi(\vec{y},t)] = i\delta(\vec{x}-\vec{y}) \ ,$$

aus denen

$$[a(\vec{p},t), a^\dagger(\vec{q},t)] = (2\pi)^3\delta(\vec{p}-\vec{q})$$

folgt.

In der freien Theorie ist die Zeitentwicklung von a einfach

$$a(\vec{p},t') = e^{-i\omega_p(t'-t)}a(\vec{p},t) \ ,$$

sodass a und $a^\dagger$ Vernichter und Erzeuger von Moden der Energie ω_p werden.

B.2 Dirac-Feld

Sei nun ψ das Feld eines Dirac-Fermions. Die Lagrangedichte ist

$$\mathcal{L} = \overline{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\psi - V(\psi,\overline{\psi}) \ .$$

Der kanonisch konjugierte Impuls zu ψ ist

$$\pi(x) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}(x)} = i\psi^\dagger(x) \ .$$

Es werden nun Spinorfunktionen $u_s, v_s\,(s=1,2)$ eingeführt mit der Normierung

$$\begin{aligned} u_r^\dagger(\vec{p})u_s(\vec{p}) = v_r^\dagger(\vec{p})v_s(\vec{p}) &= 2\omega_p\delta_{rs} \\ u_r^\dagger(\vec{p})v_s(-\vec{p}) = v_r^\dagger(-\vec{p})u_s(\vec{p}) &= 0 \ . \end{aligned}$$

Nun werden wieder Leiteroperatoren

$$\begin{aligned} a_s(\vec{p},t) =& \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}}u_s^\dagger(\vec{p})\psi(\vec{p},t) \\ b_s^\dagger(\vec{p},t) =& \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}}v_s^\dagger(\vec{p})\psi(-\vec{p},t) \end{aligned}$$

definiert. Aus den kanonischen Antivertauschungsrelationen für ψ und π,

$$\{\psi_a(\vec{x},t),\pi_b(\vec{y},t)\} = i\delta(\vec{x}-\vec{y})\delta_{ab} \ ,$$

ergibt sich

$$\{a_r(\vec{p},t),a_s(\vec{q},t)\} = \{b_r(\vec{p},t),b_s(\vec{q},t)\} = (2\pi)^3\delta(\vec{p}-\vec{q})\delta_{rs} \ .$$

Die Felder lassen sich dann schreiben als

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3\sqrt{2\omega_p}}\sum_s\left(a_s(\vec{p},t)u_s(\vec{p})e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} + b_s^\dagger(\vec{p},t)v_s(\vec{p})e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}}\right) \\ \overline{\psi}(x) &= \int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3\sqrt{2\omega_p}}\sum_s\left(b_s(\vec{p},t)\overline{v_s}(\vec{p})e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} + a_s^\dagger(\vec{p},t)\overline{u_s}(\vec{p})e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}}\right) \ . \end{aligned}$$

Im freien Fall gilt für die Zeitentwicklung wieder

$$a_s(\vec{p},t') = e^{-i\omega_p(t'-t)}a_s(\vec{p},t)$$

und Gleiches gilt für b_s.

Im masselosen Fall werden Spinorfunktionen definiert, die Eigenvektoren zu den Projektionsoperatoren P_L und P_R sind,

$$\begin{aligned} P_L u_L(\vec{k}) &= u_L(\vec{k}) & \qquad P_R u_R(\vec{k}) &= u_R(\vec{k}) \\ P_L v_L(\vec{k}) &= v_L(\vec{k}) & \qquad P_R v_R(\vec{k}) &= v_R(\vec{k}) \ . \end{aligned}$$

Dann lautet die Entwicklung eines linkshändigen chiralen Feldes ψ_L

$$\psi_L(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3\sqrt{2\omega_k}} \left(a(\vec{k},t)\, u_L(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + b^\dagger(\vec{k},t)\, v_L(\vec{k}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right) \ .$$

B.3 Majorana-Feld

Zu einem Spinor ψ ist der ladungskonjugierte Spinor ψ^C definiert als

$$\psi^C := \mathrm{C}\overline{\psi}^T$$

mit der unitären Ladungskonjugationsmatrix C, die folgende Eigenschaften erfüllt:

$$\begin{aligned} \mathrm{C}^T = \mathrm{C}^\dagger = \mathrm{C}^{-1} = -\mathrm{C} & \qquad \mathrm{C}^2 = -1 \\ \mathrm{C}\gamma_\mu \mathrm{C}^{-1} = -\gamma_\mu^T & \qquad \mathrm{C}\gamma_5 \mathrm{C}^{-1} = \gamma_5^T \ . \end{aligned}$$

Ein Majorana-Feld ist identisch mit seinem ladungskonjugierten Feld,

$$\psi = \psi^C \ .$$

Die Feldentwicklung lautet dann

$$\psi(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3\sqrt{2\omega_p}} \sum_s \left(a_s(\vec{p},t)\, u_s(\vec{p}) e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} + a_s^\dagger(\vec{p},t)\, v_s(\vec{p}) e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right) \ .$$

Für die Wirkung der Ladungskonjugation auf die Spinorfunktionen gilt:

$$\begin{aligned} \mathrm{C}\,\overline{v_s}^T(\vec{p}) &= u_s(\vec{p}) & \qquad \mathrm{C}\,\overline{u_s}^T(\vec{p}) &= v_s(\vec{p}) \\ \mathrm{C}\,\overline{v_L}^T(\vec{k}) &= u_R(\vec{k}) & \qquad \mathrm{C}\,\overline{u_L}^T(\vec{k}) &= v_R(\vec{k}) \ . \end{aligned}$$

Anhang C

Matrixelemente und Spuren

C.1 Matrixelemente

In Abschnitt 4.2.1 wurde behauptet, im allgemeinen Fall tauche bei der Identifizierung des Oszillatormodells mit einem quantenfeldtheoretischen Modell das Matrixelement auf Baumniveau auf,

$$\sigma(\omega,\vec{q}) = \frac{1}{2\omega_q}\int \frac{\mathrm{d}^3k_a}{(2\pi)^3 2\omega_a}\frac{\mathrm{d}^3k_b}{(2\pi)^3 2\omega_b}(2\pi)^3\delta(\vec{q}-\vec{k}_a-\vec{k}_b)\delta(\omega-\omega_a-\omega_b)\sum_{spins}|\mathcal{M}(q,k_a,k_b)|^2 \ . \tag{C.1}$$

Das soll nun präzisiert werden.

Ausgangspunkt ist immer eine Dreierkopplung zwischen dem zerfallenden Teilchen und den beiden Zerfallsprodukten. Das Matrixelement $\mathcal{M}(q,k_a,k_b)$ für den Zerfall ist definiert über

$$\mathcal{M}(q,k_a,k_b)(2\pi)^3\delta(\vec{q}-\vec{k}_a-\vec{k}_b) = -\langle q|H_{int}|k_a k_b\rangle \ .$$

Dies entspricht für $\omega_q = \omega_a + \omega_b$ gerade der üblichen Definition [9].

Im Oszillatormodell ist

$$\langle 0|c(\vec{q})H_{int}b^\dagger(\Omega,\omega,\vec{q'})|0\rangle = (2\pi)^3\delta(\vec{q}-\vec{q'})\zeta^*(\Omega,\omega,\vec{q'}) \ .$$

Mit der Definition (4.6) erhält man dann

$$\begin{aligned}\langle 0|c(\vec{q})H_{int}b^\dagger(\Omega,\omega,\vec{q'})|0\rangle =& \sqrt{f(\Omega,\omega,\vec{q}')}\langle 0|c(\vec{q})H_{int}b_a^\dagger(\vec{k}_a)b_b^\dagger(\vec{k}_b)|0\rangle \\ =& \sqrt{f}\frac{1}{\sqrt{8\omega_q\omega_a\omega_b}}\langle q|H_{int}|k_a k_b\rangle \\ =& -(2\pi)^3\delta(\vec{q}-\vec{k}_a-\vec{k}_b)\sqrt{f}\frac{1}{\sqrt{8\omega_q\omega_a\omega_b}}\mathcal{M}(q,k_a,k_b) \ ,\end{aligned}$$

und damit

$$\zeta^*(\Omega,\omega,\vec{q}) = -\sqrt{f(\Omega,\omega,\vec{q})}\frac{1}{\sqrt{8\omega_q\omega_a\omega_b}}\mathcal{M}(q,k_a,k_b) \ .$$

Daraus ergibt sich dann sofort (C.1).

C.2 Spuren

In Kapitel 4 mussten Spuren von Spinorprodukten ausgewertet werden. Um die Spuren zu berechnen, ist zu beachten, dass

$$\begin{aligned} u_L(\vec{k}_1)\overline{u_L}(\vec{k}_1) = v_L(\vec{k}_1)\overline{v_L}(\vec{k}_1) &= \not{k}_1\frac{1+\gamma_5}{2} \ , \\ u_s(\vec{q})\overline{u_s}(\vec{q}) &= (\not{q}+m)\frac{1+\gamma_5\not{s}}{2} \ , \\ v_s(\vec{q})\overline{v_s}(\vec{q}) &= (\not{q}-m)\frac{1+\gamma_5\not{s}}{2} \end{aligned}$$

gilt. Dabei ist s ein Vierervektor mit $s^2=-1$ und $sq=0$, der die Spinpolarisation beschreibt [27].

Für die Berechnung der charakteristischen Spektralfunktion σ beim Zerfall der Majorana-Neutrinos wird die folgende Spur benötigt:

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(u_L\overline{u_L}u_s\overline{u_s} + v_L\overline{v_L}v_s\overline{v_s}) =& \mathrm{Tr}\left(\not{k}_1\frac{1+\gamma_5}{2}\not{q}(1+\gamma_5\not{s})\right) \\ =& 2q\cdot k_1 \ . \end{aligned} \tag{C.2}$$

Bei der Bestimmung der Asymmetrieentwicklung im Leptogenesemodell taucht das folgende über den Spin summierte Produkt von Spinoren auf:

$$\begin{aligned} &\sum_s \left(\overline{u_L}(\vec{k}_1)u_s(\vec{q})\right)^* \overline{u_L}(\vec{k}_1)\mathrm{C}\overline{v_L}^T(\vec{k}_3)\overline{v_s}(\vec{q})v_L(\vec{k}_3) \\ &\quad = -\sum_s \overline{u_s}(\vec{q})u_L(\vec{k}_1)\overline{u_L}(\vec{k}_1)u_R(\vec{k}_3)\overline{u_R}(\vec{k}_3)u_s(\vec{q}) \\ &\quad = -\mathrm{Tr}\left((\not{q}+M_1)\not{k}_1\frac{1+\gamma_5}{2}\not{k}_3\frac{1-\gamma_5}{2}\right) \\ &\quad = -2M_1 k_1\cdot k_3 \ . \end{aligned} \tag{C.3}$$

Dabei wurde ausgenutzt, dass gilt:

$$\overline{v_s}(\vec{q})v_L(\vec{k}_3) = -\overline{u_R}(\vec{k}_3)u_s(\vec{q}) \ .$$

Literaturverzeichnis

[1] Wissenschaftlicher Rat der Dudenredaktion, *DUDEN*, Dudenverlag, Mannheim, 1996.

[2] R. F. Streater und A. S. Wightman, *PCT, spin and statistics, and all that*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1989.

[3] A. D. Sakharov, *Violation of CP invariance, C asymmetry, and baryon asymmetry of the universe*, JETP Letters **5**, 24 (1967).

[4] A. Riotto, *Theories of baryogenesis*, hep-ph/9807454, 1998.

[5] J. Ehlers, *General relativity and kinetic theory*, Proceedings of the International Summer School of Physics «Enrico Fermi» Course XLVII, Varenna 1969 (Hrsg. B. K. Sachs), Academic Press, New York, 1971.

[6] E. W. Kolb und S. Wolfram, *Baryon number generation in the early universe*, Nuc. Phys. **B 172**, 224 (1980).

[7] I. S. Gradstein und I. M. Ryshik, *Tables of Series, Products and Integrals*, Verlag Harri Deutsch, Thun, 1981.

[8] E. W. Kolb und M. S. Turner, *The Early Universe*, Frontiers in Physics, vol. 69, Addison–Wesley, Reading, Massachusetts, 1990.

[9] M. E. Peskin und D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1995.

[10] N. S. Manton, *Topology in the Weinberg-Salam theory*, Phys. Rev. **D 28**, 2019 (1983).

[11] F. R. Klinkhammer und N. S. Manton, *A saddle point solution in the Weinberg-Salam theory*, Phys. Rev. **D 30**, 2212 (1984).

[12] M. Fukugita und T. Yanagida, *Baryogenesis without Grand Unification*, Phys. Lett. **B 174**, 45 (1986).

[13] M. A. Luty, *Baryogenesis via leptogenesis*, Phys. Rev. **D 45**, 455 (1992).

[14] M. Plümacher, *Baryogenesis and lepton number violation*, Z. Phys. **C 74**, 549 (1997).

[15] W. Buchmüller und M. Plümacher, *Baryon asymmetry and neutrino mixing*, Phys. Lett. **B 389**, 73 (1996).

[16] M. Fukugita und T. Yanagida, *Physics of neutrinos*, in *Physics and astrophysics of neutrinos* (Hrsg. M. Fukugita und A. Suzuki), Springer, Tokyo, 1994, p. 1.

[17] W. Buchmüller und M. Plümacher, *CP asymmetry in Majorana neutrino decays*, Phys. Lett. **B 431**, 354 (1998).

[18] L. Covi, E. Roulet, und F. Vissani, *CP violating decays in leptogenesis scenarios*, Phys. Lett. **B 384**, 169 (1996).

[19] K. Lindenberg und B. J. West, *The nonequilibrium statistical mechanics of open and closed systems*, VCH, 1990.

[20] S. M. Alamoudi, D. Boyanovsky, und H. J. de Vega, *Quantum kinetics and thermalization in a particle bath model*, cond-mat/9812029, 1998.

[21] I. Joichi, S. Matsumoto, und M. Yoshimura, *Quantum dissipation in open harmonic systems: operator solution*, Prog.Theor.Phys. **98**, 9 (1997).

[22] I. Joichi, S. Matsumoto, und M. Yoshimura, *Prolonged decay and CP-asymmetry*, Phys. Rev. **D 58**, 43507 (1998).

[23] I. Joichi, S. Matsumoto, und M. Yoshimura, *Time evolution of unstable particle decay seen with finite resolution*, Phys. Rev. **D 58**, 45004 (1997).

[24] O. Nachtmann, *Phänomene und Konzepte der Elementarteilchenphysik*, Vieweg, Braunschweig, 1986.

[25] A. Dobado, A. Gómez-Nicola, A. L. Maroto, und J. R. Peláez, *Effective Lagrangians for the standard model*, Springer, Berlin, 1997.

[26] D. Bödeker, *From hard thermal loops to Langevin dynamics*, hep-ph/9905239, 1999.

[27] J. D. Bjorken und S. D. Drell, *Relativistische Quantenmechanik*, B.I.Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1990.

Danksagung

Für die interessante Aufgabenstellung sowie die immer freundliche, motivierende und lehrreiche Betreuung möchte ich mich ganz herzlich bei Herrn Buchmüller bedanken. Michael Plümacher danke ich für seine hilfreiche Unterstützung, insbesondere während der Einarbeitungsphase.

Dank schulde ich auch all jenen, die den vorliegenden Text sorgfältig und kritisch korrigiert haben. Hoffentlich haben sie nicht alle Fehler gefunden, denn ein paar gehören irgendwie datsu.

Meinen lieben Kollegen und Freunden am DESY und anderswo danke ich für viele nette Stunden während, vor und nach der Arbeitszeit.

Mein Dank gilt auch dem Universum für seine Baryonenasymmetrie, ohne die diese Arbeit überhaupt nicht möglich gewesen wäre.

Schließlich geht ein herzliches Dankeschön an meine Eltern, die mich während der Studienzeit auf jede erdenkliche Weise unterstützt haben.