ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

ЖОГИН Иван Львович

УДК 530.12:531.51

ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ТЕОРИИ РИМАНОВА ПРОСТРАНСТВА С АБСОЛЮТНЫМ ПАРАЛЛЕЛИЗМОМ

Специальность 01.04.02 – теоретическая физика

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Томск – 1996 г.

Работа выполнена в Кемеровском государственном университете

Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор И. Л. Бухбиндер, кандидат физико-математических наук В. Д. Першин
Ведущая организация:	Институт математики СО РАН, г. Новосибирск

Защита диссертации состоится "_8_" ____мая_____ 1996 г. в _15_ часов на заседании специализированного совета Д 063.53.07 в Томском государственном университете (634010, Томск, пр. Ленина 36).

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Томского государственного университета.

Автореферат разослан "___"________ 1996 г.

Ученый секретарь
специализированного совета Д 063.53.07,
кандидат физико-математических наук С. Л. Ляхович

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Достоинства общей теории относительности (ОТО) – изящество и красота, сведение тяготения к геометрии, правильные значения постньютоновских эффектов – дополняются таким недостатком, как сингулярности решений.

Актуальность этой проблемы подтверждается попытками усовершенствования теории гравитации (усложнение структуры, теории с кручением; высшие производные), однако обычно рассматриваются частные симметричные решения, а проблема сингулярностей общего решения остается, на самом деле, нерешенной.

Распространено мнение, что квантовая версия теории гравитации может быть свободной от сингулярностей (популярны суперструнные модели, приводящие в некотором пределе к R^2–гравитации). Однако, в настоящее время непротиворечивая самосогласованная теория квантовой гравитации отсутствует, поэтому оправданы попытки решения проблемы сингулярностей на классическом уровне. Оказывается, это можно сделать в рамках теории абсолютного параллелизма (АП), которая является, возможно, наиболее простой общековариантной теорией.

Геометрическая структура АП – *реперное поле* ${h_a}^{\mu}(x^{\nu})$ (с лоренцевой сигнатурой η_{ab}), реализующее неприводимое представление группы (симметрия уравнений АП), включающей
1) 'правые' координатные диффеоморфизмы (по греческому индексу);
2) 'левые' глобальные лоренцевы вращения $O(1, n-1)$ по латинскому индексу и глобальные масштабные преобразования ${h_a}^{\mu} \mapsto \kappa {h_a}^{\mu}$.
По сравнению с *римановой структурой* ОТО имеет место увеличение группы симметрии и упрощение представления (векторное).

Известно множество совместных (лево-право-ковариантных) уравнений АП (классификация Эйнштейна–Майера для размерности пространства $n = 4$), причем вакуумное уравнение ОТО является частным (и, в некотором смысле, вырожденным) вариантом АП. Требование 'бессингулярности' (отсутствия рождения сингулярностей в решениях общего положения) представляется разумным критерием отбора уравнений.

При отсутствии сингулярностей (вырождения репера) АП приобретает свойства киральной модели: можно определить топологический заряд локализованного решения, а также топологические квазизаряды – для симметричных решений. Это позволяет по-новому взглянуть на проблему “вывода материи из геометрии”, которая вместе с задачей “геометризации электромагнитного поля” выдвигалась в эйнштейновской программе единой теории поля.

Цель работы. 1. Применение современной теории совместности к уравнениям АП; распространение теста совместности на случаи вырождения ко-репера (ко-сингулярности) или контра-репера (реперной плотности), и выбор уравнений, свободных от рождения сингулярностей в общем решении.

2. Оценка возможности объединения гравитационного и электромагнетного полей в рамках АП при $n \geq 4$: возможность асимптотики кулоновского типа, вывод тензора энергии-импульса, анализ постньютоновских эффектов (* см. сноску на стр. 6).

3. Вычисление (“фундаментальных”) групп $\pi_0(\mathcal{C})$ (топологический заряд) и $\pi_0(\mathcal{C}_G)$ (группы квазизарядов), где $\mathcal{C}$ – множество локализованных решений, а $\mathcal{C}_G$ – подмножество G–симметричных решений, $G \subset O(n-1)$. Определение *морфизмов* квазизарядных групп, индуцированных *вложениями* $\mathcal{C}_{G_1} \to \mathcal{C}_{G_2}$ $(G_1 \supset G_2)$.

4. Анализ простейшей космологической модели, её характерных масштабов. Оценка возможной феноменологии квазисолитонов – топологических возмущений разной симметрии, обладающих топологическим (квази)зарядом и понижающих симметрию космологического фона.

Научная новизна. Среди уравнений АП (лево-право ковариантных, второго порядка, приводящих к задаче Коши) найдено уравнение с нестандартным типом совместности, обеспечиваемой двумя тождествами разного порядка по дифференцированию. Это уравнение выделяется также другими замечательными свойствами и заслуживает названия *‘оптимальное уравнение’*.

Предложен ковариантный тест существования сингулярностей решений. Показано, что требование невозможности решений общего положения с рождающейся сингулярностью позволяет однозначно выбрать *оптимальное* уравнение, а также размерность пространства $n = 5$ (т. е. достигается идеал *единственности теории*).

Выведен тензор энергии-импульса (где основной вклад даёт электромагнитная компонента) и показана возможность правильных постньютоновских эффектов для *оптимального* уравнения АП.

Проведен анализ сферически-симметричных решений; решения типа одиночной волны, бегущей ($\gamma \gg 1$) по радиусу, предложены в качестве (основы) простейшей космологической модели (максимум симметрии и минимум параметров) с новым, ультрарелятивистским механизмом редукции дополнительного (радиального) измерения.

Введены $k-$адные гомотопические группы (как обобщение *относительных* или диадных) и получена $k-$адная гомотопическая последовательность. Показано, что к этим группам сводятся группы топологических квазизарядов симметричных решений (к диадным – в случае простых симметрий).

Для n=5 определены морфизмы квазизарядных групп путем анализа симметричных оснащенных многообразий. Поставлен вопрос о феноменологии *квазисолитонов* в условиях стохастического космологического 'фона' наибольшей симметрии.

Научная и практическая значимость работы. Исследования, проведенные в диссертации, носят теоретический характер. Предложенное уравнение АП, обнаружившее ряд замечательных качеств (невозникновение сингулярностей в общем решении при $n = 5$, топологические квазизаряды, правильные значения постньютоновских эффектов и т. д.), может составить основу интересной физической модели: симметричный космологический фон (своего рода 'волновод' с 'термализованным' шумом) с развитой системой квазисолитонов; для феноменологического описания эволюции квазисолитонов могут оказаться необходимыми методы (формализм) квантовой теории поля.

Математические подходы, использованные в данной работе (тест на сингулярности и градиентную катастрофу решений, понятие топологического квазизаряда и $k-$адные гомотопические группы, и т. д.), могут найти применение также в других областях теоретической физики.

Апробация работы. Результаты работы докладывались и представлялись на Всесоюзном рабочем совещании "Материальные среды в релятивистских полях тяготения" (Казань, 1989), Воронежской зимней математической школе (Воронеж, 1991; 1993; 1995), Международной конференции "Квантовая теория поля и гравитация" (Томск, 1994). Основные результаты диссертации опубликованы в 8 печатных работах.

Объем работы. Диссертация содержит 104 стр. машинописного текста, список литературы из 59 наименований, 3 таблицы и 5 рисунков.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка использованной литературы.

Во **введении** дается общая панорама вопросов, обсуждаемых в диссертации, полученных результатов, а также используемых математических средств; приводятся необходимые литературные указания.

В **первой главе** рассматриваются уравнения АП – совместные системы уравнений второго порядка, приводящие к задаче Коши.

О реперном поле $h(x)$ можно говорить как о *лоренцевой структуре*, поскольку в АП оно допускает вместе с координатными диффеоморфизмами глобальные преобразования дополненной группы Лоренца $O^*(1, n-1)$ (добавляется масштабное преобразование[1]):

$$h^{*a}{}_\mu(y) = \kappa s^a{}_b h^b{}_\nu(x) \partial x^\nu / \partial y^\mu; \quad \kappa > 0, \quad s^a{}_b \in O(1, n-1). \tag{1}$$

Лево-право-ковариантные уравнения АП записываются в §1.1 через *ковarianты* – тензоры с индексами обоих сортов, преобразующиеся аналогично (1). Простейший тензор (и его неприводимые части) составлен из первых производных ($h_a{}^\mu h^b{}_\mu = \delta^b_a$; связность симметрична):

$$\Lambda_{a\mu\nu} = h_{a\mu,\nu} - h_{a\nu,\mu} = 2h_{a[\mu;\nu]} \;\; (g_{\mu\nu;\lambda} \equiv 0). \tag{2}$$

$$S_{abc} = 3\Lambda_{[abc]} = \Lambda_{abc} + (abc), \;\; \Phi_a = \Lambda_{bba} = \Lambda_{b\mu\nu} h_b{}^\mu h_a{}^\nu. \tag{3}$$

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ab} h^a{}_\mu h^b{}_\nu, \;\; \text{где} \quad \eta_{ab} = \eta^{ab} = \mathrm{diag}(-1, 1, \ldots, 1).$$

Вектор Φ_μ естественно сопоставить с вектор-потенциалом электромагнитного поля; этим объясняется обозначение *[2]

$$f_{\mu\nu} = 2\Phi_{[\mu;\nu]} = \Phi_{\mu;\nu} - \Phi_{\nu;\mu}; \;\; f_{[\mu\nu;\lambda]} \equiv 0. \tag{4}$$

Из определения (2) следуют тождества ($_{,a} = {}_{;\mu} h_a{}^\mu$)

$$\Lambda_{a[\mu\nu;\lambda]} \equiv 0, \;\; \Lambda_{abc,a} + f_{bc} \equiv 0.$$

Анализ совместности системы уравнений состоит в проверке инволютивности ее *символа*, а также проверке наличия необходимых тождеств для продолженных уравнений. Большая симметрия уравнений АП очень упрощает эти действия. Наряду с необходимыми сведениями из теории совместности (§1.2), в первой главе (§1.3) обсуждается классификация Эйнштейна–Майера уравнений АП (приводятся уравнения и тождества, обеспечивающие их совместность).

Рассматриваемые системы n^2 уравнений удобно разделять на симметричную и антисимметричную часть (см. (3), (4) и тождества):

$$\mathbf{E}_{(\mu\nu)} = 2\Lambda_{(\mu\nu)\lambda;\lambda} + \sigma(\Phi_{\mu;\nu} + \Phi_{\nu;\mu} - 2g_{\mu\nu}\Phi_{\lambda;\lambda}) + W_{(\mu\nu)}(\Lambda^2) = 0, \tag{5}$$

[1]Оно входит в группу симметрии инерциальных координат. (Все примечания добавлены после.)

[2]* Все же f–компоненту нельзя сопоставлять с квантованным электромагнитным полем – нет градиентной инвариантности, хотя ур-е (7) и выглядит инвариантно.

$$\mathbf{E}_{[\mu\nu]} = S_{\mu\nu\lambda;\lambda} + \tau f_{\mu\nu} + W_{[\mu\nu]}(\Lambda^2) = 0, \qquad (6)$$

где Λ^2-члены должны определяться из условия совместности.

Первый очевидный вопрос – возможна ли асимптотика $f_{\mu\nu}$ кулоновского типа? В линейном приближении ($h'' \gg h'^2$) из (6) следует: $S_{\mu\nu\lambda,\lambda} + \tau f_{\mu\nu} = 0$. Пусть по трем измерениям имеется хотя бы в асимптотике сферическая симметрия, а дифференцированием по дополнительным измерениям (если они есть) можно пренебречь. Тогда имеем (здесь $i, j, k = 1, 2, 3;\ \ r^2 = x^i x^i$): $S_{0ij} = \varepsilon_{ijk} x^k \alpha(r)$; $\tau f_{0i} = -S_{0ij,j} \equiv 0$. Чтобы $f \neq 0$, надо положить $\tau = 0$. В этом случае в уравнении $\mathbf{E}_{[ab],b} = 0$ производные h''' сокращаются, и для совместности остальные члены должны также сокращаться при учете (5), (6) (уравнение должно обращаться в тождество), иначе возникнет новое, нерегулярное (в первых джетах) уравнение второго порядка. Для (6) имеется единственная возможность:

$$\mathbf{E}_{[\mu\nu]} = S_{\mu\nu\lambda;\lambda} = 0, \quad \mathbf{E}_{[\mu\nu];\nu} = S_{\mu\nu\lambda;\lambda;\nu} \equiv 0.$$

Симметричная часть тоже определяется условием совместности. Уравнение $\mathbf{E}_{(\mu\nu);\nu} = 0$ приводится (при σ=1 возможен лишь вариант ОТО) к виду $f_{\mu\nu;\nu} - J_\mu(\Lambda\Lambda', \Lambda^3) = 0$ (уравнение Максвелла), и уравнение $J_{\mu;\mu} = 0$ должно обращаться в тождество при учете (5), (6).

С точки зрения теории совместности эта ситуация объясняется так: символ G_2 системы (5), (6) при $\tau = 0$, $\sigma \neq 1$ неинволютивен, но его продолжение G_3 – инволютивно, и для совместности необходимо (и достаточно) обеспечить также и второе тождество.

В §1.4 показано, что для $\tau = 0$, $\sigma \neq 1$ возможны два варианта совместных уравнений. Менее интересный – однопараметрический класс уравнений с нулевым током. Второй случай – *оптимальное уравнение*, для которого σ=1/3, а уравнение Максвелла имеет ненулевой ток:

$$f_{\mu\nu;\nu} = J_\mu\ , \quad J_\mu = (S_{\mu\nu\lambda}\Phi_\lambda)_{;\nu} = -\frac{1}{2} S_{\mu\nu\lambda} f_{\nu\lambda}\ . \qquad (7)$$

Само уравнение имеет вид (здесь $L_{abc} = L_{a[cb]} = \Lambda_{abc} - S_{abc} - \frac{2}{3}\eta_{a[b}\Phi_{c]}$)

$$2\mathbf{E}_{\mu a} = L_{a\mu\nu;\nu} - \frac{1}{3} f_{a\mu} - \frac{1}{3} L_{a\mu\nu}\Phi_\nu = 0. \qquad (8)$$

Следовое уравнение $\mathbf{E}_{aa} = 0$ [см. (5), (8)] становится нерегулярным при $n = 4$ (в первых джетах): $\mathbf{E}_{aa} = \frac{1}{3}(4-n)\Phi_{a,a} + Q_{aa}(\Lambda^2) = 0, \quad Q_{aa} \not\equiv 0$. Отсюда вытекает необходимость дополнительных измерений.

Совместность системы (8) обеспечивается двумя тождествами разного порядка по дифференцированию (инволютивность символа G_3 гарантирует наличие тождеств в более высоких порядках).

Второе продолжение уравнения (8) приводит к тензору энергии-импульса (§1.6; G – тензор Эйнштейна): $D_{\mu\nu} \equiv -h^{-1}\delta(hG_{\epsilon\tau}R_{\epsilon\tau})/\delta g^{\mu\nu} \equiv$

$$\equiv G_{\mu\nu;\lambda;\lambda} + G_{\epsilon\tau}(2R_{\epsilon\mu\tau\nu} - 1/2 g_{\mu\nu}R_{\epsilon\tau}) = T_{\mu\nu}(\Lambda'^2, \cdots), \qquad (9)$$

здесь $h = \sqrt{-g}$; $D_{\mu\nu;\nu} \equiv 0$, поэтому 'на уравнениях' $T_{\mu\nu;\nu} = 0$.

Оставляя в $T_{\mu\nu}$ главные (квадратичные) члены и выделяя 'тривиальный' вклад так, чтобы оставались слагаемые Φ'^2, из (9) получаем ($A_{\mu\epsilon\nu\tau}$ имеет симметрию тензора Римана, члены A'' не дают вклад в n-импульс и момент импульса)

$$T_{\mu\nu} \simeq (\eta_{\mu\nu}f_{\epsilon\tau}f_{\epsilon\tau} - 4f_{\mu\epsilon}f_{\nu\epsilon})/18 + A_{\mu\epsilon\nu\tau,\epsilon\tau}.$$

Итак, существует тензор энергии-импульса и приближенный закон сохранения $T^{\mu\nu}{}_{,\nu} \simeq 0$, причем выделяется роль f-компоненты: слабые поля с $f_{\mu\nu} = 0$ не переносят n-импульс и момент импульса. Именно это обстоятельство делает разумным объединение $g_{\mu\nu}$ и $f_{\mu\nu}$ в одной структуре.

В §1.7 рассмотрены возмущения $\delta h_{a\mu}$ ($h^*_{a\mu} = h_{a\mu} + \delta h_{a\mu}$) 'фонового' решения $h_{a\mu}(x)$ с $f_{\mu\nu}$=0 (возможность таких решений показана в §1.5). Из (7) следует уравнение для $\delta f_{\mu\nu}$:

$$\delta f^{\mu\nu}{}_{;\nu} = -\frac{1}{2}S_{\mu\nu\lambda}\delta f^{\nu\lambda} \quad (\delta f_{[\mu\nu;\lambda]} \equiv 0).$$

Поле $S_{\mu\nu\lambda}$ не может войти в уравнение эйконала $\psi_{;\mu}\psi^{;\mu} = 0$ ($\delta f \sim a_0 e^{i\psi}$). То есть электромагнитный пакет движется по римановой геодезической, и классические (не зависящие от спина) постньютоновские эффекты такие же, как в ОТО (для ньютоновской асимптотики). Однако, S-компонента дает вклад, например, в поворот плоскости поляризации света.

Цель **второй главы** – поиск 'бессингулярных' уравнений АП, в *общем* решении которых сингулярности не рождаются, не возникают.

Бесконечность дифференциальных инвариантов (сингулярность) может быть связана либо с бесконечностью производных h–поля (многозначность решения), либо с вырождением самого репера. В §2.1 отмечается возможность устранения многозначности решения (градиентной катастрофы) путем многозначной замены координат: выбором координат y 'вдоль графика решения' $h(x)$. При этом $x(y)$ – отображение с особенностью, и в новой системе координат ко-репер $h^{*a}{}_{\mu}(y) = h^{a}{}_{\nu}(x)\,\frac{\partial x^\nu}{\partial y^\mu}$ вырожден в тех точках, где были перегибы и где вырождена матрица $\partial x/\partial y$. Это дополнительно мотивирует распространение анализа совместности на случай вырождения ко-репера.

В §2.2 показано, что уравнения АП (за двумя исключениями) можно записать так, что коэффициенты при вторых производных $h^a{}_{\mu,\nu\lambda}$ выражаются через 2-миноры (миноры коранга два) матрицы $h^a{}_\mu$

$$\begin{pmatrix} \mu\ \nu \\ a\ b \end{pmatrix} = \partial^2 h/\partial h^a{}_\mu \partial h^b{}_\nu = 2!\, h h^\mu_{[a} h^\nu_{b]}\ ; \quad h = \mathrm{det} h^a{}_\mu \, .$$

Так, для системы $\Lambda_{a\mu\nu;\nu} = (\Lambda^2)$ $(\sigma = 0,\ \tau = 1)$ легко получить:

$$h^2 \Lambda_a{}^{\mu\nu}{}_{,\nu} + \cdots = 2 h_{a[\alpha,\beta]\nu}(-g) g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} + \cdots = h_{a\alpha,\beta\nu}[\alpha\mu,\beta\nu] + (h'^2), \qquad (10)$$

где $[\alpha\mu,\beta\nu] = \partial^2(-g)/\partial g_{\alpha\mu}\partial g_{\beta\nu} = \frac{1}{2!}\begin{pmatrix} \alpha\, \beta \\ a\, b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mu\, \nu \\ a\, b \end{pmatrix}$ – 2-минор метрики. Миноры, как и определитель, полилинейны относительно элементов $h^a{}_\mu$ (или $g_{\mu\nu}$) и кососимметричны как по индексам строк, так и столбцов.

Для матриц вида $h^a{}_\mu$ =diag$(1,\ldots,1,0,\ldots,0)$ регулярность старших производных системы (10) (инволютивность символа) сохраняется, если rank$h^a{}_\mu{=}n{-}1$; если rank$h^a{}_\mu{\le}n{-}2$ (или rank$g_{\mu\nu}{=}n{-}2{<}$rank$h^a{}_\mu$), у части уравнений (10) старшие члены исчезают.

Вышесказанное справедливо для произвольной системы АП, кроме случаев $\sigma = 1$ или $\tau = 0$ (когда в тождество входит, соответственно, только симметричная или только антисимметричная часть уравнений). При $\sigma = 1$ главные производные симметричной части системы (такие же, как в ОТО) допускают представление

$$h^2 \mathbf{E}^{(\mu\nu)} \sim \frac{1}{2}\left\{\begin{pmatrix} \mu\ \lambda \\ c\ d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \nu\ \alpha\ \beta \\ b\ c\ d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \nu\ \lambda \\ c\ d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mu\ \alpha\ \beta \\ b\ c\ d \end{pmatrix}\right\} h_{b\alpha,\beta\lambda} + (h'^2) =$$

$= [\mu\nu,\varepsilon\tau,\alpha\beta] g_{\alpha\beta,\varepsilon\tau} + (h'^2)$; здесь фигурируют 3-миноры.
Другую часть можно записать в виде $h^2 \mathbf{E}_{[ab]} \to$ (1-минор)(2-минор)$h'' + (h'^2)$ (входят 1-миноры), и символ всей системы инволютивен при условии rank$g_{\mu\nu} \ge n-1$. В варианте $\tau = 0$, $\sigma \ne 1$ части меняются ролями, но инволютивность символа не сохраняется при вырождении ко-репера, – компонент у симметричной части слишком много, а 1-миноры зануляются слишком дружно.

Итак, среди уравнений АП выделяется случай $\tau = 0$, $\sigma \ne 1$, когда решения свободны от ко-сингулярностей и, видимо, от градиентной катастрофы. Замечательно, что *оптимальное* уравнение (8), выбранное ранее из совсем других соображений, относится к этому случаю.

В §2.3 рассматривается другой тип особенностей – контра-сингулярности, связанные с вырождением контравариантного репера $h_a{}^\mu$, точнее реперной плотности некоторого веса. После замены $(H = \det H^a{}_\mu)$

$$H_a{}^\mu = h^{\frac{\sigma}{\sigma+1}} h_a{}^\mu \quad (h_a{}^\mu = H^{-p} H^\mu_a, \quad p = (n_0 - n)^{-1}, \quad n_0 = 1 + \frac{1}{\sigma}) \qquad (11)$$

произвольная система АП записывается так, что старшие члены содержат только матрицу ${H_a}^\mu$, но не ${H^a}_\mu$ (${H^a}_\mu {H_a}^\nu = \delta^\nu_\mu$):

$$H^{3p}{\mathbf{E}^\mu}_b \to ({H_c}^\mu)^2 {H_d}^\nu{}_{,\lambda\tau} + (H'^2) = 0.$$

'Правильная' комбинация в равной степени включает симметричную и антисимметричную части, и нужно подбирать коэффициент p (вес плотности), чтобы сократить члены типа ${H^a}_\mu {H_a}^\mu{}_{,\nu\lambda}$. Замена ${h_a}^\mu \to {H_a}^\mu$ (11) "исправляет" нерегулярность системы (следовой части; и необратима) при $n = n_0$ (запрещенная размерность, если n_0 целое).

Для оптимального уравнения ($n_0 = 4$) младшие члены тоже не содержат ${H^a}_\mu$, и оно имеет 3-линейный вид:

$$\left(N^\mu_{ab} H^\nu_b - 2H^\nu_{[a,b]} H^\mu_b\right)_{,\nu} + \frac{1}{3}\left(2H^\mu_b C_{[a,b]} - N^\mu_{ab} C_b\right) = 0, \qquad (12)$$

где $C_a = H^\lambda_{a,\lambda}$; $\;{}_{,a} = {}_{,\lambda} H^\lambda_a$; $\;N^\mu_{ab} = H^\mu_{a,b} - H^\mu_{b,a} + \frac{1}{3}(H^\mu_a C_b - \eta_{ab} H^\mu_d C_d)$.

Регулярность и совместность уравнения (12) сохраняется для вырожденных (но конечных) матриц ${H_a}^\mu$, если $\mathrm{rank} {H_a}^\mu {H_a}^\nu \geq 2$; то есть можно строить формальное решение в виде ряда, начиная с вырожденной матрицы ${H_a}^\mu(x_0)$. Попытка вернуться за сингулярностью (где $H^{-1} < 0$) к реперному полю наталкивается на проблему многозначности (и комплексности) решения, если $n > 5 = n_0 + 1$, так как p в (11) становится дробным числом. Это дает основание выбрать для *оптимального* уравнения околокритическую размерность $n = 5$.

В §2.4 обсуждается возможность *рождения* в *общем* решении контрасингулярностей коранга один с нулевым членом ростка

$${A_a}^\mu = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, 0), \quad {H_a}^\mu(x) = A^\mu_{a|\Gamma}\, x^\Gamma.$$

Поверхность сингулярностей Σ должна быть пространственно-подобной; второе условие ('физичность' ростка) – *существование* 'физичных' координат вплоть до Σ. Для несингулярного ростка это требование приводит к ограничениям типа неравенств (на коэффициенты формального решения). Но в случае сингулярного ростка и размерности $n = 5$ будут более сильные ограничения. Ко-репер ${h^a}_\mu$ остается конечным на Σ, так как совпадает с минором 'рабочей' матрицы ${H_a}^\mu$ [см. (11)]:

$$p = (4 - n)^{-1} = -1, \quad {h^a}_\mu = \|{H_b}^\varepsilon\| {H^a}_\mu \to \mathrm{diag}(0, \ldots, 0, 1).$$

На поверхности Σ нет времени-подобного вектора, временно́й координаты. Точнее, слабое условие $g_{00} = 0$ может быть выполнено в точке разложения в ряд, но чтобы оно выполнялось в окрестности $\Sigma_1 \cap U^n$, на коэффициенты ряда должны быть наложены сильные ограничения, поскольку световые вектора образуют (на Σ) подмножество коразмерности один; это уменьшает меру ‘опасных’ ростков до нуля.

В §2.5 показано существование сферически-симметричных решений с рождающимися контра-сингулярностями коранга $n-2$ (коранга три, если $n=5$; при этом все касательные векторы – световые).

Сферически-симметричное поле $h^a{}_\mu$ можно записать в виде:

$$h^a{}_\mu = \begin{pmatrix} a & b\,n_i \\ c\,n_i & e\,n_i n_j + d\,\Delta_{ij} \end{pmatrix}; \quad h_a{}^\mu = \frac{1}{\kappa}\begin{pmatrix} e & -c\,n_i \\ -b\,n_i & a\,n_i n_j + \frac{\kappa}{d}\,\Delta_{ij} \end{pmatrix}, \qquad (13)$$

где $\kappa = ae - bc$, $x^2 = x^i x^i$, $n_i = x^i/x$ – единичный вектор по радиусу; $\Delta_{ij} = \delta_{ij} - n_i n_j$; $i,j = 1,\ldots,n-1$); a,d,e – четные, b,c – нечетные функции радиуса x.

Поле вида (13) допускает замены $x^* = X(x,t)$, $t^* = T(x,t)$ ($n_i^* = n_i$). При выборе b=c=0 после ряда интегрирований (с учетом $h^a{}_\mu \to \delta^a_\mu$ при $x \to \infty$) система (8) сведена к одному уравнению второго порядка и уравнению связи (точка – дифференцирование по времени, а штрих – по радиусу):

$$\ddot\alpha = \alpha^2\alpha'' + \alpha\alpha'^2/k + (k+2)\alpha^2\alpha'/x\ ; \qquad \beta = \alpha + x\alpha'/k.$$

Здесь α=a/e=$d^{k/3}e^{-2/3}$, β=a/d, $k = n-2$. Замена $e,d \to \alpha,\beta$ отвечает замене (11). Можно задать четные функции $\alpha_0(x)$>0 и $\dot\alpha_0(x)$ так, что $\beta_0(x)$ касается нуля в точке x_1>0, но $\beta(x,t)$>0 при t<0 ($\dot\alpha_0, \dot\beta_0 < 0$ около x_1). В точке x=x_1, t=0 будет сингулярность, т.к. $\beta = 0$, а при $t > 0$ появляется область, где β<0.

В §2.6 выбраны координатные условия $b = 0$, $e = d$, и задача сведена к системе квазилинейных уравнений первого порядка:

$$A^{\cdot} = AB' - BA' + kAB/x\ , \quad B^{\cdot} = AA' - BB' - (k-1)B^2/x\ , \qquad (14)$$

где $A = a/e = e^{k/2-1}$, $\quad B = -c/e$. В качестве начальных данных надо задать четную функцию $A_0(x) > 0$ ($A_0 \to 1$ при $x \to \infty$) и нечетную $B_0(x)$.

Переход к инвариантам $u = A+B$, $v = A-B$ показывает, что система (14) относится к слабо-нелинейному типу (где, как в *газе Чаплыгина*, отсутствует градиентная катастрофа):

$$\begin{cases} \dot u \;=\; vu' + \frac{k}{4x}(u^2 - v^2) - \frac{k-1}{4x}(u-v)^2 \\ \dot v \;=\; -uv' + \frac{k}{4x}(u^2 - v^2) + \frac{k-1}{4x}(u-v)^2 \end{cases}. \qquad (15)$$

Укороченная система (15) – без членов $\sim 1/x$ – полностью интегрируется. Островное решение принимает вскоре вид двух одиночных волн, бегущих по x ($v-$волна направо, $u(x) = v(-x)$) со скоростью единица и не меняющих форму.

Младшие члены $\sim 1/x$ замедляют, по-видимому, движение v-волны (увеличение скорости вело бы к градиентной катастрофе) и примешивают u-компоненту. Решение можно охарактеризовать несколькими параметрами: $R \sim t$ – радиус расширения; λ и a – ширина и высота 'горба'; $\gamma \gg 1$ – релятивистский фактор; λ и a медленно меняются со временем и могут играть роль 'фундаментальных постоянных'. Для амплитуды 'примесной' $u-$компоненты (в области $v-$горба) и фактора γ возможны оценки: $\Delta u = u - 1 \sim -a\lambda/R$; $\gamma = 1/\sqrt{1-u^2} \sim \sqrt{R/(a\lambda)} \sim \sqrt{t}$. В системе координат, движущейся вместе с 'горбом', характерный размер $L = \gamma\lambda$ может быть достаточно большим.

Более реалистичная космологическая модель должна содержать еще один объект – стохастические волны (шум), движущиеся по касательным измерениям внутри 'горба' (полное внутреннее отражение в своего рода космологическом 'волноводе') и пришедшие в результате эволюции к симметричному 'термализованному' состоянию. Такая модель дает маленький масштаб λ_0 (граница спектра шума) для касательных измерений ($\lambda_0 \leq \lambda \ll L$) и решает проблему редукции дополнительного (радиального, ультрарелятивистского) измерения.

В **третьей главе** "Топологические квазисолитоны" обсуждается возможность частицеподобных решений, характерные размеры которых могут определяться параметрами 'космологического фона'.

Определяются группы $\pi_0(\mathcal{C})$ (топологический заряд; §3.1) и $\Pi(G) = \pi_0(\mathcal{C}_G)$ (топологические квазизаряды; §3.3), где $\mathcal{C}$ – множество локализованных решений (поверхность Коши тривиальной топологии), а $\mathcal{C}_G$ – подмножество $G-$симметричных решений, $G \subset O(m)$; $m = n-1$.

Большая *симметрия уравнений* АП приводит к возможности *симметричных решений*, когда лево-правое преобразование (1) переводит $h(x)$ само в себя. Вычисление групп $\Pi(G)$ сведено к гомотопической классификации G-симметричных конфигураций $SO-$поля ('киральная часть' репера); локализованное поле $\sigma(x) : \ R^m \to SO(m)$, $(\sigma(\infty) = 1^m)$ G-симметрично если (в подходящих координатах)

$$\sigma(sx) = s\sigma(x)s^{-1} \ \ \forall \ s \in G \subset O(m). \tag{16}$$

Топологическому заряду отвечает группа $\Pi(1) = \pi_m(SO_m)$.

Надо задать $\sigma(x)$ на множестве орбит, причем в стационарных точках σ коммутирует с G [см. (16)]. Простые группы G приводят к *относительным* (или диадным) гомотопическим группам; например для группы P_1 отражений одной координаты

$$\Pi(P_1) = \pi_m(SO_m; SO_{m-1}) = \pi_m(S^{m-1});$$

последнее равенство – ввиду расслоения $SO_m/SO_{m-1} = S^{m-1}$.

Для симметрии O_l (действующей на последние l координат; $l \leq m$) есть ограничения для матрицы σ как в случае сферической симметрии: в (13) надо положить $i, j = m - l + 1, \ldots, m$; a – матрица $(m-l)^2$, b, c – вектор-функции; $d = 1$. Результат следующий:

$$\Pi(O_l) = \pi_{m-l+1}(SO_{m-l+1}; SO_{m-l}) = \pi_{m-l+1}(S^{m-l}).$$

Если $l > 3$, справедливо равенство $\Pi(O_l) = \Pi(SO_l)$, но для $l = 3$ или $l = 2$ в (13) возможны члены $e^*\varepsilon_{ijk}n_k$ или $b^*(c^*)\varepsilon_{ij}n_j$, $e^*\varepsilon_{ij}$, соответственно; в итоге получено

$$\Pi(SO_3) = \pi_{m-2}(SO_2 \times SO_{m-2}; SO_{m-3}) = \pi_{m-2}(S^1 \times S^{m-3}), \qquad (17)$$

$$\Pi(SO_2) = \pi_{m-1}(SO_m; SO_{m-2} \times SO_2) = \pi_{m-1}(RG_+(m, 2)). \qquad (18)$$

Полупростые симметрии $G_1 \times \cdots \times G_k$ приводят к $(k+1)$-адным группам: каждой компоненте G_i отвечает полупространство (орбит), их пересечение образует основу $(k+1)$-адного отображения. В §3.2 дается определение k-адных гомотопических групп и приводится k-адная гомотопическая последовательность.

Задача описания морфизмов $i_* : \Pi(Sym1) \to \Pi(Sym2)$, индуцированных вложениями $i : \mathcal{C}_{Sym1} \to \mathcal{C}_{Sym2}$ $(Sym1 \supset Sym2)$, решается для наиболее важного случая $m = 4$; при этом [см. (17), (18)] $\Pi(SO_3){=}\Pi(O_3){=}0$, $\Pi(SO_2){=}Z^2$ т.е. возможны осе-симметричные, но не сферически-симметричные (по трем измерениям) квазисолитоны.

Вводится кватернионное описание пространства: $\mathrm{x} \in \mathbf{H} = R^4$, а матрице $\sigma \in SO_4$ ставится в соответствие пара единичных кватернионов $(\mathrm{f,g}) \in SO_4 = S^3_l \times S^3_r/\pm$; различаем сферы как *левую* и *правую*, еще и потому, что при отражении вещественной координаты элементы пары (f,g) меняются местами; $(\mathrm{f,f}) \in SO_3 \subset Sym_0$. Условие симметричности (16) расщепляется надвое:

$$\mathrm{f(axb^{-1}) = af(x)a^{-1}}, \quad \mathrm{g(axb^{-1}) = bg(x)b^{-1}} \ \forall \mathrm{(a,b)} \in Sym \subset SO_4.$$

Группы $\Pi(Sym)$ для $Sym \subset SO_4$ разделены на две равные части, например: $\Pi(1) = \Pi_l(1) + \Pi_r(1) = Z_2 + Z_2$; отражения P_1 или P_3 (трех координат) уменьшают Π вдвое.

Далее используется связь отображений ($\mathrm{f}(\mathrm{x}) : \mathbf{H} \to S^3$) и *оснащенных многообразий*: $M^1 = \mathrm{f}^{-1}(-1)$ – центральная область частицы (она одномерна – как для *торонов* модели Фаддеева); *оснащение* определяет дифференциал отображения $d\,\mathrm{f}(M)$.

В §3.4 рассмотрены SO_2-симметричные оснащенные многообразия и доказано наличие эпиморфизма $\Pi_l(SO_2) = Z \xrightarrow{e} \Pi_l(1) = Z_2 \;\; (1 \mapsto 1)$.

Так как в уравнениях АП отсутствуют размерные константы, выбирается (по соображениями простоты, симметрии: понижение симметрии увеличивает число параметров) 'фоновое решение', параметры которого могли бы определить характерные размеры солитонов. Крупномасштабная часть фона – расширяющаяся сфера (S^3) толщины λ (одиночная волна по радиусу) и радиуса $R \sim t$ – своего рода 'волновод', удерживающий ('внутреннее отражение') стохастические волны и некое количество (квази)солитонов. То есть предполагается сценарий как в компьютерном эксперименте Ферми, Пасты, Улама, где наступление 'тепловой смерти' ограничивалось существованием солитонов.

В локальной сопутствующей системе координат толщина 'волновода' $L = \gamma\lambda \approx \sqrt{R\lambda}$, а его симметрия (не считая касательных сдвигов) $Sym_0 = O_3 \times P_1$; P_1 относится к отражению радиальной (вещественной кватернионной) координаты. Если начальное состояние имело 'левый' заряд $[1_l \in \Pi_l(1)]$, то стохастическая компонента фона (её киральная часть) тоже может быть преимущественно 'левой', т.е. симметрия фона понижена до $SO_4 \cap Sym_0$.

В §3.5 обсуждается феноменология топологических квазисолитонов, которые в условиях стохастического фона выглядят (после усреднения по масштабу $\sim \lambda_0$, связанному с границей спектра, 'температурой' фона) как *ниточка со стрелкой*: длины $\sim L$ по дополнительному измерению (нет другого характерного размера) и размера $\sim \lambda_0$ по обычным измерениям; $\lambda_0 \le \lambda \ll L$. 'Стрелка' – общее название для параметров, задающих 1) направление (оси) симметрии (RP^2), 2) 'направление' оснащения (O_3). Часть параметров (по которым 'снято вырождение'), не меняющихся вдоль ниточки, отнесена к 'аромату', а часть, реализующая представление группы $SO_3 \subset Sym_0$, – к спину.

Подчеркивается, что солитонная ниточка приобретает энергию, рассеивая электромагнитную стохастическую компоненту (которая распространяется *вдоль* волновода), и нужно складывать амплитуды рассеянной электромагнитной компоненты (вклады от разных участков солитонной нити с общей проекцией), т.е. складывать стрелки. Такое усреднение по дополнительному измерению (ввиду его ‘неразвитости’, т.е. единственности масштаба L) ведет к ‘вторичному’ трехмерному *полю стрелок* (как *достаточному* солитонному представителю).

Эволюция вторичных полей, являясь следствием усреднения по большому количеству участков нити (подобно фейнмановскому усреднению по путям), подчиняется, возможно, лагранжевым правилам, а сохранение энергии ($n-$импульса), удерживаемой солитонами, – нетеровское следствие. При этом энергетическая устойчивость фона (относительно солитонных возбуждений) возможна при положительности солитонной энергии как функционала вторичных полей, а симметрия лагранжиана должна быть не ниже симметрии фона (флуктуации фона, приводящие к рождению солитон–антисолитонных пар, выглядят, отчасти, как ‘нулевые колебания’ вторичных полей).

Квазисолитоны, отвечающие составным симметриям (см. Таблицу), могут выступать как независимые каналы ‘топологического возмущения’ фона и давать свои вклады в плотность ‘вторичной’ энергии и лагранжиан вторичных полей.

Таблица. Квазизарядные группы $\Pi_l(Sym)$ и их морфизмы в группу предыдущего уровня симметрии для $Sym \subset SO_4 \cap Sym_0$ (*[3]).

Sym	$\Pi_l(Sym) \to \Pi_l(Sym^*)$	‘имя-аналогия’
1	Z_2	
$SO\{1,2\}$	$Z_{(e)} \xrightarrow{e} Z_2$	e
$SO\{1,2\} \times P\{0,3\}$	$Z_{(\nu)} + Z_{(H)} \xrightarrow{i,m2} Z_{(e)}$	$\nu^0;\ H^0 \to e + e\ \ (^*)$
$SO\{1,2\} \times P\{2,3\}$	$Z_{(W)} \xrightarrow{0} Z_{(e)}$	$W \to e + \nu^0$
$SO\{1,2\} \times P\{0,2\}$	$Z_{(Z)} \xrightarrow{0} Z_{(e)}$	$Z^0 \to e + e$
$SO\{1,2\} \times P\{0,3\} \times$ $\times P\{2,3\}$	$Z_{(\gamma)} \xrightarrow{0} Z_{(H)}$ $\xrightarrow{0} Z_{(W)}$	$\gamma^0 \to H^0 + H^0\ \ (^*)$ $\to W + W$

Здесь $SO\{i,j\}$ обозначает вращение координат x_i, x_j, а $P\{i,j\}$ – их отражение (поворот на π). Обозначение $\xrightarrow{0}$ – для нулевого морфизма (образ состоит из нуля); $e, i, m2$ – эпи-, изо- и мономорфизм ($1 \mapsto 2$) соответственно. Чтобы не выдумывать названия для разных типов квазисолитонов, в Таблице использованы имена частиц стандартной модели.

[3*] Видимо, фотон все же более симметричен, чем хиггс(ы).

Учитывались два обстоятельства: $P\{0\}$ связано с зарядовым отражением; солитоны, несущие топологический заряд ($\in Z_2$), относятся к фермионам, остальные — к бозонам.

Для учета топологических возмущений, нарушающих симметрию фона, предложено связать особый тип квазисолитонов с 'киральными' (или самодуальными) однопараметрическими группами SO_2^+ и SO_2^-, чьи генераторы являются, соответственно, суммой и разностью генераторов обычных групп SO_2; например, $SO^+\{1,2\} \ni (\cos\varphi + \mathrm{k}\,\sin\varphi, 1)$. Доказано наличие эпиморфизма $\Pi_l(SO_2^{\pm}) = Z \xrightarrow{e} Z_2 = \Pi_l(1)$.

Для киральных групп 'стрелка' имеет больше параметров; если, как для 'лептонов', вырождение снято лишь по двум параметрам, то остается место для 'цвета' (множество типа S^2; составные группы $SO_2^{\pm} \times P_2$ и т.д. приводят к 'цветным' бозонам).

В **заключении** подводятся итоги работы и обсуждаются нерешенные вопросы, могущие составить предмет дальнейших исследований.

Основные результаты работы, выносимые на защиту:

1. Выведено уравнение АП ('оптимальное') с новым типом совместности, обеспечиваемой двумя тождествами разного порядка по дифференцированию.

2. Для 'оптимального' уравнения показано, что размерность $n{=}4$ оказывается запрещенной, и что возможны решения с нулевым электромагнитным полем. Выведен тензор энергии-импульса, где основной вклад даёт электромагнитная компонента, и показана возможность правильных постньютоновских эффектов.

3. Анализ совместности распространен на случаи вырождения реперной или ко-реперной матрицы. Показано, что требование невозникновения сингулярностей в общем решении может выполняться лишь для 'оптимального' уравнения при размерности пространства $n = 5$.

4. При определенном выборе координат сферически-симметричная задача сведена к одному уравнению второго порядка, найдены решения с рождающимися (контра)сингулярностями.

5. В других координатах задача сведена к системе двух уравнений первого порядка (типа динамики газа Чаплыгина). Решения типа одиночной волны, бегущей ($\gamma \gg 1$) по радиусу, предложены (для $n = 5$) в качестве простейшей космологической модели.

6. Введены $k-$адные гомотопические группы и получена $k-$адная гомотопическая последовательность. Показано, что к этим группам сводятся

группы топологических квазизарядов симметричных решений (к диадным – в случае простых симметрий).

7. Для $n = 5$ вычислены квазизарядные группы (для симметрий, включающих непрерывную подгруппу) и определены их морфизмы, индуцированные вложениями симметрий.

8. Поставлен вопрос о феноменологии *квазисолитонов* в условиях стохастического космологического 'фона' большой симметрии. Отмечены возможные параллели с феноменологией квантовой теории поля.

Результаты диссертации опубликованы в работах:

1. Жогин И. Л. *О сингулярностях в теории гравитации* //Изв. вузов. Физика. – 1992. – № 7. – С. 73–78.
Co-singularities and Unique Equation: Eng. Abs. 70kB pdf
J. Russian Physics, **35** (1993) 647–652.

2. Жогин И. Л. *Уравнения поля для риманова пространства с кручением* // Изв. вузов. Физика. – 1990. – № 9. – С. 83–87.
J. Soviet Physics, **33** (1991) 792–796.

3. Жогин И. Л. *Топологические квазизаряды в теории телепараллелизма Эйнштейна и комбинаторика частиц* // Изв. вузов. Физика. – 1990. – № 7. – С. 15–18.
J. Soviet Physics, **33** (1991) 562–565.

4. Жогин И. Л. *Трилинейные общековариантные уравнения* // Изв. вузов. Физика. – 1991. – № 2. – С. 22–27.
3-linear equations; contra-singularities and unique D: gr-qc/0203008
J. Soviet Physics, **34** (1992) 781

5. Жогин И. Л. *Абсолютный параллелизм; сферическая симметрия и сингулярности* // Изв. вузов. Физика. – 1991. – № 9. С. 47–52.
Spherical symmetry and singularities: gr-qc/0412081

6. Жогин И. Л. *Уравнения поля для риманова пространства с кручением* //В кн.: Гравитация и теория относительности. Вып. 28. – Казань: КГУ, 1991. – С. 63–67.

7. Жогин И. Л. *Абсолютный параллелизм, сферическая симметрия* //В кн.: Гравитация и теория относительности. Вып. 28. – Казань: КГУ, 1991. – С. 60–63.

8. Жогин И. Л. *k–адные гомотопические группы в классификации симметричных конфигураций 'кирального' SO-поля* // Современные методы теории функций и смежные проблемы прикладной математики и механики: Тезисы докладов школы. – Воронеж: ВГУ, 1995. – С. 97.

Фенечка-модель, интеграл по путям и теория реперного поля (Материалы межд. конф. "Выпускник НГУ и научно-технический прогресс". 1999. Ч.1. С.65)

В интеграле по путям складываются не вероятности, а некие "стрелки", амплитуды. Суммирование ведется по фазовому пространству — координатам путей и скоростям вращения "стрелок" — импульсам. Этот фейнмановский формализм квантовой механики замечателен тем, что объясняет, делает физически понятным принцип наименьшего действия: хаос пробует всё 'на зуб' и находит экстремумы, минимальные траектории.

Неясны, правда, два момента: 1) где прячутся эти траектории? 2) почему надо складывать "стрелки"? Предлагаемая модель (для мысленного эксперимента или компьютерной симуляции) призвана осветить эти моменты, а также дать иллюстрацию (грубую, но основанную на привычных понятиях) сложных, стохастических решений пятимерной теории реперного поля. В этой теории возможны конфигурации поля с топологическим (квази)зарядом [1], и требуется статистическая феноменология, система бухгалтерского учета топологических квази-зарядов (типа квантовой ТП).

Модель. Длинная нитка с бусинами — "фенечка" — помещена между параллельными плоскостями волновода вместе с двумя (не взаимодействующими друг с другом) видами волн: хаос-1 — звуковые волны, распространяющиеся под заметными углами к плоскости волновода; хаос-2 — электромагнитные волны, двигающиеся почти касательно к плоскостям (полное внутреннее отражение). Бусинки не имеют трения (обратимость по времени), но оптически активны, либо двупреломляют, так что каждой можно приписать некую "стрелку" (амплитуды рассеяния волн-2).

Хаос-1 вызывает стохастические движения и вращения бусин, так что они имеют разные траектории в "фазовом"пространстве. Хаос-2 играет детектирующую роль. Бусинки с одинаковой проекцией на плоскость волновода рассеивают волны-2 когерентно, т.е. их стрелки можно сложить. Результат такого усреднения по ортогональному измерению — поле стрелок. Оно определяет рассеяние и неоднородность волн-2, а энергия неоднородности есть некий функционал поля стрелок.

Что чему соответствует в теории поля. Волновод это крупномасштабная (космологическая) часть решения — одиночная сферически-симметричная волна, бегущая по радиусу (дополнительное измерение) со скоростью чуть-чуть меньше единицы. Два вида хаоса — относительно слабые волны реперного поля, причем из пятнадцати мод (поляризаций) выделяются три особые (хаос-2): только они дают вклад в тензор энергии-импульса и “не различают” дополнительное измерение. Наконец, “фенечка” – это топологический квази-солитон, или экстремум (максимум вероятности реализации) на нелинейных конфигурациях, связанный с той или иной группой симметрии и соответствующим топологическим квазизарядом.

[1] Жогин И.Л. Автореф. канд. дисс. Томск, 1996; Изв. вузов. Физика. 1992. №7. С.73

The English variant of this appendix and some further comments are available in

http://zhogin.narod.ru/Fen1.pdf (73kB)