Bestimmung des Spins des Higgs-Bosons im Standardmodell

Birgit Eberle
Fachbereich Physik
Universität Hamburg

Diplomarbeit

Februar 2001

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **1**

2 Standardmodell **5**

2.1 Eichtheorien 5

2.2 Elektroschwache Wechselwirkung 8

2.3 Der Higgs-Mechanismus 10

2.4 Quantenchromodymamik 13

3 Helizitätsformalismus **15**

3.1 Helizitätszustände 15

3.2 Matrixelemente 16

4 Modelle beliebigen Spins **23**

4.1 Gerade Normalität 24

4.2 Ungerade Normalität 27

4.3 Spin $S \geq 3$ 29

4.4 Gemischte Normalität 29

5 Bestimmung des Spins des Higgsteilchens **31**

5.1 Das Standardmodell 32

5.2 Teilchen beliebigen Spins und beliebiger Parität 35

5.2.1 Gerade Normalität 36

5.2.2 Ungerade Normalität 37

5.2.3 Gemischte Normalität 38

6 Zusammenfassung **41**

A Verwendete Feynmanregeln **43**

B d-Funktionen **45**

C Normalitätstest **47**

D Phasenraum und Wirkungsquerschnitt **49**

E Kinematik **51**

E.1 Kinematik der Produktion 51

E.2 Kinematik der Zerfälle 53

F Spindichtematrizen **55**

F.1 Spindichtematrizen der Produktion 55

F.2 Spindichtematrizen der Zerfälle 56

G Vertexfaktoren der Zerfälle **61**

G.1 Spin 1 61

G.2 Spin 2 63

H Polarisierte Strahlen **65**

H.1 Longitudinale Polarisation 66

H.2 Transversale Polarisation 67

Danksagung **73**

Kapitel 1

Einleitung

Hinter jeder physikalischen Theorie steht die Idee, daß den Phänomenen der Natur, so vielfältig und kompliziert sie auch erscheinen mögen, nur wenige, einfache Prinzipien zugrunde liegen. Die Elementarteilchenphysik stellt die Welt als aus wenigen fundamentalen Teilchen aufgebaut dar – die zwischen ihnen wirkenden Kräfte sind wohldefiniert und auf eine geringe Anzahl beschränkt.
Das Standardmodell beschreibt im Rahmen der $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$-Eichtheorie die elektromagnetische, die schwache, sowie die starke Wechselwirkung. Obwohl die Gravitation *ad hoc* hinzugefügt werden muß und weder das Symmetriemuster noch die fundamentalen Parameter abgeleitet werden können, stellt das Standardmodell dennoch eine der größten Errungenschaften der Physik dar. Beim Vordringen zu immer höheren Schwerpunktsenergien mit leistungsfähigeren Beschleunigern wurde es hochpräzisen Tests unterzogen und seine Vorhersagen wurden bestätigt. Durch die Vereinigung der elektromagnetischen und der schwachen Wechselwirkung zu einer Kraft im Rahmen der Eichgruppe $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ konnte das Standardmodell als eine renormierbare Theorie formuliert werden. Diese $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$-Eichtheorie beinhaltet die bereits damals bekannten schwachen geladenen und die elektromagnetischen Ströme in der richtigen $(V-A)$- bzw. Vektorkopplungsstruktur. Eine der Konsequenzen der Vereinigung war außerdem die Vorhersage eines neutralen Stromes und damit eines weiteren Austauschteilchens, des Z-Bosons, das 1983 am CERN kurz nach den $W^{\pm}$-Bosonen nachgewiesen werden konnte. Auch das top-Quark, dessen Existenz die Generationen- und Flavour-Symmetrie des Standardmodells verlangt, wurde 1995 am Fermilab gefunden.
Das letzte unentdeckte Teilchen des Standardmodells ist das Higgs-Teilchen. Es ist verantwortlich für die Generierung der Massen der fundamentalen Materieteilchen und der schweren Eichbosonen. Sein Nachweis ist notwendig für die Bestätigung des Standardmodells und deswegen eines der Hauptziele der gegenwärtigen Forschung in der Elementarteilchenphysik. Nachdem die Hinweise am LEP [1] auf ein leichtes Higgs-Boson nicht ausreichten, kann das Teilchen entweder am Tevatron [2] oder später am LHC [3] entdeckt werden. Findet man ein neues Teilchen, so ist es notwendig zu überprüfen, ob es die Eigenschaften des gesuchten Higgs-Bosons hat. Darunter fallen die Selbstkopplungen, die Kopplungen an die

Vektorbosonen und Fermionen und die Quantenzahlen Spin S und Parität P. Für die Bestätigung des Standardmodells ist somit essentiell, den Spin des Higgs-Teilchens eindeutig zu bestimmen. Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, dafür geeignete Kriterien zu finden.
Da das Standardmodell-Higgs-Teilchen Spin 0 hat, liegt die Vermutung nahe, es sei möglich, das Higgs-Boson schon durch seinen Zerfall zu identifizieren, denn jedes Spin-0-Teilchen zerfällt im eigenen Ruhesystem isotrop. Dies ist jedoch nur eine notwendige, keine hinreichende Bedingung, denn auch Teilchen höheren Spins können, wenn die Kopplungen bestimmte Bedingungen erfüllen, isotrop zerfallen, und damit ein Spin-0-Teilchen imitieren[1].
Bei der Suche nach dem Higgs-Boson an zukünftigen e^+e^--Beschleunigern ist der Higgsstrahlungsprozeß

$$e^+e^- \to Z^* \to ZH \tag{1.1}$$

von besonderem Interesse, da er neben der WW-Fusion einen der beiden Hauptproduktionsmechanismen [4] für Higgs-Teilchen darstellt. Geht man davon aus, daß das neu produzierte Teilchen ein beliebiges Teilchen beliebigen Spins sein kann, so müssen modellunabhängige Unterscheidungskriterien gefunden werden. Dafür wird in der vorliegenden Arbeit einerseits der charakteristische Anstieg des totalen Wirkungsquerschnittes im Energiebereich der Produktionschwelle untersucht und andererseits sollen bestimmten Winkelkorrelationen des differentiellen Wirkungsquerschnitts als zweites Identifikationsmerkmal für Spin und Parität herangezogen werden.

Da der Zerfall des H keinen unwidersprüchlichen Aufschluß über den Higgs-Spin geben kann, wird hier das Hauptaugenmerk auf die Winkelabhängigkeit des Produktionsprozesses gelegt. Darüberhinaus wird die Winkelinformation des Zerfalls des $Z \to f\bar{f}$ verwendet, ohne daß die Allgemeinheit der Z-Z-H-Kopplung eingeschränkt wird.

Gliederung

In Kapitel 2 wird eine Einführung in das Standardmodell gegeben, und damit auch in den Higgsmechanismus. Um einen Wirkungsquerschnitt in linear unabhängige Winkelbeiträge zu zerlegen, ist der Helizitätsformalismus (Kapitel 3) eine geeigente Methode. Die entsprechenden Koeffizienten der Winkelkorrelationen tragen charakteristische Eigenschaften der Z-Z-H-Kopplung und lassen sich einerseits im Experiment bestimmen und andererseits berechnen. Um den Spin des Higgs-Bosons zu bestätigen, muß jede andere Spin-Möglichkeit ausgeschlossen werden. Dafür ist es notwendig, modellunabhängige Vertexfaktoren für Teilchen beliebigen Spins zu konstruieren. Dies wird in Kapitel 4 durchgeführt. Mit diesen Grundlagen folgt die eigentliche Analyse in Kapitel 5, die zunächst für Paritäts-Eigenzustände durchgeführt wird, und schließlich auf beliebige Zustände gemischter Parität verallgemeinert wird. So ist es möglich, ohne Beschränkung der Allgemeinheit alle höheren Spins Fall für Fall auszuschließen, so daß nur noch Spin 0 übrig bleibt. Die Zusammenfassung findet man in Kapitel 6 und im Anhang folgen rechnerische Details und

[1] Siehe Anhang F.2.

Definitionen.
Will man sich nur einen schnellen Überblick verschaffen, so ist es möglich nur Kapitel 5 zu lesen. Die für dieses Kapitel wichtigen Formeln werden hier nochmals aufgeführt.

Kapitel 2

Standardmodell

Dieses Kapitel hat keinerlei Anspruch auf Vollständigkeit. Für weitergehende Erklärungen sei auf [5, 6] verwiesen.
Das Standardmodell beschreibt die Natur auf der Basis von fundamentalen, also unteilbaren Teilchen. Diese Teilchen lassen sich in drei Bereiche gliedern:
Die **Materieteilchen** bauen sämtliche im Universum mögliche Materie auf. Leptonen wie Quarks gruppieren sich in drei Generationen. Auf elementarem Niveau tragen alle Spin $\frac{1}{2}$, sind also Fermionen.
Die **Eichbosonen** vermitteln die drei fundamentalen zwischen den Teilchen wirkenden Kräfte – das Photon die elektromagnetische Kraft, $W^{\pm}$ und Z^{o} die schwache, und die Gluonen die starke Kraft. Alle genannten Eichbosonen tragen Spin 1. Die elektromagnetische und die schwache Kraft sind im Standardmodell zur elektroschwachen Kraft vereinigt. Die Gravitation wird vermutlich durch ein Spin-2-Feld vermittelt, das Graviton. Die Gravitation ist jedoch im Standardmodell nicht als Quantenphänomen in die Theorie eingebunden. Die konsistente Theorie einer Quantengravitation ist bisher ein ungelöstes Problem.
Schließlich ist der dritte Bereich der **Higgs**-Sektor. Dieser enthält ein skalares Teilchen, das verantwortlich für die Generierung der Massen ist.

Das zugrundeliegende Prinzip dieser Theorie ist die lokale Eichfreiheit, so daß das Standardmodell in einer Eichsymmetriegruppe $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$ die starke und die elektroschwache Wechselwirkung beschreibt.

2.1 Eichtheorien

Das Eichprinzip soll kurz an dem Beispiel der Elektrodynamik erläutert werden. Die Lagrangedichte des Dirac-Feldes

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - m\bar{\psi}\psi \tag{2.1}$$

	Teilchen			I	I_3	Q	Y
Leptonen							
$l_{L\alpha}$	$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}_L$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}$	0 -1	-1
$l_{R\alpha}$	e_R	μ_R	τ_R	0	0	-1	-2
Quarks							
$q_{L\alpha}$	$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}_L$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$ $-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$\widetilde{q}_{R\alpha}$	u_R	c_R	t_R	0	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$
$q_{R\alpha}$	d_R	s_R	b_R	0	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$

Tabelle 2.1: Die Fermionen des Standardmodells. I bezeichnet den schwachen Isospin, I_3 seine dritte Komponente, Q die elektrische Ladung und Y die schwache Hyperladung. Die Teilchen sind in Dubletts und Singuletts des schwachen Isospins angeordnet, wobei α der Index für die Teilchen-Generationen ist.

ist stets invariant unter einer globalen Eichtransformation

$$\psi \to \psi' = e^{i\theta}\psi$$

mit einer konstanten Phase θ. Fordert man die Invarianz der Lagrangedichte des Dirac-Feldes (2.1) unter der *lokalen* Phasentransformation

$$\psi \to \psi' = U\psi = e^{i\theta(x)Q}\psi$$

mit einer beliebigen, von Ort und Zeit abhängigen Funktion $\theta(x)$ und der Ladung Q als Generator der $U(1)$-Symmetriegruppe, so sieht man, daß die Lagrangedichte (2.1) dieser Forderung nicht standhält. Denn aus der Ableitung $\partial_\mu(U\psi)$ erhält man einen zusätzlichen Term $\partial_\mu U$. Ersetzt man ∂_μ durch die kovariante Ableitung

$$D_\mu = \partial_\mu + iQA_\mu,$$

so kann die Invarianz erhalten werden, wenn A_μ die Transformationseigenschaft

$$A_\mu \to A'_\mu = UA_\mu U^{-1} + \frac{i}{Q}(\partial_\mu U)U^{-1}$$

bzw.

$$A_\mu \to A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu\theta(x). \tag{2.2}$$

erfüllt. Setzt man die kovariante Ableitung in die Lagrangedichte ein, so erhält man einen zusätzlichen Term für die Wechselwirkung zwischen Fermionen und Photonfeld. Darüberhinaus muß auch der kinetische Term des Eichfeldes berücksichtigt werden, der ebenfalls eine Invariante der Symmetriegruppe ist

$$\mathcal{L}_{\text{Eich}} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_A^2 A^\mu A_\mu. \tag{2.3}$$

Dabei bezeichnet m_A die Masse des Eichfeldes und $F^{\mu\nu}$ ist der aus der Elektrodynamik bekannte Feldstärketensor

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu.$$

Der Massenterm in (2.3) ist jedoch *nicht* invariant gegenüber den Eichtransformationen – also muß das Eichfeld masselos sein.
Man kann also allein durch die Forderung nach lokaler Eichinvarianz aus der freien Lagrangedichte die Existenz und die Transformationseigenschaft eines masselosen Vektorfeldes A_μ herleiten, das die Wechselwirkung beschreibt. Die Gesamtlagrangedichte

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + i\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi$$

enthält die Materieteilchen, deren Wechselwirkung mit dem Photonfeld, und den kinetischen Term des masselosen Photonfeldes. Sie ist $U(1)$-invariant, wenn sich das Eichfeld nach (2.2) transformiert.

Für die Beschreibung des Standardmodells muß dieses Prinzip verallgemeinert werden. Die entsprechenden erweiterten lokalen Eichtransformationen sind durch

$$\psi \to \psi' = U\psi = e^{i\sum_{a=1}^{N^2-1}\theta_a(x)T_a}\psi.$$

gegeben. Dabei sind T_a sind die Generatoren der Symmetriegruppe $U(N)$ oder $SU(N)$, deren fundamentale Darstellung die Dimension N hat. Fordert man die Invarianz der Lagrangedichte unter diesen Transformationen, so müssen die Eichfelder F_μ^a nach

$$F_\mu^{a\prime} = F_\mu^a - \frac{1}{g}\partial_\mu\theta^a + f_{abc}F_\mu^a\theta^c,$$

transformiert[1] werden. Dabei ist g die Kopplungskonstante der entsprechenden Symmetriegruppe. Bei nichtabelschen[2] Gruppen treten weiterhin die Strukturkonstanten f_{abc} der Symmetriegruppe auf, welche durch die Vertauschungsregeln

$$[T_a, T_b] = if_{abc}T_c$$

der erzeugenden Generatoren definiert sind. Für die abelschen Gruppe der $U(1)$ gilt $f_{abc} = 0$. Für die nichtabelsche Gruppe der $SU(2)$, welche die elektroschwache Wechselwirkung beschreibt, ist f_{abc} gleich dem total antisymmetrischen Tensor in drei Dimensionen ε^{ijk}. Die Strukturkonstanten der $SU(3)$ findet man beispielsweise in [6].

[1] Hier wurde von infinitesimalen Transformationen ausgegangen.
[2] $[T_a, T_b] \neq 0$

2.2 Elektroschwache Wechselwirkung: Das Glashow-Salam-Weinberg-Modell

Die elektromagnetische und schwache Wechselwirkung kann in einer Symmetriegruppe

$$SU(2)_L \otimes U(1)_Y$$

zur elektroschwachen Wechselwirkung vereinigt werden. Der Index L soll andeuten, daß die Eichgruppe $SU(2)$ nur die Transformationen der linkshändigen Dubletts[3] des schwachen Isospins I betrifft. Der Index Y, die schwache Hyperladung, soll die Unterscheidung zur $U(1)_{\text{elmag}}$ des vorangehenden Abschnitts verdeutlichen. Wir definieren rechtshändige und linkshändige Dirac-Spinoren als chirale Eigenzustände

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{2}(1+\gamma_5)\psi \qquad & \bar{R} &= \frac{1}{2}\bar{\psi}(1-\gamma_5) \\ L &= \frac{1}{2}(1-\gamma_5)\psi \qquad & \bar{L} &= \frac{1}{2}\bar{\psi}(1+\gamma_5) \end{aligned}$$

derart, daß ψ ein vierkomponentiger Dirac-Spinor ist, L und R jedoch nur zwei unabhängige Komponenten haben. Ein Term der Form

$$\bar{\psi}\psi \;=\; \bar{L}R + \bar{R}L \tag{2.4}$$

ist nicht $SU(2)$-invariant, da die linkshändigen $SU(2)$-Dubletts transformiert werden, während die rechtshändigen Singuletts Invariante bezüglich dieser Gruppe sind. Also kann in einer $SU(2)$-invarianten Lagrangedichte kein Massenterm in dieser naiven Form auftreten. Schreiben wir die Lagrangedichte für freie masselose Fermionen

$$\mathcal{L}^{\text{frei}}_{\text{ferm}} = \bar{L}\, i\gamma^\mu \partial_\mu\, L + \bar{R}\, i\gamma^\mu \partial_\mu\, R \tag{2.5}$$

und führen $SU(2)_L$-Transformationen durch

$$\begin{aligned} L &\;\rightarrow\; e^{i\,\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\tau}/2} L \\ R &\;\rightarrow\; R \end{aligned}$$

mit den Pauli-Matrizen $\tau^{1,2,3}$ als Generatoren der $SU(2)$ und einer beliebigen Funktion $\boldsymbol{\omega}(x)$, die von Raum und Zeit abhängt, so ist (2.5) nur invariant, wenn man drei neue Vektorfelder einführt, entsprechend der Anzahl der Generatoren der $SU(2)$-Symmetriegruppe. Die Vektorfelder werden im Folgenden mit $W_\mu^{1,2,3}$ bezeichnet. Sie werden durch eine Ersetzung

$$\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu + ig\, \boldsymbol{W}_\mu \cdot \boldsymbol{\tau}/2$$

[3] Siehe Tabelle 2.1

in der Lagrangedichte implementiert. Führt man $U(1)$-Transformationen

$$\begin{aligned} L &\rightarrow e^{i\chi Y_L/2} L \\ R &\rightarrow e^{i\chi Y_R/2} R \end{aligned}$$

durch mit einer beliebigen orts- und zeitabhängigen Funktion $\chi(x)$ und mit den Hyperladungen Y_L und Y_R und führt ein neues Eichfeld B^μ ein, so erhält man die $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$-invariante Lagrangedichte mit kinetischem Eichbosonenterm

$$\mathcal{L}_{\text{Eich}} + \mathcal{L}_{\text{ferm}} = -\frac{1}{4} \left(\mathbf{W}^{\mu\nu} \cdot \mathbf{W}_{\mu\nu} + B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} \right) + \bar{L}\, i\gamma^\mu D_\mu\, L + \bar{R}\, i\gamma^\mu D_\mu\, R.$$

Dabei ist die kovariante Ableitung

$$D_\mu = \partial_\mu + ig\, \boldsymbol{W}^\mu \cdot \boldsymbol{\tau}/2 + ig' B^\mu Y/2$$

mit zwei unabhängigen Kopplungen g und g'. Die Feldstärketensoren sind durch

$$\begin{aligned} \mathbf{W}^{\mu\nu} &= \partial^\mu \boldsymbol{W}^\nu - \partial^\nu \boldsymbol{W}^\mu - g\, \boldsymbol{W}^\mu \times \boldsymbol{W}^\nu \\ B^{\mu\nu} &= \partial^\mu B^\nu - \partial^\nu B^\mu \end{aligned}$$

gegeben. Schreibt man mit dem linkshändigen Dublett und dem rechtshändigen Singulett von $SU(2)$

$$L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix} \qquad\qquad R = e_R \tag{2.6}$$

und mit

$$W^\mu_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} W^\mu_1 \pm i W^\mu_2$$

nur die Wechselwirkungsterme zwischen den Eichbosonen, Neutrino und Elektron an

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{int}} &= -\bar{\psi}\gamma^\mu \left(g\, \boldsymbol{W}_\mu \cdot \boldsymbol{\tau}/2 + g' B_\mu \right) \psi \\ &= -\frac{g}{\sqrt{2}} \left(W^+_\mu \bar{\nu}_L \gamma^\nu e_L + W^-_\mu \bar{e}_L \gamma^\nu \nu_L \right) \\ &\quad -\frac{1}{2} \left(g W^3_\mu + Y_L g' B_\mu \right) \bar{\nu}_L \gamma^\mu \nu_L \\ &\quad +\frac{1}{2} \left(g W^3_\mu - Y_L g' B_\mu \right) \bar{e}_L \gamma^\mu e_L \\ &\quad -\frac{1}{2} Y_R g' B_\mu \bar{e}_R \gamma^\mu e_R, \end{aligned}$$

so sieht man, was die Forderung nach Eichinvarianz mit sich gebracht hat. Die erste Zeile nach dem Gleichheitszeichen beschreibt die richtige ladungsändernde Wechselwirkung

zwischen $W^{\pm}$, ν und e mit $(V-A)$-Struktur. In der zweiten Zeile sehen wir einen reinen neutralen Strom, den wir mit dem Feld des Z identifizieren. Setzen wir den freien Parameter $Y_L = -1$, und definieren den Weinbergwinkel durch

$$\sin\Theta_W = \frac{g'}{\sqrt{g^2+g'^2}} \qquad \cos\Theta_W = \frac{g}{\sqrt{g^2+g'^2}},$$

so erhalten wir

$$Z_\mu = \cos\Theta_W W_\mu^3 - \sin\Theta_W B_\mu.$$

Dieses Feld kann keine Komponenten des Photonfeldes enthalten, da Photonen nur an Ladungen koppeln, Neutrinos jedoch sind neutral. Darum identifizieren wir das Photonfeld mit der dazu orthogonalen Komponente

$$A_\mu = \sin\Theta_W W_\mu^3 + \cos\Theta_W B_\mu.$$

Um die elektromagnetische Kopplung richtig zu reproduzieren, setzen wir durch Konvention

$$Y_R = -2$$

und erhalten die Beziehungen

$$e = g\sin\Theta_W = g'\cos\Theta_W$$

Wir konnten durch die Eichung der Gruppe $SU(2)\otimes U(1)$ eine Kopplungsstuktur erreichen, die die Wechselwirkung der Fermionen mit Vektorbosonen beschreibt. Dabei ergab sich die richtige Vektorstruktur für die elektromagnetische und eine $(V-A)$-Struktur für die geladenen schwachen Ströme. Es bleibt zu bemerken, daß diese Vereinigung per Hand geschah, da man Y_R geeignet wählen mußte. Nun besitzen aber weder die Fermionen noch die Eichbosonen Massen, im Widerspruch zum Experiment.

2.3 Der Higgs-Mechanismus

Betrachten wir die Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_{\text{Higgs}} = (D_\mu\phi)^\dagger(D^\mu\phi) - V(\phi^\dagger\phi) \tag{2.7}$$

eines komplexen skalaren Dubletts

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_+ \\ \phi_0 \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

mit einem Selbstwechselwirkungspotential

$$V(\phi^\dagger\phi) = \lambda(\phi^\dagger\phi - \rho_0/2)^2,$$

wobei ρ_0 und λ reelle Parameter sind, so ist die Lagrangedichte (2.7) invariant unter $SU(2)$-Transformationen. Parametrisieren wir das Feld (2.8) um, so ist leicht zu sehen, daß der Grundzustand

$$\phi_{min} = e^{i\,\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\tau}/2} \begin{pmatrix} 0 \\ \rho_0/\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

des Systems unendlich oft entartet ist, und jeder einzelne ist nicht invariant unter $SU(2)$-Transformationen. Da die Lagrangedichte (2.7) $SU(2)$-invariant ist, können wir das Feld so eichen, daß es die Gestalt

$$\phi = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \tag{2.9}$$

mit reellem ρ annimmt. Man spricht deswegen von unitärer Eichung. Für die Vektorfelder entspricht dies der infinitesimalen Transformation

$$\boldsymbol{W}^\mu \rightarrow \boldsymbol{W}^{\mu\prime} = \boldsymbol{W}^\mu + \boldsymbol{\xi} \times \boldsymbol{W}^\mu - \frac{1}{g}\partial^\mu \boldsymbol{\xi}$$

so daß die Nullmoden $\boldsymbol{\xi}$ in der Lagrangedichte nicht mehr explizit auftreten. Sie sind in den longitudinalen Moden der massiven Vektorfelder absorbiert. Der kinetische Term der Lagrangedichte (2.7) kann in folgende Form gebracht werden

$$(D_\mu\phi)^\dagger(D^\mu\phi) \;=\; \frac{1}{8}\,g^2\,\rho^2\left[W_1^\mu W_{1\mu} + W_2^\mu W_{2\mu} + \frac{Z^\mu Z_\mu}{\cos^2\Theta_W}\right] + \frac{1}{2}\,\partial^\mu\rho\,\partial_\mu\rho.$$

Entwickelt man das Feld um den Grundzustand $\rho_0/\sqrt{2}$ und schreibt für unter Einführung des physikalischen Higgs-Feldes $\eta = \rho - \rho_0$ derart, daß der Vakuumerwartungswert für η verschwindet, so erhält man für die Lagrangedichte

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{Higgs}} \;=\; & \frac{1}{8}g^2\left(\eta^2 + 2\eta\rho_0 + \rho_0^2\right)\left[2\,W_+^\mu W_{-\mu} + \frac{Z^\mu Z_\mu}{\cos^2\Theta_W}\right] \\ & + \frac{1}{2}\partial^\mu\eta\;\partial_\mu\eta - \frac{\lambda}{4}\left(\eta^4 + 4\eta^3\rho_0 + 4\eta^2\rho_0^2\right).\end{aligned}$$

Es ist zu bemerken, daß hier nur eine neue Schreibweise eingeführt wurde. Die Lagrangedichte $\mathcal{L}_{\text{Higgs}}$ ist nach wie vor $SU(2)$-invariant Nun haben die Vektorbosonen Masse bekommen

$$M_W = \frac{1}{2}\,g\,\rho_0 \qquad\qquad M_W/M_Z = \cos\Theta_W,$$

und für das Higgsboson erhält man

$$M_H \;=\; \rho_0\,\lambda^{1/2}.$$

Außerdem lassen sich auch die Dreier- und Vierer-Kopplungen zwischen physikalischen Higgs-Teilchen und Vektorbosonen in der ersten Zeile, und die Higgs-Selbstkopplungen in der letzten Zeile ablesen.
Wie einleitend erwähnt wurde, sind Massenterme der Form (2.4) nicht $SU(2)$-invariant. Sieht man sich jedoch Wechselwirkungterme mit dem Higgsdublett an und verwendet (2.6)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{mass}} &\propto \bar{L}\phi R + \bar{R}\phi^{\dagger} L \\ &= (\bar{\nu}_L\,,\,\bar{e}_L)\begin{pmatrix}\phi_+\\ \phi_0\end{pmatrix} e_R + \bar{e}_R(\phi_-\,,\,\phi_0)\begin{pmatrix}\nu_L\\ e_L\end{pmatrix} \\ &= (\bar{\nu}_L e_R)\,\phi_+ + (\bar{e}_R\nu_L)\,\phi_- + (\bar{e}e)\,\phi_0,\end{aligned} \tag{2.10}$$

so erhält man einen Massenterm für das Elektron. Erweitert man dieses Konzept auf alle Quarks und Leptonen und schreibt

$$\begin{aligned} L &= \{l_{L\alpha}, q_{L\alpha}\} \quad (\alpha = 1,2,3) \\ R &= \{l_{R\alpha}, q_{R\alpha}, \widetilde{q}_{R\alpha}\} \quad (\alpha = 1,2,3),\end{aligned}$$

wobei α der Index über die Fermionengenerationen ist, und $\widetilde{q}_R$ die die rechtshändigen up-type Quarks bezeichnet (Tab. 2.1), so läßt sich für verschwindende Neutrinomassen der leptonische Beitrag zum Massenterm der Lagrangedichte folgendermaßen formulieren:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{\text{lept}}_{\text{mass}} &= \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} \bar{l}_{L\alpha}\frac{\phi}{\rho_0} m_{\alpha\beta} l_{R\beta} + h.c. \\ &= \frac{\rho}{\rho_0}(\bar{e}_L\,\bar{\mu}_L\,\bar{\tau}_L) m \begin{pmatrix} e_R\\ \mu_R\\ \tau_R\end{pmatrix} + h.c..\end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde die unitäre Eichung verwendet, und $m_{\alpha\beta}$ bezeichnet eine beliebige konstante Massenmatrix. Analog dazu läßt sich der Massenterm der Quarks durch

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{\text{quark}}_{\text{mass}} &= \sum_{\alpha,\beta=1}^{3}\left(\bar{q}_{L\alpha}\frac{\phi}{\rho_0} M_{\alpha\beta} q_{R\beta} + \bar{q}_{L\alpha}\frac{\widetilde{\phi}}{\rho_0}\widetilde{M}_{\alpha\beta}\widetilde{q}_{R\beta}\right) + h.c. \\ &= \frac{\rho}{\rho_0}\left[(\bar{d}_L\,\bar{s}_L\,\bar{b}_L) M \begin{pmatrix} d_R\\ s_R\\ b_R\end{pmatrix} + (\bar{u}_L\,\bar{c}_L\,\bar{t}_L)\widetilde{M}\begin{pmatrix} u_R\\ c_R\\ t_R\end{pmatrix}\right] + h.c.,\end{aligned}$$

ausdrücken, wobei das konjugierte Higgs-Dublett verwendet wurde

$$\widetilde{\phi} \equiv \begin{pmatrix}\phi_0\\ -\phi_-\end{pmatrix} \qquad \phi_- \equiv \phi_+^*$$

und $M_{\alpha\beta}$ bzw. $\widetilde{M}_{\alpha\beta}$ die jeweiligen Massenmatrizen der down- und up-type-Quarks sind. Mit zwei unitären Matrizen können diese diagonalisiert werden, dieselben Transformationen

müssen jedoch auch an den kinetischen Termen $\bar{L}\gamma^\mu D_\mu L + \bar{R}\gamma^\mu D_\mu R$ der Lagrangedichte durchgeführt werden. Elektromagnetische und neutrale Ströme haben die Form $\bar{L}\gamma^\mu L + \bar{R}\gamma^\mu R$ und sind damit invariant unter einer solchen Transformation. Für den geladenen Strom ergibt sich hingegen eine veränderte Form

$$J_\mu^{ch} \propto (\bar{u}\ \bar{c}\ \bar{t})_L \gamma^\mu C \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}_L = (\bar{u}\ \bar{c}\ \bar{t})_L \gamma^\mu \begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix}_L$$

Hierbei wurde die Cabbibo-Kobayashi-Maskawa-Matrix C eingeführt, die die Mischung zwischen chiralen Eigenzuständen und den Masseneigenzuständen beschreibt. Für verschwindende Neutrinomassen findet keine Mischung dieser Art statt.

Die gesamte $SU(2) \otimes U(1)$-invariante Lagrangedichte schreibt sich nun

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \mathcal{L}_{\text{Eich}} + \mathcal{L}_{\text{ferm}} + \mathcal{L}_{\text{Higgs}} + \mathcal{L}_{\text{mass}}^{\text{lept}} + \mathcal{L}_{\text{mass}}^{\text{quark}} \\
&= -\frac{1}{4}(\mathbf{W}^{\mu\nu}\cdot\mathbf{W}_{\mu\nu} + B^{\mu\nu}B_{\mu\nu}) + \bar{L}\, i\gamma^\mu D_\mu\, L + \bar{R}\, i\gamma^\mu D_\mu\, R \\
&\quad +(D_\mu\phi)^\dagger(D^\mu\phi) - V(\phi\phi^\dagger) \\
&\quad + \left[\sum_{\alpha,\beta=1}^{3} \bar{l}_{L\alpha}\frac{\phi}{\rho_0} m_{\alpha\beta} l_{R\beta} + \sum_{\alpha,\beta=1}^{3}\left(\bar{q}_{L\alpha}\frac{\phi}{\rho_0} M_{\alpha\beta} q_{R\beta} + \bar{q}_{L\alpha}\frac{\widetilde{\phi}}{\rho_0}\widetilde{M}_{\alpha\beta}\widetilde{q}_{R\beta}\right)\right] + h.c..
\end{aligned}$$

Sie beschreibt die Fermionen und Quarks mitsamt ihrer elektroschwachen Wechselwirkung.

2.4 Quantenchromodymamik

Die starke Wechselwirkung wird im Standardmodell im Rahmen der Quantenchromodynamik durch die $SU(3)$-Eichsymmetrie dargestellt. Die Austauschteilchen sind acht masselose Gluonen, die zugehörige Quantenzahl ist die Farbladung. An dieser Wechselwirkung nehmen nur die Quarks teil. Da die Quantenchromodynamik in der vorliegenden Arbeit keine Anwendung findet, soll diese Theorie hier nicht vertieft werden.

Kapitel 3

Helizitätsformalismus

Bei bekanntem Anfangszustand ermöglicht der Helizitätsformalismus, ein Matrixelement in linear unabhängige Winkelbeiträge zu zerlegen. Die entsprechenden Koeffizienten werden durch die Helizitäten der auslaufenden Teilchen charakterisiert, und lassen sich bei bekannter Kopplungsstruktur berechnen[1]. Außerdem lassen sie sich im Experiment bestimmen, da die Winkelverteilungen observable Größen sind.
Im Folgenden wird analog zu [7] vorgegangen. Weitere Informationen zu dem Helizitätsformalismus findet man in [8].

3.1 Helizitätszustände

Gemäß der Quantenmechanik ist die Projektion des Spins längs einer bestimmten Achse eine quantisierte Größe. Die Helizität ist die Spinquantelung längs des Impulses, was eine Größe mit besonderen vorteilhaften Eigenschaften ist. Beschreiben wir den Zustand eines Teilchens mit Spin S und Masse m durch seine Wellenfunktion und wählen wir ebene Wellen, so wird der Zustand durch den Impuls $\vec{p}$ im Schwerpunktssystem (CM-Impuls) und eine entsprechende Energie $E = (m^2 + \vec{p}^{\,2})^{1/2}$ repräsentiert, wobei Folgendes gilt [8]:

i. (a) Für jeden Impuls $\vec{p}$ und $m \neq 0$ erhält man $2S + 1$ linear unabhängige Zustände, die man als Zustände definierter Helizität wählen kann:

$$\lambda = S, S-1, \cdots, -S$$

(b) Ist $m = 0$, so gibt es nur zwei unabhängige Lösungen, entsprechend:

$$\lambda = \pm S.$$

Diese Zustände bilden ein vollständiges Orthonormalsystem.

[1] Die Koeffizienten sind durch eine Summe von Helizitätsamplituden $\sum \Gamma^{\lambda_a \lambda_b} \Gamma^{*\lambda'_a \lambda'_b}$ gegeben. Insofern sind zwar die Koeffizienten beobachtbar, nicht jedoch unbedingt die einzelnen Helizitätsmplituden Γ.

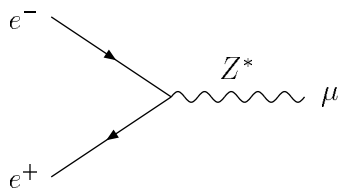


Abbildung 3.1: Der Prozeß $e^+e^- \to Z^*$

ii. Führt man Poincaretransformationen durch – Translationen, Rotationen, Lorentzboosts - oder die diskreten Symmetrietransformationen Ladungskonjugation $\mathcal{C}$ Paritäts- $\mathcal{P}$ und Zeitumkehrtransformation $\mathcal{T}$, so ändert sich der Betrag der Helizität λ nicht. Das Vorzeichen von λ kehrt sich um, wenn das Vorzeichen von $\vec{p}$ durch einen Lorentzboosts geändert wird oder eine Paritätstransformation angewendet wird.

Im Helizitätsformalismus wird die Projektion des Gesamtdrehimpulses des Systems auf eine Achse betrachtet. Das bedeutet für einen Zwei-Teilchen-Zustand nicht nur, daß der Bahndrehimpuls mitenthalten sein kann, sondern auch, daß die Spins auf *eine* Achse, auf den CM-Impuls eines Teilchens, projiziert werden.

3.2 Matrixelemente

Betrachten wir den Prozeß

$$e^+e^- \to Z^* \to ab$$

mit unbekannten Teilchen a und b, so läßt sich der Endzustand durch einen Zwei-Teilchen-Helizitätszustand $|\lambda_a, \lambda_b, \vec{p}\,\rangle$ beschreiben. λ_a, λ_b sind die Helizitäten der auslaufenden Teilchen und $\vec{p}$ bezeichnet den Impuls des Teilchens a, mit den Euler-Winkeln ϕ_e, Θ und ϕ. Da hier der Strahl als unpolarisiert angenommen wird, ist ϕ_e willkürlich, und es wird $\phi_e = 0$ gesetzt. Die Produktionsebene ist also gleich der $x-z$-Ebene. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit läßt sich der Strom des Prozesses $Z^* \to a\,b$ durch

$$J_\mu = \langle \lambda_a, \lambda_b, \vec{p}\,|J_\mu^{Z^*}(0)|0\rangle$$

für beliebige Teilchen a und b ausdrücken. Vollständig bekannt ist das partielle Matrixelement[2] des Anfangszustandes $e^+(p_2)\,e^-(p_1) \to Z^*(q)$

$$|\mathcal{M}|^2 = L^\mu L^{*\mu'}\,\frac{1}{(q^2 - M_{Z^*}^2)^2}\;\epsilon_\mu^*(q,\lambda_{Z^*})\epsilon_{\mu'}(q,\lambda'_{Z^*})$$

[2]Die endliche Zerfallsbreite des Z^* wird hier vernachlässigt ("narrow width approximation").

mit

$$L^\mu = \frac{G_F M_Z^2}{2\sqrt{2}} \bar{v}(p_2)\gamma^\mu(v_e - a_e\gamma_5)u(p_1)$$

wobei M_Z die Masse des Z-Bosons, G_F die Fermi-Konstante und $v_e = -1 + 4\sin^2\theta_W$, $a_e = -1$ die Vektor- bzw. Axialvektorkopplung des Elektrons an das Z-Boson bezeichnet[3]. Nehmen wir für den Leptontensor

$$\mathcal{L}^{\mu\mu'} = L^\mu L^{*\mu'}$$

unpolarisierte[4] Strahlen an, so kann man

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{\mu\mu'} &= \frac{G_F M_Z^2}{2\sqrt{2}} \frac{1}{4} Tr[\gamma^\mu(v_e - a_e\gamma_5)\not{p}_1\gamma^{\mu'}(v_e - a_e\gamma_5)\not{p}_2] \\
&= \frac{G_F M_Z^2}{2\sqrt{2}}[(v_e^2 + a_e^2)[p_1^\mu p_2^{\mu'} + p_1^{\mu'} p_2^\mu - g^{\mu\mu'} p_1 \cdot p_2] - 2iv_e a_e \varepsilon^{\mu\mu'\rho\sigma} p_{1\rho} p_{2\sigma}] \\
&= \frac{G_F M_Z^2}{2\sqrt{2}} \frac{s}{2}[(v_e^2 + a_e^2)\delta_\perp^{\mu\mu'} + 2v_e a_e \varepsilon_\perp^{\mu\mu'}]_{\mu,\mu'=1,2}
\end{aligned} \tag{3.1}$$

schreiben, wobei die Leptonen im Grenzübergang als masselos angenommen wurden. Dabei ist $\sqrt{s}$ die Schwerpunktsenergie und die zweidimensionalen Symbole, die nur transversale Komponenten zulassen, sind folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned}
\delta_\perp^{\mu\mu'} &= \begin{cases} 1 & \text{wenn} \quad \mu = \mu' \quad \text{und} \quad \mu,\mu' = 1,2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\
\varepsilon_\perp^{\mu\mu'} &= \begin{cases} 1 & \text{wenn} \quad \mu\mu' = 12 \\ -1 & \text{wenn} \quad \mu\mu' = 21 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Für das Matrixelement, gemittelt über die Polarisationen der Anfangszustände und summiert über die Spineinstellungen der Endzustände, erhält man:

$$\begin{aligned}
\sum{}' |\mathcal{M}|^2 &= \sum_{\text{Spins}} \mathcal{L}^{\mu\mu'} \frac{1}{(q^2 - M_{Z^*}^2)^2} J_\mu J_{\mu'}^* \\
&= \frac{G_F M_Z^2}{4\sqrt{2}\, s\,(1 - M_Z^2/s)^2} \sum_{\text{Spins}} \sum_{m=\pm 1} [(v_e^2 + a_e^2) - 2v_e a_e m]|J_m|^2,
\end{aligned} \tag{3.3}$$

wobei hier für J^μ die sphärischen Komponenten $J_{\pm 1} = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}(J_x \pm iJ_y)$ verwendet wurden. Geht man von ebenen Wellen zu Eigenzuständen definierten Drehimpulses J und dessen z-Komponente M über

$$|\lambda_a, \lambda_b, p, \phi_e, \Theta, \phi\rangle = \sum_{JM} N_J D^J_{M\lambda}(\phi_e, \Theta, -\phi)|JM\lambda_a\lambda_b\rangle$$

[3] Siehe dazu auch Anhang A.

[4] Die Leptontensoren longitudinaler und transversaler Polarisation finden sich im Anhang H. Für die vorliegende Arbeit war die Information ohne azimutale Winkelbeiträge ausreichend.

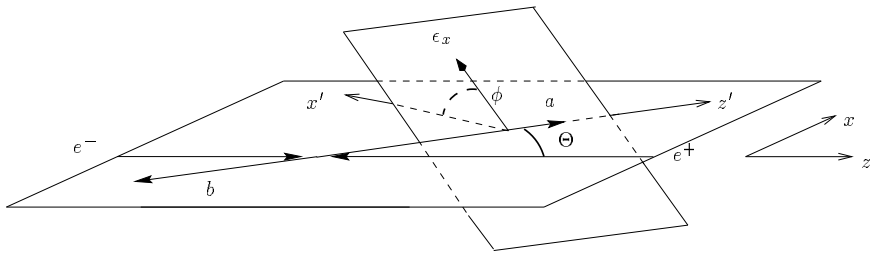


Abbildung 3.2: Die Winkel ϕ und Θ der Produktion. x' liegt in der Produktionsebene orthogonal zu z'. ϕ_e konnte gleich Null gesetzt werden, da hier unpolarisierte Strahlen vorausgesetzt werden. Die Vektoren der entsprechenden Kinematik findet man in Anhang E.

mit $p = |\vec{p}\,|$, $\lambda = \lambda_a - \lambda_b$, $N_J = [(2J+1)/4\pi]^{\frac{1}{2}}$, und nutzt man aus, daß der Spin des intermediären Teilchens $J_{Z^*} = 1$ ist, so läßt sich der Strom in Winkelanteile D und modellabhängige Formfaktoren Γ aufspalten

$$J_m = D^{*1}_{m\lambda}(\phi_e, \Theta, -\phi)\Gamma^{\lambda_a\lambda_b}_m, \tag{3.4}$$

wobei $D^J_{m\lambda}(\alpha,\beta,\gamma) = e^{im\alpha}d^J_{m\lambda}(\beta)e^{i\lambda\gamma}$ die irreduzible Darstellung des dreidimensionalen Drehimpulses[5] ist, mit den Euler-Winkeln α, β, γ. [6]
Dabei bezeichnet m die Komponente des Gesamtdrehimpulses J längs der Strahlachse, also des Anfangszustandes, und λ die Drehimpulskomponente des Endzustandes längs des Impulses $\vec{p}$ – im Folgenden z'-Achse genannt. ϕ_e bezeichnet den Winkel zwischen einer durch den Spinvektor der einlaufenden Teilchen definierten x-Achse und der Produktionsebene, und ϕ ist der willkürliche Winkel zwischen Produktionsebene und einem Polarisationsvektor ϵ_x. Die entsprechenden Rotationsachsen sind z bzw. z' – sie schließen miteinander den Streuwinkel Θ ein, siehe Abb. 3.2.
Summation über reale Endzustände erzwingt $\lambda_a = \lambda'_a$, $\lambda_b = \lambda'_b$ und so erhält man das Matrixelement der Produktion von a und b:

$$\sum{}' |\mathcal{M}|^2 = \frac{G_F M_Z^2}{4\sqrt{2}\,s\,(1 - M_Z^2/s)^2} \sum_{\substack{\lambda_a\lambda_b \\ m=\pm 1}} [(v_e^2 + a_e^2) - 2v_e a_e m](d^1_{m\lambda}(\Theta))^2 \Gamma^{\lambda_a\lambda_b}_m \Gamma^{*\lambda_a\lambda_b}_m \tag{3.3'}$$

Da der Leptontensor (3.1) unpolarisierte Strahlen voraussetzt, entfällt ϕ_e. ϕ bleibt unbeobachtet, da über die auslaufenden Spinzustände summiert wurde.
Die Γ's können von der Schwerpunktsenergie q oder vom CM-Impuls p abhängen und wegen

[5] Hier wurde die Definition der azimutalen Winkel von [9] übernommen, wohingegen in [8] $D^J_{m\lambda}(\alpha,\beta,\gamma) = e^{-im\alpha}d^J_{m\lambda}(\beta)e^{-i\lambda\gamma}$ gilt.
[6] Im Anhang B findet der Leser sämtliche in dieser Arbeit verwendete d-Funktionen und weitere in [15].

Rotationsinvarianz sind sie stets unabhängig von m

$$\Gamma_m = \Gamma_{-m}.$$

Außerdem gelten für Paritätsinvarianz, Ladungskonjugationsinvarianz und Zeitumkehrinvarianz[7] folgende Relationen:

$$\Gamma_m^{\lambda_a\lambda_b} = n_a n_b \Gamma_m^{-\lambda_a-\lambda_b} \qquad \text{(Parität)} \tag{3.5}$$

wobei n die Normalität ist, $n = P(-1)^S = \pm$, und P die intrinsische Parität des jeweiligen Teilchens.

$$\Gamma_m^{\lambda_a\lambda_b} = (-1)^{\lambda_a-\lambda_b}\Gamma_m^{\lambda_a\lambda_b} \qquad \text{(Ladungskonjugation)} \tag{3.6}$$

$$[\Gamma_m^{\lambda_a\lambda_b}(q^2+i\epsilon)]^* = \Gamma_{-m}^{\lambda_a\lambda_b}(q^2-i\epsilon) \qquad \text{(Zeitumkehr)} \tag{3.7}$$

Da die produzierten Teilchen a b in diesem Zusammenhang nicht als stabil angenommen werden, kann man auch den vollen Prozeß

$$\begin{array}{l} e^+e^- \longrightarrow a\,b \\ \qquad\quad \big\lfloor \hookrightarrow b_1\ b_2 \\ \qquad\quad \big\lfloor \hookrightarrow a_1\ a_2 \end{array}$$

mit den jeweiligen Zerfällen von a und b betrachten. Für die nun intermediären Zustände a und b gilt nicht mehr $\lambda_a = \lambda_a'$, $\lambda_b = \lambda_b'$. Verwendet man für den Strom $Z^* \to a\ b$

$$J_m^{\lambda_a\lambda_b} = D_{m\lambda}^{*1}(\phi,\Theta,-\phi)\Gamma^{\lambda_a\lambda_b},$$

so kann man für dessen Komplexkonjugierte

$$J_m^{*\lambda_a'\lambda_b'} = D_{m\lambda'}^{1}(\phi,\Theta,-\phi)\Gamma^{*\lambda_a'\lambda_b'}$$

verwenden, so daß die Spindichtematrix der Produktion sich als

$$\begin{aligned} &P_{\lambda_a\lambda_b\lambda_a'\lambda_b'} \\ &= \mathcal{L}^{\mu\mu'}J_\mu^{\lambda_a\lambda_b}J_{\mu'}^{*\lambda_a'\lambda_b'} = \frac{G_F M_Z^2}{2\sqrt{2}}\frac{s}{2}\sum_{m=\pm1}[(v_e^2+a_e^2)-2v_e a_e m]J_m^{\lambda_a\lambda_b}J_m^{*\lambda_a'\lambda_b'} \\ &= \frac{G_F M_Z^2}{2\sqrt{2}}\frac{s}{2}e^{-i(\lambda-\lambda')\phi}\sum_{m=\pm1}[(v_e^2+a_e^2)-2v_e a_e m]d_{m\lambda}^1(\Theta)d_{m\lambda'}^1(\Theta)\Gamma^{\lambda_a\lambda_b}\Gamma^{*\lambda_a'\lambda_b'} \end{aligned} \tag{3.8}$$

[7] Hier ist die naive Zeitumkehr gemeint, bei der die Zeit eines jeden Vektors umgekehrt wird, jedoch nicht Anfangs- und Endzustände vertauscht werden.

ausdrücken läßt[8]. Summiert man über die Spins von a und b,

$$\sum_{\lambda_a\lambda_b} P_{\lambda_a\lambda_b\lambda_a\lambda_b}\,,$$

so erhält man das Produktionsmatrixelement[9] aus Gleichung (3.3′) bis auf den Nenner des Propagators zurück. Gleichermaßen kann man den Strom des Zerfallsprozesses durch

$$J_{\lambda_a} = D^{S_a}_{\lambda_a,\lambda_{a_1}-\lambda_{a_2}}(\phi_a,\theta_a,-\phi_a)\Gamma^{\lambda_{a_1}\lambda_{a_2}},$$

ausdrücken, so daß man die Zerfallsdichtematrix A

$$\begin{aligned} A^{S_a}_{\lambda_a\lambda'_a} &= J_{\lambda_a}J^*_{\lambda'_a} \\ &= \sum_{\lambda_{a_1}\lambda_{a_2}} D^{S_a}_{\lambda_a,\lambda_{a_1}-\lambda_{a_2}}(\phi_a,\theta_a,-\phi_a)D^{*S_a}_{\lambda'_a,\lambda_{a_1}-\lambda_{a_2}}(\phi_a,\theta_a,-\phi_a)\Gamma^{\lambda_{a_1}\lambda_{a_2}}\Gamma^{*\lambda_{a_1}\lambda_{a_2}} \\ &= e^{i(\lambda_a-\lambda'_a)\phi_a}\sum_{\lambda^\star_a} d^{S_a}_{\lambda_a,\lambda^\star_a}(\theta_a)d^{S_a}_{\lambda'_a,\lambda^\star_a}(\theta_a)a^{\lambda^\star_a} \end{aligned} \tag{3.9}$$

erhält, wobei über die Spins der auslaufenden Teilchen summiert wurde. λ_{a_1} und λ_{a_2} bezeichnen die Helizitäten der Zerfallsprodukte a_1 bzw. a_2, θ_a und ϕ_a deren polaren und azimutalen Winkel im Ruhesystem von a. Im Experiment wird man nur die Winkelbeiträge D sehen, die ausschließlich von der Differenz, nicht von einzelnen λ_{a_i} abhängen. Deswegen wurde statt der $\Gamma's$ die Koeffizienten

$$a^{\lambda^\star_a} = \sum_{\lambda_{a_1}\lambda_{a_2}} \Gamma^{\lambda_{a_1}\lambda_{a_2}}\Gamma^{*\lambda_{a_1}\lambda_{a_2}} \tag{3.10}$$

mit $\lambda_{a_1}-\lambda_{a_2}=\lambda^\star_a$ verwendet. Definiert man die $b^{\lambda^\star_b}$ analog und schreibt für die Spindichtematrix[10] B des Zerfalls von Teilchen b

$$\begin{aligned} B^{S_b}_{-\lambda_b,-\lambda'_b} &= \sum_{\lambda^\star_b} D^{S_b}_{-\lambda_b,\lambda^\star_b}(\phi_b,\theta_b,-\phi_b)D^{*S_b}_{-\lambda'_b,\lambda^\star_b}(\phi_b,\theta_b,-\phi_b)b^{\lambda^\star_b} \\ &= e^{-i(\lambda_b-\lambda'_b)\phi_b}\sum_{\lambda^\star_b} d^{S_b}_{-\lambda_b\lambda^\star_b}(\theta_b)d^{S_b}_{-\lambda'_b\lambda^\star_b}(\theta_b)b^{\lambda^\star_b}, \end{aligned} \tag{3.11}$$

so erhält man für das volle Matrixelement

$$\sum{}' |\mathcal{M}|^2 = r^{-1}\sum_{\substack{\lambda_a,\lambda'_a\\ \lambda_b,\lambda'_b}} P_{\lambda_a,\lambda_b,\lambda'_a,\lambda'_b}A^{S_a}_{\lambda_a,\lambda'_a}B^{S_b}_{-\lambda_b,-\lambda'_b} \tag{3.12}$$

mit den Propagatornennern $r=(q^2-M_Z^2)^2(p_a^2-m_a^2)^2(p_b^2-m_b^2)^2$. Die Winkel sind in drei verschiedenen Inertialsystemen definiert. Die Beiträge der Produktion $e^+e^-\to a\ b$

[8] Die errechneten Ergebnisse findet man in Anhang F.1.

[9] Man beachte, daß Spindichtematrizen im Allgemeinen nicht beobachtbar sind.

[10] Die errechneten Spindichtematrizen des Zerfalls findet man in Anhang F.2.

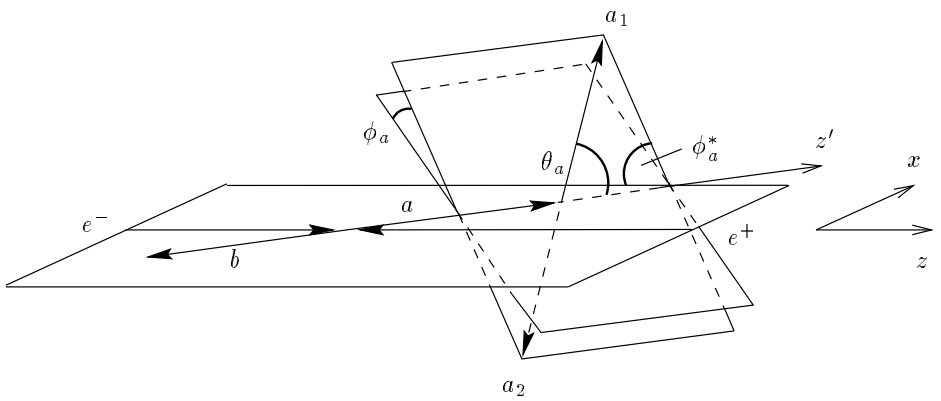


Abbildung 3.3: Die beobachtbaren Winkelbeiträge θ_a und ϕ_a der Zerfallsprodukte von a. Die entspechenden Zerfallswinkel von b wurden der Übersicht halber weggelassen.

mit den Winkeln Θ, ϕ wird im Laborsystem gemessen, die Beiträge der Zerfälle mit den Winkeln θ_a, ϕ_a, θ_b, ϕ_b im jeweiligen Ruhesystem des Mutterteilchens gemessen, das man durch einen Lorentzboost längs der z'-Achse erhält. Von den azimutalen Winkeln sind nur $\phi_a^* = \phi + \phi_a$ und $\phi_b^* = \phi + \phi_b$ beobachtbar, die Winkel zwischen den Zerfallsebenen und der Produktionsebene. Dies entspricht der Tatsache, eine explizite Abhängigkeit der anderen azimutalen Winkel nur in einer unbeobachtbaren Spindichtematrix auftaucht, nicht jedoch in einem Matrixelement (3.3′) oder (3.12).

Es wird selten nötig oder wünschenswert sein, die gesamte Winkelinformation zu bestimmen, integriert man jedoch bestimmte Winkel aus, so müssen nur genügend linear unabhängige Winkelbeiträge übrig bleiben, um alle zu bestimmenden Helizitätsamplituden extrahieren zu können. Typischerweise wird die Winkelinformation der Produktion und nur eines zusätzlichen Zerfalles verwendet, oder man analysiert die azimutalen Winkel zwischen den Zerfallsebenen. Letzteres wird in der vorliegenden Arbeit keine Verwendung finden, da – wie in der Einleitung schon erwähnt wurde – ein Spin-0-Teilchen isotrop zerfallen muß, ein Teilchen höheren Spins jedoch auch isotrop zerfallen kann, und sich somit aus dieser notwendigen, aber nicht hinreichenden Bedingung kein Ausschlußverfahren für höhere Spins konstruieren läßt. Genügt es, nur den Zerfall eines Teilchens zu betrachten, so kann man Gebrauch davon machen, daß die Transformationsmatrix [8]

$$< \theta\phi; \lambda_1\lambda_2 | JM; \lambda_1'\lambda_2' >= N_J \delta_{\lambda_1\lambda_1'} \delta_{\lambda_2\lambda_2'} D^{*J}_{M\lambda}(\phi, \theta, -\phi)$$

der Vollständigkeitsrelation

$$\int d\Omega < \theta\phi; \lambda_1\lambda_2 | JM; \lambda_1\lambda_2 >< \theta\phi; \lambda_1\lambda_2 | J'M'; \lambda_1\lambda_2 >^* = \delta_{JJ'}\delta_{MM'}$$

genügt, und somit eine Integration über $d\Omega_b = \sin\theta_b d\theta_b d\phi_b$

$$\int d\Omega_b B^{S_b}_{\lambda_b,\lambda_b'} = \delta_{\lambda_b\lambda_b'} \frac{4\pi}{2S_b+1} \sum_{\lambda_b^\star} b^{\lambda_b^\star}$$

bis auf einen globalen Faktor ausschließlich von den Eigenschaften des Teilchens a abhängt

$$\int d\Omega_b \sum{}' |\mathcal{M}|^2 = \frac{4\pi\, r^{-1}}{2S_b+1} \sum_{\lambda_b^\star} b^{\lambda_b^\star} \sum_{\substack{\lambda_a,\lambda_a' \\ \lambda_b}} P_{\lambda_a,\lambda_b,\lambda_a',\lambda_b} A_{\lambda_a,\lambda_a'},$$

so daß das Verschwinden eines Winkelbeitrages, verursacht durch die Eigenschaften von b, das Verschwinden des gesamten Matrixelementes zur Folge hat.

In Gleichung (3.3′) läßt sich mit den Winkelbeiträgen der d-Funktionen[11] die allgemeine Struktur des Matrixelementes des Prozesses

$$e^+e^- \xrightarrow{Z^*} ab$$

für unbekannte Teilchen a, b ablesen. Die Helizitätsamplituden Γ werden auch reduzierte Matrixelemente genannt, denn die gesamte, modellspezifische Information wird durch sie ausgedrückt. Ihre Bestimmung setzt voraus, daß die Kopplungsstruktur Z-a-b bekannt ist. Benötigt man außerdem die in den Zerfällen $a \to a_1\, a_2$, $b \to b_1\, b_2$ enthaltene Winkelinformation, so ist das Matrixelement (3.12) zu verwenden.

[11] siehe Anhang B

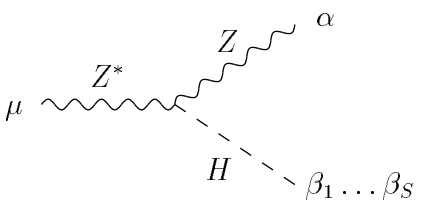
Kapitel 4

Modelle beliebigen Spins

In Kapitel 5 soll ein Verfahren entwickelt werden, mit dem man in dem Prozeß

$$e^+e^- \to Z^* \to ZH$$

das Standardmodell-Higgs mit $S = 0$ von einem Teilchen beliebigen Spins S unterscheiden kann. Dafür werden in diesem Kapitel allgemeine Vertexfaktoren[1] entwickelt, die nicht an eine bestimmte zugrundeliegende Theorie gebunden sind. Zunächst nehmen wir Eigenzustände des Paritätsoperators an – die Erweiterung auf gemischte Parität ist unproblematisch, siehe Abschnitt 4.4.
Bezeichnen wir mit H ein Teilchen beliebigen Spins S und beliebiger Parität P, so hat der Strom des Prozesses $Z^* \to ZH$



folgende Gestalt:

$$J^\mu = T^{\mu\alpha\beta_1\ldots\beta_S}\epsilon^{*\alpha}(p_Z,\lambda_Z)\epsilon^{*\beta_1\ldots\beta_S}(p_H,\lambda_H) \tag{4.1}$$

mit dem Polarisationsvektor ϵ^α des Z-Bosons, dem Polarisationstensor $\epsilon^{\beta_1\ldots\beta_S}$ des Teilchens H. Der Vertexfaktor $T^{\mu\alpha\beta_1\ldots\beta_S}$ kann nur die Vektoren $q = p_Z + p_H$, $k = p_Z - p_H$, den metrischen Tensor $g^{\mu\nu}$ und den vollständig antisymmetrischen Tensor $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ enthalten. Er ist abhängig von dem Spin und der Normalität $n_H = (-)^{S_H}P_H = \pm 1$ des unbekannten Teilchens H.

[1] Information über allgemeine Vertexfaktoren findet man auch in [10, 7].

Für die Konstruktion von $T^{\mu\alpha\beta_1\ldots\beta_S}$ wird ausgenutzt, daß der Strom J^μ effektiv transversal ist:

$$q_\mu J^\mu_{eff} = 0 \tag{4.2}$$

Denn spaltet man J^μ in seine transversale und longitudinale Komponente

$$J^\mu = J^\mu_{trans} + J^\mu_{long} = [\, g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \,] J_\nu + \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} J_\nu$$

auf und verwendet die Tatsache, daß der Leptonstrom $L^\mu \propto \bar{v}\gamma^\mu(v_e - a_e\gamma_5)u$ für $m_{e^\pm} = 0$ transversal ist

$$q_\mu L^\mu = 0 \quad \rightsquigarrow \quad L^\mu = [\, g^{\mu\rho} - \frac{q^\mu q^\rho}{q^2} \,] L_\rho,$$

so sieht man, daß in dem Matrixelement

$$\mathcal{M} = L_\mu J^\mu$$

die longitudinalen Komponenten des Stroms J^μ nicht beitragen

$$L_\mu J^\mu_{long} = [\, g_{\mu\rho} - \frac{q_\mu q_\rho}{q^2} \,] \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} L^\rho J_\nu = 0.$$

So erhält man Gleichung (4.2), unabhängig von der Polarisation von Z und H, und deswegen

$$q_\mu T^{\mu\alpha\beta_1\ldots\beta_S} = 0, \tag{4.3}$$

wobei von $T^{\mu\alpha\beta_1\ldots\beta_S}$ ebenfalls nur die effektiven Anteile von Interesse sind.
Im Folgenden werden zunächst Vertexfaktoren definierter Normalität $n = \pm 1$ entwickelt. Der Nachweis, daß die richtige Normalität gewählt wurde, erfolgt im Anhang C.

4.1 Gerade Normalität

Spin 0

Entwickeln wir einen allgemeinen Ansatz

$$T^{\mu\alpha} = a_1 g^{\mu\alpha} + a_2 q^\mu q^\alpha + a_3 k^\mu k^\alpha + a_4 q^\mu k^\alpha + a_5 k^\mu q^\alpha$$

und verwenden die Tatsache, daß der Polarisationsvektor transversal ist

$$p_Z^\alpha \epsilon_\alpha(p_Z, \lambda_Z) = 0 \qquad \rightarrow \qquad k^\alpha \epsilon_\alpha(p_Z, \lambda_Z) = -q^\alpha \epsilon_\alpha(p_Z, \lambda_Z),$$

so folgt

$$T^{\mu\alpha} = a'_1 g^{\mu\alpha} + a'_2 q^\mu q^\alpha + a'_3 k^\mu q^\alpha$$

mit

$$a'_1 = a_1 \qquad a'_2 = a_2 - a_4 \qquad a'_3 = a_5 - a_3$$

Nutzen wir nun aus, daß J^μ effektiv transversal ist, und damit

$$q_\mu T^{\mu\alpha} = 0$$

gilt, unabhängig von der Polarisation von ϵ^α, so folgt

$$(a'_1 + a'_2 q^2 + a'_3 k{\cdot}q) q^\alpha = 0$$

unabhängig von q^α. Ersetzt man a'_2 durch

$$a'_2 = -a'_1/s - a'_3(M_Z^2 - M_H^2)/s$$

und nimmt die Teilchen als auf der Massenschale liegend an, so läßt sich der Spin-0-Vertexfaktor in folgende endgültige Form bringen

$$T^{\mu\alpha} = a'_1(g^{\mu\alpha} - q^\mu q^\alpha/s) + a'_3(k^\mu - q^\mu(M_Z^2 - M_H^2)/s)q^\alpha.$$

Spin 1

Verwendet man von Anfang an

$$\begin{array}{rrcl} & k^\alpha \epsilon_\alpha(p_Z, \lambda_Z) & = & -q^\alpha \epsilon_\alpha(p_Z, \lambda_Z) \\ \text{und} & k^\beta \epsilon_\beta(p_H, \lambda_H) & = & q^\beta \epsilon_\beta(p_H, \lambda_H), \end{array} \tag{4.4}$$

so läßt sich ein allgemeiner Spin-1-Ansatz durch

$$T^{\mu\alpha\beta} = (a_1 q^\mu + a_2 k^\mu) g^{\alpha\beta} + a_3 g^{\mu\alpha} q^\beta + a_4 g^{\mu\beta} q^\alpha + (a_5 q^\mu + a_6 k^\mu) q^\alpha q^\beta$$

ausdrücken. Mit

$$q_\mu T^{\mu\alpha\beta} = 0$$

erhält man die Gleichungen

$$\begin{array}{rcl} a_1 q^2 + a_2\, q{\cdot}k & = & 0 \\ a_3 + a_4 + a_5 q^2 + a_6\, q{\cdot}k & = & 0 \end{array}$$

und somit nach Auflösen nach a_1 und a_5

$$\begin{array}{rcl} T^{\mu\alpha\beta} & = & a_2 g^{\alpha\beta}(k^\mu - q^\mu(M_Z^2 - M_H^2)/s) + a_3(g^{\mu\alpha} - q^\mu q^\alpha/s) q^\beta \\ & & + a_4(g^{\mu\beta} - q^\mu q^\beta/s) q^\alpha + a_6(k^\mu - q^\mu(M_Z^2 - M_H^2)/s) q^\alpha q^\beta. \end{array}$$

Spin 2

Der Polarisationstensor $\epsilon^{\beta_1\ldots\beta_S}$ für Spins $S > 1$ ist symmetrisch und spurfrei in seinen Indizes β_i, β_j. Für eine einfache Konstruktion ist die folgende Rekursionsformel [7] hilfreich

$$\epsilon(p,\lambda_S)^{\beta_1\ldots\beta_S} = \sum_{\lambda',\lambda_{S-1}} CG(S-1,1;\lambda_{S-1},\lambda',S,\lambda_S) \\ \epsilon(p,\lambda_{S-1})^{\beta_1\ldots\beta_{S-1}}\epsilon(p,\lambda')^{\beta_S}, \tag{4.5}$$

wobei Clebsch-Gordan-Koeffizienten in der folgenden Notation verwendet wurden:

$$CG(j_1,j_2;m_1,m_2,J,M)$$

Da $\epsilon^{\beta_1\ldots\beta_S}$ symmetrisch ist, folgt, daß alle antisymmetrischen Teile in $T^{\mu\alpha\beta_1\ldots\beta_S}$ verschwinden, und

$$T^{\mu\alpha\beta_1\ldots\beta_i\ldots\beta_j\ldots\beta_S} = T^{\mu\alpha\beta_1\ldots\beta_j\ldots\beta_i\ldots\beta_S} \tag{4.6}$$

auch symmetrisch in β_i, β_j ist.
Da $\epsilon^{\beta_1\ldots\beta_S}$ spurfrei ist, folgt, daß in

$$T^{\mu\alpha\beta_1\ldots\beta_S} \quad \text{keine} \quad g^{\beta_i\beta_j} \tag{4.7}$$

beitragen. Verwendet man die Symmetrie und Spurfreiheit des Polarisationstensors und die Transversalität beider auslaufender Teilchen (4.4), so erhält man als allgemeinen Spin-2-Ansatz:

$$\begin{aligned} T^{\mu\alpha\beta_1\beta_2} =& a_1(g^{\mu\beta_1}g^{\alpha\beta_2} + g^{\mu\beta_2}g^{\alpha\beta_1}) + a_2 g^{\mu\alpha}q^{\beta_1}q^{\beta_2} + a_3(g^{\mu\beta_1}q^{\beta_2} + g^{\mu\beta_2}q^{\beta_1})q^{\alpha} \\ &+ (a_4 q^{\mu} + a_5 k^{\mu})(g^{\alpha\beta_1}q^{\beta_2} + g^{\alpha\beta_2}q^{\beta_1}) + (a_6 q^{\mu} + a_7 k^{\mu})q^{\alpha}q^{\beta_1}q^{\beta_2} \end{aligned}$$

Nutzt man aus, daß

$$q_\mu T^{\mu\alpha\beta_1\beta_2} = 0,$$

so erhält man

$$\begin{aligned} a_1 + a_4 q^2 + a_5\, q\cdot k &= 0 \\ a_2 + 2a_3 + a_6 q^2 + a_7\, q\cdot k &= 0 \end{aligned}$$

Nach Ersetzen von a_4 und a_6 läßt sich ein allgemeiner Spin-2-Vertexfaktor in folgende Form bringen

$$\begin{aligned} T^{\mu\alpha\beta_1\beta_2} =& a_1(g^{\alpha\beta_1}(g^{\mu\beta_2} - q^{\mu}q^{\beta_2}/s) + g^{\alpha\beta_2}(g^{\mu\beta_1} - q^{\mu}q^{\beta_1}/s)) + a_2(g^{\mu\alpha} - q^{\mu}q^{\alpha}/s)q^{\beta_1}q^{\beta_2} \\ &+a_3(g^{\mu\beta_1}q^{\beta_2} + g^{\mu\beta_2}q^{\beta_1} - 2q^{\mu}q^{\beta_1}q^{\beta_2}/s)q^{\alpha} \\ &+a_5(g^{\alpha\beta_1}q^{\beta_2} + g^{\alpha\beta_2}q^{\beta_1})(k^{\mu} - q^{\mu}(M_Z^2 - M_H^2)/s) \\ &+a_7(k^{\mu} - q^{\mu}(M_Z^2 - M_H^2)/s)q^{\alpha}q^{\beta_1}q^{\beta_2}. \end{aligned}$$

4.2 Ungerade Normalität

Spin 0

In dem Spin-0-Ansatz gibt es nur einen Term mit $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$:

$$T^{\mu\alpha} = a_1 \varepsilon^{\mu\alpha\rho\sigma} q_\rho k_\sigma$$

der die Bedingung

$$q_\mu T^{\mu\alpha} = 0$$

auch schon erfüllt.

Spin 1

Ein allgemeiner Spin-1-Ansatz läßt sich durch

$$\begin{aligned} T^{\mu\alpha\beta} &= (a_1 q_\rho + a_2 k_\rho)\varepsilon^{\mu\alpha\beta\rho} + (a_3 q^\mu + a_4 k^\mu)\varepsilon^{\alpha\beta\rho\sigma} q_\rho k_\sigma \\ &\quad + a_5(\varepsilon^{\mu\alpha\rho\sigma} q^\beta + \varepsilon^{\mu\beta\rho\sigma} q^\alpha) q_\rho k_\sigma + a_6(\varepsilon^{\mu\alpha\rho\sigma} q^\beta - \varepsilon^{\mu\beta\rho\sigma} q^\alpha) q_\rho k_\sigma \end{aligned}$$

ausdrücken. Im Folgenden wird die Shouten-Identität

$$g^{\lambda\mu}\varepsilon^{\alpha\beta\rho\sigma} - g^{\lambda\alpha}\varepsilon^{\mu\beta\rho\sigma} + g^{\lambda\beta}\varepsilon^{\mu\alpha\rho\sigma} - g^{\lambda\rho}\varepsilon^{\mu\alpha\beta\sigma} + g^{\lambda\sigma}\varepsilon^{\mu\alpha\beta\rho} = 0$$

verwendet. Kontraktion mit $q_\lambda q_\rho q_\sigma$ führt zu

$$q^\mu [\, qk \,]^{\alpha\beta} - q^\alpha [\, qk \,]^{\mu\beta} + q^\beta [\, qk \,]^{\mu\alpha} - \varepsilon^{\mu\alpha\beta\rho}(k_\rho q^2 - q_\rho\, q\cdot k) = 0 \tag{4.8}$$

bzw. mit $k_\lambda q_\rho q_\sigma$ zu

$$k^\mu [\, qk \,]^{\alpha\beta} - k^\alpha [\, qk \,]^{\mu\beta} + k^\beta [\, qk \,]^{\mu\alpha} - \varepsilon^{\mu\alpha\beta\rho}(k_\rho\, q\cdot k - q_\rho k^2) = 0, \tag{4.9}$$

wobei die Kurznotation

$$[\, qk \,]^{\mu\nu} = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} q_\rho k_\sigma$$

verwendet wurde. Da

$$\epsilon^\alpha \epsilon^\beta (\varepsilon^{\mu\alpha\rho\sigma} q^\beta + \varepsilon^{\mu\beta\rho\sigma} q^\alpha) = \epsilon^\alpha \epsilon^\beta (\varepsilon^{\mu\alpha\rho\sigma} k^\beta - \varepsilon^{\mu\beta\rho\sigma} k^\alpha)$$

ist, kann man für den a_5-Term (4.9) und für den a_6-Term (4.8) verwenden, so daß den Vertexfaktor in folgende Form bringen kann

$$T^{\mu\alpha\beta} = (a'_1 q_\rho + a'_2 k_\rho)\varepsilon^{\mu\alpha\beta\rho} + (a'_3 q^\mu + a'_4 k^\mu)\varepsilon^{\alpha\beta\rho\sigma} q_\rho k_\sigma\,,$$

wobei

$$\begin{aligned} a_1' &= a_1 - a_5 k^2 - a_6 k\cdot q & a_3' &= a_3 - a_5 \\ a_2' &= a_2 + a_5 k\cdot q + a_6 q^2 & a_4' &= a_4 - a_6 \end{aligned}$$

bezeichnet. Setzt man

$$q_\mu T^{\mu\alpha\beta} = 0,$$

so erhält man

$$a_2' + a_3' k\cdot q + a_4' q^2 = 0$$

und somit

$$T^{\mu\alpha\beta} = a_1' \varepsilon^{\mu\alpha\beta\rho} q_\rho + a_2' (\varepsilon^{\mu\alpha\beta\rho} k_\rho - \varepsilon^{\alpha\beta\rho\sigma} q_\rho k_\sigma q^\mu / s) + a_3' \varepsilon^{\alpha\beta\rho\sigma} (k^\mu - q^\mu (M_Z^2 - M_H^2)/s) q_\rho k_\sigma$$

Spin 2

Schreibt man als Ansatz

$$\begin{aligned} T^{\mu\alpha\beta_1\beta_2} = {} & (a_1 q_\rho + a_2 k_\rho)(\varepsilon^{\mu\alpha\beta_1\rho} q^{\beta_2} + \varepsilon^{\mu\alpha\beta_2\rho} q^{\beta_1}) + a_3 (\varepsilon^{\mu\beta_1\rho\sigma} q^{\beta_2} + \varepsilon^{\mu\beta_2\rho\sigma} q^{\beta_1}) q_\rho k_\sigma q^\alpha \\ & + (a_4 q^\mu + a_5 k^\mu)(\varepsilon^{\alpha\beta_1\rho\sigma} q^{\beta_2} + \varepsilon^{\alpha\beta_2\rho\sigma} q^{\beta_1}) q_\rho k_\sigma + a_6 \varepsilon^{\mu\alpha\rho\sigma} q_\rho k_\sigma q^{\beta_1} q^{\beta_2} \end{aligned}$$

und verwendet

$$q^\alpha \, [\, qk \,]^{\mu\beta_i} = q^\mu \, [\, qk \,]^{\alpha\beta_i} + q^{\beta_i} \, [\, qk \,]^{\mu\alpha} - \varepsilon^{\mu\alpha\beta_i\rho} (k_\rho q^2 - q_\rho \, q\cdot k)$$

(siehe Gleichung (4.8)), so erhält man

$$\begin{aligned} T^{\mu\alpha\beta_1\beta_2} = {} & (a_1' q_\rho + a_2' k_\rho)(\varepsilon^{\mu\alpha\beta_1\rho} q^{\beta_2} + \varepsilon^{\mu\alpha\beta_2\rho} q^{\beta_1}) \\ & + (a_4' q^\mu + a_5' k^\mu)(\varepsilon^{\alpha\beta_1\rho\sigma} q^{\beta_2} + \varepsilon^{\alpha\beta_2\rho\sigma} q^{\beta_1}) q_\rho k_\sigma \\ & + a_6' \varepsilon^{\mu\alpha\rho\sigma} q_\rho k_\sigma q^{\beta_1} q^{\beta_2} \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} a_1' &= a_1 + a_3 k\cdot q & a_4' &= a_4 + a_3 \\ a_2' &= a_2 - a_3 q^2 & a_6' &= a_6 + 2a_3. \end{aligned}$$

Aus

$$q_\mu T^{\mu\alpha\beta} = 0,$$

folgt

$$a_2' + a_4' q^2 + a_5 k\cdot q = 0$$

und schließlich

$$\begin{aligned} T^{\mu\alpha\beta_1\beta_2} = {} & a_1' (\varepsilon^{\mu\alpha\beta_1\rho} q^{\beta_2} + \varepsilon^{\mu\alpha\beta_2\rho} q^{\beta_1}) q_\rho \\ & + a_2' \left[\, (\varepsilon^{\mu\alpha\beta_1\sigma} q^{\beta_2} + \varepsilon^{\mu\alpha\beta_2\sigma} q^{\beta_1}) - (\varepsilon^{\alpha\beta_1\rho\sigma} q^{\beta_2} + \varepsilon^{\alpha\beta_2\rho\sigma} q^{\beta_1}) q_\rho q^\mu / s \, \right] k_\sigma \\ & + a_5 (\varepsilon^{\alpha\beta_1\rho\sigma} q^{\beta_2} + \varepsilon^{\alpha\beta_2\rho\sigma} q^{\beta_1}) q_\rho k_\sigma (k^\mu - q^\mu (M_Z^2 - M_H^2)/s) + a_6' \varepsilon^{\mu\alpha\rho\sigma} q_\rho k_\sigma q^{\beta_1} q^{\beta_2}. \end{aligned}$$

4.3 Spin $S \geq 3$

Für höhere Spins steigt die Anzahl der unabhängigen Faktoren a_i nicht [7], und so läßt sich für Spin $S \geq 3$ allgemein

$$T^{\mu\alpha\beta_1\ldots\beta_S}_{\text{SpinS}} = \sum_{i<j} T^{\mu\alpha\beta_i\beta_j}_{\text{Spin2}} q^{\beta_1}\ldots q^{\beta_{i-1}} q^{\beta_{i+1}}\ldots q^{\beta_{j-1}} q^{\beta_{j+1}}\ldots q^{\beta_S}$$

schreiben.

4.4 Gemischte Normalität

Stellt der das Teilchen beschreibende Zustand keinen Eigenzustand des Paritätsoperators dar, so sind obige Ansätze nicht ausreichend. Addiert man zu dem Vertexfaktor gerader Parität denjenigen gleichen Spins und ungerader Parität, so erhält man die Zustände gemischter Parität

$$T^{\mu\alpha\beta_1\ldots\beta_S} \quad = \quad \xi\, T^{\mu\alpha\beta_1\ldots\beta_S}_{\text{gerade}} + \eta\, T^{\mu\alpha\beta_1\ldots\beta_S}_{\text{ungerade}}.$$

Ist die Lagrangedichte hermitesch, so müssen die a_i sowie ξ und η reell sein. Für eine effektive Lagrangedichte inklusive Schleifen können sie einen nichtverschwindenden Imaginärteil haben [12]. Wegen der Unbestimmtheit der Formfaktoren a_i kann willkürlich $\xi = 1$ gesetzt werden. η soll reell sein und den beliebigen Mischungsgrad gerader und ungerader Parität andeuten.

Kapitel 5

Bestimmung des Spins des Higgsteilchens

Bei der Suche nach dem Higgs-Teilchen an zukünftigen e^+e^--Beschleunigern ist der Higgsstrahlungsprozeß

$$e^+e^- \to Z^* \to ZH, \tag{5.1}$$

einer der beiden Hauptproduktionsmechanismen für Higgsbosonen [4], insbesondere wenn die Schwerpunktsenergie in der Größenordnung der Higgsmasse liegt. In der folgenden Analyse soll der Spin S des erzeugten Teilchens H daraufhin überprüft werden, ob er mit der Vorhersage $S = 0$ des Higgs-Bosons im Standardmodell oder in entsprechenden Erweiterungen übereinstimmt. Kombiniert man die Analyse des charakteristischen Anstiegs des totalen Wirkungsquerschnitts nahe der Schwelle mit der Bestimmung geeigneter Winkelkorrelationen des differentiellen Wirkungsquerschnitts, so lassen sich eindeutige Kriterien für die Messung des Higgs-Spins festlegen. Bezeichnet man mit β den Impuls $|\vec{p}\,|$ der produzierten Teilchen Z und H im Schwerpunktsystem in Einheiten der Strahlenergie $\beta = 2|\vec{p}\,|/\sqrt{s}$, so ist β im Bereich der Produktionsschwelle sehr klein. Entwickelt man den Wirkungsquerschnitt in eine Taylorreihe [1] in β, so trägt nahe der Schwelle nur der führende Term bei. Dieser Anstieg mit wachsender Schwerpunktsenergie trägt charakteristische Eigenschaften der Z-Z-H-Kopplungsstruktur.
Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann davon ausgegangen werden, daß das H von der Z-Boson-Linie emittiert wird (siehe Abb.5.1), denn in diesem Fall ist der Wirkungsquerschnitt direkt an der Schwelle isotrop, wohingegen bei einem t-Kanal-Prozeß[2], bei dem das

[1] Sämtliche kinematischen Größen können in eine Taylorreihe entwickelt werden. Wenn auch hier diese Näherungen nicht gemacht wurden, so seien sie dennoch angeführt. Es gilt nahe der Produktionsschwelle für die Energie des Teilchens i $E_i = M_i + \beta^2(M_Z + M_H)^2/(4M_i) + \mathcal{O}(\beta^4)$ und für die Schwerpunktsenergie $\sqrt{s} = M_Z + M_H + \beta^2/4(M_Z + M_H)^3/(M_Z M_H) + \mathcal{O}(\beta^4)$.

[2] In dieser Arbeit finden sich keine Details zum t-Kanal-Prozeß. Mit den Vertexfaktoren aus Anhang G lassen sich die Wirkungsquerschnitte jedoch problemlos nachrechnen.

H von der Leptonlinie emittiert wird[3], stets eine nichtverschwindende Winkelabhängigkeit von dem polaren Winkel Θ auftaucht. Außerdem wäre für einen solchen t-Kanal-Prozess die erforderliche H-e-e-Kopplung so groß, daß der Zustand am LHC in resonanten $H \to e^+e^-$ Zerfällen gefunden werden müßte. Dies wäre dominant über die Zerfallsmöglichkeit $H \to ZZ \to 4l$, da dort zwei schmale Zerfallsbreiten des Z-Bosons beteiligt wären.
Die folgende Analyse soll modellunabhängig durchgeführt werden. Zunächst werden $\mathcal{CP}$- und $\mathcal{P}$-Invarianz vorausgesetzt, und die Teilchen nach ihrer inneren Parität bzw. Normalität klassifiziert. Im letzten Abschnitt folgt eine kurze Diskussion gemischter Paritätszustände.

5.1 Das Standardmodell

Der totale Wirkungsquerschnitt des Higgsstrahlungsprozesses (Abb. 5.1) im Standardmodell ist gegeben durch [13]

$$\sigma[e^+e^- \to ZH] = \frac{G_F^2 M_Z^4}{96\pi s}\,(v_e^2 + a_e^2)\,\beta\,\frac{\beta^2 + 12M_Z^2/s}{(1 - M_Z^2/s)^2}, \tag{5.2}$$

wobei $v_e = -1 + 4\sin^2\theta_W$, $a_e = -1$ die Vektor- und Axialvektorkopplung des Elektrons an das Z sind, G_F die Fermi-Konstante M_Z die Z-Boson-Masse, $\sqrt{s}$ die Schwerpunktsenergie und $\beta = \frac{2p}{\sqrt{s}}$ der Impulsbetrag $|\vec{p}\,|$ der produzierten Teilchen Z, H im Schwerpunktsystem in Einheiten der Strahlenergie:

$$\beta = \sqrt{[1 - (M_Z + M_H)^2/s][1 - (M_Z - M_H)^2/s]}.$$

Charakteristisch ist der lineare Anstieg des Wirkungsquerschnitts

$$\sigma \sim \beta$$

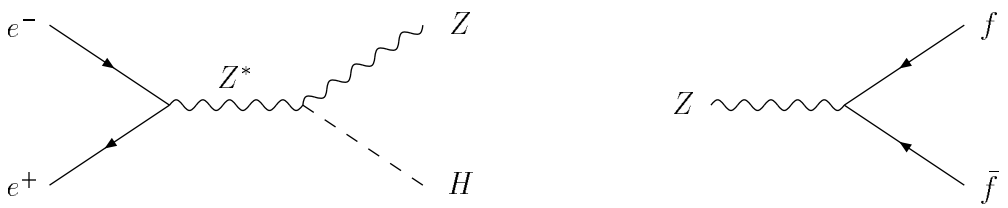
knapp oberhalb der Produktionsschwelle. Wie man im Verlaufe des Kapitels sehen wird, ist dieses Verhalten des Prozesses (5.1) bis auf zwei Ausnahmen anderen Spins bzw. anderer Parität ein ausschließliches Merkmal des Standardmodell-Higgs-Teilchens.
In Abhängigkeit von dem polaren Winkel Θ zwischen e^-- und Z-Flugrichtung schreibt sich der differentielle Wirkungsquerschnitt [14]

$$\frac{1}{\sigma}\frac{d\sigma}{d\cos\Theta} = \frac{3}{4}\frac{\beta^2\sin^2\Theta + 8M_Z^2/s}{\beta^2 + 12M_Z^2/s}, \tag{5.3}$$

der an der Schwelle isotrop ist und für hohe Schwerpunktsenergien $\propto \sin^2\Theta$ ist, entsprechend der dominanten longitudinalen Z-Polarisation.
Im Folgenden wird zusätzlich die dem Zerfall des $Z \to f\bar{f}$ enthaltene Winkelinformation

[3] Dank an H.Murayama und T.Rizzo, uns auf diese mögliche logische Lücke der Analyse aufmerksam zu machen.

Abbildung 5.1: Der Produktionsprozeß $e^+e^- \to ZH$ und der Zerfall $Z \to f\bar{f}$



verwendet. Bezeichnet man mit θ_f den polaren Winkel (s.Abb. 5.2) zwischen der ursprünglichen Flugachse des Z und derjenigen des Fermions in dem Ruhesystem des Z, so lautet mit $\gamma^2 = E_Z^2/M_Z^2 = \beta^2 s/4M_Z^2 + 1$ der doppelt-differentielle Wirkungsquerschnitt des Gesamtprozesses $e^+e^- \to ZH \to f\bar{f}H$

$$\frac{1}{\sigma}\frac{d\sigma}{d\cos\Theta\, d\cos\theta_f} = \frac{9M_Z^2\gamma^2/4s}{\beta^2 + 12M_Z^2/s}\Bigg\{ \sin^2\Theta\sin^2\theta_f + \frac{1}{2\gamma^2}[1+\cos^2\Theta][1+\cos^2\theta_f] + \frac{1}{2\gamma^2}\frac{2\,v_e a_e}{(v_e^2+a_e^2)}\frac{2\,v_f a_f}{(v_f^2+a_f^2)}\,4\cos\Theta\cos\theta_f\Bigg\}, \quad (5.4)$$

dessen charakteristische Winkelbeiträge als zweites Identifikationsmerkmal von Spin und Parität eines Teilchens verwendet werden. In dem asymptotischen Verhalten $\sim \sin^2\theta_f$ bei hohen Energien spiegelt sich nochmals die dominante longitudinale Z-Polarisation wider.

Der Helizitätsformalismus dient als nützliches Werkzeug, um das im Higgsstrahlungsprozess produzierte Teilchen auf Spin und Parität zu überprüfen. Schreibt man die Helizitätsamplituden in der Notation $\Gamma^{\lambda_Z\lambda_H}$ mit den entsprechenden Helizitäten λ des Z und H, so ergibt sich der Wirkungsquerschnitt eines verallgemeinerten Higgsstrahlungsprozesses – bei dem das H ein Teilchen beliebigen Spins und beliebiger Parität sein kann – zu

$$\sigma = \frac{G_F}{\sqrt{2}}\frac{M_Z^4\,(v_e^2+a_e^2)}{48\pi s^2\,(1-M_Z^2/s)^2}\,\beta\,\left[|\Gamma^{00}|^2 + 2\,|\Gamma^{11}|^2 + 2\,|\Gamma^{01}|^2 \quad +2\,|\Gamma^{10}|^2 + 2\,|\Gamma^{12}|^2\right]. \quad (5.5)$$

Bezeichnet man die eckige Klammer in Gl.(5.5) mit Γ^2, so erhält man den differentiellen Wirkungsquerschnitt in $\cos\Theta$

$$\frac{1}{\sigma}\frac{d\sigma}{d\cos\Theta} = \frac{3}{4\,\Gamma^2}\left\{\sin^2\Theta\left[|\Gamma^{00}|^2 + 2\,|\Gamma^{11}|^2\right] \quad +[1+\cos^2\Theta]\left[|\Gamma^{01}|^2 + |\Gamma^{10}|^2 + |\Gamma^{12}|^2\right]\right\}, \quad (5.6)$$

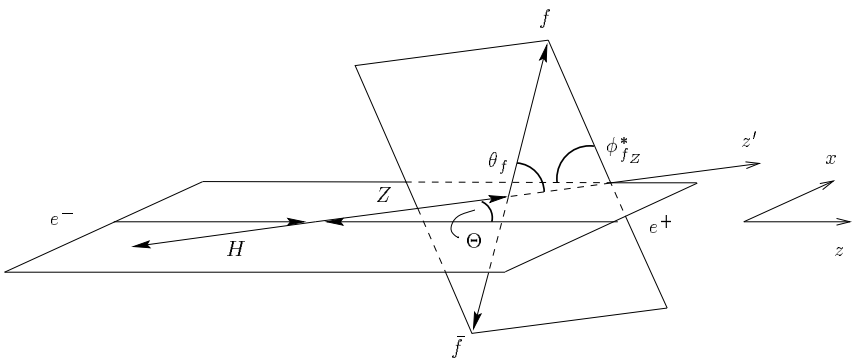


Abbildung 5.2: Die Winkel Θ, θ_f und $\phi^*_{f_Z}$. Die zusätzliche Information der azimutalen Winkelbeiträge $\phi^*_{f_Z}$ war für diese Arbeit nicht nötig. Um in Übereinstimmung in den Definitionen mit [14] zu kommen, muß der azimutale Winkel mit $(\pi - \phi_*)$ bezeichnet werden. Sämtliche Vektoren der verwendeten Kinematik findet man in Anhang E.

bzw. den doppelt-differentiellen Wirkungsquerschnitt

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sigma}\,\frac{d\sigma}{d\cos\Theta\, d\cos\theta_f} =& \frac{9}{16\,\Gamma^2}\Big\{ \sin^2\Theta \sin^2\theta_f\,|\Gamma^{00}|^2 + \frac{1}{2}[1+\cos^2\Theta][1+\cos^2\theta_f]\left[|\Gamma^{10}|^2 + |\Gamma^{12}|^2\right] \\ &+ \sin^2\Theta\,[1+\cos^2\theta_f]|\Gamma^{11}|^2 + [1+\cos^2\Theta]\,\sin^2\theta_f|\Gamma^{01}|^2 \\ &+ \frac{2\,v_e a_e}{(v_e^2+a_e^2)}\frac{2\,v_f a_f}{(v_f^2+a_f^2)}\,2\cos\Theta\cos\theta_f\left[|\Gamma^{10}|^2 - |\Gamma^{12}|^2\right]\Big\}. \quad (5.7)\end{aligned}$$

Die Winkel Θ und θ_f sind wie im vorigen Absatz angegeben definiert und für den bekannten Teilprozess $Z \to f\bar{f}$ wurden die entsprechenden Standardmodell-Größen eingesetzt. Somit gelten im Hinblick auf den Z-Z-H-Vertex und damit auf alle Eigenschaften des H die Gleichungen (5.5) bis (5.7) modellunabhängig gelten, bis auf die Tatsache, daß in allen drei Wirkungsquerschnitten $\mathcal{CP}$-Erhaltung[4] vorausgesetzt wurde und Paritäts-Eigenzustände verwendet wurden. Auf gemischte Paritätszustände wird in Abschnitt 5.2.3 eingegangen.

Koppelt an den Leptontensor (3.1) der Strom

$$J_{\pm 1} = D^{*1}_{\pm 1,\lambda}(\phi_e, \Theta, -\phi)\Gamma^{\lambda_a \lambda_b}$$

des Helizitätszustandes (3.3) einerseits und andererseits der Strom

$$J^\mu = i\frac{gM_Z}{\cos\Theta_W} g^{\mu\alpha}\epsilon^*_\alpha(Z)$$

[4]Siehe (3.5) und (3.6).

des Standardmodell-Prozesses, so erhält man durch Vergleich die zugehörigen Helizitätsamplituden

$$\begin{aligned}\Gamma_{00} &= \frac{g}{\sqrt{2}\cos\Theta_W}\frac{E_Z}{M_Z},\\ \Gamma_{10} &= \frac{g}{\sqrt{2}\cos\Theta_W},\\ \Gamma_{01} &= \Gamma_{11} = \Gamma_{12} = 0,\end{aligned}$$

wobei die Normalität des Standardmodell-Higgsteilchens durch

$$n_H = +$$

gegeben ist.

5.2 Teilchen beliebigen Spins und beliebiger Parität

Zur Klassifikation der Teilchen wird neben ihrem Spin S auch ihre Normalität $n = (-)^S P$ (siehe Kap.4) herangezogen. Es sei daran erinnert, daß für Paritätserhaltung (3.5) gilt

$$\Gamma^{\lambda_Z \lambda_H} = n_H \Gamma^{-\lambda_Z - \lambda_H} \tag{5.8}$$

und daß der Strom eines allgemeinen Z-Z-H-Vertex durch

$$J^\mu = T^{\mu\alpha\beta_1\ldots\beta_S}\epsilon^{*\alpha}(Z)\epsilon^{*\beta_1\ldots\beta_S}(H)$$

gegeben ist, siehe Gl.(4.1). Die Vertexfaktoren $T^{\mu\alpha\beta_1\ldots\beta_S}$ aus Kapitel 4 sind in Tab. 5.1 mit den entsprechenden resultierenden Helizitätsamplituden zusammengefaßt. Kennt man den Vertexfaktor, so ist es – insbesondere für gerade Normalität – einfach, die β-Abhängigkeit der Helizitätsamplituden vorherzusagen. Jeder Viererimpuls, kontrahiert mit dem Z-Polarisationsvektor oder H-Polarisationstensor ergibt Null oder eine Proportionalität zu β,

$$p_i \cdot \epsilon_j(\lambda_j) = \begin{cases} \frac{\beta s}{2M_j} & \text{für} \quad i \neq j \quad \text{und} \quad \lambda_j = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{5.9}$$

wobei $i, j = Z$ oder H. Außerdem projiziert jeder Impuls mit nichtverschwindender transversaler Komponente – also $k = p_Z - p_H$, jedoch nicht $q = p_Z + p_H$ – bei Kontraktion mit dem Leptontensor ein β heraus. Also braucht man nur die Anzahl der Impulse q^α, k^α, q^{β_i}, k^{β_i} und k^μ zu zählen, um die β-Abhängigkeit[5] der Helizitätsamplituden an der Schwelle zu verstehen. Den charakteristischen Anstieg des Wirkungsquerschnittes nahe der Schwelle erhält man entsprechend durch quadrieren der β-Abhängigkeit der Helizitätsamplituden multipliziert mit einem zusätzlichen β aus dem Phasenraum.

[5] Siehe letzte Spalte in Tab. 5.1.

5.2.1 Gerade Normalität

Spin 0

Die Spin-0-Helizitätsamplituden, aufgelistet in Tab. 5.1, haben keine β-Abhängigkeit nahe der Schwelle, wo nur der führende Term in β beiträgt. Darum wird der Anstieg des Wirkungsquerschnittes linear in β verlaufen, entsprechend einer Potenz von β aus dem Phasenraum. Das Standardmodell-Higgsteilchen mit $S^P = 0^+$ ist ein Spezialfall hiervon, den man mit $a_1 = g/(\sqrt{2}\cos\Theta_W)$, $a_2 = 0$ erhält.

Spin 1

Die Helizitätsamplituden haben mindestens eine Potenz in β, so daß der Wirkungsquerschnitt mit $\sim \beta^3$ ansteigt und somit einfach vom Standardmodell unterscheidbar ist[6].

Spin 2

Ein allgemeiner Spin-2-Tensor $T^{\mu\alpha\beta_1\beta_2}$ enthält einen Term ohne Viererimpulse q, k, nämlich denjenigen $\propto c_1$ (s. Tab. 5.1). Ist also $c_1 \neq 0$, so gibt es in den Helizitätsamplituden Terme ohne β-Abhängigkeit, die damit an der Schwelle nicht verschwinden. Daraus folgt, daß die beiden zu c_1 proportionalen Helizitätsamplituden Γ^{01}, Γ^{11} nicht Null werden, und darum zu nichtverschwindenden Winkelbeiträgen $\sin^2\Theta[1+\cos^2\theta_f]$ und $[1+\cos^2\Theta]\sin^2\theta_f$ führen (s. 5.7), die im Standardmodell nicht auftreten. Sind diese Winkelkorrelationen im Experiment nicht vorhanden, so kann Spin 2 ausgeschlossen werden. Denn für $c_1 = 0$ steigt der Wirkungsquerschnitt eines Spin-2-Teilchens mit $\sim \beta^5$.
Spin 2 auszuschließen benötigt also zwei Messungen: Einerseits den Anstieg des Wirkungsquerschnittes mit $\sim \beta$, und andererseits verschwindende Winkelkorrelationen $\sin^2\Theta[1+\cos^2\theta_f]$ oder $[1+\cos^2\Theta]\sin^2\theta_f$.

Spin ≥ 3

Für $S \geq 3$ steigt die Anzahl unabhängiger Terme nicht, so daß der Vertexfaktor folgende allgemeine Form erhält

$$T^{\mu\alpha\beta_1\ldots\beta_S}_{\text{SpinS}} = \sum_{i<j} T^{\mu\alpha\beta_i\beta_j}_{\text{Spin2}} q^{\beta_1}\ldots q^{\beta_{i-1}} q^{\beta_{i+1}}\ldots q^{\beta_{j-1}} q^{\beta_{j+1}}\ldots q^{\beta_S}.$$

Berücksichtigt man, daß

$$q_\beta \epsilon^{\beta_1\ldots\beta_S}(H) \sim q_\beta \epsilon^{\beta}(H) \overset{(1.8)}{=} \begin{cases} \frac{\beta s}{2M_H} & \text{für} \quad \lambda_H = 0 \\ 0 & \text{für} \quad \lambda_H = \pm 1, \end{cases}$$

[6] Unabhängig davon kann nach dem Landau-Yang-Theorem Spin 1 durch den Zerfall $H \to \gamma\gamma$ oder die Produktion $\gamma\gamma \to H$ in Photon-Kollisionen ausgeschlossen werden.

da $\epsilon^{\beta_1 \ldots \beta_S}$ ein direktes Produkt von Spin-1-Polarisatonsvektoren ϵ^{β} ist (4.5), so kann man das Verhalten

$$\sigma \propto \beta\beta^{2[S-2]} = \beta^{2S-3} = \beta^3, \beta^5, \ldots$$

für $S \geq 3$ vorhersagen.
Mißt man also im Experiment den Anstieg des Wirkungsquerschnittes $\sigma \sim \beta$, wie im Standardmodell vorhergesagt, so kann auch $S \geq 3$ ausgeschlossen werden.

5.2.2 Ungerade Normalität

Es ist einfach, Teilchen ungerader Normalität auszuschließen, denn die Helizitätsamplitude Γ^{00} muß in diesem Fall wegen (5.8) gleich Null werden. Durch die Beobachtung einer nichtverschwindenden $\sin^2\Theta \sin^2\theta_f$-Korrelation, die im Standardmodell auftreten muß, können somit alle Zustände ungerader Normalität beseitigt werden.
Außerdem erhält man für ungerade Normalität ein ähnliches Muster wie bei gerader. Beobachtet man einen linearen Anstieg des Wirkungsquerschnittes, $\sigma \sim \beta$, so können **Spin 0** und **Spin 2** ausgeschlossen werden. Für **Spin 1** ist dies nicht ausreichend[7], denn trotz eines linearen Anstieges kann es sich um ein Spin-1-Teilchen handeln, nämlich wenn mindestens einer der beiden Koeffizienten b_1 oder $b_2 \neq 0$ (siehe Tab. 5.1). Sind jedoch b_1 und/oder $b_2 \neq 0$, so folgt, daß auch die Helizitätsamplituden Γ^{01} und Γ^{11} an der Schwelle nicht verschwinden und damit die Winkelkorrelationen $\sin^2\Theta[1 + \cos^2\theta_f]$ oder $[1 + \cos^2\Theta]\sin^2\theta_f$ beobachtet werden können, die im Standardmodell nicht auftreten werden. Sind b_1 und $b_2 = 0$, so wird der Wirkungsquerschnitt mit $\sim \beta^5$ ansteigen.
Für Spin $\mathbf{S \geq 3}$ gilt das gleiche Argument wie bei gerader Normalität. Der Wirkungsquerschnitt wird mit

$$\sigma \sim \beta\beta^{2[S-1]} = \beta^{2S-1} = \beta^5, \beta^7, \ldots$$

ansteigen.

Wird also durch eine unabhängige Untersuchung möglich festzustellen, daß es sich um einen $\mathcal{P}$-Eigenzustand handelt, so sind durch die vorangehende Analyse die Quantenzahlen $S^P = 0^+$ des Standardmodells eindeutig festgelegt.

[7] Siehe auch hier die Fußnote der letzten Seite.

5.2.3 Gemischte Normalität

Ohne auf Details einzugehen, sei hier kurz der Fall gemischter Normalität diskutiert.

Dehnt man die Analyse auf Zustände gemischter Normalität inklusive $\mathcal{P}$- und $\mathcal{CP}$-verletzender Wechselwirkung aus, so gilt (5.8) nicht mehr. Die Wirkungsquerschnitte (5.5) - (5.7), die unter diesen Annahmen vereinfacht wurden, nehmen eine allgemeinere Form an. Für die Konstruktion des Vertexfaktors müssen die entsprechende Anteile gerader und ungerader Normalität aus Tab.5.1 addiert werden

$$T^{\mu\alpha\beta_1\ldots\beta_S} \;=\; T^{\mu\alpha\beta_1\ldots\beta_S}_{\text{gerade}} + \eta\, T^{\mu\alpha\beta_1\ldots\beta_S}_{\text{ungerade}}$$

mit einem beliebigen reellen Faktor η[8]. Daraus folgt, daß auch die Struktur der Helizitätsamplituden aus den voherigen Berechnungen wieder auftauchen muß, und mit $\Gamma^{\lambda_Z\lambda_H} = \Gamma^{\lambda_Z\lambda_H}_{\text{ger.}} + \eta\,\Gamma^{\lambda_Z\lambda_H}_{\text{ung.}}$ ist das Verhalten unter Paritätstransformation durch

$$\Gamma^{\lambda_Z\lambda_H} \;=\; \Gamma^{-\lambda_Z-\lambda_H}_{\text{ger.}} - \eta\,\Gamma^{-\lambda_Z-\lambda_H}_{\text{ung.}} \tag{5.10}$$

gegeben. Einen allgemeinen Wirkungsquerschnitt erhält man aus (5.5) bis (5.7) durch die Ersetzung

$$|\Gamma^{\lambda_Z\lambda_H}|^2 \;\to\; \frac{1}{2}\left\{|\Gamma^{\lambda_Z\lambda_H}|^2 + |\Gamma^{-\lambda_Z-\lambda_H}|^2\right\}, \tag{5.11}$$

außerdem treten Terme der Form $|\Gamma^{\lambda_Z\lambda_H}|^2 - |\Gamma^{-\lambda_Z-\lambda_H}|^2$ auf, die unter $\mathcal{P}$-Invarianz verschwinden würden. Für den differentiellen Wirkungsquerschnitt (5.6) bedeutet dies ein Term $\propto \cos\Theta$. Mit (5.10) erhält man

$$|\Gamma^{\lambda_Z\lambda_H}|^2 - |\Gamma^{-\lambda_Z-\lambda_H}|^2 \;=\; 4\eta\, Re\left[\Gamma^{\lambda_Z\lambda_H}_{\text{ger.}}\,\Gamma^{*\lambda_Z\lambda_H}_{\text{ung.}}\right]. \tag{5.12}$$

Die Koeffizienten a_i bzw. b_i aus den Vertexfaktoren (Tab. 5.1) können rein reell sein und damit würde (5.12) gleich Null werden[9]. Das heißt, beobachten wir einen Term $\propto \cos\Theta$, so können wir von $\mathcal{P}$- und $\mathcal{CP}$-Verletzung ausgehen. Umgekehrt ist jedoch nicht gesagt, daß tatsächlich ein Term dieser Art auftreten wird, wenn $\mathcal{P}$- und $\mathcal{CP}$ verletzt sind [10].
Wir können also mit einer Analyse, wie sie in den vorigen Abschnitten angewendet wurde, kein zwingendes Kriterium für den Ausschluß gemischter Parität erhalten.

[8] Siehe dazu auch Abschnitt 4.4.

[9] Man beachte, daß die Helizitätsamplituden ungerader Normalität in Tab. 5.1 alle eine imagiäre Einheit i haben.

[10] Für eine fundamentale, hermitesche Lagrangedichte muß der Vertexfaktor reell sein. Eine effektive Lagrangedichte inklusive Schleifen ("loops") läßt jedoch auch einen nichtverschwindenden Imaginärteil für die Koeffizienten a_i, b_i, c_i zu. Dies entspreicht der Tatsache, daß $\mathcal{CP}\tilde{\mathcal{T}}$ ungerade ist, wobei mit $\tilde{\mathcal{T}}$ die *naive* Zeitumkehrtransformation bezeichnet wird – siehe dazu die Fußnote zu (3.7) . Es erscheint also ein Term $\propto \cos\Theta$, wenn $\mathcal{P}$ und $\mathcal{CP}$ verletzt sind, und $\mathcal{CP}\tilde{\mathcal{T}}$ ungerade ist.

Andererseits kann man (5.11) mit (5.10) umschreiben zu

$$|\Gamma^{\lambda_Z\lambda_H}|^2 + |\Gamma^{-\lambda_Z-\lambda_H}|^2 \;=\; 2\left[|\Gamma^{\lambda_Z\lambda_H}_{\text{ger.}}|^2 + \eta^2\,|\Gamma^{\lambda_Z\lambda_H}_{\text{ung.}}|^2\right].$$

Das bedeutet, die Spin-Analyse der vorangehenden Abschnitte kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit analog durchgeführt werden. Jedes Teilchen gemischter Normalität und $S \geq 3$ kann durch die Beobachtung eines linearen Anstiegs des Wirkungsquerschnitts ausgeschlossen werden. Hingegen kann für Spin 1 und Spin 2 ein linearer Anstieg auftreten, der von dem ungeraden bzw. dem geraden Tensor herrührt. Deshalb muß diese Beobachtung kombiniert werden mit verschwindenen Beiträgen von $\sin^2\Theta[1+\cos^2\theta_f]$ oder $[1+\cos^2\Theta]\sin^2\theta_f$, so daß alle Teilchen mit gemischter Normalität und Spin $S \geq 1$ ausgeschlossen werden können.

Verbleibt nur ein Teilchen mit Spin 0 und gemischter Parität. Hierfür gibt es in einer Analyse dieser Art kein zwingendes Unterscheidungsmerkmal von einem Teilchen mit den Quantenzahlen $S^P = 0^+$ des Standardmodell-Higgs-Teilchens[11].

Bemerkung Die gesamte Analyse kann nur nahe der Schwelle durchgeführt werden, denn im Allgemeinen sind die Koeffizienten a_i (bzw. b_i, c_i) ebenfalls Funktionen von $\sqrt{s}$, M_Z und M_H und damit auch von β. Ist $a_i \propto \beta^n$, $n \geq 1$, so wird die Analyse nicht beeinträchtigt und eine einfache Proportionalität $a_i \propto 1/\beta$ ist nicht möglich, denn sie würde auf eine Divergenz an der Schwelle führen.

[11] Über die Bestimmung von Parität und Paritätsmischung eines spinlosen Higgsbosons existieren schon theoretische Arbeiten [12, 11].

S^P	Z^*ZH-Kopplung	Helizitätsamplituden	$\sim \beta^n$
Gerade Normalität $n_H = +$			
0^+	$a_1 g_\perp^{\mu\alpha} + a_2 k_\perp^\mu q^\alpha$	$\Gamma^{00} = (a_1 E_Z + \frac{1}{2} a_2 s^{3/2} \beta^2)/M_Z$	1
		$\Gamma^{10} = a_1$	1
1^-	$b_1 g^{\alpha\beta} k_\perp^\mu + b_2 q^\alpha q^\beta k_\perp^\mu$ $+ b_3 (q^\alpha g_\perp^{\mu\beta} - q^\beta g_\perp^{\mu\alpha})$ $+ b_4 (q^\alpha g_\perp^{\mu\beta} + q^\beta g_\perp^{\mu\alpha})$	$\Gamma^{00} = \beta [b_1 (s - M_Z^2 - M_H^2) + \frac{1}{2} b_2 s^2 \beta^2 - b_3 s$ $+ b_4 (M_Z^2 - M_H^2)] \frac{\sqrt{s}}{2 M_Z M_H}$	β
		$\Gamma^{10} = (-b_3 + b_4) \beta \frac{s}{2 M_H}$	β
		$\Gamma^{01} = (b_3 + b_4) \beta \frac{s}{2 M_Z}$	β
		$\Gamma^{11} = b_1 \beta \sqrt{s}$	β
2^+	$c_1 (g^{\alpha\beta_1} g_\perp^{\mu\beta_2} + g^{\alpha\beta_2} g_\perp^{\mu\beta_1})$ $+ c_2 g_\perp^{\mu\alpha} q^{\beta_1} q^{\beta_2}$ $+ c_3 (g_\perp^{\mu\beta_1} q^{\beta_2} + g_\perp^{\mu\beta_2} q^{\beta_1}) q^\alpha$ $+ c_4 (g^{\alpha\beta_1} q^{\beta_2} + g^{\alpha\beta_2} q^{\beta_1}) k_\perp^\mu$ $+ c_5 k_\perp^\mu q^\alpha q^{\beta_1} q^{\beta_2}$	$\Gamma^{00} = \frac{\sqrt{2/3}}{M_Z M_H^2} \Big\{ c_1 E_H (s - M_Z^2 - M_H^2) - \frac{1}{8} c_5 s^{7/2} \beta^4$ $- \frac{1}{4} s^2 \beta^2 [c_2 E_Z - 2 c_3 E_H + 2 c_4 (s - M_Z^2 - M_H^2)/\sqrt{s}] \Big\}$	1
		$\Gamma^{10} = \sqrt{\frac{2}{3}} (c_1 + c_2 \beta^2 s^2 / 4 M_H^2)$	1
		$\Gamma^{01} = -\frac{1}{2\sqrt{2} M_Z M_H} (2 c_1 (s - M_Z^2 - M_H^2) + c_3 s^2 \beta^2)$	1
		$\Gamma^{11} = \frac{\sqrt{2}}{M_H} (c_1 E_H - \frac{1}{2} c_4 s^{3/2} \beta^2)$	1
		$\Gamma^{12} = 2 c_1$	1
Ungerade Normalität $n_H = -$			
0^-	$a_1 \varepsilon^{\mu\alpha\rho\sigma} q_\rho k_\sigma$	$\Gamma^{00} = 0$	
		$\Gamma^{10} = i a_1 \beta s$	β
1^+	$b_1 \varepsilon^{\mu\alpha\beta\rho} q_\rho$ $+ b_2 (\varepsilon_\perp^{\mu\alpha\beta\rho} k_\rho$ $+ b_3 \varepsilon^{\alpha\beta\rho\sigma} q_\rho k_\sigma k_\perp^\mu$	$\Gamma^{00} = 0$	
		$\Gamma^{10} = i (b_1 s E_H + b_2 (E_H (M_Z^2 - M_H^2) + \frac{1}{2} s^{3/2} \beta^2))/(\sqrt{s} M_H)$	1
		$\Gamma^{01} = i (b_1 s E_Z + b_2 (E_Z (M_Z^2 - M_H^2) - \frac{1}{2} s^{3/2} \beta^2))/(\sqrt{s} M_Z)$	1
		$\Gamma^{11} = i (b_1 s + b_2 (M_Z^2 - M_H^2) + b_3 s^2 \beta^2)/\sqrt{s}$	1
2^-	$c_1 \varepsilon^{\mu\alpha\beta_1\rho} q^{\beta_2} q_\rho$ $+ c_2 \varepsilon_\perp^{\mu\alpha\beta_1\rho} k_\rho q^{\beta_2}$ $+ c_3 \varepsilon^{\alpha\beta_1\rho\sigma} q^{\beta_2} k_\perp^\mu q_\rho k_\sigma$ $+ c_4 \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\alpha\rho\sigma} q_\rho k_\sigma q^{\beta_1} q^{\beta_2}$ $+ \beta_1 \leftrightarrow \beta_2$	$\Gamma^{00} = 0$	
		$\Gamma^{10} = i \beta (c_1 s E_H + c_2 (E_H (M_Z^2 - M_H^2) + \frac{1}{2} s^{3/2} \beta^2)$ $+ \frac{1}{4} c_4 s^{5/2} \beta^2) \sqrt{2s}/(\sqrt{3} M_H^2)$	β
		$\Gamma^{01} = i \beta (c_1 s E_Z + c_2 (E_Z (M_Z^2 - M_H^2)$ $- \frac{1}{2} s^{3/2} \beta^2) \sqrt{s}/(\sqrt{2} M_Z M_H)$	β
		$\Gamma^{11} = i \beta (c_1 s + c_2 (M_Z^2 - M_H^2) + c_3 s^2 \beta^2) \sqrt{s}/(\sqrt{2} M_H)$	β
		$\Gamma^{12} = 0$	

Tabelle 5.1: Tabelle 5.1: Die Kopplungen eines Z^*ZH-Vertexes und die entsprechenden Helizitätsamplituden für ein H mit Spin $S \leq 2$. Hier sind $q = p_Z + p_H$, $k = p_Z - p_H$ und $\perp$ kennzeichnet die Orthogonalität eines Vektors oder Tensors zu q^μ, $t_\perp^{\mu\cdots} = t^{\mu\cdots} - q^\mu / s \, q_\nu t^{\nu\cdots}$. Die letzte Spalte gibt den führenden β-Term der Helizitätsamplituden nahe der Schwelle an. Für $S \geq 3$ ergibt sich ein Anstieg an der Schwelle $\sim \beta^{S-2}$ bzw. $\sim \beta^{S-1}$ für die Helizitätsamplituden gerader bzw. ungerader Normalität. Die Koeffizienten a_i, b_i und c_i sind nicht mit denjenigen des Kapitels 4 identisch.

Kapitel 6

Zusammenfassung

Um den Spin-0-Charakter des Higgsteilchens im Standardmodell experimentell zu bestätigen, stellt der Higgsstrahlungsprozeß

$$e^+e^- \to Z^* \to ZH \tag{6.1}$$

eindeutige Kriterien zur Verfügung. Die Energieabhängigkeit des totalen Wirkungsquerschnitts im Schwellenbereich zeigt charakteristische Eigenschaften der Z-Z-H-Kopplungsstruktur und läßt, kombiniert mit der Analyse von Winkelkorrelationen, Rückschlüsse auf Spin und Parität des Teilchens zu.
Im Standardmodell verläuft der Anstieg des totalen Wirkungsquerschnittes nahe der Schwelle linear in β

$$\sigma \sim \beta. \tag{6.2}$$

Durch diese Beobachtung können beliebige Teilchen mit $S^P = 0^-, 1^-, 2^-, 3^\pm$ und diejenigen höheren Spins ausgeschlossen werden. Findet man zusätzlich zu dieser Bedingung (6.2)

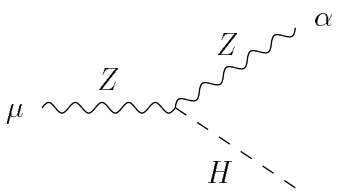
$$\text{keine } \sin^2\Theta(1+\cos^2\theta_f) \text{ oder } (1+\cos^2\Theta)\sin^2\theta_f \text{ Winkelkorrelation} \tag{6.3}$$

in dem doppelt-differentiellen Wirkungsquerschnitt, so kann es sich auch nicht um Teilchen mit $S^P = 1^+, 2^+$ handeln.

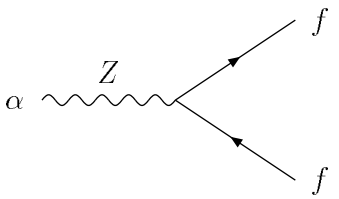
Durch diese beiden Kriterien (6.2) und (6.3) können auch jegliche Teilchen gemischter Parität mit $S \geq 1$ ausgeschlossen werden, so daß der Spin-0-Charakter des Standardmodell-Higgs-Teilchens unwidersprüchlich etabliert werden kann.
Ist es durch eine unabhängige Analyse möglich, ein Teilchen mit Spin 0 und gemischter Parität auszuschließen [12], so können sogar Spin S und Parität P $S^P = 0^+$ des Higgsteilchens im Standardmodell eindeutig experimentell bestätigt werden.

Anhang A

Verwendete Feynmanregeln



$$i\frac{gM_Z}{\cos\Theta_W}g^{\mu\alpha}$$



$$-i\frac{g}{4\cos\Theta_W}\gamma^{\alpha}(v_f - a_f\gamma_5)$$

mit

$$v_f = 2T_3^f - 4\sin^2\Theta_W Q_f \qquad a_f = 2T_3^f.$$

Q_f bezeichnet die Fermionladung und T_3 die dritte Komponente des schwachen Isospins (siehe Tabelle 2.1). Im Besonderen gilt für das Elektron $Q_f = -1$, $T_3 = -\frac{1}{2}$.
Die Kopplungskonstanten erfüllen die Relation

$$g\sin\Theta_W = e$$

und in niedrigster Ordnung der Störungstheorie sind

$$M_W = M_Z\cos\Theta_W \qquad \text{und} \qquad \frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8M_W^2} \quad .$$

Anhang B

d-Funktionen

Es gilt folgende Relation für die d-Funktionen:

$$d^J_{M',M} = (-1)^{M-M'} d^J_{M,M'} = d^J_{-M,-M'}$$

Ferner erhält man für

$J = 1$

$$d^1_{0,0} = \cos\theta$$

$$d^1_{1,0} = -\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} \qquad d^1_{1,\pm1} = \frac{1\pm\cos\theta}{2}$$

und für

$J = 2$

$$d^2_{0,0} = \left(\tfrac{3}{2}\cos^2\theta - \tfrac{1}{2}\right) \qquad d^2_{2,0} = \frac{\sqrt{6}}{4}\sin^2\theta$$

$$d^2_{1,0} = -\sqrt{\tfrac{3}{2}}\sin\theta\cos\theta \qquad d^2_{2,\pm1} = -\frac{1\pm\cos\theta}{2}\sin\theta$$

$$d^2_{1,\pm1} = \frac{1\pm\cos\theta}{2}(2\cos\theta \mp 1) \qquad d^2_{2,\pm2} = \left(\frac{1\pm\cos\theta}{2}\right)^2$$

Die obigen d-Funktionen wurden in der vorliegenden Arbeit verwendet, weitere d-Funktionen findet man in [15].

Anhang C

Normalitätstest

Beschreibt man ein Teilchen mit ganzzahligem Spin S mit Wellenfunktionen

$$\psi^{\gamma_1 \cdots \gamma_S},$$

so verhalten sich diese unter Paritätstransformation $\mathcal{P}$ wie folgt

$$\psi^{\gamma_1 \cdots \gamma_S}(x) \xrightarrow{\mathcal{P}} \psi'^{\gamma_1 \cdots \gamma_S}(x') = n\psi_{\gamma_1 \cdots \gamma_S}(x'),$$

mit der Normalität $n = (-1)^S P = \pm 1$ und der intrinsischen Parität P des Teilchens. Zum Beispiel [16]:

$$\begin{aligned}
S(x) &\xrightarrow{\mathcal{P}} S(x') && \text{Skalar} \\
P(x) &\xrightarrow{\mathcal{P}} -P(x') && \text{Pseudoskalar} \\
V^\mu(x) &\xrightarrow{\mathcal{P}} V_\mu(x') && \text{Vektor} \\
A^\mu(x) &\xrightarrow{\mathcal{P}} -A_\mu(x') && \text{Axialvektor.}
\end{aligned}$$

Eine Paritätstransformation gewöhnlicher Vierervektoren ist bekanntermaßen durch

$$x^\mu \xrightarrow{\mathcal{P}} x'^\mu = x_\mu$$

gegeben. Überprüfen wir nun das Transformationsverhalten des folgenden Spin-0-Vertexfaktors

$$T^{\mu\alpha} = a_1(g^{\mu\alpha} - q^\mu q^\alpha/s) + a_2(k^\mu - q^\mu(M_Z^2 - M_H^2)/s)q^\alpha,$$

so ergibt sich

$$\begin{aligned}
\psi_{Z^*,\mu}\,\psi_{Z,\alpha}\,\psi_H\,T^{\mu\alpha} \xrightarrow{\mathcal{P}} \; & n_Z n_H \psi^\mu_{Z^*}\,\psi^\alpha_Z\,\psi_H\,[a_1(g^{\mu\alpha} - q_\mu q_\alpha/s) \\
& + a_2(k_\mu - q_\mu(M_Z^2 - M_H^2)/s)q^\alpha] \\
& = n_H \psi_{Z^*,\mu}\,\psi_{Z,\alpha}\,\psi_H\,T^{\mu\alpha},
\end{aligned}$$

wobei bei dem letzten Gleichheitszeichen $g^{\mu\alpha} = g_{\mu\alpha}$ ausgenutzt wurde und die Normalität $n_Z = 1$ des Vektorbosons Z eingesetzt wurde. Es bestätigt sich also unsere Annahme, daß es sich hier um ein Teilchen gerader Normalität handelt.

Wenden wir die Paritätstransformation auf den Vertexfaktor

$$T^{\mu\alpha} = a\,\varepsilon^{\mu\alpha\sigma\rho} q_\rho k_\sigma$$

an, so so erhält man

$$\begin{aligned} \psi_{Z^*,\mu}\,\psi_{Z,\alpha}\,\psi_H\,T^{\mu\alpha} \quad &\xrightarrow{\mathcal{P}} \quad n_Z n_H\,\psi^{\mu}_{Z^*}\psi^{\alpha}_{Z}\psi_H\; a\,\varepsilon^{\mu\alpha\sigma\rho} q^\rho k^\sigma \\ &= -n_H\,\psi_{Z^*,\mu}\psi_{Z,\alpha}\psi_H T^{\mu\alpha}, \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt $\varepsilon^{\mu\alpha\sigma\rho} = -\varepsilon_{\mu\alpha\sigma\rho}$ verwendet wurde. Hier war also die Annahme richtig, es handele sich um ein Teilchen ungerader Normalität.
Die Erweiterung für höhere Spins verläuft analog, und soll hier nicht im Einzelnen ausgeführt werden.

Anhang D

Phasenraum und Wirkungsquerschnitt

Für masselose Teilchen im Anfangszustand lautet der Wirkungsquerschnitt

$$d\sigma = \frac{(2\pi)^4}{2s}|\mathcal{M}|^2 d\Phi_n(p_1 + p_2; p_3, \ldots, p_{n+2})$$

mit der Schwerpunktsenergie $\sqrt{s}$, und den Impulsen p_1, p_2 der einlaufenden bzw. der auslaufenden Teilchen $p_3, \ldots, p_{n+2}$, und dem n-Teilchen-Phasenraum

$$d\Phi_n(P; p_1 \ldots, p_n) = \delta^4\left(P - \sum_{i=1}^{n} p_i\right) \prod_{i=1}^{n} \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3 2E_i} \quad .$$

Unter Verwendung von

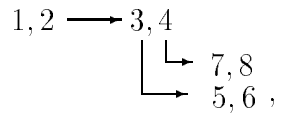
$$\frac{d^3 p_i}{2p_i^0} = d^4 p_i \delta(p_i^2 - m_i^2)\theta(p^0)$$

läßt sich der Wirkungsquerschnitt eines $1, 2 \to 3, 4$-Prozeß in folgende Form bringen

$$d\sigma = \frac{\beta}{64\pi^2 s}|\mathcal{M}|^2 d\Omega.$$

Bezeichnet man mit $\vec{p}$ den CM-Impuls der auslaufenden Teilchen mit dem polaren und azimutalen Winkel Θ und ϕ, so ist $\beta = 2|\vec{p}\,|/\sqrt{s}$ und $d\Omega = \sin\Theta\, d\Theta\, d\phi$.

Betrachtet man einen Produktionsprozeß mit darauf folgendem Zerfall



so profitiert man davon, den Phasenraum zu faktorisieren:

$$d\Phi_n(P;p_1,\ldots,p_n) = d\Phi_j(q;p_1,\ldots,p_j)d\Phi_{n-j+1}(P;q,p_{j+1},\ldots,p_n)(2\pi)^3 dq^2$$

mit $q = (\sum_{i=1}^{j} E_i, \sum_{i=1}^{j} \vec{p_i})$, so daß sich der betrachtete 4-Teilchen Phasenraum umschreiben läßt in

$$\begin{aligned} &d\Phi_4(p_1+p_2;p_5,p_6,p_7,p_8) \\ &\quad = d\Phi_2(p_1+p_2;p_3,p_4)d\Phi_2(p_3;p_5,p_6)d\Phi_2(p_4;p_7,p_8)(2\pi)^3 dp_3^2 (2\pi)^3 dp_4^2 \end{aligned}$$

Nimmt man schmale totale Zerfallsbreiten[1] Γ an

$$\int_0^\infty \frac{dp^2}{(p^2-M^2)^2+\Gamma^2 M^2} = \frac{1}{\Gamma M}\left[\arctan\frac{p^2-M^2}{\Gamma M}\right]_0^\infty \overset{M_i \gg \Gamma_i}{=} \frac{\pi}{\Gamma M}$$

so kann der Wirkungsquerschnitt einer $1,2 \to 3,4 \to 5,6,7,8$-Reaktion

$$d\sigma = \frac{(2\pi)^4}{2s}|\mathcal{M}|^2 d\Phi_4(P;p_5,p_6,p_7,p_8)$$

in folgende Form gebracht werden

$$d\sigma = \frac{1}{2^{15}\pi^6 s^{3/2}} \frac{|\vec{p_3}||\vec{p_7}||\vec{p_5}|}{\Gamma_3\Gamma_4 M_3 M_4 E_3 E_4}|\mathcal{M}'|^2 d\Omega_3 d\Omega_5 d\Omega_7,$$

wobei mit $|\mathcal{M}'|^2$ hier das Matrixelement *ohne* Propagatornenner von Teilchen 3 und 4 bezeichnet wird.

[1] "narrow width approximation"

Anhang E

Kinematik

Die folgende Kinematik wird durch die gesamte Arbeit hinweg verwendet[1] und ist ebenfalls konsistent mit den Winkeldefinitionen aus Kapitel 3. Teilchen a aus Kapitel 3 wird mit dem Z-Boson und b mit dem Teilchen H identifiziert. Die Zerfallsprodukte a_1, b_1 seien definiert als Fermionen, a_2, b_2 als Antifermionen. Die x-z-Ebene ist die Produktionsebene, und die Zerfälle sind im jeweiligen Ruhesystem des Mutterteilchens angegeben.

E.1 Kinematik der Produktion

Die Strahlachse verläuft längs der z-Achse, mit p_1 als dem Viererimpuls des e^- in $+z$-Richtung laufend und p_2 als dem Impuls des e^+

$$p_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{s}/2 \\ 0 \\ 0 \\ \sqrt{s}/2 \end{pmatrix} \quad p_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{s}/2 \\ 0 \\ 0 \\ -\sqrt{s}/2 \end{pmatrix},$$

wobei hier die Teilchen als masselos angesehen werden. Außerdem wählen wir die Produktionsebene als x-z-Ebene, so daß die Impulse der auslaufenden Teilchen durch

$$p_Z = \begin{pmatrix} E_Z \\ p\sin\Theta \\ 0 \\ p\cos\Theta \end{pmatrix} \quad p_H = \begin{pmatrix} E_H \\ -p\sin\Theta \\ 0 \\ -p\cos\Theta \end{pmatrix}$$

gegeben sind. Dabei ist p der Betrag des Dreierimpulses im Schwerpunktsystem und die jeweiligen Energien sind durch $E_Z = \frac{s+M_Z^2-M_H^2}{2\sqrt{s}}$, $E_H = \frac{s+M_H^2-M_Z^2}{2\sqrt{s}}$ gegeben. Ihre Polarisationsvektoren lauten

[1] Eventuelle Abweichungen findet man im Anhang H.

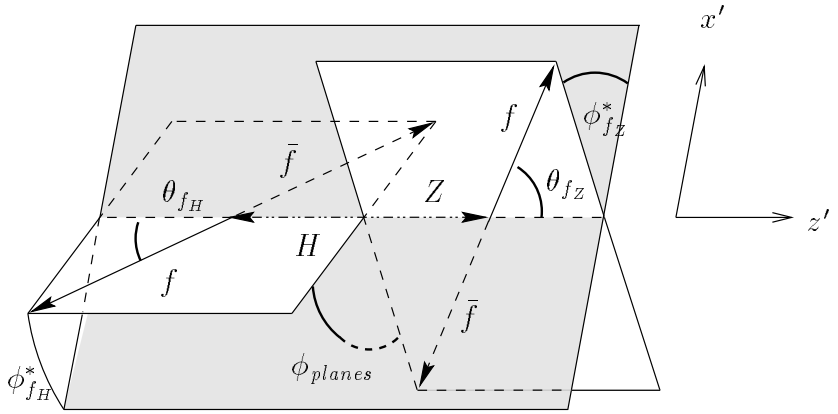


Abbildung E.1: Die Winkel der Zerfallsprodukte von Z und H. Die schraffierte Ebene ist die Produktionsebene. Für die Zerfallsprodukte von H wurde ein linkshändiges System gewählt, so daß es von H aus, das sich in $-z'$-Richtung bewegt, rechtshändig erscheint. Die polaren Winkel θ_Z und θ_H sind stets nach dem Lorentzboost, also im Ruhesystem des Mutterteilchens angegeben. $\phi_{planes} = \phi^\star_{f_Z} + \phi^\star_{f_H}$ bezeichnet den Winkel zwischen den Zerfallsebenen.

$$\epsilon_0(p_Z) = \frac{1}{M_Z}\begin{pmatrix} p \\ E_Z \sin\Theta \\ 0 \\ E_Z \cos\Theta \end{pmatrix} \qquad \epsilon_0(p_H) = \frac{1}{M_H}\begin{pmatrix} p \\ -E_H \sin\Theta \\ 0 \\ -E_H \cos\Theta \end{pmatrix}$$

$$\epsilon_+(p_Z) = -\frac{e^{-i\phi}}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ \cos\Theta \\ i \\ -\sin\Theta \end{pmatrix} \qquad \epsilon_-(p_Z) = \frac{e^{i\phi}}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ \cos\Theta \\ -i \\ -\sin\Theta \end{pmatrix}.$$

Für die Definition der Winkel siehe auch Abb. 3.2. $\epsilon_\pm$ erhält man durch die Konvention $\epsilon_\pm = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}(\epsilon_x \pm i\epsilon_y)$. Man sieht unmittelbar, daß aus dieser Definition

$$\epsilon^*_\pm = -\epsilon_\mp$$

folgt. Das Ruhesystem, in dem der Zerfall des H berechnet wird, erhält man durch eine Rotation um die z'-Achse und die x'-Achse um jeweils π, so daß:

$$\epsilon_\pm(p_H) = -\epsilon_\mp(p_Z)$$

gilt.

E.2 Kinematik der Zerfälle

Beide Zerfälle sind im Ruhesystem des jeweiligen Mutterteilchens Z oder H angegeben, derart daß die $+z$-Achse in die Richtung der Bewegung des Teilchens vor dem Lorenztboost zeigt. Der Impuls und Polarisationsvektoren nehmen demnach für beide Teilchen die gleiche Gestalt an

$$p = \begin{pmatrix} E' \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \epsilon_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \epsilon_\pm = 1/\sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 \\ \mp 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix},$$

wobei E' die Energie im Ruhesystem, also für ein Teilchen auf der Massenschale $E' = M$, ist. Für die Zerfallsprodukte schreiben wir folgende Impulse

$$p_\pm = \begin{pmatrix} E_f \\ \pm p_f \sin\theta_f \cos\phi_f \\ \pm p_f \sin\theta_f \sin\phi_f \\ \pm p_f \cos\theta_f \end{pmatrix}$$

wobei wir stets das obere Vorzeichen für das Fermion, das untere für das Antifermion verwendet haben. Handelt es sich um die Zerfallsprodukte von a bzw. b, werden die Winkel θ_a, ϕ_a bzw. θ_b ϕ_b verwendet. Tatsächlich meßbar sind nur die Winkel $\phi_a^* = \phi_a + \phi$ bzw. $\phi_b^* = \phi_b + \phi$, als Winkel zwischen Produktionsebene und Zerfallsebene des Teilchens a bzw. b.

Anhang F

Spindichtematrizen

F.1 Spindichtematrizen der Produktion

Die Spindichtematrix (3.8) der Produktion[1] $e^+e^- \to Z^* \to ab$

$$\begin{aligned} & P_{\lambda_a,\lambda_b,\lambda'_a,\lambda'_b} \\ & \quad = \frac{G_F M_Z^2}{2\sqrt{2}} \frac{s}{2} e^{-i(\lambda-\lambda')\phi} \sum_{m=\pm 1} [(v_e^2 + a_e^2) - 2 v_e a_e m] d^1_{m\lambda}(\Theta) d^1_{m\lambda'}(\Theta) \Gamma^{\lambda_a \lambda_b} \Gamma^{*\lambda'_a \lambda'_b} \\ & \quad = \frac{G_F M_Z^2}{2\sqrt{2}} \frac{s}{2} M_{\lambda,\lambda'} \Gamma^{\lambda_a \lambda_b} \Gamma^{*\lambda'_a \lambda'_b} \end{aligned}$$

läßt sich in ihren Winkelabhängigkeiten als eine Matrix $M_{\lambda,\lambda'}$ darstellen, die nur von der Differenz der Helizitäten $\lambda = \lambda_a - \lambda_b$ bzw. $\lambda' = \lambda'_a - \lambda'_b$ abhängig ist. Für unpolarisierte Strahlen - - d.h. wir haben den Leptontensor (3.1) verwendet – erhalten wir für $M_{\lambda,\lambda'}$:

$$\begin{aligned} M_{0,0} &= (v_e^2 + a_e^2) \sin^2 \Theta \\ M_{\pm 1,\pm 1} &= \frac{1}{2}(v_e^2 + a_e^2)(1 + \cos^2 \Theta) \mp 2 v_e a_e \cos \Theta \\ M_{0,\pm 1} &= \mp \frac{e^{\mp i\phi}}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2}(v_e^2 + a_e^2) \sin 2\Theta \mp 2 v_e a_e \sin \Theta \right) = M^*_{\pm 1,0} \\ M_{1,-1} &= \frac{e^{2i\phi}}{2}(v_e^2 + a_e^2) \sin^2 \Theta = M^*_{-1,1} \end{aligned}$$

Für den Wirkungsquerschnitt der Produktion benötigt man nur die Summe über die Diagonalterme $M_{\lambda,\lambda}$, wohingegen für jeden Zerfall noch entsprechende Zerfallsmatrixelemente an die nichtdiagonalen Terme geheftet werden.

[1] Wir folgen hier vollständig der Notation von Kapitel 3.

F.2 Spindichtematrizen der Zerfälle

Die Zerfallsmatrizen sind in der Notation $B_{\lambda_b\lambda'_b}$,

$$B^{S_b}_{\lambda_b,\lambda'_b} = e^{i(\lambda_b-\lambda'_b)\phi_b}\sum_{\lambda^\star_b} d^{S_b}_{\lambda_b\lambda^\star_b}(\theta_b)d^{S_b}_{\lambda'_b\lambda^\star_b}(\theta_b)b^{\lambda^\star_b}$$

mit der Helizität λ_b des Teilchens b und dem polaren und azimutalen Winkel θ_b und ϕ_b der Zerfallsprodukte im Ruhesystem des Mutterteilchens angegeben. Dabei bezeichnet θ_b den Winkel zwischen der ursprünglichen Flugachse $-z'$ von b und derjenigen des Teilchens b_1. ϕ_b ist im rechtshändigen Sinn um $-z'$ definiert[2]. $b^{\lambda^\star_b}$ bezeichnet eine Abkürzung für Helizitätsamplituden des Teilchens b – siehe hierzu (3.10).
Eine Analyse der Winkelbeiträge des Zerfalls von H stellt keine Information über den Spin des Teilchens zur Verfügung und hat deswegen keine Relevanz für diese Arbeit. Gerade um zu zeigen, daß ein Teilchen mit höherem Spin ein Spin-0-Teilchen imitieren kann, indem es isotrop zerfällt, sollen die Spindichtematrizen des Zerfalls für $S \geq 2$ hier angeführt werden.

Spin 0

$$B^0_{00} = \sin^2\theta_b\frac{b^0}{2} + (1+\cos^2\theta_b)\frac{b^0}{2}$$

Spin 1

$$\begin{aligned}
B_{0,0} &= (1+\cos^2\theta_b)\frac{b^0}{2} - \sin^2\theta_b\frac{b^0-(b^+ + b^-)}{2}\\
B_{\pm,\pm} &= \frac{1}{2}\left(\sin^2\theta_b b^0 + (1+\cos^2\theta_b)\frac{b^+ + b^-}{2} \pm 2\cos\theta_b\frac{b^+ - b^-}{2}\right)\\
B_{0,\pm} &= \pm\frac{e^{\mp i\phi_b}}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}\sin 2\theta_b\left(\frac{b^+ + b^-}{2} - b^0\right) \pm \sin\theta_b\frac{b^+ - b^-}{2}\right) = B^*_{\pm,0}\\
B_{+,-} &= \frac{e^{2i\phi_b}}{2}\sin^2\theta_b\left(\frac{b^+ + b^-}{2} - b^0\right) = B^*_{-,+}
\end{aligned}$$

[2]Es ist zu beachten, daß hier $B^{S_b}_{\lambda_b,\lambda'_b}$ angegeben ist, und für das volle Matrixelement (3.12) $B^{S_b}_{-\lambda_b,-\lambda'_b}$ benötigt wird. Die Definition der Winkel bleibt stets dieselbe.

Spin 2

$$
\begin{aligned}
B^2_{00} &= \sin^4\theta_b \frac{3}{8}\left(6b^0 - 4(b^1+b^{-1}) + (b^2+b^{-2})\right) \\
&\quad + \sin^2\theta_b \frac{1}{2}\left(-5b^0 + 3(b^1+b^{-1})\right) + (1+\cos^2\theta_b)\frac{b^0}{2} \\
B^2_{\pm1\pm1} &= \sin^4\theta_b \frac{1}{4}\left(-6b^0 + 4(b^1+b^{-1}) - (b^2+b^{-2})\right) \\
&\quad \mp \sin^2\theta_b \cos\theta_b \frac{1}{2}\left(2(b^1-b^{-1}) - (b^2-b^{-2})\right) \\
&\quad + \sin^2\theta_b \frac{1}{2}\left(3b^0 - 2(b^1+b^{-1}) + (b^2+b^{-2})\right) \\
&\quad + (1+\cos^2\theta_b)\frac{1}{4}(b^1+b^{-1}) \pm \cos\theta_b \frac{1}{2}(b^1-b^{-1}) \\
B^2_{\pm10} &= \pm\sqrt{\frac{3}{2}} e^{\pm i\phi_b}\left[\sin^2\theta_b \sin 2\theta_b \frac{1}{8}\left(6b^0 - 4(b^1+b^{-1}) + (b^2+b^{-2})\right)\right. \\
&\quad \mp \sin^3\theta_b \frac{1}{4}\left(2(b^1-b^{-1}) - (b^2-b^{-2})\right) \\
&\quad - \sin 2\theta_b \frac{1}{4}\left(2b^0 - (b^1+b^{-1})\right) \\
&\quad \left. \pm \sin\theta_b \frac{1}{2}(b^1-b^{-1})\right] = B^{2*}_{0\pm1} \\
B^2_{1-1} &= \frac{e^{2i\phi_b}}{4}\left[\sin^4\theta_b\left(6b^0 - 4(b^1+b^{-1}) + (b^2+b^{-2})\right)\right. \\
&\quad \left. - \sin^2\theta_b\left(2b^0 - (b^1+b^{-1})\right)\right] = B^{2*}_{-11} \\
B^2_{\pm2\pm2} &= \sin^4\theta_b \frac{1}{16}\left(6b^0 - 4(b^1+b^{-1}) + (b^2+b^{-2})\right) \\
&\quad \pm \sin^2\theta_b \cos\theta_b \frac{1}{4}\left(2(b^1-b^{-1}) - (b^2-b^{-2})\right) \\
&\quad + \sin^2\theta_b \frac{1}{4}\left(2(b^1+b^{-1}) - (b^2+b^{-2})\right) \pm \cos\theta_b \frac{1}{2}(b^2-b^{-2}) \\
B^2_{\pm2\pm1} &= e^{\pm i\phi_b}\left[\mp \sin^2\theta_b \sin 2\theta_b \frac{1}{16}\left(6b^0 - 4(b^1+b^{-1}) + (b^2+b^{-2})\right)\right. \\
&\quad + \sin^3\theta_b \frac{3}{8}\left(2(b^1-b^{-1}) - (b^2-b^{-2})\right) \\
&\quad \mp \sin 2\theta_b \frac{1}{4}\left((b^1+b^{-1}) - (b^2+b^{-2})\right) \\
&\quad \left. - \sin\theta_b \frac{1}{2}\left((b^1-b^{-1}) - (b^2-b^{-2})\right)\right] = B^{2*}_{\pm1\pm2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B^2_{\pm 20} &= \sqrt{\frac{3}{2}} e^{\pm 2i\phi_b} \Big[-\sin^4\theta_b \frac{1}{8}\left(6b^0 - 4(b^1 + b^{-1}) + (b^2 + b^{-2})\right) \\
&\quad \mp \sin^2\theta_b \cos\theta_b \frac{1}{4}\left(2(b^1 - b^{-1}) - (b^2 - b^{-2})\right) \\
&\quad + \sin^2\theta_b \frac{1}{4}\left(2b^0 - 2(b^1 + b^{-1}) + (b^2 + b^{-2})\right)\Big] = B^{2*}_{0\pm 2} \\
B^2_{\pm 2\mp 1} &= e^{\pm 3i\phi_b} \Big(\pm \sin^2\theta_b \sin 2\theta_b \frac{1}{16}\left(6b^0 - 4(b^1 + b^{-1}) + (b^2 + b^{-2})\right) \\
&\quad - \sin^3\theta_b \frac{1}{8}\left(2(b^1 - b^{-1}) - (b^2 - b^{-2})\right)\Big) = B^{2*}_{-12} \\
B^2_{2-2} &= e^{4i\phi_b} \sin^4\theta_b \frac{1}{16}\left(6b^0 - 4(b^1 + b^{-1}) + (b^2 + b^{-2})\right) = B^{2*}_{-22}
\end{aligned}
$$

Ist in einem Modell $b^0 = b^{\pm 1} = b^{\pm 2}$ realisiert, so führt dies zu

$$
B_{\lambda_b \lambda'_b} = \begin{cases} b^0 & \text{für} \quad \lambda_b = \lambda'_b = -1, +1, 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}
$$

Fügt man dieses spezielle Ergebnis in (3.12), so erhält man für alle drei Teilchen mit Spin 0, Spin 1, Spin 2 den gleichen, ununterscheidbaren isotropen Zerfall.

Ein besonderer Spin-1-Fall

Das Matrixelement des Standardmodell-Prozesses $Z \to f\bar{f}$ ist durch

$$
\mathcal{M} = -i \frac{g}{4\cos\Theta_W} \bar{u}\gamma^\alpha (v_f - a_f\gamma_5) v \tag{F.1}
$$

gegeben. v_f und a_f sind hierbei die Vektor- und Axialvektorkopplungen des Fermions an das Z-Boson, die entsprechenden Werte findet man in Anhang A. Dieses Z wird kinematisch gesehen mit dem allgemeinen Teilchen a aus Kapitel 3 identifiziert. Die Helizitätsamplituden $a^{\lambda^\star_a}$ lassen sich mit (D.1) berechnen

$$
\begin{aligned}
a^0 &= 2g_2 v_f^2 m_f^2 \\
a^+ &= 2g_2 (v_f E_f - a_f p_f)^2 \\
a^- &= 2g_2 (v_f E_f + a_f p_f)^2
\end{aligned}
$$

Dabei wurde die die Notation (3.10) der Helizitätsamplituden und die Abkürzung $g_2 = g^2/(4\cos\Theta_W)^2 = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \frac{M_Z^2}{2}$ verwendet. Da der Spin durch $S_a = S_Z = 1$ gegeben ist, kann man bei den Spindichtematrizen $A^{S_a}_{\lambda_a \lambda'_a}$ den Index S_a weglassen, und mit $m_f = 0$ und damit

$E_f = p_f$ erhält man die Spindichtematrizen $A_{\lambda_a \lambda'_a}$ des Prozesses $Z \to f\bar{f}$

$$
\begin{aligned}
A_{0,0} &= 2p_f^2 g_2 (v_f^2 + a_f^2) \sin^2 \theta_a \\
A_{\pm,\pm} &= 2p_f^2 g_2 \left(\frac{1}{2}(v_f^2 + a_f^2)(1 + \cos^2 \theta_a) \mp 2 v_f a_f \cos \theta_a \right) \\
A_{0,\pm} &= \pm 2p_f^2 g_2 \frac{e^{\mp i\phi_a}}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2}(v_f^2 + a_f^2) \right. \\
&\qquad \left. \sin 2\theta_a \mp 2 v_f a_f \sin \theta_a \right) = A^*_{\pm,0} \\
A_{+,-} &= 2p_f^2 g_2 \frac{e^{2i\phi_a}}{2} (v_f^2 + a_f^2) \sin^2 \theta_a = A^*_{-,+}
\end{aligned}
$$

Anhang G

Vertexfaktoren der Zerfälle

G.1 Spin 1

Die Herleitung des Spin-1-Vertexfaktors folgt im Wesentlichen [17].
Der Vertex Spin1 $\to f\bar{f}'$ wird durch folgendes Matrixelement beschrieben:

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \epsilon^{\beta}(q_f)\mathcal{M}_{\beta}(q_f,k_f) \\ \text{mit} \qquad \mathcal{M}^{\beta}(q_f,k_f) &= \bar{u}(p_+)V^{\beta}(q_f,k_f)u(-p_-). \end{aligned}$$

Macht man einen allgemeinen Ansatz

$$V^{\beta}(q,k) = a_1\gamma^{\beta} + a_2\gamma^{\beta}\gamma_5 + ia_3\sigma^{\beta\nu}q_{\nu} + ia_4\sigma^{\beta\nu}q_{\nu}\gamma_5 + ia_5\sigma^{\beta\nu}k_{\nu} + ia_6\sigma^{\beta\nu}k_{\nu}\gamma_5$$

mit

$$\begin{aligned} q_f &= p_+ + p_- \\ k_f &= p_+ - p_- \end{aligned}$$

so erhält man mit verallgemeinerten Gordon-Zerlegungen

$$\begin{aligned} \bar{u}(p_+)\xi k^{\beta}u(-p_-) &= \bar{u}(p_+)\left[(\xi_+ + \xi_-)m\gamma^{\beta} - i\xi\sigma^{\beta\nu}q_{\nu}\right]u(-p_-) \\ \bar{u}(p_+)\xi q^{\beta}u(-p_-) &= \bar{u}(p_+)\left[(\xi_+ - \xi_-)m\gamma^{\beta}\gamma_5 - i\xi\sigma^{\beta\nu}k_{\nu}\right]u(-p_-), \end{aligned}$$

wobei

$$\xi = \xi_+\frac{(1+\gamma_5)}{2} + \xi_-\frac{(1-\gamma_5)}{2}$$

mit beliebigen ξ_+ und ξ_- ist, das folgende Ergebnis:

$$V^{\beta}(q,k) = (c_1 - c_2\gamma_5)\gamma^{\beta} + (c_3 + c_4\gamma_5)k^{\beta} + (c_5 + c_6\gamma_5)q^{\beta},$$

wobei die folgenden Ersetzungen gemacht wurden:

$$c_1 = a_1 + 2ma_3 \qquad c_3 = -a_3 \qquad c_5 = -a_5$$
$$c_2 = a_2 + 2ma_6 \qquad c_4 = -a_4 \qquad c_6 = -a_6.$$

Koppeln an das Spin-1-Teilchen zwei gleiche Fermionen $f = f'$, so folgt aus der Hermitizität des Vertexoperators,

$$\mathcal{M}^{\beta}(q,k) = \mathcal{M}^{\beta *}(-q,k),$$

außerdem

$$a_4 = 0 \qquad a_5 = 0$$

Verwendet man darüberhinaus die Transversalität des Polarisationsvektors eines on-shell-Teilchens

$$q_{\beta}\epsilon^{\beta}(q) = 0,$$

so folgt

$$c_6 = 0.$$

Somit läßt sich der Vertexfaktor schreiben als

$$V^{\beta}(q,k) = (a_1 - a_2\gamma_5)\gamma^{\beta} + ia_3\sigma^{\beta\nu}q_{\nu}$$

bzw.

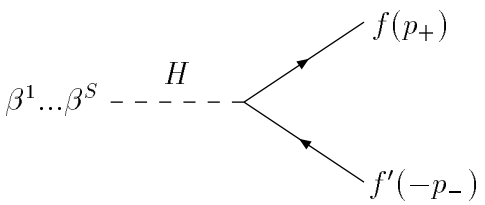
$$V^{\beta}(q,k) = (c_1 - c_2\gamma_5)\gamma^{\beta} + c_3k^{\beta}.$$

Helizitätsamplituden

Setzt man $m_f = 0$, so erhält man mit diesem Vertexfaktor die analog zu (4.10) definierten Formfaktoren $b^{\lambda_b^*}$:

$$b^0 = 32p_f^4c_3^2 \qquad b^1 = 8p_f^2(c_1 - c_2)^2 \qquad b^{-1} = 8p_f^2(c_1 + c_2)^2$$

Abbildung G.1: Der Vertex Spin $S \to f\bar{f}'$



G.2 Spin 2

Die Erweiterung auf Spin2 $\to f\bar{f}'$ ist wenig kompliziert. Erinnert man sich, daß der Polarisationstensor $\epsilon^{\beta_1\beta_2}(q)$ spurfrei und symmetrisch ist (Kap. 4), so können weder

$$\{\gamma^{\beta_1}, \gamma^{\beta_2}\} = 2g^{\beta_1\beta_2} \qquad \text{noch} \qquad \sigma^{\beta_1\beta_2} = \frac{i}{2}[\gamma^{\beta_1}, \gamma^{\beta_2}]$$

auftreten. Man erhält nach einer einfachen Rechnung den Spin-2-Zerfallsvertex

$$V^{\beta_1\beta_2} = (c_1 - c_2\gamma_5)(\gamma^{\beta_1}k^{\beta_2} + \gamma^{\beta_2}k^{\beta_1}) + (c_3 - c_4\gamma_5)k^{\beta_1}k^{\beta_2}.$$

Helizitätsamplituden

Für Spin 2 lauten die Helizitätsamplituden

$$\begin{array}{lllllllll} b^0 & = & \frac{256}{3}p_f^6(c_3^2 + c_4^2) & b^1 & = & 64p_f^2(c_1 + c_2)^2 & b^{-1} & = & 64p_f^2(c_1 - c_2)^2 \\ & & & b^2 & = & 0 & b^{-2} & = & 0, \end{array}$$

wobei auch hier $m_f = 0$ gesetzt wurde.

Anhang H

Polarisierte Strahlen

In der gesamten vorliegenden Arbeit war es ausreichend, unpolarisierte Strahlen zu verwenden. Der Vollständigkeit halber gehen wir hier kurz auf polarisierte Strahlen ein. Betrachtet man das Quadrat des Matrixelements des Prozesses $e^+e^- \to Z^*$

$$|\mathcal{M}|^2 = L^\mu L^{*\mu'} \frac{1}{(\,q^2 - M_{Z^*}^2\,)^2}\, \epsilon_\mu^*(\lambda_{Z^*})\epsilon_{\mu'}(\lambda'_{Z^*}),$$

so läßt sich ein Leptontensor

$$\mathcal{L}^{\mu\mu'} = L^\mu L^{*\mu'}$$

schreiben, wobei der Leptonstrom durch

$$L^\mu = \frac{G_F M_Z^2}{2\sqrt{2}} \bar{v}(p_2, s_2)\gamma^\mu(v_e - a_e\gamma_5)u(p_1, s_1).$$

gegeben ist und p_1, p_2 die Impulse der einlaufenden Teilchen sind und s_1, s_2 die entsprechenden Spinvektoren. Verwendet man polarisierte Strahlen, so erweisen sich die Formeln [18]

$$\begin{aligned} u(p_i, s_i)\bar{u}(p_i, s_i) &= (\not{p}_i + m)\frac{1 + \gamma_5 \not{s}_i}{2} \\ v(p_i, s_i)\bar{v}(p_i, s_i) &= (\not{p}_i - m)\frac{1 + \gamma_5 \not{s}_i}{2} \end{aligned}$$

mit den Spinvektoren s_i der einlaufen Fermionen, als nützlich. Für die Spinvektoren gelten die bekannten Bedingungen für Polarisationsvektoren[1]

$$\begin{aligned} s_i^2 &= -1 \\ s_i \cdot p_i &= 0 \end{aligned}$$

mit den Teilchenindizes $i = 1, 2$.

[1] Siehe zum Beispiel [6].

H.1 Longitudinale Polarisation

Da masselose Teilchen nicht longitudinal polarisiert sein können, nimmt man zunächst Teilchen mit Masse an und schreibt für die Impulse der einlaufenden Teilchen 1, 2

$$p_1 = \begin{pmatrix} m_e\gamma_e \\ 0 \\ 0 \\ m_e\gamma_e\beta_e \end{pmatrix} \qquad p_2 = \begin{pmatrix} m_e\gamma_e \\ 0 \\ 0 \\ -m_e\gamma_e\beta_e \end{pmatrix},$$

mit den üblichen kinematischen Größen $\beta_e = \frac{|\vec{p_e}|}{E_e}$ und $\gamma_e = (1-\beta_e^2)^{-\frac{1}{2}}$. Für deren Spinvektoren, parallel in $\pm z$-Richtung ausgerichtet, enthält man entsprechend

$$s_1 = \lambda_{e^-} \begin{pmatrix} \beta_e\gamma_e \\ 0 \\ 0 \\ \gamma_e \end{pmatrix} \qquad s_2 = \lambda_{e^+} \begin{pmatrix} \beta_e\gamma_e \\ 0 \\ 0 \\ -\gamma_e \end{pmatrix}.$$

Der Grenzübergang $m \to 0$ wird erst am Ende vollzogen, d.h. nach Berechnen der Spur und aller Skalarprodukte. λ_{e^+}, λ_{e^-} bezeichnen hier die Richtung der jeweiligen Helizitäten, es gilt vom Betrage her $|\lambda_{e_\pm}| = 1$.
Der Leptontensor läßt sich damit in folgende Form bringen

$$\mathcal{L}^{\mu\mu'} = \frac{G_F M_Z^2}{2\sqrt{2}} \frac{s}{2} (1 - \lambda_{e^+}\lambda_{e^-}) \Big[\delta_\perp^{\mu\mu'} \left[(v_e^2 + a_e^2) + 2 v_e a_e \lambda_{e^+} \right] + i\varepsilon_\perp^{\mu\mu'} \left[(v_e^2 + a_e^2)\lambda_{e^+} + 2 v_e a_e \right] \Big]_{\mu,\mu'=1,2},$$

wobei die Symbole (3.2) verwendet wurden. Haben beide Teilchen die gleiche Helizität, verschwindet der Leptontensor

$$\lambda_{e^+} = \lambda_{e^-} \quad \to \quad \mathcal{L}^{\mu\mu'} = 0$$

Dies spiegelt die Tatsache wider, daß für verschwindende Leptonmassen die Helizität gleich der Chiralität ist, und somit der Strom $J^\mu = \bar{e}\gamma^\mu e = \bar{e}_R\gamma^\mu e_R + \bar{e}_L\gamma^\mu e_L$ verschwindet.
Stehen die Spins der Leptonen parallel

$$\lambda_{e^+} = -\lambda_{e^-},$$

so ergibt sich folgender Leptontensor

$$\mathcal{L}^{\mu\mu'} = \frac{G_F M_Z^2}{2\sqrt{2}} s (v_e - \lambda_{e^-} a_e)^2 [\delta^{\mu\mu'} - \lambda_{e^-} i\varepsilon^{\mu\mu'}]_{\mu,\mu'=1,2}$$

Mit der Notation

$$P_{\lambda_a,\lambda_b,\lambda'_a,\lambda'_b} = \frac{G_F M_Z^2}{2\sqrt{2}} \frac{s}{2} M_{\lambda,\lambda'} \Gamma^{\lambda_a\lambda_b} \Gamma^{*\lambda'_a\lambda'_b}$$

errechnet man für die Winkelabhängigkeiten der Spindichtematrizen

$$\begin{aligned}
M_{0,0} &= (v_e - \lambda_{e^-} a_e)^2 2\sin^2\Theta \\
M_{1,1} &= (v_e - \lambda_{e^-} a_e)^2 \left((1+\cos^2\Theta) + 2\lambda_{e^-}\cos\Theta\right) \\
M_{-1,-1} &= (v_e - \lambda_{e^-} a_e)^2 \left((1+\cos^2\Theta) - 2\lambda_{e^-}\cos\Theta\right) \\
M_{0,1} &= -\lambda_{e^-}\frac{e^{-i\phi}}{\sqrt{2}}(v_e - \lambda_{e^-} a_e)^2 \left(2\sin\Theta + \lambda_{e^-}\sin 2\Theta\right) = M^*_{1,0} \\
M_{0,-1} &= -\lambda_{e^-}\frac{e^{i\phi}}{\sqrt{2}}(v_e - \lambda_{e^-} a_e)^2 \left(2\sin\Theta - \lambda_{e^-}\sin 2\Theta\right) = M^*_{-1,0} \\
M_{1,-1} &= e^{2i\phi}(v_e - \lambda_{e^-} a_e)^2 \sin^2\Theta = M^*_{-1,1}.
\end{aligned}$$

H.2 Transversale Polarisation

Anhand von transversaler Polarisation läßt sich am Besten die tatsächliche Bedeutung der Funktion D erläutern. Betrachten wir einen Strom

$$J_m = D^{*J}_{m\lambda}(\phi_e, \Theta, -\phi)\Gamma^{\lambda_a \lambda_b},$$

so ist ϕ_e der Winkel zwischen dem Gesamt-Polarisationsvektor der einlaufenden Teilchen und der Produktionebene und ϕ der Winkel zwischen der Produktionsebene und dem willkürlich gewählten ϵ_x-Vektor der auslaufenden Teilchen. Die jeweiligen Rotationsachsen sind z bzw. z' derart, daß der Polarisationsvektor der einlaufenden Teilchen, Produktionsebene, Polarisationsvektor der auslaufenden Teilchen in dieser Reihenfolge rechtshändig auseinander hervorgehen. m ist die Gesamthelizität des Anfangszustandes mit der Projektionsachse z, λ ist die Gesamthelizität des Endzustandes mit der Projektionsachse z', wobei Θ den Winkel zwischen z-Achse und z'-Achse bezeichnet – siehe hierzu auch Abb. 3.2 bzw. 3.3. So wird auch klar, warum bei longitudinaler Polarisation und bei unpolarisierten Strahlen ϕ_e in der Helizitätsanalyse verschwindet, und warum ϕ in einem Wirkungsquerschnitt der Produktion ohne Zerfall nicht beiträgt.
Wählt man als Polarisationsachse die x-Achse, so schreibt man folgende Polarisationsvektoren

$$s_1 = \pm\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad s_2 = \pm\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und man erhält den Leptontensor

$$\mathcal{L}^{\mu\mu'} = \frac{G_F M_Z^2}{2\sqrt{2}} \frac{s}{2} \Big[(v_e^2 + a_e^2)\delta_\perp^{\mu\mu'} + 2iv_e a_e \varepsilon_\perp^{\mu\mu'} \mp (v_e^2 - a_e^2)(\delta^{1\mu}\delta^{1\mu'} - \delta^{2\mu}\delta^{2\mu'}) \Big]_{\mu\mu'=1,2} \tag{H.1}$$

mit dem oberen Vorzeichen für parallele Spins, dem unteren Vorzeichen für antiparallele – es ergibt sich also nur eine Abhängigkeit von der relativen Spinausrichtung. Somit erhält man die folgenden Winkelverteilungen der Spindichtematrizen:

$$\begin{aligned}
M_{0,0} &= (v_e^2 + a_e^2)\sin^2\Theta \mp (v_e^2 - a_e^2)\cos(2\phi_e)\sin^2\Theta \\
M_{1,1} &= \frac{1}{2}(v_e^2 + a_e^2)(1 + \cos^2\Theta) - 2v_e a_e \cos\Theta \pm \frac{1}{2}(v_e^2 - a_e^2)\cos(2\phi_e)\sin^2\Theta \\
M_{-1,-1} &= \frac{1}{2}(v_e^2 + a_e^2)(1 + \cos^2\Theta) + 2v_e a_e \cos\Theta \pm \frac{1}{2}(v_e^2 - a_e^2)\cos(2\phi_e)\sin^2\Theta \\
M_{0,1} &= \frac{e^{-i\phi}}{\sqrt{2}} \Bigg(-(v_e^2 + a_e^2)\frac{1}{2}\sin 2\Theta + 2v_e a_e \sin\Theta \\
&\quad \pm (v_e^2 - a_e^2)\left(\frac{1}{2}\cos(2\phi_e)\sin 2\Theta + i\,\sin(2\phi_e)\sin\Theta \right) \Bigg) = M_{1,0}^* \\
M_{0,-1} &= \frac{e^{i\phi}}{\sqrt{2}} \Bigg((v_e^2 + a_e^2)\frac{1}{2}\sin 2\Theta + 2v_e a_e \sin\Theta \\
&\quad \mp (v_e^2 - a_e^2)\left(\frac{1}{2}\cos(2\phi_e)\sin 2\Theta - i\,\sin(2\phi_e)\sin\Theta \right) \Bigg) = M_{-1,0}^* \\
M_{1,-1} &= \frac{e^{2i\phi}}{2} \Big((v_e^2 + a_e^2)\sin^2\Theta \\
&\quad \pm (v_e^2 - a_e^2)\left(\cos(2\phi_e)(1 + \cos^2\Theta - 2i\,\sin(2\phi_e)\cos\Theta \right) \Big) = M_{-1,1}^*
\end{aligned}$$

Die Produktionsebene geht durch eine Rotation um ϕ_e aus der $x-z$-Ebene hervor, so daß man für die Impulse der Teilchen a, b

$$p_a = \begin{pmatrix} E_a \\ p\sin\Theta\cos\phi_e \\ p\sin\Theta\sin\phi_e \\ p\cos\Theta \end{pmatrix} \qquad p_b = \begin{pmatrix} E_b \\ -p\sin\Theta\cos\phi_e \\ -p\sin\Theta\sin\phi_e \\ -p\cos\Theta \end{pmatrix}$$

erhält, und für deren Polarisationsvektoren

$$\epsilon_0(a) = \frac{1}{M_Z}\begin{pmatrix} p \\ E_Z \sin\Theta\cos\phi_e \\ E_Z \sin\Theta\sin\phi_e \\ E_Z\cos\Theta \end{pmatrix} \qquad \epsilon_+(a) = -\frac{e^{-i\phi}}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ \cos\Theta\cos\phi_e - i\sin\phi_e \\ \cos\Theta\sin\phi_e + i\cos\phi_e \\ -\sin\Theta \end{pmatrix}$$

$$\epsilon_0(b) = \frac{1}{M_H}\begin{pmatrix} p \\ -E_H \sin\Theta\cos\phi_e \\ -E_H \sin\Theta\sin\phi_e \\ -E_H\cos\Theta \end{pmatrix} \qquad \epsilon_-(a) = \frac{e^{i\phi}}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ \cos\Theta\cos\phi_e + i\sin\phi_e \\ \cos\Theta\sin\phi_e - i\cos\phi_e \\ -\sin\Theta \end{pmatrix}$$

mit ϕ als Winkel zwischen Produktionsebene und ϵ_x.
Bei der Helizitätsanalyse vermeidet obige Koordinatenwahl willkürliche azimutale Winkel, wohingegen ein Matrixelement, berechnet mit Feynmanregeln unnötig kompliziert wird, wenn man nicht die $x-z$-Ebene als Produktionsebene wählt. Die dazu gedrehten Polarisationsvektoren haben folgende Form

$$s_1 = \pm\begin{pmatrix} 0 \\ \cos\phi_e \\ -\sin\phi_e \\ 0 \end{pmatrix} \qquad s_2 = \pm\begin{pmatrix} 0 \\ \cos\phi_e \\ -\sin\phi_e \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Mithilfe dieser erhält man einen allgemeinen Leptontensor für transversale Polarisation

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{\mu\mu'} &= \frac{G_F M_Z^2}{2\sqrt{2}}\frac{s}{2}\Big[(v_e^2+a_e^2)\delta_\perp^{\mu\mu'} + 2iv_e a_e \varepsilon\delta_\perp^{\mu\mu'} \mp (v_e^2-a_e^2)\Big(\cos(2\phi_e)(\delta^{1\mu}\delta^{1\mu'} - \delta^{2\mu}\delta^{2\mu'}) \\ &\qquad - \sin(2\phi_e)(\delta^{1\mu}\delta^{1\mu'} + \delta^{2\mu}\delta^{2\mu'})\Big)\Big]_{\mu\mu'=1,2},\end{aligned}$$

wobei man mit $\phi_e = 0$ wieder (H.1) erhält.

Literaturverzeichnis

[1] R. Barate et al. (ALEPH Collaboration), Phys. Lett. **B495** (2000) 1; M. Acciarri et al. (L3 Collaboration), Phys. Lett. **B495** (2000) 18; P. Igo-Kemenes, LEPC presentation, Nov. 2000, `http://lephiggs.web.cern.ch/LEPHIGGS/talks/index.html`.

[2] M. Carena et al, *Report of the Tevatron Higgs Working Group*, FERMILAB-CONF-00-279-T, [hep-ph/0010338].

[3] ATLAS Collaboration, *Detector and physics performance Technical Design Report*, Volumes 1 & 2, CERN-LHCC-99-14 & 15 (1999); CMS Collaboration, *Technical Design Report*, CERN-LHCC-97-10 (1997).

[4] M. Spira and P.M. Zerwas, *Electroweak Symmetry Breaking and Higgs Physics*, Lecture Notes in Physics 512, Springer Verlag, Heidelberg (1997)

[5] K. Huang, *Quarks Leptons & Gauge Fields*, World Scientific Publishing, Singapore (1982); E.S. Abers and B.W. Lee, *Gauge Theories*, Phys. Rept. **9** (1973), 1

[6] O. Nachtmann, *Phänomene und Konzepte der Elementarteilchenphysik*, Vieweg Verlag, Braunschweig/Wiesbaden(1986)

[7] G. Kramer and T. F. Walsh, Z. Physik **263** (1973) 361.

[8] M. Jacob and G.C. Wick, *On the General Theory of Collisions for Particles with Spin*, Ann. of Phys. **7** (1959), 404

[9] E.P. Wigner, *Group Theory*, Academic Press, New York and London (1959), S.156, Gl. (15.8)

[10] K. Hagiwara, R.D. Peccei and D. Zeppenfeld, *Probing the Weak Boson Sector in* $e^+e^- \to W^+W^-$. Nucl. Phys. B **282** (1987) 253

[11] M. Kramer, J. Kühn, M. L. Stong and P. M. Zerwas, Z. Phys. **C64** (1994) 21.

[12] K. Hagiwara, S. Ishihara, J. Kamoshita and B. A. Kniehl, Eur. Phys. J. **C14** (2000) 457; B. Grzadkowski, J.F. Gunion and J. Pliszka, Nucl. Phys. **B583** (2000) 49; T. Han and J. Jiang, MADPH-00-1201, [hep-ph/0011271].

[13] J. Ellis, M. K. Gaillard and D. V. Nanopoulos, Nucl. Phys. **B106** (1976) 292; B. L. Ioffe and V. A. Khoze, Sov. J. Part. Nucl. **9** (1978) 50; B. W. Lee, C. Quigg and H. B. Thacker, Phys. Rev. **D16** (1977) 1519.

[14] V. Barger, K. Cheung, A. Djouadi, B. A. Kniehl and P. M. Zerwas, Phys. Rev. **D49** (1994) 79.

[15] Particle Data Group (PDG), *Review of Particle Physics*, Eur.Phys. J. **C15** (2000), S.208

[16] C. Itzykson, J.-B. Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill, Singapore (1985), Gl. (3-199)

[17] M. Spira *Quarks und Leptonen: Konsequenzen einer Substruktur im TeV-Bereich*, Diplomarbeit, Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen (1989)

[18] J.D. Bjorken, S.D. Drell, *Relativistische Quantenfeldtheorie*, BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim, Wien, Zürich (1993), S. 393, Gl. (A.1)

Danksagung

Allen voran gilt mein Dank Prof. Peter Zerwas sowohl für die interessante Aufgabenstellung als auch für die anregenden Diskussionen. Seine Persönlichkeit hat mich sehr beeindruckt.
Für die intensive, herzliche und aufbauende Betreuung, die mir einen guten Einstieg am DESY ermöglichte, danke ich Margarete Mühlleitner. Ihre außergewöhnlichen didaktischen Fähigkeiten halfen mir, strukturiert zu arbeiten.
Für sein offenes Ohr in jeder Situation und für die intensive und gute Zusammenarbeit danke ich David Miller. Von ihm habe ich gelernt, daß schottischer Humor eine Tugend ist.
Für die Klarheit, mit der er es verstand, die Dinge auf den Punkt zu bringen, danke ich Seong Youl Choi. Sein Lachen ist oft über den ganzen Flur zu hören.
Dank an Michael Spira, der sich stets neben vielen anderen auch für mich Zeit nahm, wann immer ich sie brauchte. Sein Rat war stets kompetent.
Ayres Freitas, Benedikt Plümper, Markos Maniatis und Marcus Weber danke ich dafür, daß ich trotz so vieler Fragen immer mit offenen Armen empfangen wurde. Der Raum No.2o7 war für mich in jeder schwierigen Situation ein Ort der Zuflucht.
Nicht zuletzt danke ich all denjenigen, die den Nährboden für diese Arbeit geschaffen haben. Dank an meine Eltern, an meine Brüder, an Stefan, an Ole Nydahl und Dank an die vielen, vielen Freunde und Helfer.

Hiermit versichere ich, die vorliegende Arbeit selbständig verfaßt zu haben und nur die angegebenen Hilfmittel verwendet zu haben.

Birgit Eberle
Hamburg, der 2.2.2oo1